الجبر المجرد

بطريقة التعلم الذاتي النشط

تأليف

نيل ديفدسون و فرانس جيوليك

ترجمة

الدكتور ديب حسين

راجعه علمياً الدكتور محمد عرفات النتشه

راجعه لغوياً الدكتور احمد سعيدان

منشورات مجمع اللغة العربية الاردني

١٤٠٣هـ - ١٩٨٢م

« المحتوى »

المقدمـة

لقد نشأت فكرة هذا الكتاب من انتقادنا لطريقةالتعليم التقليدية وما يرافقها من تعلم الطالب بالتلقين. ومع البحث المكثف عن البدائل الممكنة قررنا استعمال طريقة التعلم بواسطة المجموعات الصغيرة، حيث يدرس الطالب مادة مساق كالجبر المجرد في مجموعات كل مجموعة من حوالي اربعة اعضاء. اما المدرس فمهمته ان يحل المشاكل التي تصادفها مجموعات الطلبة لا ان يحاضر.

وبطريقة المجموعات الصغيرة هذه يعمل الطلاب على السبورة متعاونين، في مجموعات فيبرهنون النظريات ، و يحلون المسائل ، و يضعون تفصيلات الامثلة المعطاة ، و يعطون امثلة جديدة وامثلة مضادة وكذلك يبتكرون الفرضيات. اما المدرس فيمضي من مجموعة الى اخرى ، كلما لمس الحاجة الى مساعدته فيقدم اقتراحاته ، مشجعاً الطلاب ، و يتأكد من سلامة البراهين والحلول (تفصيلات هذه العملية التعليمية معطاة في كتاب المدرس).

والهدف من طريقة التعليم بمجموعات صغيرة هو خلق مناخ تعاوني متبادل يجري فيه الانتقاد بلا خوف ولا وجل ، ولا يقع فيه تنافس (الا ما قد يقع بين المجموعات). ونتيجة لذلك لا يحتاج المدرس ان يقف باستمرار محاولا جذب انتباه الطلبة لادائه على السبورة ، و يصبح لديه الوقت والفرصة لمراقبة طلبته وفهمهم فرداً فرداً ، بطريقة افضل ، فيعرف الذين عندهم اية مشاكل (دون التأخر الذي قد يمتد الى حين ظهور نتائج الامتحان). كما يساعد الطلبة المبدعين والذين يمكن ان يستفيدوا من تحديات اضافية. وبالرغم من ان الطلاب يغطون في الجبر المجرد

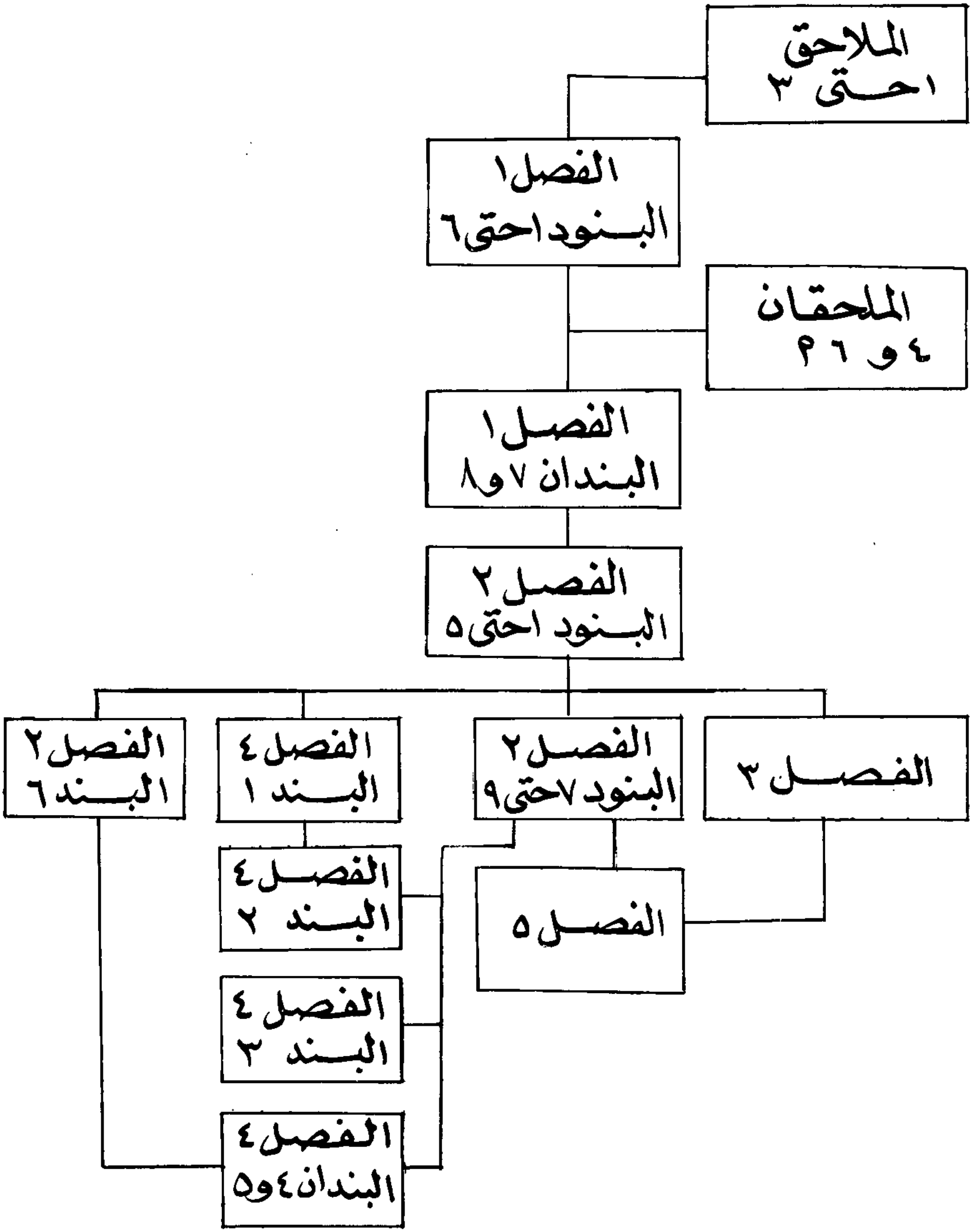
مـادة اقل نوعاً من المادة التي يمكن تغطيتها بطريقة المحاضرة التقليدية، الا اننا نعتقد ان فائدة طريقتنا لكل من المدرس والطالب على السواء تعوضهما عن هذا النقص وتزيد.

وبالرغم من ان هذا الكتاب قد صمم بخاصة لطريقة المجموعات الصغيرة الا اننا نعتقد انه يمكن استخدامه مع اسلوبين آخرين من اساليب التدريس ، احداهما طريقة الاكتشاف الموجه من قبل المدرس بتبادل الحوار بين المدرس وطلبته (طريقة سقراط)، على النحو الذي وضعه جورج بوليا. والثاني هو طريقة محصنة لطريقة ر. ل. مور في الاكتشاف الفردي للطلبة الاذكياء.

يحتوي الكتاب على المواضيع العاديةالتي يضمنها اول مساق في الجبر المجرد . غير اننا وضعنا في حسابنا مجالا عريضا من اختلاف القدرات لدى القراء فوضعنا امثلة كثيرة نعتبرها وسائل للفهم العميق للمفاهيم والنظريات . وتتضمن الملاحق مناقشات قصيرة لنظرية المجموعات والمنطق الرياضي وانواع البراهين وعلاقات التكافؤ والاستقراء والترتيب ونظرية الاعداد . وترد هذه المواضيع في اماكن مختلفة من الكتاب ولذا يجب ان تدرس في اوائل الفصل. وقد كتبت هذه المواضيع بصيغة مصممة للقراءة خارج قاعة التدريس ونتيجة لذلك فان الوقت المخصص لمناقشة الافكار المحتواة في الملاحق يجب ان يكون اقل ما يمكن.

ويبين المخطط التالي التسلسلات المختلفة التي يمكن ان تؤخذ بها مادة المساق. اما المساق النموذجي الذي نقترحه فهو قراءة الملاحق ثم دراسة الفصل الاول ، والبنود ٢,١ حتى ٢,٥ ، ٢,٧ حتى ٢,٩ ، والفصل الثالث مع حذف البندين ٣,٥ و ٣,٨ اذا دعت الضرورة . وتدل خبرتنا الماضية على ان مادة كهذه (لصف متوسط) تحتاج الى حوالي ٤٢ ساعة تدريسية فاذا بدا أن الوقت لا يتسع لهذا كله فان احدى البدائل هي حذف البنود ٢,٧ حتى ٢,٩ مؤقتاً ، وتخصيص ساعتين في نهاية الفصل لمحاضرات على المواد المتضمنة فيها. وقد وضعنا في مرشد المدرس عدة اقتراحات لتقليل الزمن اللازم لتغطية هذه المادة.

ويتضمن الفصلان ٤ ، ٥ مواضيع اختيارية . فالفصل ٤ تقع بنوده في ثلاث مجموعات منفصلة : فالبندان ٤,١ و ٤,٢ عن زمر التبديلات ، والبند ٤,٣ في الاقترانات المحافظة الذاتية للزمر ، والبندان ٤,٤ و ٤,٥ عن الجمع المباشر للزمر والزمر الجزئية. اما بند ٥,١ عن الحلقات الحدودية فيورد عدة امثلة قيمة عن بنود سابقة وهي قيمة في حد ذاتها ، واما البنود ٥,٢ حتى ٥,٥ فتكون وحدة واحدة على المثاليات.


الملاحق ١ حتى ٣
الفصل ١ البنود ١ حتى ٦
الملحقان ٤ و ٦ م
الفصل ١ البندان ٧ و ٨
الفصل ٢ البنود ١ حتى ٥
الفصل ٢ البند ٦
الفصل ٤ البند ١
الفصل ٢ البنود ٧ حتى ٩
الفصل ٣
الفصل ٤ البند ٢
الفصل ٥
الفصل ٤ البند ٣
الفصل ٤ البندان ٤ و ٥

رسالة للطالب

عزيزي الطالب

قد لا يكون لديك خبرة في العمل مع جماعة . فاعلم ان الوفاق الذي تجعله بينك وبين مجموعتك سيكون له الاثر العظيم على تجديد قدرتك على العمل واستمتاعك به، لهذه الاسباب نقترح عليك الارشادات التالية :

اعمل مع زملائك الطلبة بطريقة تعاونية.
شارك في قيادة المجموعة وعلى الكل ان يشارك وليس لاحد ان يسيطر على المنافسة.
لتضع كل مجموعة حلا واحداً لكل مسألة.
تحل كل مسألة على السبورة و يشارك افراد المجموعة كل بدوره في الكتابة.
تأكد من ان كل واحد في المجموعة يفهم الحل قبل البدء بمسألة جديدة.
ليسأل من لم يفهم اياً من الأفكار المطروحة وليجب على الاسئلة من يستطيع.
اصغ باهتمام وحاول توسيع الافكار وتوضيحها.
لا تهتم بعمل المجموعات الاخرى ، يجب على كل مجموعة ان تسير في خطواتها الخاصة بها.
ولتيسير طريقك خلال الكتابة نوضح لك فيما يلي الاصطلاحات التي ستقابلها.
خلال كل فصل هناك تعاريف ومسائل وفرضيات ونظريات وتمهيدات ترقم بالتتابع . وهكذا ستجد سلاسل من مواد كالتالية :

١. تعريف
٢. مسألة
٣. مسألة
برهن النظرية التالية
نظرية
٤. تعريف
٥. مسألة

وفي بعض السلاسل قد لا يكون هناك مسألة ١ أو ٤ أو تعريف ٢ أو ٣ . ان الترقيم المتتابع للعبارات انما هو لمساعدة القاريء في تعيين مواقع المواد المختلفة.

كثيراً ما نذكر مواد من فصل غير الفصل الذي نقرؤه . في مثل هذه الحالات نقول ببساطة ، المسألة ٥ من الفصل ١ مثلا . فاذا ذكرت عبارة دون رقم فصل محدد (مثلا مسألة ٥) . فيكون المقصود المسألة ٥ من الفصل الذي نقرؤه . ولتبسيط الاشارة الى النظريات والتمهيدات التي ترد في المسائل نستعمل رقم المسألة ولا نعطي النظرية رقماً منفصلا . وهكذا ، اذا اردنا ان نشير الى النظرية التي تظهر في المسألة ٣ ، نقول ببساطة النظرية ٣.

وبطريقة مماثلة تعامل الاشارات للنظريات ، وللتعاريف الخ ... الموجودة في الملاحق وهكذا يمكن ان نذكر النظرية ١٠ في الملحق ٦.

