الفصل الثاني

المجموعات

١٠ – مفهوم المجموعة :

يعتبر هذا المفهوم من المفاهيم الرئيسية في الرياضيات المعاصرة وهو من البساطة بحيث يمكن إدراكه بسهولة من خلال كثير من المواقف التي يصادفها كل منا في حياته اليومية فعند الحديث مثلاً عن : فرقة جنود، فوج كشفي ، رتل من السيارات ، حزمة من الأقلام ، طاقة من الأزهار، مجموعة الأشياء التي تحويها محفظتك (قلم ، كتاب ، دفتر ، ممحاة ، مسطرة، مبراة) ، مجموعة نقاط مستقيم ، ندرك في كل موقف من هذه المواقف أننا أمام **شيء** مكوّن من عدة أفراد وقد اصطلح علمياً على تسمية هذا الشيء **مجموعة** (Ensemble , Set) فنقول :

مجموعة جنود ، مجموعة كشافين ، مجموعة سيارات ...

ويعد العالم الألماني كانتور Cantor (١٨٤٥ م – ١٩١٨ م) أول من اعتبر المجموعة مفهوماً أساسياً يتصف بما يلي :

١ – المجموعة كائن رياضي قائم بذاته ، مفهومه يختلف عن مفهوم الأفراد التي تكونه فالحديث مثلاً عن طاقة من الزهر (ولو كانت مؤلفة من زهرة واحدة) يختلف عن حديثنا عن الزهرة الواحدة .

٢ – أفراد المجموعة متمايزة ، أي أنه لا داعي لتكرار أي فرد من

أفرادها فمجموعة أرقام العدد ٣٨٦٣٥ هي ٥ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ولم يذكر الرقم ٣ سوى مرّة واحدة رغم ظهوره مرّتين في العدد المذكور .

٣ – المجموعة معينة تعييناً تاماً بحيث يمكننا أن نقول عن أي شيء إنه فرد من المجموعة أو غريب عنها فقولنا مجموعة الشجعان في بلد ما لا يمثل مجموعة رياضية لأن وصف فرد بالشجاعة يختلف من شخص لآخر. في حين أن قولنا مجموعة الدول الأعضاء في هيئة الأمم المتحدة هي مجموعة رياضية معينة تماماً لأننا نستطيع بعد الرجوع الى سجلات هذه الهيئة أن نقرر فيما إذا كانت دولة ما هي فرد من هذه المجموعة أو ليست فرداً منها .

٤ – ليس للترتيب الذي تورد فيه أفراد المجموعة أي أثر عليها ، فمجموعة الحروف التي تدخل في كلمة عربي هي ب ، ر ، ع ، ي مرتبة بهذا الشكل أو بأي ترتيب آخر .

١١ – عناصر مجموعة :

لقد اصطُلح على تسمية كل فرد من أفراد مجموعة **عنصر** (Element) فيها .

مثال (١) : الحرف ق عنصر في مجموعة حروف كلمة (قمر) .

مثال (٢) : الرقمان ٣ ، ٥ عنصران من عناصر مجموعة أرقام العدد ٣٨٦٥٣

مثال (٣) : عناصر مجموعة رؤوس المسدس ا ب حـ ء هـ ط هي النقاط : ا ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، ط

وسنرمز في غالب الأحيان للمجموعات بحروف كبيرة مثل : س ، ع ، ص ، ج ...

ولعناصر مجموعة بحروف صغيرة مثل : ا ، ب ، حـ ، ... ، س ، ع ، ص ، ..

وسنستخدم الحروف الصغيرة رموزاً للمجموعات عند الضرورة وعدم الالتباس .

١٢ – طرق تعيين مجموعة :

١ – تتعين مجموعة إذا عرفت جميع عناصرها ، ويمكننا عندئذ كتابة المجموعة **بذكر جميع عناصرها** بين حاضنتين من الشكل { } مع وضع فاصلة بين كل عنصرين فإذا رمزنا لمجموعة حروف كلمة (انسان) مثلاً بـ سـ فاننا نكتب :

سـ = { ا ، ن ، س }

٢ – تتعين المجموعة أيضاً بذكر **خاصة** يمكننا بواسطتها الحكم على أي شيء بأنه عنصر في هذه المجموعة أو إنه غريب عنها ، وفي هذه الحالة نرمز لعنصر كيفي من عناصر المجموعة برمز مثل ع الذي نسميه متحولاً (Variable) في المجموعة ونعبر عن المجموعة بذكر الخاصة التي **يتمتع بها المتحول** ع أي الخاصة المميزة التي تتمتع بها جميع عناصر المجموعة المذكورة . فالمجموعة سـ السابقة الذكر تكتب بالشكل :

سـ = { ع : ع حرف من حروف كلمة **انسان** }

ونقرأ ذلك بقولنا : « سـ هي مجموعة العناصر ع حيث ع حرف من حروف كلمة انسان » وقد استخدمنا الرمز (:) عوضاً عن كلمة (حيث) .

والجدير بالذكر أنه بامكاننا ، في هذه الطريقة ، استخدام رمز آخر غير ع مثل س أو ص ... أو ★ ، □ ... ونكتب :

سـ = { ★ : ★ حرف من حروف كلمة انسان }

مثال (١) : إذا فرضنا سـ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تصغر العدد ٦ ، **فيمكننا أن نكتب** :

$$س = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ \}$$

أو $$س = \{ ن : ن \text{ عدد صحيح موجب } < ٦ \}$$

مثال (٢) : اذا كانت ع مجموعة الأشخاص الذين يتكلمون اللغة العربية فمن الممكن – ولو نظرياً – معرفة جميع عناصر المجموعة ولكنه من الصعب تعيين ع بذكر جميع هذه العناصر ولذا فاننا نكتب في هذه الحالة :

$$ع = \{ س : س \text{ يتكلم العربية } \}.$$

١٣ – المجموعات العددية :

إن أكثر المجموعات تداولاً في الدراسات الرياضية هي المجموعات العددية ، وسنذكر الآن بعضاً منها ونقدم ما تبقى منها في الأماكن المناسبة:

١ – مجموعة الأعداد الطبيعية :

$$ط = \{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... \}$$

٢ – مجموعة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر :

$$ط^* = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... \}$$

٣ – مجموعة الأعداد الصحيحة :

$$ص = \{ ... ، -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... \}$$

٤ – مجموعة الأعداد الصحيحة المغايرة للصفر :

$$ص^* = \{ ... ، -٣ ، -٢ ، -١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... \}$$

٥ – مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والصفر :

$$ص^+ = \{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... \}$$

٦ – مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة والصفر :

$$ص^- = \{ .. ، -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ \}$$

٧ – مجموعة الأعداد العادية وهي المجموعة :

ع = { س : س = $\frac{ب}{حـ}$ ، ب ∈ ص ، حـ ∈ ص* }

٨ – مجموعة الأعداد العادية المغايرة للصفر ونرمز لها بـ ع*

٩ – مجموعة الأعداد العادية الموجبة والصفر ونرمز لها بـ ع+

١٠ – مجموعة الأعداد العادية السالبة والصفر ونرمز لها بـ ع−

١١ – مجموعة الأعداد الحقيقية ونرمز لها بـ ح وتتكون من جميع

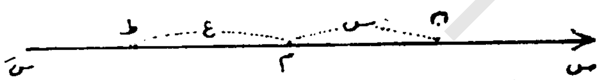
الأعداد العادية وغير العادية مثل : $\sqrt{٣}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، π ، طل ١٥ ْ

١٢ – مجموعة الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر ونرمز لها بـ ح*

١٣ – مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة والصفر ونرمز لها بـ ح+

١٤ – مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة والصفر ونرمز لها بـ ح−

وتتمتع مجموعة الأعداد الحقيقية ح بخاصة هامة هي أنه إذا أخذنا محوراً موجهاً سَ م س الشكل (١) فمن الممكن تمثيل عناصر ح بنقاط



الشكل (١)

هذا المحور ، بمعنى أن كل عدد حقيقي س تقابله نقطة ن فصلها ذلك العدد ، وكل نقطة ط من المحور يقابلها عدد حقيقي ع هو فصل هذه النقطة . ولذا فان هذا المحور يسمى **المحور الحقيقي** أو **المستقيم الحقيقي**. وهذه الخاصة تنفرد بها مجموعة الاعداد الحقيقية لأن كل عنصر من عناصر بقيـة المجموعات العددية يُمَثَّل بنقطـة من محور موجـه ولكن ليس

ضرورياً أن تقابل كل نقطة من المحور عنصراً من تلك المجموعات .

١٤ – مفهوم الانتماء :

إذا كان ب عنصراً من المجموعة سـ فاننا نقول إن ب ينتمي إلى سـ ونكتب ذلك بالشكل ب ∈ سـ ونقرأ ذلك بقولنا « ب **ينتمي إلى** سـ » وإذا أردنا نفي انتماء ب إلى المجموعة سـ كتبنا :

ب ∉ سـ

ونقرأ ذلك بقولنا « ب لا ينتمي إلى سـ » .