وبالاضافة للمسائل فهناك تمارين . فالمسائل الواردة ضمن الشرح تحل مع المجموعة في الصف والتمارين التي في نهاية كل بند هي للحل في البيت فرادي أو جماعات حسب رغبة المدرس.

وعندما نشير الى تمرين في نهاية البند الذي ندرسه ، نقول ببساطة ، التمرين ٨ مثلا . فاذا اشرنا الى تمرين في بند آخر ، من فصل قريء ام لم يقرأ ، يسبق رقم البند رقم التمرين . وهكذا فالاشارة الى التمرين ٣,١ ـ ٦ تعني انك يجب ان تنظر التمرين ٦ من الوظيفة البيتية عند نهاية البند ٣,١. وتعطى الاشارات الى تمارين الملاحق بالكامل ، مثلا التمرين ٢ في الملحق ٦.

وتقسم بعض الملاحق الى بنود ، يشار اليها باحرف . فعندما نشير الى بند في الملحق الذي ندرسه ، نقول ، البند هـ مثلا . وعندما تكون الاشارة الى بند في ملحق آخر ، او عندما نشير

الى بند في فصول الكتاب يتبع حرف البند مباشرة رقم الملحق كما في مثل البند ٤هـ.

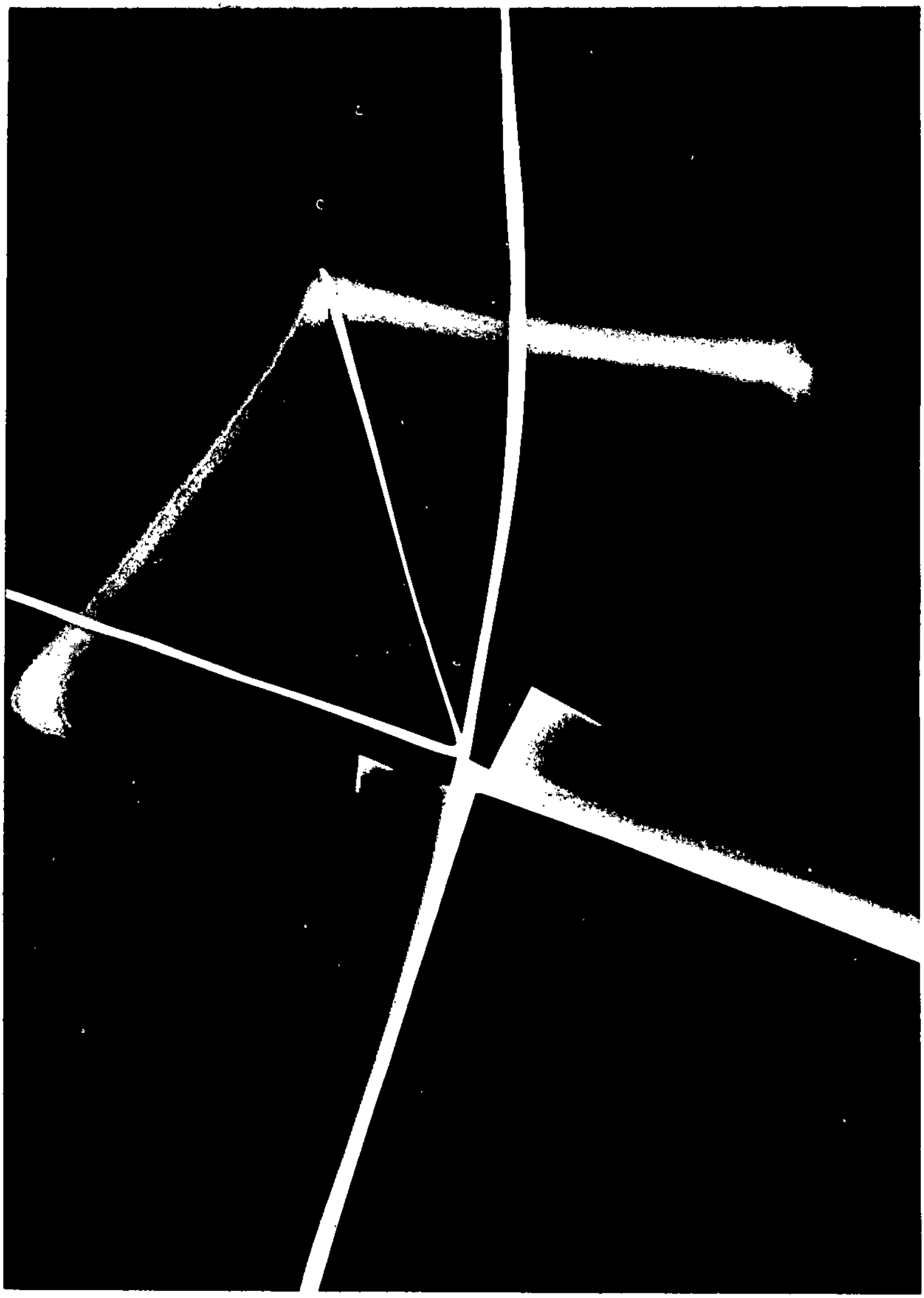
وتجد احياناً الرمز ▲ عند نهاية مسألة او الرمز ● عند نهاية تمرين . يشير هذان الرمزان بأن هناك ١ - شاداً لحل تلك المسألة او ذلك التمرين في آخر الكتاب. وتشير النجمة (★) قبل رقم التمرين ان التمرين سيشار اليه او يستعمل في تمرين قادم أو مسألة. وغالباً ما توضع خطوط لكتابة الاجابات على نسختك من الكتاب.

المؤلفان

مقدمة المترجم

لقد استعنت في كثير من الاحيان بمعجم مصطلحات الرياضيات في التعليم العالي الصادر عن معاجم المؤتمر الثالث للتعريب والتي نشرتها المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم - مكتب تنسيق التعريب في الرباط ، التابع لجامعة الدول العربية. وقد اجتهدت بوضع مفردات مناسبة لبعض المصطلحات التي لم اجدها فيه.

اما من ناحية الرموز فقد استعملت الاحرف الاغريقية كما هي مثل α ، β ، γ وبعض الاحرف الانجليزية التي تستعمل في معظم مقررات الرياضيات مثل Z ، Q ، R ، S_n ، A_n ، D_n الا ان الرموز الثلاثة الاخيرة قد حولتها الى الشكل Sن و Aن و Dن . وكثيراً ما استعملت الحروف سـ ، صـ ، ع ، لـ ، . . لتعبر عن مجموعات معينة وقد وضعت في نهاية الكتاب فهرسا في المصطلحات الواردة في هذا الكتاب.



الفصل الأول

الزمر (تعاريف وأمثلة)

ما هو الجبر المجرد ؟ ان كلمة (جبر) تذكرنا بموضوع درسناه في المدرسة الثانوية يبحث في حل المعادلات الخطية والحدودية وقد ادت دراسة حلول مثل هذه المعادلات الى ما نسميه الآن بالجبر المجرد . فلنعط وصفاً موجزاً للتطور التاريخي للموضوع.

ان السؤال الاساسي الذي شغل الرياضيين منذ العصور القديمة هو ايجاد الحلول للمعادلات الحدودية العامة التى تأخذ الصيغة

$$\text{أ}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}} + \text{أ}_{\text{ن}-1}\,\text{س}^{\text{ن}-1} + \cdots + \text{أ}_1\,\text{س} + \text{أ}_0 = 0$$

حيث أ_0 ، أ_1 ، $\cdots$ ، $\text{أ}_{\text{ن}}$ هي اعداد حقيقية و $\text{أ}_{\text{ن}} \neq 0$

فكانت المسألة ايجاد قيمة ن التي تجعل لهذه المعادلات حلولاً يمكن التعبير عنها بصيغة تحتوي فقط على عمليات من الجمع ، والطرح ، والضرب ، والقسمة ، وأخذ الجذور مهما تكن قيم المعاملات أ_0 ، أ_1 ، $\cdots$ ، $\text{أ}_{\text{ن}}$.

وفي مطلع القرن التاسع كان العرب قد نشروا الحلول عندما ن = ٢ (اي المعادلة

التربيعية التي على الصيغة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠) ، وهذه الحلول هي ما ينجم عن الصيغة التربيعية :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

حيث ب^{٢} - ٤أحـ غير سالب

وبعد فترة طويلة جاءت الخطوة التالية ففي القرن السادس عشر فقط تمكن الرياضيان ترتجليا وفيراري من ايجاد الحلول العامة للمعادلات ذات الدرجة الثالثة (ن = ٣) والرابعة (ن = ٤).* وعلى اية حال فانه خلال القرنين السابع عشر والثامن عشر كانت المعادلة ذات الدرجة الخامسة لا تزال تستعصي على الحل رغم كل المحاولات لايجاد حل عام لها ولسبب واضح .

ففي عام ١٨٢٨ تمكن الرياضي النرويجي نيلز هنريك ابيل باستخدام طرق جبرية فقط من البرهنة وبشكل قاطع على ان المعادلة العامة من الدرجة الخامسة (اي عندما ن = ٥) ليس لها حل بطريقة جبرية محضة.

وفي دراسة للمسألة قبل ذلك بنحو خمسين سنة استعمل لاجرانج تعويضات (تسمى اليوم تباديل او تبديلات) ، وتوصل الى صيغ للمعادلات ذات الدرجة الثالثة والدرجة الرابعة . وبعد ذلك ترجم الرياضيون عمله في التبديلات وكذلك اعمال رياضيي القرن التاسع عشر امثال چالواوكوشي الى المصطلحات التي نراها في هذا الكتاب وغيره من كتب الجبر المجرد وهكذا فان اساسيات الجبر المجرد موجودة وخاصة في الاعمال التي قام بها هؤلاء الرجال الثلاثة . والحقيقة فقد استعمل كل من كوشي وجالوا كلمة «زمرة» في دراستهم للتعويضات (التبديلات) ولحلول المعادلات الحدودية . وتدريجياً ادت اعمال هؤلاء الرياضيين العظماء الى دراسة الزمر ، والحلقات والحقول وهي المواضيع الرئيسية في الجبر المجرد.

---

*تقتضي الموضوعية العلمية ان نذكر هنا حقيقتين:

١ - حل ابن الهيثم المعادلة الرابعة على نحو يشير الى ان فراري لم يأت بجديد.

٢ - كان العرب يقسمون المعادلة التكعيبية الى ١٣ نوعاً وقد حل تارتاجليا نوعين منها بطريقة سرقها من كاردن ونشرها . وثمة مجال للظن بان تارتاجليا اخذ طريقته من كتاب عربي ما يزال مجهولا . والمعروف ان عمر الخيام حل المعادلات التكعيبية بطريقة تقاطع القطوع المخروطية (المدقق).

سندرس في هذا الكتاب الأفكار الاساسية للزمر والحلقات والحقول وسنبدأ بالزمر فنعرف الزمرة ونعطي امثلة عليها ثم ننتقل الى التبديلات فنفحص بشكل خاص خصائص الاقترانات الشبيهة بالزمر. وفي نهاية الفصل الأول سنرى امثلة اخرى على الزمر المنتهية اعتماداً على الهندسة ونظرية الاعداد.

١،١ العمليات الثنائية

من الأفكار الاساسية في الرياضيات فكرة العملية مثل جمع الاعداد الحقيقية أو ضربها. وفيهما تعين لاي عنصرين من المجموعة عنصراً ثالثاً منها. ولكي نعرف فكرة العملية تعريفاً دقيقاً نحتاج الى مفهومين آخرين : الاول هو الاقتران وهذا قد يكون معروفاً لدى القاريء من الجبر أو التفاضل والتكامل :

١. تعريف :

الاقتران من المجموعة سه الى المجموعة صه هو قاعدة تعين لكل س ∈ سه عنصراً واحداً فقط ص ∈ صه . ونرمز الى هذا العنصر ص بالرمز ق (س). فالمجموعة سه هي مجال ق والمجموعة صه هي مدى ق.

وبشكل عام نرمز للاقتران بالرمز ق: سه ← صه

أو سه ←^ق صه ، حيث ق هو رمز للقاعدة ، سه هو المجال ، صه هو المدى .

والامثلة على الاقترانات تشمل الآتي : ق من مجموعة الاعداد الحقيقية اليها معرفاً بالقاعدة :

ق(س) = س^٤ + س^٢

وكذلك ل : {١،٢،٣} ← {١،٢} معرفاً كما يلي :

ل (١) = ١ ، ل (٢) = ٢ ، ل (٣) = ٢.

وبالتأكيد ان القاعدة م : {١،٢} ← {١،٢،٣}

المعرفة م (١) = ١ ، م (٢) = ٢ ، م (٢) = ٣ ليست اقتراناً.

(لماذا ؟) .

وفي هذا الكتاب جعلنا لكل من الرموز Z ، Q ، R المدلولات التالية :

Z = المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحه

= {... ، -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...}

Q = المجموعة المكونة من الاعداد النسبية

= { أ/ب : أ ، ب ∈ Z ، ب ≠ ٠ . }

R = المجموعة المكونة من كل الاعداد الحقيقية

وبالاضافة الى ذلك نستعمل احياناً المجموعات

Z^+ = {س : س ∈ Z و س > ٠.}

Q^+ = {س : س ∈ Q و س > ٠}

R^+ = {س : س ∈ R و س > ٠.}

وفي هذا الكتاب سنتخذ خصائص معينة لجمع الاعداد الحقيقية وطرحها كحقائق مسلم بها . وفي الملحق ٣ ملخص لهذه الخصائص . ويمكن استعمال هذه الخصائص في المسائل اللاحقة.

وفي الملحق تلخيص لمفاهيم نظرية المجموعات .

٢. مسألة :

اي من القواعد التالية تعرف اقتراناً من R^+ الى R ؟

علل اجابتك

أ ق(س) = س^{٢}

ب ق(س) = ص ، حيث ص^{٢} = س

حـ ق(س) = ص ، حيث ص^{٢} = س ، ص ≥ ٠

ويمكن ان تعطى قواعد الاقترانات بطرق عديدة ومختلفة . فمثلا ، الاقتران ق : R ← R يمكن ان يعطى بقاعدة منفردة مثل ق (س) = ٣س^{٢} - س ويمكننا ان نعرف اقتراناً آخر ق : R ← R بقاعدة معقدة نسبياً مثل :

ق (س) = { ٢س (س ≤ ٠) ، س^{٣} (٠ < س ≤ ١) ، ٢س - ١ (س ≥ ١) }

ومن جهة اخرى اذا احتوت مجموعة منتهية عدداً صغيراً من العناصر فيمكن

ذكر قاعدة الاقتران بوضع عناصر المجموعة والصور المقابلة في القائمة ، وهكذا اذا كانت سه = {أ ، ب ، حـ} فيمكن تعريف الاقتران ق : سه ← سه بوضع ق (أ) = ب ق (ب) = حـ ، ق (حـ) = أ أو بواسطة جدول مثل :

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ب} & \text{حـ} & \text{أ} \end{pmatrix}$$

أو بجدول مثل الجدول ١,١

س	ق (س)
أ	ب
ب	حـ
حـ	أ

الجدول ١،١

٣. تعريف :

لتكن سه ، صه مجموعتان فيكون الضرب الديكارتي للمجموعتين سه ، صه هو المجموعة

سه × صه = {(س ، ص) : س ∈ سه ، ص ∈ صه}

وتسمى عناصر الضرب الديكارتي بالازواج المرتبة.

ان المستوى الاحداثي R^2 هو مثال على الضرب الديكارتي وفي هذه الحالة فهو الضرب الديكارتي للمجموعة R المكونة من الاعداد الحقيقية مع نفسها .واليك امثلة على عناصر R^2 : (٠ ، ١) ، ($-\sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٣}$) ، ($\frac{١}{٢}$ ، -٢)،(π ، ٣)الخ.

والاقتران الذي مجاله الضرب الديكارتي سه × صه الى سه له اسم خاص.

٤. تعريف :

العملية الثنائية على المجموعة سه هي اقتران من سه × سه الى سه. وهكذا فان اي عملية ثنائية ما هي الا قاعدة ٥ تعين لكل زوج مرتب (أ ، ب) في سه × سه عنصراً واحداً بالضبط من عناصر سه و يرمز لهذا العنصر بالرمز أ٥ب والرمز أ٥ب الذي هو صورة الزوج (أ ، ب) يدعى مركبة هذا الزوج المرتب (ما لم يذكر غير ذلك) وتسمى العملية ٥ تركيباً .

واكثر الامثلة المألوفة على العمليات الثنائية هما عمليتا جمع الاعداد الحقيقية وضربها. وهذان هما على الترتيب الاقترانات $R \times R \xrightarrow{+} R$ معرفاً بالعلاقة (أ ، ب) ⟵ أ + ب،

$R \times R \xrightarrow{\cdot} R$ معرفاً بالعلاقة (أ،ب) ⟵ أ.ب أو (أ،ب).
وكالعادة تسمى أ+ب حاصل جمع أ مع ب وتسمى أب حاصل الضرب.
لاحظ ان هناك نقطتين يجب فحصهما للتحقق من ان القاعدة المعطاة تعرف عملية ثنائية على المجموعة سه .

اولا : يجب ان تكون القاعدة اقتراناً معرفاً تعريفاً سليماً : فيجب ان تعين لكل زوج مرتب (أ،ب) ∈ سه × سه عنصراً واحداً بالضبط أ٥ب.
ومن الامثلة على هذا المطلب مثال تقدمه المجموعة Q للاعداد النسبية : ففيها يمكن كتابة العنصر $\frac{١}{٢}$ بالصيغ $\frac{٣}{٦}$ ، $\frac{٤}{٨}$ ، ، $\frac{١٠}{٢٠}$ وهكذا ، بينما يمكن كتابة العنصر $\frac{٣}{٤}$ بالصيغ $\frac{٦}{٨}$ ، $\frac{٩}{١٢}$ ، $\frac{١٨}{٢٤}$ وهكذا . فاي عملية ثنائية معرفة على الاعداد النسبية يجب ان تعين للزوج المرتب ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$) نفس العدد الذي تعينه للازواج المرتبة ($\frac{٣}{٦}$ ، $\frac{٦}{٨}$) ، ($\frac{٤}{٨}$ ، $\frac{٩}{١٢}$) ، ($\frac{١٠}{٢٠}$ ، $\frac{١٨}{٢٤}$) وهكذا . . . يجب الا يعتمد الجواب على الاسمين المختارين لعناصر الزوج . ونعبر عن هذا عادة بقولنا ان الاقتران معرف تعريفاً صحيحاً او حسن التعريف . ولهذا اذا كانت العملية جمعاً في Q فيجب ان ينتج ان
$\frac{١}{٢}$ + $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٣}{٦}$ + $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٤}{٨}$ + $\frac{٩}{١٢}$ . . . وهكذا ولمعظم العمليات المفروضة على مجموعة اختيارية سه لا كلها ، يكون شرط كونها اقتراناً معرفاً تعريفاً صحيحاً امراً ظاهراً تماماً لا يحتاج الى برهان
والشرط الثاني في تعريف العملية الثنائية هو ان يكون لكل زوج (أ،ب) ∈ سه × سه صورة أ.ب هي نفسها عنصراً في سه . وبعبارة اخرى يؤكد هذا الشرط ان يكون لكل أ،ب∈ سه صورة أ٥ب ∈ سه. وقد استعملت في الماضي العبارة «سه مغلقة بالنسبة للعملية ٥» للتعبير عن هذه الخاصية . ففي اي عملية معطاة يجب التحقق من وجود خاصية الانغلاق هذه .
فصفوة القول انه لكي نبرهن على ان قاعدة معينة تعرف عملية ثنائية ٥ على سه يجب ان نبرهن أن القاعدة هي اقتران معرف تعريفاً سليماً وان سه مغلقة بالنسبة للقاعدة ٥.

٥. مسالة :

ا. هل التناظر المعرف بالصيغة (أ،ب) ⟵ أ−ب
لكل (أ،ب) ∋ Z × Z هو عملية ثنائية على Z ؟

ب. هل القسمة عملية ثنائية على مجموعة الاعداد الصحيحة المغايرة للصفر Z − {٠}؟

اي انه اذا كانت قاعدة تناصر معرفة على ان م(س) = ص

$(Z - \{0\}) \times (Z - \{0\})$ بالصيغة (أ ، ب) ← أ/ب

فهل هذا يعرف عملية ثنائية على $Z - \{0\}$ ؟

وفي دراستنا اللاحقة سيكون اهتمامنا منصباً على عمليات ثنائية لها خصائص معينة ولهذا السبب سنقدم مفهومي العمليات الثنائية التجميعية والتبديلية.

٦. تعريف :

أ. تكون العملية الثنائية ○ على المجموعة سہ تجميعية اذا وفقط اذا كان لكل أ ، ب ، حـ ∈ سہ

أ ○ (ب ○ حـ) = (أ ○ ب) ○ حـ

ب. تكون العملية الثنائية ○ على المجموعة سہ تبديلية اذا وفقط اذا كان لكل زوج أ ، ب ∈ سہ

أ ○ ب = ب ○ أ

٧. مسألة :

عين اي العمليات التالية على مجموعة الاعداد الحقيقية تجميعية او تبديلية .
(استعمل الخصائص الموجودة في الملحق ٣ لايجاد حل سريع لهذه المسألة)

أ الجمع

ب الطرح

جـ الضرب

اننا نألف العمليات التبديلية ولذلك قد يسأل المرء هل هناك مجموعة ذات اهمية خاصة تجري عليها عملية ثنائية تجميعية. وليست تبديلية . كانت اول مرة ظهرت فيها مجموعة من الاعداد تجري عليها عملية ضرب غير تبديلية عام ١٨٤٣ على يد هاملتون الذي تأثر بالفرضيات الأولية للمجموعة الى حد انه حفر القاعدة الرئيسية على جسر في دوبلن (انظر التمرين ٣,٧-١٠). وقد وضع كايلي مثالا آخر وكايلي هذا له الفضل في ابتكار المصفوفات فهو أول من وضع اسس نظرية المصفوفات بطريقة منظمة . وسندرس هنا وفي بنود قادمة احدى المجموعات البسيطة من المصفوفات.

٨. تعريف :

افرض ان م٢ (R) هي مجموعة المصفوفات ذات الرتبة ٢×٢

اي $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{pmatrix}$ حيث المدخلات حقيقية

اي ان $\text{م}_{٢}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{pmatrix} : \text{ا،ب،حـ،د} \in R \right\}$

في التعريف تكون المصفوفتان من الرتبة ٢ × ٢ متساويتين اذا فقط اذا كانت مدخلاتهما المتقابلة متساوية وبهذا يكون

$$\begin{pmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ع} & \text{ن} \end{pmatrix}$$ اذا وفقط اذا كان

ا = هـ ، ب = و ، حـ = ع ، د = ن

ويعرف الجمع على $\text{م}_{٢}(R)$ ويرمز له بالرمز + بوضح

$$\begin{pmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ع} & \text{ن} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ا+هـ} & \text{ب+و} \\ \text{جـ+ع} & \text{د+ن} \end{pmatrix}$$

٩. مسألة :

ا. هل الجمع المعطى في التعريف ٨ عملية ثنائية على $\text{م}_{٢}(R)$ ؟

ب. هل هو عملية تجميعية ؟

جـ هل الجمع عملية تبديلية ؟

علل اجاباتك

١٠. تعريف :

يعرف الضرب على $\text{م}_{٢}(R)$ ، والذي يرمز له بالرمز • بالصيغة

$$\begin{pmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ن} & \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{اهـ + ب ن} & \text{او + ب ع} \\ \text{حـهـ + د ن} & \text{جـو + د ع} \end{pmatrix}$$

وقد نتج هذا الضرب الغريب عن العمل في انظمة من المعادلات الخطية واقترانات خاصة $\text{و}_{ر} : R^{2} \leftarrow R^{2}$ بالصيغة :

$\text{و}_{ر}$(س ، ص) = (ا س + ب ص ، حـ س + د ص) .

وسنكشف هذه العلاقة بين الضرب والاقترانات الخاصة فيما بعد في التمرين ١,٤-٥.

١١. مسألة :

ا. هل ضرب المصفوفات عملية ثنائية على $\text{م}_{٢}(R)$ ؟ وضح.

ب. برهن ان ضرب المصفوفات عملية تجميعية.
جـ هل ضرب المصفوفات عملية تبديلية ؟ علل اجابتك.

اذا كانت سم مجموعة منتهية صغيرة فمن الملائم احياناً ان نعرف اي عملية ثنائية على سم بواسطة جدول يمكن بناؤه كما يلي :

تكتب جميع عناصر المجموعة سم في السطر الأعلى من الجدول . وكذلك تكتب عمودياً بنفس الترتيب في الجهة اليمنى من الجدول. ولكي تحسب المركبة س٥ص ، عين أولا الصف الذي تكون فيه س على اليمين . ففي هذا الصف تظهر س٥ص في العمود الذي يكون العنصر ص في اعلاه . ولهذا فان س٥ص موجودة في الصف الذي يحدده س (على يمين الجدول) والعمود الذي يحدده ص (في اعلى الجدول) ، كما يظهر في الجدول ١,٢ ، وهذا الاصطلاح مستعمل في جميع جداول العمليات خلال الكتاب.