إذا رمزنا بـ حـ للخاصة المميزة للمجموعة سـ فان قولنا « ب ∈ سـ » يكافىء قولنا « إن حـ محققة من أجل ب » وقولنا « ب ∉ سـ » يكافيء قولنا « إن حـ غير محققة من أجل ب » أو بشكل رمزي :

ب ∈ سـ ⟺ حـ (ب) ، ب ∉ سـ ⟺ ~ حـ (ب)

أمثلة :

١ – إذا كانت سـ = { س : عدد طبيعي زوجي } فان

٨ ∈ سـ و – ٤ ∉ سـ

٢ – إذا كانت سـ محيط المستطيل أ ب حـ د و م مركز هـذا المستطيل فان

أ ∈ سـ و م ∉ سـ

٣ – اذا علمنا أن صـ مجموعة الأعـداد الصحيحـة وأن صـ+ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والصفر وأن صـ- مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة والصفر فانه يكون :

٣ ∈ صـ+ ، ٠ ∈ صـ- ، $\frac{٣}{٥}$ ∉ صـ ، –٥ ∉ صـ+ ، $\sqrt{٣}$ ∉ صـ

١٥– **المجموعة الخالية:** (Ensemble Vide , Empty Set)

إذا عيّنا بمجموعة بخاصة مميزة ووجدنا أنه لا يوجد أي عنصر يتمتع بهذه الخاصة فاننا نقول إن هذه المجموعة خالية ونعطيها الرمز ∅ أو الرمز { } .

أمثـلة :

١ – إن مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكبر العدد ٢ وتصغر العدد ٣ هي مجموعة خالية لأنه لا يوجد بين العددين ٢ ، ٣ أي عدد طبيعي أي:

∅ = { س : س ∋ ط و ٢ < س < ٣ }

٢ – إذا قمنا باحصاء على سكان مدينة دمشق ووجدنا أنه لا يوجد أي فرد منهم يزيد عمره على ١٢٠ سنة قلنا إن الأفراد الذين يسكنون دمشق والذين يزيد عمرهم على ١٢٠ سنة يؤلفون مجموعة خالية :

{ } = { س : س من دمشق ويزيد عمره على ١٢٠ سنة }

٣ – ∅ = { س : س ∋ ط ، س + ٣ = ٠ }

١٦ – **المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية :**

إن للمجموعة : سـ { ٲ ، ب ، حـ ، ى } عناصر أربعة في حين أن مجموعة الأعداد الطبيعية :

ط = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

لا يمكن الإنتهاء من عدّ عناصرها .

نسمي كل مجموعة يمكن الانتهـاء من عدّ عناصرهـا (ولو نظرياً) مجموعة منتهية (Ensemble fini , Finite Set) وهي المجموعة التي عدد عناصرها محدود ونقول في الحالة المخالفة إننا أمام مجموعة غير منتهية (Ensemble infini , Infinite Set) .

أمثـلة :

١ – مجموعة الأعداد الطبيعية التي تصغر العدد ٢٠ مجموعة منتهية .

٢ – مجموعة سكان الكرة الأرضية مجموعة منتهية .

٣ – مجموعة رمال بادية الشام مجموعة منتهية .

٤ – مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية غير منتهية .

٥ – مجموعة نقاط قطعة مستقيمة مجموعة غير منتهية .

تسمى المجموعـة المنتهية المكونـة من عنصر واحد **وحيدة العنصر** كالمجموعات :

{ ٣ } ، { ٥ } ، { حـ } ، { محمود } ، { دار }

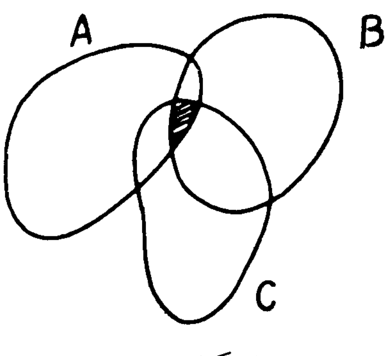
ومن المهم أن نميز بين الرمزين س و { س } فالأول يمثل عنصراً والثاني يمثل مجموعة وحيدة العنصر ويكون س ∈ { س }

ونسمي المجموعة المنتهية المكونة من عنصرين اثنين زوجاً (Paire – Pair)

كالأزواج { ١ ، ٢ } و { أ ، ب } و { مكة ، الحجاز } و { دمشق ، سوريا }

١٧ – مخططات فين (Venn) :

وضع جون فين المخطط شكل (٢) عام ١٨٨٠ وفيه استبدل بمجموعة أشياء بمناطق من مستوي ، فالمنحني A يمثل (الناس الفرنسيين) ، والمنحني B يمثل (الناس الجنرالات) ، والمنحني C يمثل (الناس الذين يحملون ميداليات) . ويمكننا بسهولة أن نقرأ بواسطة هذا المخطط العلاقات بين هذه المجموعات



الشكل (٢)

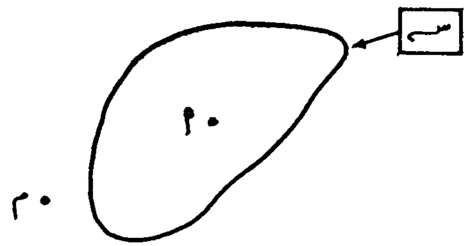
من الناس ، فالمنطقة السوداء مثلاً تمثل الجنرالات الفرنسيين الذين يحملون ميداليات .

ويستفاد من طريقة فين في إيضاح كثير من قضايا نظرية المجموعات، وعندئذ تمثل المجموعة بمنطقة محاطة بخط مغلق بسيط كمربع أو مستطيل أو دائرة أو أي خط مغلق آخر لا يتقاطع مع نفسه ويسمى الشكل الذي يمثل المجموعة بهذه الطريقة **مخطط فين** .

مثال (١) : المجموعة ج = { أ ، ب ، حـ ، ء } يمثلها مخطط فين الشكل (٣) . وتُمَثَّل عناصر المجموعة بنقاط داخل المخطط وتمثل العناصر التي لا تنتمي الى ج كالعنصر هـ بنقاط خارج المخطط .

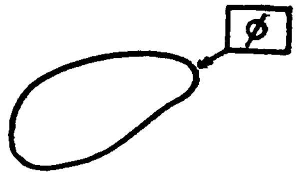
الشكل (٣)

مثال (٢) : المجموعة س = { س : س نقطة من محيط دائرة مركزها م } يمثلها هي والمركز مخطط فين الشكل (٤) . وأي نقطة داخل المخطط كالنقطة أ تمثل نقطة من محيط الدائرة .

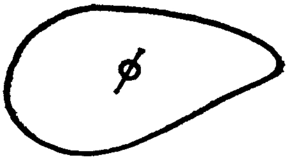


الشكل (٤)

مثال (٣) : المجموعة الخالية ∅ نمثلها بمخطط فين كما في الشكل (٥) أو كما في الشكل (٦) . وفي كلتا الحالتين **لا تمثل النقاط الداخلية في المخطط أي عنصر .**



الشكل (٥)



الشكل (٦)

ملاحظة :

عندما نمثل مجموعة منتهية بمخطط فين ونمثل على هذا المخطط جميع عناصر المجموعة بنقاط داخلية كما في المثال (١) . فإن مخطط فين في هذه الحالة هو في الحقيقة النقاط التي تمثل عناصر المجموعة والخط الذي يحيط بهذه النقاط يشير إلى أن هذه النقاط تمثل مجموعة واحدة . أما بقية النقاط الداخلية في المخطط فلا تلعب في هذه الحالة أي دور .

وعندما نمثل مجموعة غير منتهية بمخطط فين كما في المثال (٢) فنستطيع عند اللزوم أن نعتبر إحدى النقاط الداخلية ممثلة لأحد عناصر المجموعة . وكل نقطة داخلية أخرى تصلح لتمثيل عنصر آخر من عناصر المجموعة وهكذا ...

١٨ – جماعة مجموعات :

عند الحديث عن مجموعة إدارات الدولة مثلاً ، يلاحظ أن عناصر هذه المجموعة هي مجموعات أيضاً ، فكل عنصر هو إدارة تتكون من مجموعة من الموظفين .

وهناك حالات كثيرة تكون فيها عناصر المجموعة مجموعات أيضاً وتسمى مثل هذه المجموعة **مجموعة مجموعات** . ورغبة في عدم تكرار

كلمة مجموعة سنسمي مثل هذه المجموعة **جماعة مجموعات**
(Famille des ensembles, Family of sets)

مثال (١) : مجموعة مستقيمات في الفراغ هي جماعة مجموعات ، حيث كل عنصر في هذه الجماعة هو مستقيم وهو بدوره مجموعة نقاط .

مثال (٢) : مجموعة دوائر في مستوٍ هي جماعة مجموعات ، حيث كل عنصر في هذه الجماعة هو دائرة والدائرة بدورها هي مجموعة نقاط.

مثال (٣) : المجموعة { {١ ، ٢} ، {٣} ، ∅ } هي جماعة مجموعات لأن كل عنصر فيها هو مجموعة .

مثال (٤) : المجموعة { ٢ ، {٣ ، ب} ، {{٤}} ، ٦ } ليست جماعة مجموعات لأن عناصرها هي أعداد ومجموعات .

مثال (٥) : إذا كانت سـ = { هـ ، {أ ، ب} ، {حـ ، ء} ، ∅ } جماعة مجموعات فإن هـ تكون رمزاً لمجموعة .