الجدول ١,٢

٥	. . . ص
.	.
.	.
.	.
.	.
س	. . . س٥ص

١٢. مسألة :

لقراءة الجدول ١,٣ عبر الصف الثاني لاحظ ان :

ب٥أ = ب ، ب.ب = حـ ، ب٥حـ = ــ ، ب٥د = ــ

الجدول ١,٣

٥	أ	ب	حـ	د
أ	أ	ب	حـ	د
ب	ب	حـ	د	أ
حـ	حـ	د	أ	ب
د	د	أ	ب	حـ

ب. اثبت ان الجدول ١,٣ يعرف عملية ثنائية على المجموعة سم =$\{$أ ، ب ، حـ ، د$\}$. تذكر انه يجب

عليك ان تثبت (١) ان التناظر (سه ، صه) ←س٥ص كما هو معروف بالجدول ١,٣ هو اقتران معرف تعريفاً صحيحاً و (٢) ان سه مغلقة بالنسبة لهذا الاقتران .

حـ. افحص حالة خاصة للخاصية التجميعية للعملية بحساب ب٥ (حـ٥د) وكذلك (ب٥حـ) ٥د.
وافحص بعد ذلك حالة اخرى للخاصية التجميعية .

د. هل العملية ٥ تبديلية ؟ صف اختياراً بسيطاً للتبديلية بفحص الجدول ١,٣.

تمارين

١. افرض ان أ،ب عددان حقيقيان
عرف أ٥ب بانه العدد أ٥ب = أ + ب - أب
وبذا اثبت ان ٥ تعرف عملية ثنائية على R . هل العملية تجميعية؟ تبديلية؟ علل اجاباتك.

٢.* (تشير النجمة الى ان هذا التمرين سيشار اليه او يستعمل في تمرين قادم) .
بين في كل من المجموعات التالية فيما اذا كان الجمع عملية ثنائية عليها ام لا . علل اجاباتك.

أ. Z ، أي المجموعة المكونة من جميع الاعداد الصحيحة الموجبة.

ب. المجموعة المكونة من جميع الاعداد الزوجية :
٢Z = {٢ن : ن∋Z}

حـ. المجموعة المكونة من جميع الاعداد الفردية :
{٢ن + ١ : ن∋Z}

د. {ن٢ : ن∋Z}

هـ. {٠} U {±٢ن : ن∋Z+}

٣.* لتكن سه = {أ ، ب ، حـ ، د}
عرف تناظرا (س،ص)←س٥ص باستعمال الجدول ١,٤.

أ. بين ان هذا التناظر يعرف عملية ثنائية على سه .؟

ب. هل العملية تبديلية؟

حـ. افحص حالتين خاصتين للخاصية التجميعية لهذه العملية.؟

الجدول ١,٤

٥	أ	ب	حـ	د
أ	أ	ب	حـ	د
ب	ب	أ	د	حـ
حـ	حـ	د	أ	ب
د	د	حـ	ب	أ

٤.* لتكن $R^2 = R \times R$. عرف ارتباطاً.

$R^2 \times R^2 \xrightarrow{+} R^2$ بوضع

(أ،ب) + (جـ،د) = (أ+جـ ،ب+د)

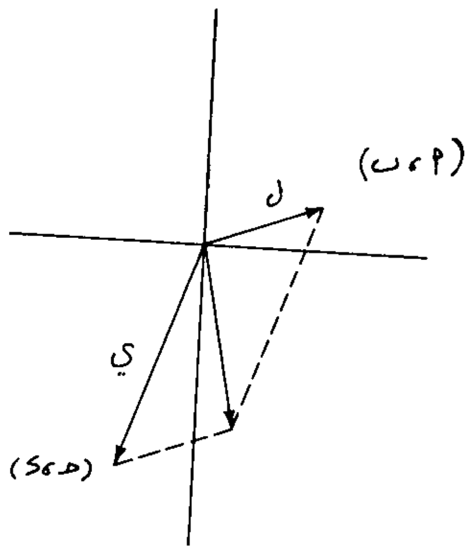
لكل (أ،ب) ، (جـ،د) $\in R^2$.

أ. اثبت ان + هي عملية ثنائية على R^2 . تدعى هذه العملية بالجمع و يدعى (أ،ب) + (جـ،د) حاصل جمع (أ،ب) مع (جـ،د)

ب. برهن ان الجمع هو عملية تجميعية على R^2.

جـ. برهن ان الجمع هو عملية تبديلية على R^2.

د. عين نقطتين (أ،ب) و (جـ،د) في R^2. ولتكن ل القطعة المستقيمة من (٠،٠) الى (أ،ب) وي القطعة المستقيمة من (٠،٠) الى (جـ،د). اكمل متوازي الاضلاع الذي ضلعاه ل وي ورؤوسه (أ،ب) ، (٠،٠) ، (جـ،د) كما هو مبين في الشكل ١,١ . بين ان (أ،ب) + (جـ،د) هو الرأس الرابع لمتوازي الاضلاع هذا.



الشكل ١,١

٥. لنفرض ان أ★ب لكل (أ،ب)$\in Q \times Q$ معرفة كالاتي :

$$أ★ب = \begin{cases} \text{أ اذا كانت أ} > \text{ب} \\ \text{ب اذا كانت ب} > \text{أ} \\ \text{أ اذا كانت أ} = \text{ب} \end{cases}$$

فتكون أ ★ب هي القيمة الأعظم من بين أ و ب.

أ. أوجد أ★ب لعدة قيم تأخذها أ و ب.
علل اجاباتك للمسائل التالية :
ب. هل ★ عملية ثنائية على Q ؟
جـ. هل ★ عملية تجميعية ؟
د. هل ★ عملية تبديلية ؟
٦. لكل أ،ب ∈ Q : ضع

$$أ \circ ب = \frac{أ+ب}{ك}$$

حيث ك عدد صحيح موجب وثابت (اذا كانت ك = ٢ فان أ∘ب هي متوسط أ و ب . علل اجاباتك على الاسئلة التالية :
أ. هل ∘ عملية ثنائية على Q ؟
ب. هل ∘ عملية تجميعية ؟
جـ. هل ∘ عملية تبديلية ؟
د. لأي من قيم ك تكون ∘ عملية ثنائية على Z ؟

١,٢ الزمر

رأينا امثلة عديدة على مجموعات تعرف عليها عملية ثنائية هي على الاقل تجميعية وقد تكون ايضاً تبديلية . فعلى المجموعات : R المكونة من الاعداد الحقيقية ، Q المكونة من الاعداد النسبية ، و Z المكونة من الاعداد الصحيحة تكون العملية الثنائية للجمع تجميعية وفيها عنصر صفري ونظائر جمع (اي الاعداد ـ أ حيث ان أ + (ـ أ) = ٠) .

وسنناقش هذه الخصائص اولا تجريدياً في التعريف التالي ، وفيما بعد خلال امثلة ودراسة اعمق.

١٣. تعريف :
الزمرة (سه،∘) هي مجموعة سه معرف عليها عملية ثنائية∘ تحقق الفرضيات التالية :
أ. العملية تجميعية : لكل أ ، ب ، حـ ∈سه .
اي ان أ∘(ب∘حـ) = (أ∘ب) ∘حـ
ب. فيها عنصر محايد : اي عنصر و ∈ سه بحيث ان

و ٥ ٢ = ٢ ٥ و = ٢ لكل ٢ ∋ سه

حـ . فيها نظائر : فلكل ٢ ∋ سه هناك عنصر ٢َ ∋ سه حيث ان :

٢ ٥ ٢َ = ٢َ ٥ ٢ = و

يسمى العنصر ٢َ نظير العنصر ٢.

لاحظ ان هناك اربعة شروط يجب توافرها في اي نظام (سه ، ٥) حتى يكون زمرة . ونعطي هنا هذه الشروط كقائمة اختبار لاي مجموعة سه فيها ارتباط (٢،ب) ← ٢٥ب معرفة على سه × سه

قائمة اختبار لبنية الزمرة

ا. هل الارتباط عملية ثنائية على سه ؟

وبشكل خاص هل س مغلقة بالنسبة الى ٥ ، اي هل ٢٥ب ينتمي الى سه لكل ٢ ، ب ∋ سه ؟

واحياناً لا يكون الارتباط ٥ اقتراناً معرفاً تعريفاً جيداً. وفي تلك الحالة من الضروري ان نتحقق ايضاً من ان عنصراً واحداً بالضبط من سه يعين للزوج (٢،ب) مهما يكن العنصران ٢،ب.

ب. هل العملية تجميعية ؟ هل ٢٥(ب٥حـ) = (٢٥ب)٥حـ لكل ٢،ب،حـ ∋ سه

حـ هل يوجد عنصر محايد ؟ لاثبات هذا فانه من الضروري ايجاد عنص واحد و∋سه حيث ان

و ٥ ٢ = ٢٥و = ٢ لكل ٢∋سه إنه لا يكفي أن نبين أن

و ٥ ٢ = ٢٥و = ٢ لعنصر واحد معين في سه.

د. هل لكل عنصر في سه نظير ؟ يجب برهان هذا فقط بعد ايجاد العنصر المحايد للمجموعة سه ولعمل ذلك اختر اي عنصر ٢∋سه وبين بعد ذلك انه يوجد عنصر ٢َ∋سه حيث ان ٢ ٥ ٢َ = ٢َ ٥ ٢ = و.

ناقشنا في البند ١،١ عمليات الجمع ، والضرب ، والطرح على R ، Z فلنختبر الآن هل الانظمة الناتجة زمر ام لا ؟

١. **مسألة :**

اي من النظم التالية زمر . أعط اسباب اجاباتك . ولا تحاول ان تبرهن خصائص Z ، Q ، R بالنسبة للجمع والضرب . وحيثما أمكن استعمل الخصائص من الملحق ٣.

أ. $(Z \text{ ، } +)$

ب. $(Q \text{ ، } +)$

حـ $(R \text{ ، } +)$

د. $(Z \text{ ، } \cdot)$ حيث ترمز $\cdot$ الى عملية الضرب

هـ $(Q \text{ ، } \cdot)$

و. $(R^+ \text{ ، } \cdot)$ حيث $R^+ = \{$س : س$\in R$ ، س$>\cdot\}$

ر. $(Z \text{ ، } -)$ حيث $-$ ترمز الى عملية الطرح

ح. $(R - \{\cdot\} \text{ ، } /)$ حيث / ترمز الى عملية القسمة.

رأينا ان بعض العمليات الثنائية تبديلية . اذا كان لزمرة ما عملية ثنائية تبديلية ، تعطى الزمرة اسماً خاصاً ، كما يلي :

تعريف :

تسمى الزمرة (سه ، ٥) تبديلية أو ابيلية اذا وفقط اذا كانت العملية ٥ تبديلية (اي ان ، أ٥ب = ب٥ أ لكل أ،ب$\in$سه)

مسألة :

اي من الزمر في المسألة ١٤ زمر تبديلية ؟ علل اجاباتك .

مسألة :

لتكن م$_٢$ (R) المجموعة المكونة من جميع المصفوفات ٢×٢ مع الجمع المعطى في التعريف ٨.

اثبت او انقض ان (م$_٢$(R) ، +) هي زمرة .

هل هي تبديلية ؟ (انظر المسألة ٩).

مسألة :

أجب عن الاسئلة التالية باستعمال التعريف ١٠ للضرب في م$_٢$(R)

ا. هل هناك عنصر محايد للضرب في م$_٢$(R) ؟ اذا كان ذلك فما هو ؟

ب. تحت اي الشروط يكون للمصفوفة نظير ضرب ؟ للأجابة على هذا السؤال اوجد النظير الضربي للمصفوفة :

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ى} \end{pmatrix}$$

(اذا وجد) واكمل الجمل التالية :

يكون للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} ا & ب \\ حـ & د \end{pmatrix}$$

نظير ضربي اذا وفقط اذا كان ....

واذا كانت س = $\begin{pmatrix} ا & ب \\ حـ & د \end{pmatrix}$ فأن النظير الضربي يرمز له بالرمز

$\begin{pmatrix} ا & ب \\ حـ & د \end{pmatrix}^{-1}$ او $س^{-1}$ هو المصفوفة ....

(ان الرمز ▲ يعني ان هناك ارشاداً لحل المسألة . وتجد ارشادات المسائل في اخر صفحات الكتاب).

تعريف :

تسمى المصفوقة التي لها نظير ضربي مصفوفة غير منفردة . واذا لم يكن لها نظير ضربي تسمى مصفوفة منفردة.