١٩ – تساوي مجموعتين :

لتكن سـ مجموعة أرقام العدد ٣٣٥٦٥ و ع مجموعة أرقام العدد ٦٥٣٦٣ أي أن :

سـ = { ٥ ، ٦ ، ٣ }
ع = { ٣ ، ٦ ، ٥ }

يلاحظ أن للمجموعتين سـ ، ع العناصر نفسها أي أنهما يمثلان المجموعة ذاتها . يقال عن هاتين المجموعتين إنهما **متساويتان** ويكتب باستخدام علامة التساوي = : سـ = ع ونقرأ ذلك (سـ تساوي ع) .

وبصورة عامة :

> **تعريف** : تكون مجموعتان سـ و ع متساويتين اذا كان لهما العناصر نفسها أي أن :
>
> (سـ = ع) ⟺ (للمجموعتين سـ و ع العناصر نفسها)

ويمكن تعريف تساوي مجموعتين باستخدام مفهوم الانتماء كما يلي :

> **تعريف** : تكون مجموعتان سـ و ع متساويتين اذا كان كل عنصر من سـ ينتمي إلى ع وكان كل عنصر من ع ينتمي إلى سـ أي أن :
>
> (سـ = ع) ⟺ (س ∋ سـ ⟺ س ∋ ع)

وتكون مجموعتان سـ و ع **غير متساويتين** إذا وجد في احدى المجموعتين عنصر واحد على الأقل لا ينتمي الى المجموعة الأخرى ونكتب عندئذ :

سـ ≠ ع

ونقرأ ذلك (سـ لا تساوي ع) .

مثال (١) : إذا كانت سـ مجموعة حروف كلمة (مُعْجَم) و ع مجموعة حروف كلمة (جَمَعَ) فان سـ = ع لأن :

سـ = {م ، ع ، ج}

و ع = {ج ، م ، ع}

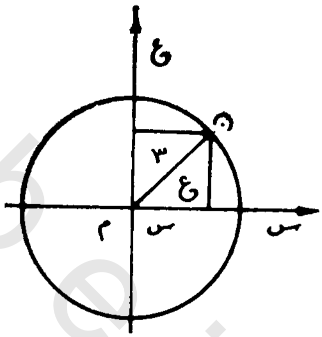
وواضح أن للمجموعتين العناصر نفسها .

مثال (٢) : المجموعتان :

سـ = { ن : ن نقطة من مستوي المحورين الاحداثيين تبعد عن مبدأ الاحداثيات م بعداً قدره ٣ سم }

ع = { ﻫ : ﻫ نقطة من مستوي المحورين الاحداثيين يحقق احداثياها العلاقة س^{٢} + ع^{٢} = ٩ }

متساويتان وكل منهماهو مجموعة نقاط محيط الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها ٣ سم الشكل (٧) .



الشكل (٧)

مثال (٣) : المجموعتان :

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ع = { ٢ ، ٦ ، ٣ }

غير متساويتين لأن ٤ ∈ س و ٤ ∉ ع

مثال (٤) : المجموعتان :

س = { ء ، ب ، حـ ، ى } ع = { ب ، ى ، حـ ، ﻫ }

غير متساويتين لأن ء ∈ س و ء ∉ ع

أو لأن ﻫ ∈ ع و ﻫ ∉ س

٢٠ — نتيجة : المجموعة الخالية ∅ وحيدة .

في الحقيقة ، لنفرض أن هناك مجموعة خالية أخرى « خ » فاذا كان

∅ ≠ خ

فمعنى ذلك وجود عنصر على الأقل في ∅ أو خ غير موجود في المجموعة الأخرى ، وهذا مخالف لافتراض كون ∅ و خ خاليتين .

وعليه فان :

∅ = خ

٢١ - المجموعة الجزئية والاحتواء :

إذا كانت سـ مجموعة الكتب في مكتبة عامة و ع مجموعة الكتب المخطوطة في هذه المكتبة . فمن الواضح أن كل عنصر من ع هو عنصر من سـ ، أي أن جميع عناصر المجموعة ع ليست سوى بعض عناصر المجموعة سـ ، تسمى المجموعة ع **مجموعة جزئية**[١] أو **شعبة** من من المجموعة سـ . ويقال إن المجموعة ع **محتواة**[٢] في المجموعة سـ أو إن المجموعة سـ حاوية للمجموعة ع ومنه :

> **تعريف** : نقول عن مجموعة ع إنها محتواة في مجموعة سـ إذا كان كل عنصر من ع عنصراً من سـ أي أن :
>
> (ع محتواة في سـ) $\Leftrightarrow$ ($\forall$ س $\in$ ع $\Leftarrow$ س $\in$ سـ)

وبناء على هذا التعريف نلاحظ أنه إذا كانت المجموعتان سـ و ع متساويتين أي أنه إذا كان سـ = ع . فان :

سـ تكون محتواة في ع ، لأن كل عنصر من سـ هو عنصر من ع كما أن ع تكون محتواة في سـ ، لان كل عنصر من ع هو عنصر من سـ .

وعندما تكون ع محتواة في سـ نستخدم الرمز $\subseteq$

ونكتب : ع $\subseteq$ سـ

ونقرأ : (ع محتواة في سـ) أو (ع مجموعة جزئية من سـ) أو (ع جزء من سـ) أو (ع شعبة من سـ)

---

(١) (Sous - ensemble , Sub - Set)

(٢) (Inclus , Contained)

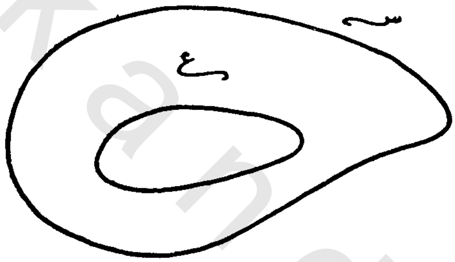
ويمكننا أن نكتب أيضاً سـ ⊆ عـ

ونقرأ (سـ تحتوي عـ)

ويمكننا كتابة تعريف المجموعة الجزئية باستخدام الرموز كما يلي :

> **تعريف :**
>
> (عـ ⊇ سـ) ⟺ (∀ س ∋ عـ ⇐ س ∋ سـ)

ويمكن تمثيل كون عـ جزءاً من سـ باستخدام مخططات فين بالشكل (٨) .



الشكل (٨)

٢٢ – الاحتواء بالمعنى الواسع والاحتواء بالمعني الدقيق :

رأينا انه اذا كان كل عنصر من مجموعة سـ هو عنصر من مجموعة أخرى عـ فاننا نقول إن سـ محتواة في عـ ونكتب :

سـ ⊇ عـ

واستناداً إلى هذا التعريف نستطيع القول إن أية مجموعة سـ محتواة في نفسها :

سـ ⊇ سـ

وإن المجموعة الفارغة محتواة في أية مجموعة سـ :

∅ ⊇ سـ

ولكن إذا نظرنا في المجموعتين :

ع = {أ ، ب ، حـ ، ء} ، سـ = {أ ، حـ ، ب}

فاننا نلاحظ أن سـ محتواة في ع ، وأن ع لا تساوي سـ بالوقت نفسه ، أي أن :

سـ ⊇ ع و ع ≠ سـ

نقول في هذه الحالة والحالات المماثلة إن سـ **محتواة تماماً في** ع أو إن سـ **محتواة في** ع **احتواء حقيقياً** أو إن سـ **محتواة في** ع **بالمعنى الدقيق** ويقال أيضاً إن سـ **مجموعة جزئية (شعبة) حقيقية من** ع أو إن سـ جزء حقيقي من ع ونكتب في هذه الحالة :

سـ ⊂ ع

مستخدمين الرمز ⊂ (رمز الاحتواء بالمعنى الدقيق) عوضاً عن الرمز ⊇ الذي نسميه (رمز الاحتواء بالمعنى الواسع) .

وهكذا نرى أنه لا يمكننا استعمال الرمز سـ ⊂ ع ما لم نتأكد من أمرين : (١) كل عنصر من سـ هو عنصر من ع . (٢) يوجد في ع عنصر واحد على الأقل لا ينتمي لـ سـ .

وفي ضوء ما سبق نرى انه إذا كانت لدينا المجموعتان :

سـ = {أ ، ب} ، ع = {ب ، أ}

فيمكننا أن نكتب : سـ ⊇ ع و ع ⊇ سـ ولكننا لا نستطيع أن نكتب : سـ ⊂ ع و ع ⊂ سـ

واذا كانت لدينا المجموعتان :

صـ = {أ ، ب} ، ف = {أ ، حـ ، ب}

فاننا نلاحظ أن صـ ≠ ف و ص ⊇ ف ولذلك يكون :

ص ⊃ ف

مثال (١) : اذا كانت سـ مجموعه مدن فلسطين و ع مجموعة المدن العربية فان سـ ⊇ ع و سـ ≠ ع ولذا يكون :

سـ ⊃ ع

مثال (٢) : إذا كانت أ مجموعة جميع المثلثات في مستو وكانت ب مجموعة المثلثات القائمة في هذا المستوي فان ب ⊇ أ و ب ≠ أ
ولذا يكون :

ب ⊃ أ

٢٣ - **نفي الاحتواء**: إذا كانت لدينا مجموعتان سـ و ع وكان في ع عنصر واحد على الأقل لا ينتمي إلى سـ فان ع لا تكون محتواة في سـ ونكتب في هذه الحالة ع ⊉ سـ وننفي الاحتواء بالشكل التالي :

(ع ⊉ سـ) ⇔ (∃ س ∋ ع و س ∌ سـ)

مثال (١) إذا كانت أ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}
ب = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

فان ب ⊉ أ لأن (٦ ∋ ب و ٦ ∌ أ) أو لأن (٧ ∋ ب و ٧ ∌ أ)
وكذلك أ ⊉ ب لأن ٢ ∋ أ و ٢ ∌ ب

مثال (٢) : إن مجموعة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر جزء من مجموعة الأعداد الطبيعية أي أن :

ط* ⊃ ط

في حين أن ط ⊉ ط* لأن ٠ ∋ ط و ٠ ∌ ط* .

ومن أهم تطبيقات هذه الفقرة استخدامها في إثبات أن :

٢٤- المجموعة الخالية ∅ مجموعة جزئية من أية مجموعة س :

أي أن : ∅ ⊆ س

في الحقيقة ، إذا لم تكن ∅ محتواة في س فهناك إذن عنصر واحد على الأقل ينتمي إلى ∅ ولا ينتمي إلى س وذلك حسب الفقرة السابقة . وهذا غير ممكن لأن ∅ هي الخالية فرضاً ولا ينتمي اليها أي عنصر .

٢٥- الاحتواء وتساوي المجموعات :

رأينا في الفقرة ٢١ أنه إذا كانت لدينا مجموعتان س و ع متساويتان فان س ⊆ ع و ع ⊆ س

وبالعكس إذا كانت لدينا مجموعتان س و ع وكانت جميع عناصر س تنتمي إلى ع أي كان س ⊆ ع وكانت أيضاً جميع عناصر ع تنتمي إلى س أي كان ع ⊆ س كان للمجموعتين العناصر ذاتها وبالتالي فان س = ع .

ونستنتج مما تقدم صيغة جديدة لتعريف تساوي مجموعتين نستخدم مفهوم الاحتواء وهي :

تعريف : تتساوى مجموعتان س و ع إذا كانت س محتواة في ع وكانت ع محتواة في س أي أن :
(س = ع) ⇔ (س ⊆ ع و ، ع ⊆ س)

ويستخدم هذا التعريف كثيراً لإثبات تساوي المجموعات (انظر التمرين ٣٥ من التمارين المحلولة) .

ملاحظة :

للتحقق من تساوي مجموعتين باستخدام مخططات فين يكفي أن نبين أن المجموعتين تمثلها المنطقة نفسها من المخطط .

٢٦– مجموعة أجزاء مجموعة :

لتكن لدينا المجموعة سـ = { أ ، ب ، حـ } ولتعيين جميع مجموعاتها الجزئية نلاحظ ما يلي .

١ – من المعلوم أنّ ∅ ⊆ سـ وأن سـ ⊆ سـ
أي أنه ∅ و سـ هما مجموعتان جزئيتان من سـ

٢ – المجموعات الجزئية الوحيدة العنصر هي : {أ} ، {ب} ، {حـ}

٣ – المجموعات الجزئية التي يتكون كل منها من عنصرين هي :
{أ ، ب} ، {أ ، حـ} ، {ب ، حـ}

وبذلك نكون قد عيّنا جميع أجزاء سـ . تسمى المجموعة التي عناصرها أجزاء سـ **مجموعة أجزاء** سـ ويرمز لها بالرمز ح (سـ) ويكون :

ح (سـ) = { ∅ ، سـ ، {أ} ، {ب} ، {حـ} ، {أ ، ب}
{ب ، حـ} ، {أ ، حـ} }

ويلاحظ أنه لما كان {أ} ⊂ سـ فان {أ} ∈ ح (سـ)

وبالمقابل بما أن {أ} ∈ ح (سـ) فان {أ} ⊂ سـ

وبشكل عام ، إذا كانت ح (سـ) جماعة أجزاء المجموعة سـ فان كل جزء ع من سـ يكون عنصراً في المجموعة ح (سـ) . أي أن :

(ع ⊆ سـ) ⟸ ع ∈ ح (سـ)

وبالعكس : اذا كان ع عنصراً في ح (سـ) فان ع يكون مجموعة

جزئية من س أي أن :

$$\{ ع \in ج(س) \} \Rightarrow ع \subseteq س$$

ومما تقدم نحصل على التكافؤ المنطقي :

$$\boxed{(ع \in ج(س)) \Leftrightarrow (ع \subseteq س)}$$

مثال (١) : لتكن ط مجموعة الأعداد الطبيعية :

١ – $\{١ ، ٢ ، ٣\} \in ج(ط)$ ، لأن $\{١ ، ٢ ، ٣\} \subseteq ط$

٢ – اذا كانت $س = \{س : س \text{ عدد فردي}\}$

فان $س \in ج(ط)$ ، لأن $س \subset ط$

٣ – $\{٢ ، ٤ ، ٣\frac{١}{٢}\} \notin ج(ط)$، لأن $\{٢ ، ٤ ، ٣\frac{١}{٢}\} \not\subseteq ط$

حيث $٣\frac{١}{٢} \notin ط$.

مثال (٢) : لتكن س مجموعة نقــاط مستوٍ ولنعتبر في هذا المستوي نقطة أ و ن مجموعة نقاط مستقيم في هذا المستوي و د مجموعة نقاط محيط دائرة في المستوي المذكور ، و ج مجموعة النقاط الداخلية لمثلث في هذا المستوي فيكون لدينا :

$أ \notin ج(س)$ لأن أ عنصر من س وليست جزءاً منها

$ن \in ج(س)$ لأن $ن \subset س$

$د \in ج(س)$ لأن $د \subset س$

$ج \in ج(س)$ لأن $ج \subset س$

٢٧ – المجموعة الكلية :

كل مجموعة تهمنا عناصرها أو أجزاؤها أثنـاء دراسة معينة تسمى المجموعة الكلية (أو الشاملة) (Ensemble Universel, Universal Set) وبعبارة أخرى : إذا كانت جميع المجموعات الواردة في دراسة معينـة (نظرية رياضية ، مسألة معينة) أجزاء من مجموعة واحدة معينة سميناً هذه المجموعة بالمجموعة الكلية .

مثال (١) : مجموعة نقاط مستوٍ هي المجموعة الكلية لدراسة قضايا الهندسة المستوية ، ومن الواضح أن كل شكل من الأشكال المستوية في مستوٍ هو مجموعة جزئية من هذا المستوي .

مثال (٢) : مجموعة الأعداد الطبيعية ط هي المجموعة الكلية التي تُدَرّس من خلالها مبادىء الحساب لأطفال السنوات الأولى في المدرسة الابتدائية .

وإذا رمزنا لمجموعة كلية بالرمز ك وكان س عنصراً من ك وكان سـ جزءاً من ك فيمكن تمثيل ذلك بمخططات فين كما في الشكل (٩).

الشكل (٩)

تمارين محلولة

مفهوم المجموعة وطرق تعيينها :

١٩ – عيّن عناصر كل المجموعات الآتية ، وهل يمكنك دائماً ذكر جميع عناصر المجموعة ؟

١ً – مجموعة أرقام العدد ٣٨٤٥٦

٢ً – مجموعة أرقام العدد ٤١١١٥

٣ً – مجموعة جذور المعادلة س^{٢} – ١ = ٠

٤ً – مجموعة مضاعفات العدد ٥

الحل :

١ً – مجموعة الارقام هي : { ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٨ ، ٣ }

٢ً – مجموعة الأرقام هي : { ٥ ، ١ ، ٤ }

٣ً – مجموعة جذور المعادلة هي : { – ١ ، ١ }

٤ً – مجموعة المضاعفات المطلوبة هي :

{ ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ... }

وواضح أنه لا يمكن الانتهاء من ذكر عناصر هذه المجموعة ..

٢٠ – اقرأ العبارتين الآتيتين :

سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

صـ = { س : س من سكان القاهرة }

الحل :

سـ هي مجموعة الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥
صـ هي مجموعة العناصر س بحيث س من سكان القاهرة

٢١ – اكتب المجموعتين :

سـ = { س : س حرف في (نهر الأردن) }
ع = { س : س ∋ ع و س^{٢} = ١٦ }
بذكر عناصر كل منهما .

الحل :

١ً – نكتفي بذكر كل حرف مكرر ، مرة واحدة فنجد :
سـ = { ن ، هـ ، ر ، ا ، ل ، د }

٢ً – إن عناصر ع هي الجذور الحقيقية للمعادلة س^{٢} = ١٦ أي أن:
ع = { – ٤ ، + ٤ }

٢٢ – عيّن المجموعتين :

(١) سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }
(٢) ع = { الأرض ، زحل ، المشتري ، عطارد ، المريخ ، الزهرة ، بلوتو ، نبتون ، اورانوس }
باستخدام خاصة مشتركة بين عناصر المجموعة .

الحل :

(١) بفرض ى رمز لأحد عناصر سـ وبملاحظة أن عناصر سـ هي أعداد طبيعية محصورة بين العددين ١ و ٨ نكتب :
سـ = { س : س ∋ ط و ١ < س < ٨ }

(٢) بفرض ع أحد عناصر ع وبملاحظة أن عناصر ع تشترك

بكونها كواكب سيارة نكتب :

ع = { ع : ع كوكب سيار } .

مفهوم الانتماء :

٢٣ – اكتب برموز رياضية كلًا من الجمل الآتية :

د نقطة من المستقيم ن ،

الفرات من مجموعة الأنهار العربية ج ،

π عدد حقيقي .