وباستعمال المسألة ١٨ نجد ان المصفوفة

$$\begin{pmatrix} ا & ب \\ حـ & د \end{pmatrix}$$

تكون غير منفردة اذا وفقط اذا تحقق الشرط

مسألة :

هل ($م_٢$(R) ، ٠) زمرة ؟ وضح

اترك برهان العرضية التالية للتمرين ٤.

عرضية :

لتكن ل ترمز الى المجموعة المكونة من كل المصفوفات غير المنفردة ٢×٢ فتكون (ل ، ٠) زمرة غير تبديلية.

رأينا في البند ١،١ ان العملية الثنائية يمكن تعريفها بواسطة جدول . استعمل نتائج المسألة ١٢ لحل المسألة التالية :

مسألة :

لتكن سه = {ا،ب،حـ،د} . عرف عملية ثنائية ٥ على سه بواسطة الجدول ١،٥

ا. على فرض ان العملية تجميعية ، بين هل (سه،٥) زمرة ام لا؟

ب. هل (سه،٥) زمرة تبديلية ؟

الجدول ١,٥

٥	أ	ب	حـ	د
أ	أ	ب	حـ	د
ب	ب	حـ	د	أ
حـ	حـ	د	أ	ب
د	د	أ	ب	حـ

مسألة :

لخص نتائجك . اعمل قائمة تشمل كل نظام ناقشناه في هذا البند واذكر اذا كان زمرة ام لا . واي من هذه الزمر غير تبديلية ؟

تمرين ١ : بين اي المجموعات الجزئية التالية من R زمر بالنسبة لعملية الجمع العادية للاعداد. علل استنتاجك . (قد يساعد كتابة بضع عناصر لكل مجموعة).

وكذلك انظرالى التمرين ١ ، ١-٢ .

أ. Z^+ مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة

ب※. مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية : ٢Z = {٢ن : ن ∈ Z}

حـ※. مجموعة الاعداد الصحيحة الفردية : {٢ن + ١ : ن ∈ Z}

د. {± ن^٢ : ن ∈ Z}

هـ {٠} ∪ {± ٢^ن : ن ∈ Z^+}

بين اي المجموعات التالية زمر بالنسبة لعملية الضرب العادية على الاعداد . علل استنتاجك .

أ※. Q − {٠}

ب※. Q^+ = {س : س ∈ Q و س > ٠}

حـ Q^- = {س : س ∈ Q و س < ٠}

د. {± ن^٢ : ن ∈ Z^+}

هـ {٢^ن : ن ∈ Z}

و. R

ز※. R − {٠}

ح. R^- = {س : س ∈ R و س ≤ ٠}

٣. أ . هل مجموعة الاعداد غير النسبية زمرة بالنسبة الى الجمع ؟ اوضح

ب. هل مجموعة الاعداد غير النسبية زمرة بالنسبة لعملية الضرب ؟ علل اجابتك .
برهن ان المجموعة ل المكونة من المصفوفات ٢×٢ غير المنفردة زمرة غير تبديلية بالنسبة الى ضرب المصفوفات . قد يفيدك استخدام رموز المحددات :

في اي مصفوفة س = $\begin{pmatrix} ٩ & ب \\ حـ & د \end{pmatrix}$

تكون محددة س ، وتختصر الى مح س ، هي ٩د ـ ب حـ • المسألة ١٨ب تؤكد ان المصفوفة س غير منفردة اذا وفقط اذا كانت مح س $\neq$ ٠
(يشير الرمز ● الى وجود ارشاد للتمرين . ارشادات التمارين مكانها في آخر الكتاب).

٥*.
لتكن Q [$\sqrt{٢}$] = {٩ + ب $\sqrt{٢}$: ٩ ، ب $\in$ Q}
فتكون Q [$\sqrt{٢}$] مجموعة جزئية من R ستحتاج في المسائل التالية الى استعمال هذه الحقيقة والى ان $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي :

٩. اثبت ان ٩ + ب $\sqrt{٢}$ = حـ + د $\sqrt{٢}$ حيث ٩،ب،حـ،د $\in$ Q اذا وفقط اذا كان ٩ = حـ ، ب = د.
ب. بما ان Q [$\sqrt{٢}$] هي مجموعة جزئية من R فيمكن تعريف الجمع على عناصر Q [$\sqrt{٢}$] . هل جمع الاعداد عملية ثنائية على Q [$\sqrt{٢}$] ؟
حـ اثبت او انف ان (Q [$\sqrt{٢}$] ، +) تكون زمرة .

٦* ٩. اثبت انه اذا كانت · ترمز الى الضرب العادي للاعداد الحقيقية فانه لكل ٩ + ب $\sqrt{٢}$ ، حـ + د $\sqrt{٢}$ $\in$ Q [$\sqrt{٢}$]،
(٩ + ب $\sqrt{٢}$) · (حـ + د $\sqrt{٢}$) = ________ + ________ $\sqrt{٢}$
تأكد من اثبات ان الفراغات مملوءة باعداد نسبية .
ب. أثبت أو انف ان (Q [$\sqrt{٢}$] − {٠} ، ·) هي زمرة.

٧ لتكن سه = {$\frac{م}{٧^{ن}}$: م،ن $\in$ Z ، ن $\geq$ ٠} فتكون س مجموعة جزئية من Q وتكون العمليات العادية للجمع والضرب معرفة على سه.
٩. أثبت او انف ان (سه ، +) زمرة.

ب. اثبت او انف ان (سه - $\{\cdot\}$، ·) زمرة .

٨. لتكن سه = $\left\{\frac{م}{ب^ن} : م ، ن \in Z \text{ و } ن > \cdot\right\}$ حيث ب عدد اولي ثابت.

ا. اثبت او انف ان (سه ، +) زمرة .

ب. أثبت او انف ان (سه - $\{\cdot\}$ ، ·) زمرة .

٩ لتكن سه = {ا،ب،حـ،د} ولتكن ∘ عملية ثنائية على سه معرفة بالجدول ١,٦ (انظر تمرين ١,١ - ٢)

الجدول ١,٦

∘	ا	ب	حـ	د
ا	ا	ب	حـ	د
ب	ب	ا	د	حـ
حـ	حـ	د	ا	ب
د	د	حـ	ب	ا

ا. على فرض ان العملية تجميعية ، برهن ان (سه ، ∘) زمرة . تسمى هذه الزمرة بزمرة كلاين الرباعية.

ب. هل العملية تبديلية ؟

١٠ ليكن $R^٢ = R \times R$ هو المستوى الديكارتي العادي . في التمرين ١,١-٤ قد عرفت عملية ثنائية بوضع

(ا،ب) + (حـ ، د) = (ا + حـ ، ب + د) لكل (ا،ب) ، (حـ،د) $\in R^٢$

فهل ($R^٢$ ، +) زمرة ؟ علل اجابتك . يمكنك استعمال اجابات تمرين ١,١-٤.

١,٣ الخصائص الأولية للزمر

رأينا في بند ١,٢ عدة امثلة على الزمر ، وفي هذا البند سنثبت عدداً من الخصائص الاولية التي تكون صحيحة في اي زمرة (سه،∘) وبعد برهنة هذه الخصائص في زمرة اختيارية يمكن استخدامها لأي زمرة معينة . وهكذا يعطي هذا البند بعض خصائص الجبر المجرد فعند برهان اي نظرية في اي نظام يمكن استعمالها لاي حالة خاصة من هذا النظام .

في هذا البند قد تحتاج الى استعمال النتيجة التالية لتعريف العملية الثنائية :

عرضية :

اذا كانت (سه،٥) زمرة وكانت و،س،ص،ع ∈سه حيث و = سه وكذلك صه = ع فان و٥ص = س٥ع.

ان برهان العرضية ٢٤ ينتج مباشرة من تعريف العملية الثنائية ٥ على سه وبالنسبة لهذه العملية تكون و٥ص صورة (و،ص) وكذلك س٥ع صورة (س،ع) . وبما ان و=س ، ص=ع فتكون (و،ص) = (س،ع). (لماذا ؟). ومن ثم فان الصورتين و٥ص و س٥ع تكونان متساويتين. (لماذا؟)

مسألة :

لتكن (سه ، ٥) زمرة . برهن العرضيات التالية :

اكتب كل برهان بدقة مع العناية الخاصة بالاقواس وحيثما امكن استعمال النتائج السابقة لبرهنة العبارات اللاحقة.

أ. قانون الاختزال الايمن. اذا كانت أ،ب،حـ∈سه وكان أ٥ب = أ٥حـ كان ب = حـ

ب. قانون الاختزال الايسر اذا كانت أ،ب،حـ∈س وكان أ٥جـ = ب٥حـ كان أ = ب. (لماذا يكون ضرورياً ذكر قوانين الاختزال ؟)

حـ للزمرة (سه،٥) عنصر محايد واحد فقط

د. اذا كان أ∈سه فللعنصر أ نظير واحد فقط في سه.

هـ لكل أ∈سه ، (أَ)َ = ————— .

و. لكل أ،ب ∈س ، (أ٥ب)َ = ———(تأكد من اجابتك بايجاد مركبة أ٥ب والنظير المقترح.)

ز. لكل أ،ب ∈سه يوجد عنصر واحد فقط س∈سه حيث ان س٥أ =ب ، فالعنصر س = ————— .

ح. لكل أ،ب ∈سه هناك عنصر واحد فقط ص∈ سه حيث ان أ٥ص = ب، فالعنصر ص = ————— .

مسألة :

يمكن اعادة كتابة العرضية ز في المسألة ٢٥ كالآتي :

لكل أ،ب ∈ سه يكون للمعادلة س٥أ = ب حل واحد فقط هو س =——— ∈سه . اعد كتابة العرضية ح بهذه الطريقة.

رأينا امثلة عديدة على الزمر مثل (Q - {٠} ، ٠) ، (R - {٠}،٠) و (ل،٠) حيث تدعى العملية عملية ضرب و يرمز لها بالرمز . أو بوضع العنصرين احدهما بعد الآخر . وكل زمرة مثل هذه تسمى زمرة ضرب . وفي اي زمرة ضرب يكتب العنصر المحايد I و يرمز للنظير أَ للعنصر أ

بالرمز ؟ ورأينا كذلك عدة امثلة على زمر مثل $(Q,+)$ ، $(R,+)$ و (م$_{ا}$(R)،+) حيث تدعى العملية عملية جمع و يرمز لها بالرمز +. تدعى مثل هذه الزمرة بزمرة الجمع ، و يكتب العنصر المحايد في زمرة الجمع • و يسمى العنصر الصفري ، و يرمز للنظير اَ بالرمز - ا.

و يشعر العاملون بالجبر بعدم الارتياح عند استعمال الرمز + لعملية غير تبديلية ولهذا سنتبنى الاصطلاح على ان الرمز + يستعمل فقط اذا كانت العملية تبديلية . لاحظ ، ان + قد **تستعمل لعمليات ثنائية ليست** شبيهة بعملية الجمع العادية على Z،Q، أو R، وان بعض العمليات التبديلية يرمز لها برموز غير +

مسألة :

استعمل الرموز التي اصطلحنا عليها اعلاه لترجمة نتائج الفرضيتن ز،ح من المسألة ٢٥ كما يلي :

ا. اذا كانت (سه،٠) زمرة ضرب فاكتب الحل للمعادلة س٠ا = ب وبعد ذلك اكتب الحل للمعادلة ا٠ص = ب.

هل من الضروري ان يتساوى الحلان س،ص ؟

ب. في زمرة الجمع (ومن ثم التبديلية) (س،+) اكتب الحل للمعادلة

س+ ا = ب وللمعادلة ا+ص = هل س = ص ؟

تبين النظريتان ٢٨ و ٢٩ التاليتان ان مسلمات الزمرة يمكن التعبير عنها بعدة طرق متكافئة. برهان هاتين النظريتين صعب . فاتركهما للتمرينين ٧ و ٨.

نظرية :

لتكن سه مجموعة عرفت عليها عملية ثنائية ٥ تحقق الشروط التالية :

ا. العملية ٥ تجميعية.

ب. يوجد عنصر و∋سه يسمى عنصراً محايداً ايمن حيث ان

ا٥و = ا . لكل ا∋س

حـ **لكل** ا∋سه يوجد عنصر اَ∋سه بحيث ان ا٥اَ = و

يسمى العنصر اَ نظير ا الايمن.

اذا تحقق كل ذلك تكون (سه،٥) زمرة .

وبالطبع هناك نظرية مشابهة تتعلق بالعنصر المحايد الأيسر والنظير الأيسر.