الحل :

د ∈ ن ، الفرات ∈ ج ، π ∈ ح

٢٤ – اكتب بالعربية كلًا من الجمل الأربع الآتية :

١٢٠ ∈ ص ، ٠ ∈ ح$^+$

مركز دائرة ∉ محيطها ، المستقيم ن ∈ المستوي ك

الحل :

١٢٠ ينتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة

الصفر ينتمي إلى المجموعة ح$^+$

مركز الدائرة لا ينتمي إلى محيطها

المستقيم ن ينتمي إلى المستوي ك

المجموعة الخالية :

٢٥ – ما الفرق بين { } و { ٠ }

الحل :

المجموعة الأولى هي المجموعة الخالية في حين ان المجموعة الثانية هي مجموعة ينتمي اليها عنصر واحد هو الصفر فهي مجموعة وحيدة العنصر .

٢٦– ما الخطأ والصواب فيما يلي :

١ً – ٠ ∈ ∅ ، ٢ً – ٠ ∉ { }

٣ً – م ∈ ∅ ، ٤ً – ح ∉ ∅

الحل :

بما أن المجموعة الخالية لا ينتمي إليها أي عنصر إذن :

١ ، ٣ خاطئتان و ٢ ، ٤ صحيحتان .

المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية ومخططات فين :

٢٧ – بيّن أي المجموعات التالية منتهية :

١ً – مجموعة أشجار النخيل في بساتين المدينة المنورة .

٢ً – { س : س سيارة خاصة في سوريا }

٣ً – { م : م مربع في مستوٍ }

٤ً – { س : س ∈ صـ و س + (– س) = ٠ }

٥ً – { س : س ∈ ط و س > ٨ }

الحل :

١ً – هي مجموعة منتهية ، حيث يمكننا إحصاء أشجار النخيل في بساتين المدينة المنورة .

٢ً – مجموعة منتهية ، لأن عملية عدّ السيارات الخاصة في سوريا لا بد لها أن تنتهي .

٣ً – مجموعة غير منتهية ، حيث لا يمكننا الانتهاء عن عدّ المربعات التي يمكن رسمها في مستوٍ .

٤ً – مجموعة غير منتهية ، لأن هذه المجموعة هي مجموعة الأعداد الصحيحة صـ نفسها .

٥ً ـ مجموعة منتهية ، لأن هذه المجموعة تتكون من ثمانية عناصر هي
٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧

٢٨ ـ لتكن ح مجموعة فرق لاعبي كرة القدم في العالم العربي والمطلوب :

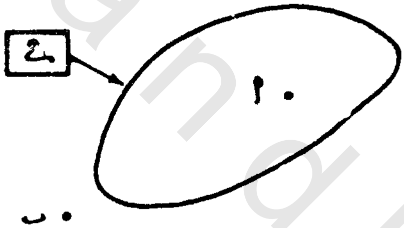
١ً ـ هل ح مجموعة منتهية أم غير منتهية ؟

٢ً ـ مثّل ح بمخطط فين ، ماذا تمثل نقطة أ داخل المخطط ، وإذا أردت أن تمثل أحد أفراد الفرق بنقطة ب فأين تقع هذه هذه النقط بالنسبة للمخطط .

الحل :

١ً ـ ح مجموعة منتهية لأننا نستطيع إحصاء عناصرها .

٢ً ـ يمكن تمثيل ح بسطح محدود بمنحن الشكل (١٠) .



الشكل (١٠)

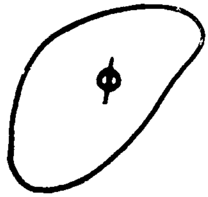
وكل نقطة مثل أ داخل المخطط تمثل إحدى فرق المجموعة ح ، وإذا أردنا أن نمثل أحد أفراد الفرق بنقطة ب فإن ب تقع خارج المخطط لأنها لا تمثل أحد عناصر المجموعة ح .

٢٩ ـ ما الفرق بين و { } وضّح إجابتك باستخدام مخطط فين.

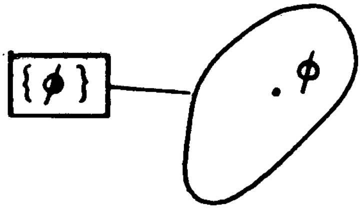
الحل :

إن هي المجموعة الخالية التي لا ينتمي اليها عنصر ما . وقد رأينا

أنها تمثل بمخطط كما في الشكل (١١) .



الشكل (١١)



الشكل (١٢)

وبملاحظة أن المجموعة الخالية ∅ هي كائن رياضي فمن الواضح أن {∅} تكون مجموعة وحيدة العنصر ، عنصرها الوحيد هو المجموعة الخالية ∅ ويمكننا أن نكتب :

$$\emptyset \in \{\emptyset\}$$

وهكذا نجد أن ∅ مجموعة خالية بينما {∅} مجموعة غير خالية وانما هي مجموعة ذات العنصر الوحيد ∅ والتي يمكن تمثيلها بالشكل (١٢) .

تساوي المجموعات :

٣٠ – ما هي المجموعات المتساوية فيما يلي :

سـ = { س : س ∈ ح ، س^{٢} − ٢٥ = ٠ }

ع = { س : س ∈ ط ، س^{٢} − ٢٥ = ٠ }

صـ = { س : س ∈ صـ ، (س + ٥) (س − ٥) = ٠ }

الحل :

إذا عيّنا عناصر كل مجموعة من هذه المجموعات وجدنا :

سـ = { ٥ ، −٥ } ، ع = { ٥ } ، صـ = { ٥ ، −٥ }

وواضح أن سـ = صـ فقط .

٣١ – هل المجموعتان التاليتان متساويتان ؟

س = { {١ ، ٢} ، {٢} ، {٣} }

ع = { {٢} ، {٢ ، ١} ، ٣ }

الحل :

س ≠ ع لأن {٣} تنتمي إلى س ولا تنتمي إلى ع أو لأن ٣ تنتمي إلى ع ولا تنتمي إلى س .

٣٢ – هل المجموعتان التاليتان متساويتان ؟

س = {أ ، ب ، حـ ، ء}

ع = { {أ ، ب} ، {حـ ، ء} }

الحـل :

س ≠ ع لأن للمجموعة س أربعة عناصر أ ، ب ، حـ ، ء وللمجموعة ع عنصران هما المجموعتان {أ ، ب} ، {حـ ، ء} وواضح أنه ليس للمجموعتين س و ع العناصر نفسها .

المجموعات الجزئية والاحتواء :

٣٣ – إذا كانت س = {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

و ع = {س : س ∈ ط ، س ≤ ٨}

بيّن صحة أو خطأ كلٍ مما يلي مع ذكر السبب :

(١) : س ⊆ ع ، (٢) : س = ع

الحـل :

إذا كتبنا :

ع = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}

نلاحظ أن (١) صحيحة ، لأن كل عنصر من س ينتمي إلى ع

وأن (٢) خاطئة ، لوجود عدة عناصر في ع هي : ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ لا تنتمي إلى سـ . وبما أن سـ ⊆ ع و سـ ≠ ع فيمكننا أن نكتب : سـ ⊂ ع

ويمكننا القول أيضاً إن (٢) خاطئة ، لأن ع ⊈ سـ وبالتالي لعدم تحقق شرطي التساوي وهما : سـ ⊆ ع و ع ⊆ سـ

٣٤ - لتكن سـ = { س ، ع ، ص } . اذكر الخطأ والصواب في استخدام الرموز ⊆ ، ⊂ ، ∈ فيما يلي :

١- س ∈ سـ ،
٢- ع ⊂ سـ ،
٣- سـ ⊆ سـ ،
٤- سـ ⊂ سـ ،
٥- { س } ∈ سـ ،
٦- ∅ ⊂ سـ
٧- ∅ ⊂ س
٨- { س } ⊆ سـ
٩- ∅ ∈ سـ
١٠- { س ، ع } ⊂ سـ

الحـل :

١- صح ، لأن س عنصر من سـ
٢- خطأ ، لأن ع عنصر من سـ ورمز الاحتواء الحقيقي يدل على احتواء مجموعة في أخرى ، والصحيح أن نكتب : ع ∈ سـ
٣- صح ، الفقرة (٢٢)
٤- خطأ ، لأنه ليس في سـ عنصر واحد على الأقل لا ينتمي إلى سـ
٥- خطأ ، لأن { س } جزء من سـ ومنه فإن { س } ⊂ سـ
٦- صح ، الفقرة (٢٢)
٧- خطأ ، لأن ∅ مجموعة و س عنصر .

٨ً – صح ، لأن {س} جزء من سـ
٩ً – خطأ ، لأن ∅ ليست عنصراً في سـ وإنما هي جزء من سـ
١٠ً – صح ، لأن {س ، ع} جزء حقيقي من سـ .