نظرية :

لتكن سه مجموعة عرفت عليها عملية ثنائية ٥ تحقق الشروط التالية :

ا. العملية ٥ تجميعية

ب. لكل ا،ب∋سه للمعادلة س٥ا = ب حل س∋سه

جـ لكل أ،ب∈سه للمعادلة أ٥ص = ب حل ص∈سه

فاذا تم ذلك تكون (سه،٥) زمرة .

تمارين :

لتكن أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

حل كلا من المعادلات س أ = ب، أص = ب في زمرة المصفوفات ٢×٢ غير المنفردة . اجعل حلك باستعمال صيغة معكوس المصفوفة . هل يكون س = ص ؟

٢. في م$_٢$(R) لتكن أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$، ب $\begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٠ & ٢- \end{pmatrix}$

حل المعادلا التالية :

أ س أ= ب

ب. أص = ب

جـ ع+(أ+ع) = ب.

٣. لتكن أ = ٢+٢ $\sqrt{٢}$ و ب = ٣+٤ $\sqrt{٢}$

حل المعادلة سأ = ب في الزمرة (Q[$\sqrt{٢}$] - {٠}، ٠)

(انظر التمرين ١,٢ - ٠٦)

٤. هل يوجد في زمرة ما (سه،٥) عناصر س حيث

س٥س = س ؟ ما هي ؟ علل اجاباتك.

*٥. برهن ان الزمرة (سه،٥) تبديلية اذا وفقط اذا كان (أ٥ب) ٥ (أ٥ب) = (أ٥أ) ٥ (ب٥ب) لكل أ،ب∈سه .

(في زمرة الضرب (سه،٠) ينص الشرط على ان مربع حاصل الضرب هو حاصل ضرب المربعات :

(أب)^٢ = أ^{٢}ب^٢ حيث أ^٢ = أ٠أ ، حسب التعريف).

*٦. برهن انه اذا كانت (سه،٥) زمرة وكان س٥س = و لكل س∈سه تكون (سه،٥) زمرة تبديلية . هل العكس صحيح ؟ لماذا ؟ ●

٧. للتحدي . برهن النظرية ٢٨ . كي تبرهن ذلك افرض ان (سه،٥) مجموعة معرف عليها عملية ثنائية تجميعية يتوافر فيها ما يلي :

(١) فيها عنصر محايد ايمن و∈سه يحقق و٥أ = أ لكل أ∈س

(٢) لكل عنصر أ∈سہ يوجد نظير ايمن أ´ يحقق أ٥أ´ = و.

برهن ان (سہ،٥) زمرة باستخدام الخطوات التالية :

أ. برهن ان قانون الاختزال الايمن يتحقق في سہ.

ب. برهن ان العنصر المحايد الايمن هو في الحقيقة عنصر محايد.
(برهن ان أ٥و = أ = و٥أ.)

حـ. برهن ان اي نظير ايمن هو في الحقيقة نظير.
(اثبت ان أ٥أ´ = و = أ´٥أ.)

٨. للتحدي . برهن النظرية ٢٩ . لبرهنة ذلك افرض ان سہ مجموعة معرف عليها عملية ثنائية تجميعية حيث انه لكل ا،ب∈سہ هنالك س،ص∈سہ يحققان س٥أ = ب و أ٥ص = ب

أ. اثبت ب∈سہ . وبين انه يوجد و∈سہ حيث ان و٥ب = ب.
وبعد ذلك بين ان و عنصر محايد ايمن للمجموعة سہ . (بين ان و٥أ = أ لكل أ ∈سہ .)

ب. بين ان (سہ،٥) زمرة. لعمل ذلك بين ان (سہ،٠) تحقق فرضيات للنظرية ٢٨ ومن ثم تحقق نتائجها.

١,٤ عملية ثنائية على مجموعات من الاقترانات

رأينا امثلة على مجموعات عملياتها الثنائية من نوع الجمع او الضرب . الا ان هناك عمليات ثنائية أخرى اقل استعمالا في الزمر منها تركيب الاقترانات ، وهي عملية درستها سابقاً في حساب التفاضل والتكامل . ولكن قبل ان ننشيء زمراً جديدة معرفاً عليها عملية التركيب ، تستعرض بعض خصائص الاقترانات وندعوك لمراجعة تعريف الاقتران والامثلة على الاقترانات وغير الاقترانات الواردة في البند ١,١.

تعريف :

يكون الاقتران ق : سہ ← صہ و ل : سہ ← صہ متساويين اذا وفقط اذا كان
ق (س) = ل (س) لكل س∈سہ .

لاحظ ان التعريف ٣٠ ينص على ان الاقترانات المتساوية يجب ان يكون لها نفس المجال ونفس القيم.

ان ما يهمنا هو صنف خاص من الاقترانات هي تلك التي لا يمكن ان تقرن عنصرين

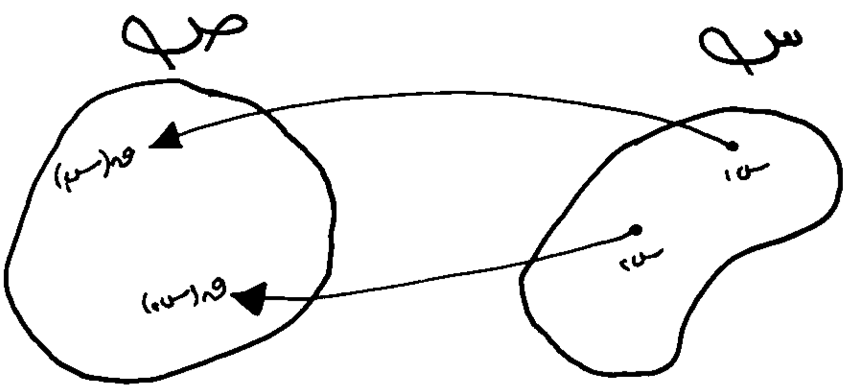
او اكثر من المجال بعنصر واحد في المدى وتلك التي قيمها تشمل كل المدى . ومعظم هذا البند والبند ١,٥ مكرسة لدراسة اقترانات بأحدى هاتين الخاصتين أو كليهما.

تعريف :

يكون الاقتران قر : سہ ← صہ واحداً لواحداً تباينياً اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي :

لكل س$_١$ ، س$_٢$ ∈ سہ ، اذا كانت س$_١$ ≠ س$_٢$ فان قر(س$_١$) ≠ قر(س$_٢$)

وبالكلمات : يكون قر : سہ ← صہ اقتران واحد لواحد اذا وفقط اذا كان لأي عنصرين مختلفين في سہ صورتان مختلفان في صہ بالنسبة الى قر. (انظر الشكل ١,٢).



الشكل ١,٢

مسألة :

لكل من الاقترانات التالية قاعدة يعينها جدول من القيم :

قر : سہ ← صہ (الجدول ١,٧) ، هـ : صہ ← صہ
(الجدول ١,٨) ، ل : صہ ← سہ (الجدول ١,٩) و ك : سہ ← سہ
(الجدول ١,١٠) . عين منها ما هو اقتران واحد لواحد ولتكن
صہ = {١،٢،٣،٤}، و سہ = {١،٢،٣،٤،٥}.

الجدول ١,٧

قر : سہ ← صہ

س	قر(س)
١	٤
٢	٣
٣	١
٤	٢
٥	٣

الجدول ١,٨

هـ : صہ ← صہ

ص	هـ (ص)
١	٢
٢	٤
٣	١
٤	٣

الجدول ١,٩

ل : صه ← سه	
١	٥
٢	٣
٣	٢
٤	١

الجدول ١,١٠

ك : سه ← سه	
١	٥
٢	٣
٣	١
٤	٢
٥	١

من المفيد احياناً ان نعمل بصيغة اخرى لتعريف اقتران الواحد لواحد مكافئة للتعريف السابق وهي : يكون الاقتران ق : سه ← صه

واحداً لواحد او تباينياً اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي :

أ. لكل س، ،س، ∈ سه اذا كانت ق(س،) = ق(س،)

فان ــــــــــ

(استعمل نتائج المنطق المعطاة في الملحق ٢ لكتابة الصيغة المكافئة لهذا التعريف.

وكي تستعمل الشرط ا لاثبات ان اقتراناً ما واحد لواحد افترض

ق(س،) = ق(س،) وبرهن ان س، = س، .

سنحتاج احياناً ايضاً النفي لتعريف اقتران واحد لواحد.

ب. يكون الاقتران ق ليس واحداً لواحد اذا وفقط اذا ــــــــــ

تعريف :

يكون الاقتران ق : سه ← صه شاملا اذا وفقط اذا كان لكل ص∈صه يوجد س∈سه بحيث ان ق(س) = ص ، عندها نقول ان الاقتران يعكس كل س على كل ص

ولبرهنة ان اقتراناً ما ق شامل ، نبدأ بعنصر اختياري ص∈صه ونبرهن على وجود عنصر س∈ سه بحيث ق(س) = ص .

ومن الممكن احياناً التعبير عن س بدلالة ص .

مسألة :

عين هل اي من الاقترانات في المسألة ٣٢ شاملا ام لا ؟

تعريف :

لتكن ق : سه ← صه اقتراناً من سه الى صه ، تسمى المجموعة

ق(سه) = {ق(س) : س∈سه} صورة سه بالنسبة الى ق او مجموعة صورها.

مسألة :

عرف ق : Z ← Z بالتعريف ق(س) = ٣س

لكل س∈Z . عين عناصر مجموعة الصور ق(Z). هل مجموعة الصور ق(Z) تساوي المدى Z ؟

هل ق شاملة ؟

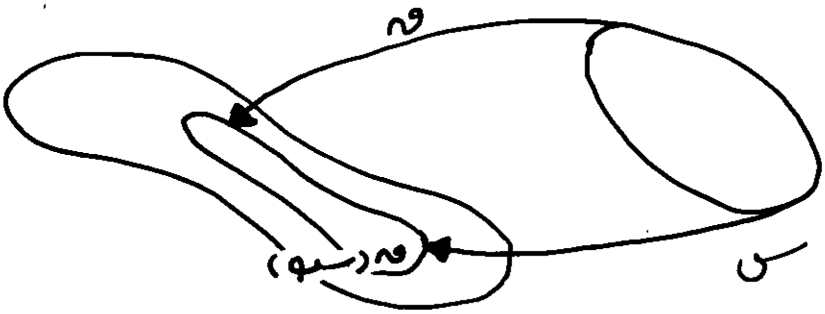
اترك برهان العرضية التالية للتمرين ٦ .

عرضية :

يكون الاقتران ق : س ← ص شاملا اذا وفقط اذا كانت ص = ق(س) وبالكلمات ، يكون الاقتران ق شاملا اذا وفقط اذا كانت مجموعة صور المجال تساوي المدى .

وقد ترغب احياناً في استعمال النفي لتعريف الاقتران الشامل (انظر الشكل ١,٣).

حـ يكون الاقتران ق : س ← ص غير شامل اذا وفقط اذا كان ______________ .



الشكل ١,٣

مسألة :

المجال والمدى لكل من الاقترانات التالية مجموعات جزئية من R ابحث هل اي من هذه الاقترانات واحد لواحد و/او شامل . كي تعلل اجاباتك قد ترغب في رسم مخططات هذه الاقترانات .

أ. ق : R ← R معطاة بالمعادلة ق (س) = $س^{٢}$

ب. $ق_{١}$: {س : س ≥ ٠} ← {س : س ≥ ٠} معطاة بالمعادلة $ق_{١}$(س) = $س^{٢}$

حـ ل : R ← R معطاه بالمعادلة ل (س) = أس + ب حيث أ،ب عنصران ثابتان في R و أ ≠ ٠.

اذا كان ق: س ← ص و هـ : ص ← ع اقترانين فانه لكل س ∈ س ، يكون ق (س) ∈ ص فيكون هـ (ق (س)) معرفاً.