٣٥ – إذا كانت المجموعة سـ جزءاً من ∅ فأثبت أن سـ = ∅

الحل :

من المعلوم أن : ∅ ⊇ سـ الفقرة (٢٤)
ولدينا سـ ⊇ ∅ بالفرض

وحسب الفقرة (٢٥) نجد :

[∅ ⊇ سـ و سـ ⊇ ∅] ⟺ [سـ = ∅]

٣٦ – إذا كانت سـ ، ع ، صـ ثلاث مجموعات فأثبت أن :

(سـ ⊇ ع و ع ⊇ صـ) ⟸ سـ ⊇ صـ

الحل :

لإثبات أن سـ ⊇ صـ يجب أن نبرهن أن كل عنصر س ∋ سـ هو عنصر في صـ أي أن نبرهن أن :

(∀ س ، س ∋ سـ) ⟸ (س ∋ صـ)

في الحقيقة :

∀ س ، س ∋ سـ ⟸ س ∋ ع لأن سـ ⊇ ع فرضاً
كما أن س ∋ ع ⟸ س ∋ صـ لأن ع ⊇ سـ فرضاً

ومنه المطلوب .

٣٧ – لتكن سـ مجموعة جميع الأشكال الرباعية في مستو و ع مجموعة جميع المربعات و صـ مجموعة جميع المستطيلات في هذا المستوي.

بيّن الصواب والخطأ فيما يأتي مع ذكر السبب :

١ً– ع ⊃ سـ ، ٢ً– ع ⊃ صـ
٣ً– صـ ⊃ ع ، ٤ً– صـ ⊃ سـ
٥ً– صـ ⊃ ع ⊃ سـ .

الحـل :

١ً– عبارة صحيحة ، لأن كل مربع هو شكل رباعي وبالتالي فان كل عنصر من ع هو عنصر من سـ أي أن ع ⊃ سـ .

٢ً– عبارة صحيحة ، لأن كل مربع هو مستطيـل تساوى بعداه ولذا فإن كل عنصر من ع هو أيضاً عنصر من صـ أي أن ع ⊃ صـ .

٣ً– عبارة خاطئة ، لأن صـ فيها عناصر لا تنتمي إلى ع وهي المستطيلات ، حيث أننا لا نستطيع اعتبار كل مستطيل مربعاً.

٤ً– عبارة صحيحة ، لأن كل مستطيل من صـ هو شكل رباعي أي هو عنصر من سـ أي أن صـ ⊃ سـ .

٥ً– عبارة خاطئة لأن صـ مجموعات المستطيلات غير محتواة في ع مجموعة المربعات .

مجموعة أجزاء مجموعة :

٣٨ – عيّن ح (سـ) من أجل سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } :

الحـل :

إن ح (سـ) هي جماعة جميع أجزاء سـ .
ومن الواضح أن ∅ و سـ من أجزاء سـ .

وأن أجزاء سـ التي يتكون كل منها من عنصر واحد هي :
{١} ، {٢} ، {٣}

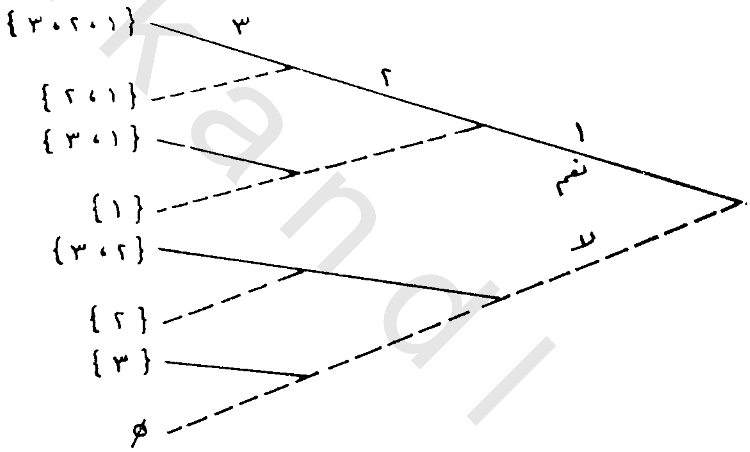
وإن أجزاء سـ التي يتكون كل منها من عنصرين هي :

{١ ، ٢} ، {٢ ، ٣} ، {١ ، ٣}

وليس هناك طبعاً أجزاء أخرى لـ سـ ولذا فإن :

ج (سـ) = { ∅ ، سـ ، {١} ، {٢} ، {٣} ،
{١ ، ٢} ، {١ ، ٣} ، {٢ ، ٣} }

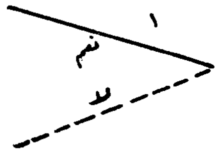
ويمكن الحصول على جميع عناصر ج (سـ) بطريقة تسمى **طريقة الشجرة** كما هو مبين في الشكل (١٣) .



الشكل (١٣)

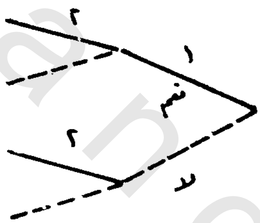
ويتم إنشاء فروع هذه الشجرة ، بأن نسأل عن وجود العنصر ١ في مجموعة جزئية لـ سـ ، وبسبب وجود مجموعات جزئية يكون ١ عنصراً فيها ومجموعات جزئية ليس ١ عنصراً فيها . فلدينا امكانيتان للاجابة على هذا السؤال (نعم أو لا) نمثلهما بأول فرعين للشجرة الشكل (١٤) حيث

يمثل الفرع المتصل الاجابة بـ (نعم) أي حالة وجود العنصر ۱ ، ويمثل الفرع المنقط الإجابة بـ (لا) أي حالة عدم وجود العنصر ۱ .



الشكل (١٤)

ومن أجل كل فرع من الفرعين السابقين ، نسأل بنفس الأسلوب عن وجود العنصر ۲ في مجموعة جزئية فتصبح الشجرة كما في الشكل (١٥)

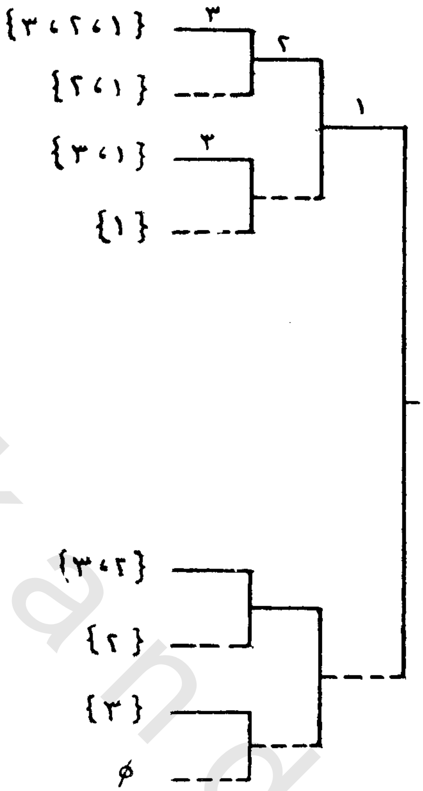


الشكل (١٥)

ثم من أجل كل فرع من فروع الشجرة في الشكل (١٥) نسأل عن وجود العنصر ٣ في مجموعة جزئية فتصبح الشجرة كما في الشكل (١٣) وبتتبع كل فرع من فروع هذه الشجرة منذ نهايتـه حتى نشأته الأولى تتعين لدينا في نهايته المجموعة الجزئية الموافقة .

ملاحظة :

يمكن للشجرة المستخدمة لإيجاد أجزاء مجموعة أن تكون كما في الشكل (١٦) .



الشكل (١٦)

٣٩ – أوجد ج (ع) إذا كانت ع = {أ، ب، حـ، ء} وما هي الأجزاء الحقيقية للمجموعة ع .

الحل :

ان مجموعة أجزاء المجموعة ع تتكون من :

(١) المجموعة الخالية ∅ .

(٢) المجموعات التي تحوي عنصراً واحداً فقط وهي :

{أ} ، {ب} ، {حـ} ، {ء}

(٣ً) المجموعات التي تحوي عنصرين فقط ونحصل عليها من المجموعات التي تحوي عنصراً واحداً باضافة – على التوالي – حرف من الحروف التي تأتي بعد الحرف الذي تحويه المجموعة :

{ا ، ب} ، {ا ، ح} ، {ا ، ء} ، {ب ، ح} ، {ب ، ء} ، {ح ، ء}

(٤ً) المجموعات التي تحوي ثلاثة عناصر فقط ونحصل عليها من المجموعات التي تحوي عنصرين باضافة – على التوالي – حرف من الحروف التي تأتي بعد الحرف الاخير الذي تحويه المجموعة :

{ا ، ب ، ح} ، {ا ، ب ، ء} ، {ا ، ح ، ء} ، {ب ، ح ، ء}

(٥ً) المجموعة الكلية { ا ، ب ، ح ، ء }

ان عدد عناصر مجموعة الاجزاء هو :

١ + ٤ + ٦ + ٤ + ١ = ١٦ = ٢^{٤}

وان جميع عناصر ع (ع) ما عدا العنصر { ا ، ب ، ح ، ء } هي أجزاء حقيقية للمجموعة ع .

٤٠ – أوجد عدد عناصر جماعة أجزاء مجموعة مكونة من ن عنصراً:

الحل :

إن للمجموعة الخالية جزء واحد هو المجموعة ∅ .

أما المجموعة ذات العنصر الواحد {ا} فإن لها مجموعتين جزئيتين هما ∅ و {ا} .

ولكي نحصل على أجزاء المجموعة {ا ، ب} فإنه يكفي أن نضيف إلى أجزاء المجموعة {ا} المجموعات التي تنتج عن ضم ب إلى عناصر

هذه الاجزاء فتكون أجزاء المجموعة { ٲ ، ب } هي :

$$\varnothing \quad ، \quad \{ٲ\}$$

$$\{ب\} \quad ، \quad \{ٲ ، ب\}$$

وزيادة عنصر إلى عناصر المجموعة يؤدي إلى مضاعفة عناصر مجموعة الاجزاء أي أن :

عدد عناصر ج({ ٲ ،ب }) = ٢ × عدد عناصر ج({ٲ})= ٢ × ٢ = ٢^٢

وبصورة عامة اذا كتبنا في جدول المجموعات الجزئية المجموعة { ٲ ، ب ، ... ، هـ } التي عدد عناصرها ل وإذا أردنا أن نجد الجدول الذي يحوي المجموعات الجزئية للمجموعة { ٲ ، ب ، حـ ، ... ، هـ ، و } والذي نرمز له بـ ج ل+١ فإننا نلاحظ انـه يمكن تجزئـة المجموعة ج ل+١ الى مجموعتين جزئيتين متباينتين ، الاولى تحوي المجموعات الجزئية التي لا ينتمي اليها العنصر و والثانية تحوي المجموعات الجزئية التي ينتمي اليها العنصر و . والثانية تنتج عن الاولى بإضافة العنصر و الى كل منها وهذا ما يبرهن على أن عدد عناصر المجموعة ج ل+١ = ٢ × عدد عنـاصر ج ل .

اذا رمزنا بـ د ج ل لعدد عناصر مجموعة الاجزاء لـ ج ل فانـه يمكننا أن نكتب :

د ∅ = ١

د ج ١ = ٢ × د ∅

د ج ٢ = ٢ × د ج ١

د ج ٣ = ٢ × د ج ٢

. . . . .

$$د\,ج_{د-١} = ٢ \times د\,ج_{د-٢}$$

$$د\,ج_{د} = ٢ \times د\,ج_{د-١}$$

وإذا ضربنا هذه العلاقات ببعضها طرفاً بطرف ثم اختصرنا المقادير المكررة في الطرفين فسوف نجد :

$$د\,ج_{ن} = ٢^{ن}$$

★ ★ ★

تمارين غير محلولة

٤١ – عيّن عناصر كل من المجموعات الآتية . هل يمكنك دائماً ذكر جميع عناصرها ؟

١ً – مجموعة أرقام العدد ٣٠٠٠

٢ً – مجموعة قواسم العدد ٢٤

٣ً – مجموعة مربعات الاعداد ١ ، ٣ ، ٥ ، ٤

٤ً – مجموعة العوامل الاولية للعدد ١٨٠

٥ً – مجموعة الحرف الأول في كل من الأسماء التالية : ياسر ، أحمد ، يمان ، بشار ، محمود ، أنيس ، هند ، محمد ، سليم ، حليم ، ماهر.

٦ً – مجموعة مكعبات الأعداد الطبيعية .

٧ً – المجموعة ص + .

٤٢ – اكتب المجموعات التالية بذكر عناصر كل منها :

س = { س : س رقم من أرقام العدد ٣٠١٦٠١ }

ص = { ف : ف فصل من فصول السنة }

ع = { س : س ∈ ط ، س^{٢} + ٢ س − ١٥ = ٠ }

٤٣ – عيّن المجموعات التالية باستخدام خاصة مشتركة بين عناصر كل مجموعة :

ع = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ... }

س = { −١ ، ٠ ، +١ }

ع = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

٤٤ – عيّن المجموعات التالية بالطريقة المناسبة :

ع مجموعة مربعات الأعداد الصحيحة .

ص مجموعة طلاب جامعة دمشق .

ح مجموعة مكعبات عناصر المجموعة { −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }

٤٥ – اكتب برموز رياضية كلاً من الجمل الآتية :

الجولان هضبة من مجموعة هضاب القطر السوري .

القمر الطبيعي (ن) لا ينتمي الى مجموعه الأقمار الصناعية (ج) .

طرطوس ميناء من مجموعة موانىء البحر الأبيض المتوسط .

٤٦ – اكتب بالعربية كلاً من الجمل الآتية :

√٧ ∈ ح$^{+}$ ، ١٢٥ ∈ ط

النقطة هـ ∈ المستقيم س

مركز المستطيل ∉ محيطه .

٤٧ – اذكر الصواب والخطأ فيما يأتي :

١ً – ٦ ∈ { س : س عدد طبيعي < ٨ }

٢ً – ٨ ∈ { س : س عدد طبيعي < ٦ }

٣ً – √٥ ∈ ط

٤ً – ٣ ∈ { س : س عدد زوجي }

٥ً – مركز مربع ∈ أحد قطريه

٦ً – ليبيا ∈ مجموعة الأقطار العربية .

٧ً – ٢ ∉ { س : س ∈ ح و س − ٣ = ٠ }

٨ً – ٤ ∋ { س : س ∋ ح و س² – ٨ س + ١٦ = ٠ }

٩ً – ٥ ∋ { ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٥ }

١٠ً – ٣ ∌ { ١٣ ، ٢٣ ، ٣٣ ، ٤٣ ، ٥٣ }

٤٨ – ما المجموعات الخالية فيما يلي :

١ً – { س : س شخص طوله أكثر من ٥ أمتار }

٢ً – { ع : ع عدد فردي وزوجي معاً }

٣ً – { س : س ∋ ط و س ∌ ط* }

٤ً – { س : س ∋ ص و س ∌ ص }

٥ً – { س : س دائرة لا مركز لها }

٤٩ – أوجد س في كل الحالات الآتية :

١ً – س ∋ { ٢ } ، ٢ً – س ∋ { ٠ }

٣ً – { س } = { ٦ } ، ٤ً – { س } = { أ }

٥٠ – بيّن فيما يلي المجموعات المنتهية :

١ً – مجموعة وزارات الدولة

٢ً – { س : س عدد زوجي }

٣ً – { ع : ع مستقيم يمر من نقطة خارج المستقيم ى ويلتقي مع ى }

٤ً – { س : س ∋ ص و س ⩽ ٥ }

٥ً – { س : س ∋ ص و – ٣ ⩽ س ⩽ ٢ }

٦ً – مجموعة نجوم السماء .

٥١ – بيّن الجماعات في المجموعات التالية :

١ً – مجموعة نقابات العمال في الوطن العربي .

٢ً – مجموعة المداجن في سهل البقاع .

٣ً – مجموعة عمال سدّ الفرات .

٤ً – المجموعة { { } ، { أ } ، { أ ، ب } }

٥ً – المجموعة { ٧ ، ٨ ، {١} ، {١ ، ٥} ، {٦} }

٥٢ – هل المجموعات التالية متساوية ؟

سـ = { س : س ∈ ح و س^{٢} – ١٣ س + ٣٦ = ٠ }

ع = { ع : ع ∈ صـ و (ع – ٤) (ع – ٩) = ٠ }

صـ = مجموعة مربعي العددين ٢ ، ٣

٥٣ – برهن أن :

١ً – { س : س ∈ ح و س^{٢} = ٤ }
= { س : س ∈ صـ و (س – ٢) (س + ٢) = ٠ }

٢ً – { س : س ∈ ح و س^{٢} – س = ٠ }
= { س : س ∈ ط و س < ٢ }

٢ً – { س : س ∈ صـ و – ٢ < س < ١ }
= { س : س ∈ ح و س^{٢} + س = ٠ }

٤ً – مجموعة حروف كلمة (منير) = مجموعة حروف كلمة (نمير).

٥٤ – برهن أن المجموعة سـ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١٠ }
ليست مجموعة جزئية من المجموعة ع = { س : س عدد زوجي }

٥٥ – برهن أنه إذا كان س ∈ سـ فان {س} ⊂ سـ وبالعكس.

٥٦ – إذا كان سـ ⊆ { أ } فأوجد جميع الحلول الممكنة لهـذه العبارة (أي جميع المجموعات التي يمكنها أن تحل محل سـ وتبقى العبارة صحيحة) .

٥٧ - إذا كان س ⊂ { أ ، ب } فأوجد جميع الحلول الممكنة لهذه العبارة .