ونعطي التناظر س ← هـ (ق(س)) من س الى ع اسماً خاصاً كما يلي :

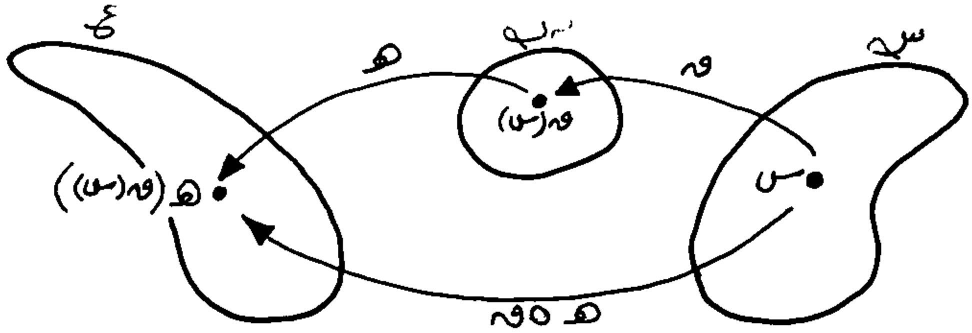
تعريف :

اذا كان ق: س ← ص و هـ : ص ← ع اقترانين فان الاقتران المركب هـ ∘ ق: س ← ع يعرف كالاتي : لكل س ∈ س

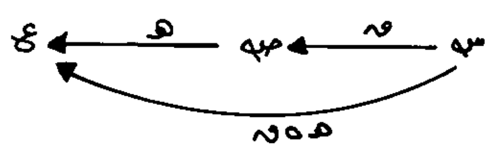
(هـ∘ق) (س) = هـ (ق (س))

الاقتران المركب هـ٥و مبين بالشكلين ١,٤ و ١,٥

الشكل ١,٤



الشكل ١,٥



مسألة :

لتكن و: سہ ← صہ ، هـ : صہ ← صہ ، ل : صہ ← سہ هي اقترانات المسألة

٣٢ . اعمل جدول القيم للاقترانين المركبين

هـ٥و: سہ ← صہ   ل٥هـ : صہ ← سہ .

تعريف :

لاي مجموعة غير خالية سہ ، لتكن م (سہ) المجموعة المكونة من جميع الاقترانات الواحد لواحد الشاملة من سہ الى نفسها. لاحظ ان الاقتران و يكون في م (سہ) اذا وفقط اذا كان و اقتران واحد لواحد وشاملا من سہ الى سہ .

مسألة :

أ. لتكن سہ = {١،٢،٣} بين اي الاقترانات المعرفة في الجداول ١,١١ الى ١,١٤ تكون عناصر في م (سہ)

الجدول ١,١١

س	و (س)
١	٣
٢	١
٣	٢

الجدول ١,١٢

س	هـ (س)
١	٣
٢	٣
٣	٢

س	ل (س)
١	٢
٢	٤
٣	١

الجدول ١,١٣

س	ك (س)
١	٢
٢	١
٣	٣

الجدول ١,١٤

ب. لتكن سه = R ، ولتكن ور، ور١، هـ هي الاقترانات المذكورة في المسألة ٣٨ . بين اي من هذه الاقترانات عنصر في م (سه).

ان النتيجة الرئيسية التي يراد تكوينها في البندين ١,٤ و ١,٥أ هي انه في كل مجموعة غير خالية سه تكون المجموعة م (سه) زمرة ، بالنسبة لعمليات تركيب الاقترانات . وتبرهن هذه النتيجة بمتسلسلة من التمهيدات التي تنطبق على عناصر م (سه) وعلى انواع اخرى من الاقترانات فالتمهيديتان التاليتان تفيدان في البرهنة على ان تركيب الاقترانات هو عملية ثنائية على م (سه).

مسألة :

اثبت التمهيدية التالية :

تمهيدية :

ليكن ور: سه ←صه ، هـ : صه ← ع اقتراني واحد لواحد

فيكون الاقتران المركب هـ٥ور: سه ← ع واحداً لواحد ايضاً .

مسألة :

اثبت التمهيدية التالية :

تمهيدية :

اذا كان ور: سه←صه ، هـ : صه←ع، اقترانين شاملين فيهما

ور يعكس سه على صه ، هـ يعكس صه على ع، فان :

هـ٥ور : سه←ع شامل يعكس سه على ع

مسألة :

برهن ان التركيب عملية ثنائية على م (سه).

لتكن ور: ح←س ، هـ : سه←صه ، ل : صه ←ع اقترانات .

هناك طريقتان طبيعيتان لتكوين اقتران مركب من ح الى ع كما هو مبين في الشكلين ١٦ و ١,٧.

اكمل الشكل ١,٧ بالاسهم والاحرف المناسبة.

$$\begin{tikzcd}
\text{ع} & \text{ص} \arrow[l, "\text{ل}"'] & \text{س} \arrow[l, "\text{هـ}"'] & \text{ح} \arrow[l, "\text{و}"'] \arrow[ll, bend left, "\text{هـ}\circ\text{و}"] \arrow[lll, bend left=50, "\text{ل}\circ(\text{هـ}\circ\text{و})"]
\end{tikzcd}$$

الشكل ١,٦

$$\begin{tikzcd}
\text{ع} & \text{ص} \arrow[l, "\text{ل}"'] & \text{س} \arrow[l, "\text{هـ}"'] \arrow[ll, bend left, "\text{ل}\circ\text{هـ}"] & \text{ح} \arrow[l, "\text{و}"']
\end{tikzcd}$$

الشكل ١,٧

مسألة :

اثبت التمهيدية التالية :

تمهيدية :

القانون التجميعي لتركيب الاقترانات. لتكن

و : ح ← س ، هـ : س ← ص

ل : ص ← ع اقترانان . فتكون ل∘ (هـ∘و) = (ل∘هـ) ∘و.

نتيجة :

ان تركيب الاقترانات هو عملية ثنائية تجميعية على المجموعة م(س) المكونة من كل الاقترانات المتباينة والشاملة من س الى نفسها .

في البند ١,٥ سنبرهن على ان م (س) تكون فعلا زمرة بالنسبة الى عملية تركيب الاقترانات .

تمارين :

١. في كل من الاقترانات التالية اعتبر المجال والمدى مجموعة جزئية من R. بين فيما اذا كان اي من هذه الاقترانات واحداً لواحد و / أو شاملا.

أ. و١: R − {٠} ← R معطاة بالمعادلة و١(س) = $\frac{1}{\text{س}}$

ب. و٢: {س : س <٠} ← {س : س <٠} معطاة بالمعادلة و٢(س) = $\frac{1}{\text{س}}$

حـ هـ : {س : ٠ ≤ س < ١} ← {س : س ≥ ٠} معطاة بالمعادلة هـ (س) = $\frac{س}{١-س}$

٢. لتكن ق : سه ← صه ، هـ : صه ← صه ، ل : صه ← سه . هي الاقترانات المعطاة في المسألة ٣٢

استعمل جداول المسألتين ٣٢ ، ٤٠ لحساب

[ل∘(هـ∘ق)] (س) و [(ل∘هـ) ∘ق] (س) لكل س∈سه .

٣. أ. لتكن ق$_1$: {س : س > ٠} ← {س : س > ٠} معطاة بالمعادلة ق$_1$(سه) = $\frac{١}{س}$. اوجد (ق$_1$ ∘ ق$_1$) (س) لكل س > ٠.

ب. لتكن سه = {س : ٠ < س < ١} و ص = {س : س > ٠}
عرف اقترانات هـ : سه ← صه و ل : صه ← سه باعتبار
هـ(س) = $\frac{س}{١-س}$ حيث ٠ < س < ١
و ل(ص) = $\frac{ص}{١+ص}$ حيث ص > ٠
اوجد (هـ∘ل) (س) ، (ل∘هـ) (س) و (ل∘ق$_1$) (س) حيث ٠ < س < ١ و ق$_1$ هو الاقتران المعرف في الفرع أ .

٤. عرف ق : R ← R و هـ : R ← R بالمعادلتين

ق(س) = س^2 و هـ (س) أس + ب لكل س∈R.
حيث أ ، ب∈R ثابتان ، أ ≠ ٠ .
عرف ل : R − {٠} ← R بالمعادلة ل (س) = $\frac{١}{س}$ لكل س∈R − {٠} تحقق بالحساب ان (ق ∘(هـ∘ل)) (س) = [(ق∘هـ)∘ل] (س)
لكل س∈R − {٠}.

٥. لتكن R^2 = R × R فتكون R^2 زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الجمع المعرفة بما يلي :
(أ،ب) + (حـ،د) = (أ+حـ،ب+د) لكل (أ،ب)، (حـ،د)∈R^2
(انظر التمرين ١,٢ - ١٠).

أ. لتكن ق : R^2 ← R^2 ، هـ : R^2 ← R^2 معرفتين بوضع
ق (س،ص) = (أس+ب ص،حـس+دص)
هـ (س،ص) = (أ$_1$س+ب$_1$ص،حـ$_1$س+د$_1$ص)
حيث أ ، ب ، حـ ، د ، أ$_1$ ، ب$_1$ ، حـ$_1$ ، د$_1$∈ R
اوجد (ق ∘ هـ) (س،ص)

ب. لكل اقتران $ق_ر : R^2 \leftarrow R^2$ معرف كما في ﺃ عينا مصفوفة

$$م_{ق_ر} = \begin{pmatrix} ﺃ & ب \\ حـ & د \end{pmatrix}$$

وهكذا فالمصفوفة :

$$م = \begin{pmatrix} ﺃ & ب \\ حـ & د \end{pmatrix} \ni م_ر(R) \text{ تعين الاقتران}$$

$ق_ر : R^2 \leftarrow R^2$ اذا وفقط اذا كان

$ق_ر(س،ص) = (\,ﺃس+ب ص \,،\, حـ س+ د ص)$.

ليكن ق،هـ : $R^2 \leftarrow R^2$ الاقترانين المعرفين في الجزء ﺃ

ولتكن $م_{ق_ر}$ ، $م_{هـ}$ المصفوفتين المناظرتين . اوجد المصفوفة $م_{ق \circ هـ}$ التي تناظر التركيب $ق_ر \circ هـ$

بين كيف تكون علاقة $م_{ق_ر \circ هـ}$ من المصفوفتين $م_{ق_ر}$، $م_{هـ}$

ماذا تستطيع ان تقول الان عن الغرض من تعريف الصفوفة ؟

٦. برهن العرضية ٣٧.

٧. ليكن $ق_ر$: سه ← صه و هـ : صه ← ع اقترانين

ﺃ. برهن انه اذا كان هـ$\circ$ق واحداً لواحد فان ق يكون واحداً لواحد

ب. برهن عكس ﺃ السابق او اعط مثالا مناقضاً للعكس.

حـ اعط مثالا لاقترانين ق : سه ← صه و هـ : صه ← ع

بحيث يكون هـ واحداً لواحد و يكون هـ$\circ$ق واحداً لواحد.

٨. لتكن ق: سه ← صه و هـ : صه ← ع اقترانين

ﺃ. برهن انه اذا كان هـ$\circ$ق شاملا فان هـ يكون شاملا.

ب. برهن عكس الجزء السابق او اعط مثالا مناقضاً للعكس.

ح. اعط مثالا لاقترانين ق : سه ← صه و هـ : صه ← ع

بحيث يكون ق غير شامل و يكون هـ$\circ$ق شاملا.

٩. ليكن ن اي عدد صحيح موجب ولتكن

$ح_ن = \{١،٢،٣،\ldots،ن\} = \{ر : ر \in Z ، ١ \leq ر \leq ن\}$

اجب على الاسئلة التالية . ليس المطلوب اعطاء براهين ولكن المطلوب اعطاء مقولات مقبولة.

أ. لتكن ك<ن هل يوجد اقتران شامل من $ح_ك$ الى $ح_ن$ ؟

ب. لتكن ك<ن هل يوجد اقتران واحد لواحد من $ح_ن$ الى $ح_ك$ ؟

حـ هل يوجد اقتران $ق$: $ح_ن \longrightarrow ح_ن$ بحيث يكون واحداً لواحد ولكن ليس شاملا ؟

د. هل يوجد اقتران $ق$: $ح_ن \longrightarrow ح_ن$ بحيث يكون شاملا ولكن ليس واحداً لواحد ؟

١,٥ زمر التبديلات

رأينا في البند ١,٤ ان المجموعة م (سه) المكونة من جميع الاقترانات الواحد لواحد الشاملة من سه الى نفسها لها عملية ثنائية تجميعية وهي عملية تركيب الاقترانات . فلكي تكون هذه المجموعة زمرة بالنسبة لتلك العملية عندها يجب ان تحتوي على اقتران محايد وكل عنصر في م (سه) يجب ان يكون له معكوس بالنسبة لعملية التركيب .

مسألة :

لتكن سه مجموعة غير خالية . اثبت ان للمجوعة م (سه) عنصراً محايداً اي ان لها اقتراناً و حيث ان و$\in$م (سه) وكذلك $ق \circ و = و \circ ق = ق$ لكل $ق \in$ م (سه). لاثبات ذلك يجب ان تعرف اقتراناً و : سه $\longrightarrow$سه بحيث ان

$(ق \circ و)$ (س) = $(و \circ ق)$ (س) = $ق$(س) لكل س$\in$سه ، ثم تثبت ان و$\in$م (سه) .

والآن لتكن $ق$ عنصراً ثابتاً في م (سه) فاذا كان له معكوس $ق^{-١} \in$م (سه)

فان $ق \circ ق^{-١} = ق^{-١} \circ ق = و$ اي ان $(ق \circ ق^{-١})$ (س) $= (ق^{-١} \circ ق)$ (س) = و(س) = ——————.