٥٨ - لتكن س مجموعة جميع الأشكال الرباعية في مستوٍ و ع مجموعة جميع المستطيلات و ص مجموعة جميع متوازيات الأضلاع في نفس المستوي . وليكن أ رمزاً لأحد الأشكال الرباعية و ب رمزاً لأحد المستطيلات و حـ رمزاً لأحد متوازيات الأضلاع . بيّن أي العبارات الآتية صحيحة مع بيان السبب

١ - أ ∈ س ، ٢ - ب ∈ س
٣ - حـ ∈ س ، ٤ - أ ∈ ع
٥ - أ ∈ ص ، ٦ - ب ∈ ص
٧ - ب ∈ ع ، ٨ - حـ ∈ ع
٩ - ع ⊂ س ، ١٠ - ص ⊂ ع
١١ - ع ⊂ ص ، ١٢ - ص ⊂ ع ⊂ س

٥٩ - بيّن الخطأ والصواب فيما يأتي :

١ - {أ} ∈ {أ} ، ٢ - {أ} ∈ { {أ} }
٣ - {أ} ⊂ {أ} ، ٤ - {أ} ⊂ { {أ} }
٥ - ٢ ∈ { ∅ ، {٢} ، {١ ، ٢} }
٦ - ∅ ∈ {٢}
٧ - ∅ ⊂ {٢}
٨ - ∅ ⊂ ج ({أ ، ب})
٩ - ∅ ∈ ج ({أ ، ب})
١٠ - أ ∈ ج ({أ ، ب})
١١ - {أ} ⊆ ج ({أ ، ب})
١٢ - {ب} ∈ ج ({أ ، ب})

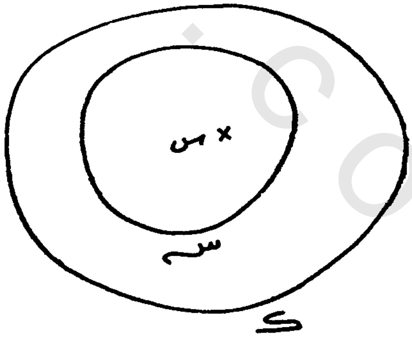
١٣- {ب} ⊆ {أ ، ب}
١٤- أ ∈ {أ ، {أ}}
١٥- {أ} ∈ {أ ، {أ}}
١٦- {أ} ⊆ {أ ، {أ}}
١٧- {{أ}} ⊆ {أ ، {أ}}

٦٠ – لتكن س مجموعة طلاب مدرستك و ع مجموعة الأساتذة فيها و ص مجموعة طلاب السنة النهائية و ف مجموعة الطلاب المتفوقين في هذه السنة و أ أحد هؤلاء الطلاب المتفوقين . بيّن الصواب فيما يأتي :

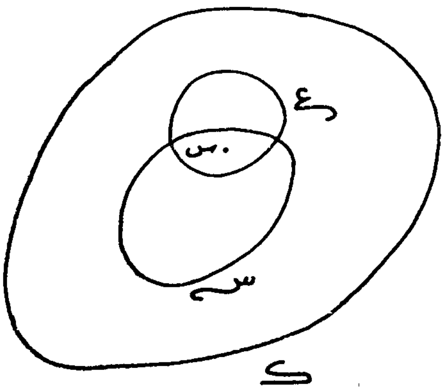
١- ع ⊂ س ، ٢- ف ⊂ س
٣- ص ⊂ س ، ٤- أ ∈ ص
٥- أ ∈ س ، ٦- أ ∈ ف ⊂ ص ⊂ س

ارسم باستخدام مخططات فين موضحاً العبارات الصحيحة في هـذا التمرين .

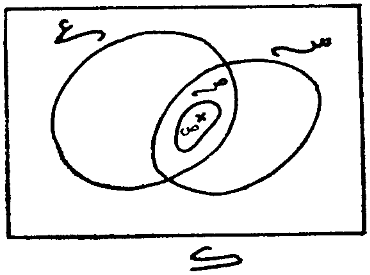
٦١ – اذكر العبارات التي يمثلها كل من المخططات الآتية :



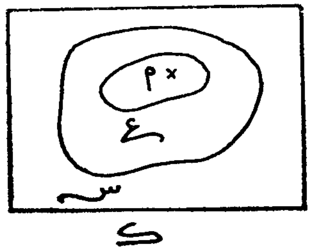
الشكل (١٧)



الشكل (١٨)



الشكل (٢٠)



الشكل (١٩)

٦٢ – اذا كانت س ، ع ، ص ثلاث مجموعات فأثبت أن :

(س ⊂ ع و ع ⊆ ص) ⇐ س ⊂ ص

أجوبة وارشادات

٤١ – ١ – {٣ ، ٠}

٢ – {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٢ ، ٢٤}

٣ – {١ ، ٩ ، ٢٥ ، ١٦}

٤ – {٣ ، ٢ ، ٥}

٥ – {ى ، أ ، ب ، م ، هـ ، س ، ح}

٦ – {٠ ، ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ... }

٧ – {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ...}

ومن المتعذر ذكر جميع عناصر كل من المجموعتين (٦) ، (٧)

٤٢ – س = {١ ، ٠ ، ٦ ، ٣}

ص = {الربيع ، الخريف ، الصيف ، الشتاء}

ع تتكون من الأعداد الطبيعية التي تحقق المعادلة :

س^{٢} + ٢ س − ١٥ = ٠

وبما أن المعادلة جذرين هما −٥ ، ٣ فان ع = {٣}

٤٣ − ج = { س : س عدد زوجي موجب }

سـ = { س : س ∈ صـ و −١ ≤ س ≤ ١ }

ع = { س : س رقم عربي }

٤٤ − ع = { س : س = ع^{٢} و ع ∈ صـ }

صـ = { ط : ط طالب في جامعة دمشق }

ج = { −١ ، ٠ ، ١ ، ٨ }

٤٥ − الجولان ∈ مجموعة هضاب القطر السوري ، ن ∉ ج ، طرطوس ∈ مجموعة موانىء البحر المتوسط .

٤٦ − √٧ عدد حقيقي موجب .

١٢٥٠ عدد طبيعي .

هـ نقطة من المستقيم سـ

مركز المستطيل لا يقع على محيطه .

٤٧ − سنرمز للصواب بـ (ص) وللخطأ بـ (خ) .

(١) ص (٢) خ (٣) خ (٤) خ (٥) ص

(٦) ص (٧) ص (٨) ص (٩) خ (١٠) ص

٤٨ − المجموعات في (١) ، (٢) ، (٤) ، (٥) خالية والمجموعة في (٣) هي {٠} وليست خالية .

٤٩ − (١) س = ٢ ، (٢) س = ٠

(٣) س = ٦ ، (٤) س = م

٥٠ – المجموعات : (١) ، (٥) ، (٦) منتهية .

٥١ – (١) جماعة لأن كل نقابة مجموعة عمال .
(٢) جماعة لأن في كل مدجنة مجموعة خاصة من الدجاج .
(٣) مجموعة .
(٤) جماعة عناصرها المجموعات : { } ، { أ } ، { أ ، ب }
(٥) مجموعة .

٥٢ – سـ = ع = صـ = { ٤ ، ٩ }

٥٣ – في كل مساواة نعيّن كل مجموعة بذكر عناصرها فنجد أن لكل مجموعتين في مساواة واحدة العناصر نفسها .

٥٤ – لأن العدد ٧ عنصر في سـ لا ينتمي إلى ع مجموعة الأعداد الزوجية .

٥٥ – يطبق تعريف الاحتواء .

٥٦ – سـ يجب أن تمثل جزءاً من { أ } وجميع أجزاء { أ } هي ∅ ، { أ } أي أن سـ = ∅ أو سـ = { أ }

٥٧ – يجب أن تكون سـ جزءاً حقيقياً لـ { أ ، ب } أي أن سـ هي ∅ أو { أ } او { ب } .

٥٨ – (١) ص : لأن أ شكل رباعي .
(٢) ص : لأن المستطيل شكل رباعي .
(٣) ص : لأن متوازي الاضلاع شكل رباعي .
(٤) لا يمكننا القول بصحة العبارة أو بخطئها لأن الشكل الرباعي قد يكون مستطيلاً وقد لا يكون .
(٥) قد يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع وقد لا يكون .

(٦) ص : لأن كل مستطيل هو متوازي أضلاع .

(٧) ص .

(٨) قد يكون متوازي الأضلاع مستطيلاً وقد لا يكون .

(٩) ص : لأن كل مستطيل شكل رباعي .

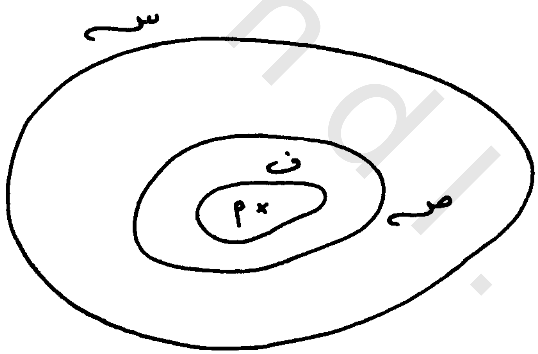
(١٠) خ : ليس كل متوازي أضلاع مستطيلاً .

(١١) ص : لأن كل مستطيل هو متوازي أضلاع .

(١٢) خ : لأن صـ ⊄ ع .

٥٩ – العبارات الصحيحة هي : (٢) ، (٧) ، (٨) ، (٩) ، (١٢) ، (١٣) ، (١٤) ، (١٥) ، (١٦) ، (١٧) .

٦٠ – العبارات الصحيحة هي :(٢) ، (٣)، (٥)،(٦) ،**والشكل (٢١)** يمثل هذه العبارات .



الشكل (٢١)

٦١ – الشكل (١٧) س ∈ سـ ⊆ ك

الشكل (١٨) س ∈ سـ ⊆ ك و س ∈ ع ⊆ ك

و سـ ⊈ ع و ع ⊈ سـ

الشكل (١٩) م ∋ ع ⊇ سـ ⊇ ك

الشكل (٢٠) ص ∋ صـ ⊇ سـ ⊇ ك

و ص ∋ صـ ⊇ ع ⊇ ك

و سـ ⊉ ع و ع ⊉ سـ

٦٢ - لنفرض أن (سـ ⊃ ع ، ع ⊇ صـ) ⇐ سـ ⊇ صـ
إلا أنه إذا كان سـ = صـ فان ع ⊇ سـ لأن ع ⊇ صـ
بالفرض . وهذا خلاف الفرض سـ ⊃ ع وعليه فان
سـ ≠ صـ ومنه المطلوب .

* * *