لكل س$\in$سه وبالتحديد فهذا يعني ان $ق^{-١}$ $(ق(س))$ = ——————

لكل س$\in$سه ومن ثم يجب ان تعيد $ق^{-١}$ العنصر $ق$ (س)$\in$سه الى العنصر س$\in$س .

فليكن $ق$: سه$\longrightarrow$ص اقتران واحد لواحد وشاملا فانه لاي عنصر معطى ص$\in$صه يوجد عنصر ما س$\in$سه بحيث ان $ق$(س) = ص (لماذا ؟)فمن الطبيعي ان نعرف $ق^{-١}$ (ص) = س بحيث ان $ق^{-١}$ «ترسم المسار رجوعاً» من ص الى س. وبما ان $ق$ واحد لواحد وشامل فيتبع حالا ان القاعدة $ق^{-١}$ المعرفة بهذه الطريقة هي اقتران من صه الى سه (انظر الشكل ١,٨).

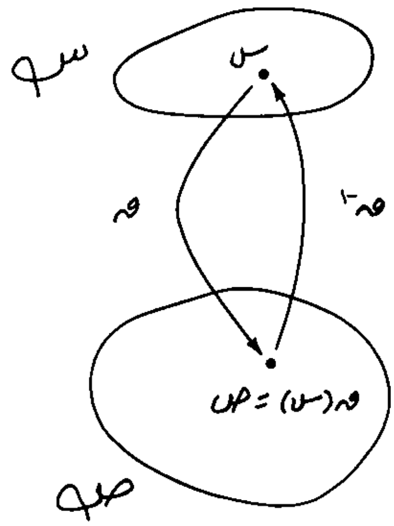
تعريف :

اذا كان $ق$: سه$\longrightarrow$صه واحداً لواحد وشاملا يعرف الاقتران العكسي (المعكوس)

$ق^{-١}$: صه$\longrightarrow$سه كما يلي :

لاي ص$\in$صه يكون $ق^{-١}$ (ص) هو العنصر الوحيد س$\in$سه الذي يحقق $ق$(س) = ص ولهذا

فان ق$^{-1}$ (ص) = س اذا وفقط اذا كان ه (س) = ص



الشكل ١،٨

مسألة :

أوجد اقتراناً عكسياً لكل من الاقترانات في المسألة ٣٢ التي تكون واحداً لواحداً وشاملا . (لاحظ انه ليس لكل اقتران اقتران عكسي). لقد وجدنا اقتراناً محايداً و∋م(سه) ، يجب ان نبرهن الآن انه اذا كانت ه∋م(سه) فان الاقتران العكسي ه$^{-1}$ الذي عرفناه اعلاه هو حقاً معكوس وعنصر في م(سه) وهذا هو محتوى التمهيديتين التاليتين .

مسألة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

اذا كان ه اقتران واحد لواحد وشاملا من سه الى صه فان ق$^{-1}$ (ه (س)) =س لكل س∋سه و ه(ق$^{-1}$ (ص)) = ص لكل ص∋صه .

اترك برهان التمهيدية التالية للتمرين ٦.

تمهيدية :

اذا كان ه اقتران واحد لواحد وشاملا من سه الى صه فان ه$^{-1}$ يكون اقتران واحد لواحد وشاملا من صه الى سه .

رأينا ان تركيب الاقترانات يكون عملية ثنائية تجميعية على م (سه) فلنربط هذه النتيجة مع ما جاء في هذا البند لبرهنة ان (م(سه)،٥) تكون زمرة.

مسألة :

استعمل النتائج السابقة وتشمل التمهيديتين ٥١، ٥٢ ، لبرهنة النظرية التالية :

نظرية :

لتكن م(سه) المجموعة المكونة من جميع اقرانات الواحد لواحد الشاملة التي تقرن **المجموعة غير** الخالية س مع نفسها . فتكون م(سه) زمرة بالنسبة لعملية تركيب الاقترانات .

وهكذا فلكل مجموعة غير خالية سه هنالك زمرة م(سه) عناصرها مكونة من الاقترانات ذات الواحد لواحد الشاملة المعرفة من سه الى نفسها . ويهمنا بشكل خاص الزمرة م (سه) عندما تكون سه مجموعة منتهية . فليكن ن اي عدد صحيح موجب ولتكن

$S_{ن}$ = م ({١، ٢، ٣، ...، ن})

فتكون $S_{ن}$ زمرة بالنسبة لعملية تركيب الاقترانات . وكامثلة على عناصر $S_{٤}$ انظر المسألة ٤٢.

تعريف :

تبديلية اي مجموعة غير خالية هي اقتران واحد لواحد شامل من المجموعة الى نفسها.

تسمى الزمرة $S_{ن}$ المكونة من جميع تبديلات {١، ٢، ...، ن} زمرة التماثل التام على المجموعة {١، ٢، ...، ن}.

تذكر ان $S_{ن}$ هي مجموعة كل تبديلات المجموعة {١، ٢، ...، ن} وليست المجموعة {١، ٢، ...، ن} نفسها .

وعند العمل بالتبديلات على المجموعات المنتهية من المفيد والمعتاد استعمال رمز خاص من سطرين للدلالة على قاعدة التبديلية. فلتكن و عنصراً في $S_{ن}$ معرف كالاتي : و(١) = $أ_{١}$، و(٢) = $أ_{٢}$، ...، و(ن) = $أ_{ن}$. بطريقة رمز السطرين ، نكتب و كالاتي :

$$\text{و} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & \cdots & \text{ن} \\ \text{أ}_{١} & \text{أ}_{٢} & \cdots & \text{أ}_{\text{ن}} \end{pmatrix}$$

وبهذا الاصطلاح تكتب الصورة و(ك) = $أ_{ك}$ في السطر الثاني في اسفل ك مباشرة.

مسألة :

ليكن ق الاقتران المعرف على {١، ٢، ٣، ٤} بالقاعدة و(١) = ٣ ، و(٢) = ٤ ، و(٣) = (١) و و(٤) = ٢ . وبهذا فان و $\in S_{٤}$

اكتب ق على شكل رمز السطرين .

في حساب تركيب اقترانين في $S_{ن}$ تذكر ان (و∘هـ)(ك) = و (هـ(ك)) لكل ك $\in$ {١، ٢، ...، ن}

وعلى سبيل المثال ففي $S_{٤}$ لتكن

ور $= \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

هـ $= \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$

فلايجاد ور ∘ هـ $= \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٤ & ٣ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$

نبدأ الحساب مع الاقتران الايسر لايجاد (ور∘هـ) (١) = ور(هـ (١)) = ور (٣) = ١.

مسألة :

احسب ور∘هـ للاقترانين ور وهـ اعلاه وعبر عن احابتك بطريقة السطرين ور∘هـ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ & & & ١ \end{pmatrix}$

ثم احسب هـ ∘ ور. هل ور∘ هـ = هـ ∘ ور؟

لاحظ ان الاقتران

ور $= \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

يمكن كتابته بطرق عديدة على شكل الرمز ذي السطرين وذلك بتغير ترتيب الارقام التي في السطر العلوي ولهذا فان

ور $= \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ١ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$ وهكذا.

لماذا تمثل كل هذه العبارات نفس الاقتران ؟

مسألة :

استعمل رمز السطرين لكتابة كل العناصر في $S_{٣}$. كم عنصراً يوجد في $S_{٣}$ ؟

قبل حل المسألة ٥٨ يحسن مراجعة اصطلاحات جداول العمليات المعطاة في البند ١,١.

مسألة :

ابدأ بعمل جدول لِ ($S_{٣}$ ،∘). ومن اجل وحدة العمل فقد عينا في الجدول ١,١٥ ترتيب للعناصر في السطر العلوي . احسب مدخلات الصفوف الثلاثة الاولى وفي اول عمودين من الجدول ١,١٥ واترك البقية كوظيفة بيتية .

انتبه لترتيب تركيب العناصر . وعلى سبيل المثال لاحظ المدخلة الموجودة في الجدول.

مسألة :

اوجد عنصراً محايداً في ($S_{٣}$ ، ∘) واوجد معكوس كل $ق \in S_{٣}$. هل تكون ($S_{٣}$، ∘) تبديلية ؟ ▲

رأينا انه لاي عدد صحيح موجب ن ، تكون ($S_{ن}$ ، ∘) زمرة . فلنعين الآن سعة الزمر $S_{ن}$ ونبين ان هذه الزمر تزودنا بامثلة اخرى على زمر عير تبديلية .

مسألة :

ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً. فما عدد عناصر الزمرة $S_{ن}$؟ لماذا؟

مسألة :

برهن انه لاي عدد صحيح ن $\geq$ ٣ تكون الزمرة ($S_{ن}$ ، ∘) عير تبديلية ▲ و يزودنا تركيب التبديلات بعملية ثنائية تختلف عن العمليات التي رأيناها في ضرب الاعداد والمصفوفات وجميعها ، فقد رأينا انه عندما تحتوي سه على ثلاث عناصر او اكثر لا تكون الزمرة م(سه) (او $S_{ن}$) تبديلية ، وبتغير عدد العناصر في سه نحصل على زمر مختلفة كثيرة تزودنا بعدة امثلة وامثلة معاكسة في دراستنا لخصائص الزمر بشكل عام .

∘	$\begin{pmatrix}١&٢&٣\\١&٢&٣\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}١&٢&٣\\٢&٣&١\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}١&٢&٣\\٣&١&٢\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}١&٢&٣\\١&٣&٢\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}١&٢&٣\\٣&٢&١\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}١&٢&٣\\٢&١&٣\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}١&٢&٣\\١&٢&٣\end{pmatrix}$						
$\begin{pmatrix}١&٢&٣\\٢&٣&١\end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix}١&٢&٣\\٢&١&٣\end{pmatrix}$		

الجدول ١٥ـ١

تمارين :

١. اكتب جدول العملية على (S_2 ، $\circ$) ، هل هذه الزمر تبديلية ؟

٢. اكمل جدول العملية على (S_3 ، $\circ$) وتحقق من صحة اجابتك في لقائك التالي مع زملائك في الصف .

٣. سيستعمل جدول العملية على S_3 فيما بعد وذلك لتوضيح مفاهيم عدة في نظرية الزمر . ولهذا السبب من الملائم استخدام الحروف لتسمية التبديلات . اعد كتابة الجدول ١,١٥ على S_3 باستخدام الاحرف و ، α_1، α_2 ، β_1، β_2، β_3 بالترتيب المبين في الجدول ١,١٦. تحقق من اجابتك في الصف.

الجدول ١,١٦

	و	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3
e						
α_1						
α_2						
β_1						
β_2						
β_3						

٤. في S_4 خذ المجموعة $\bar{S}_3$ المكونة من كل التبديلات التي تستبقي العنصر ٤ ثابتاً . فكل تبديلة في $\bar{S}_3$ تأخذ الصورة

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} & ٤ \end{pmatrix}$$

حيث أ ، ب ، حـ عناصر في المجموعة {١،٢،٣}

أ. كم عنصراً في $\bar{S}_3$ ؟

ب. صف عملية بسيطة لتكوين جدول على $\bar{S}_3$ (لا تكتب كل مكونات الجدول)

٥. نعلم ان (S_n ، $\circ$) زمرة لكل عدد صحيح ثابت ن $\geq$ ١ فلنوضح بعض اوليات الزمرة

باستعمال اصطلاح السطرين.

أ. كي نثبت ان $S_ن$ مغلقة بالنسبة للتركيب

احسب $\begin{pmatrix} أ & أ & ...... & أ_ن \\ ب_١ & ب_٢ & ...... & ب_ن \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ...... & ن \\ أ_١ & أ_٢ & ...... & أ_ن \end{pmatrix}$

ب. العنصر المحايد في $S_ن$ هو $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

حـ. اذا كانت

$$ق = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & .... & ن \\ أ_١ & أ_٢ & ... & أ_ن \end{pmatrix}$$

فان

$$ق^{-١} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

٦. برهن التمهيدية ٥٢

٧. اوجد اقترانا عكسياً لكل من الاقترانات الواحد لواحد الشاملة التالية : (لاحظ التمرين ١,٤ - ١)

أ. $ق : R - \{٠\} \leftarrow R$ معطى بالمعادلة $ق(س) = \frac{١}{س}$

ب. $ق : \{س : س > ٠\} \leftarrow \{س : س > ٠\}$ معطى بالمعادلة $ق(س) = \frac{١}{س}$

حـ. $هـ : \{س : ٠ < س < ١\} \leftarrow \{س : س > ٠\}$ معطى بالمعادلة $هـ(س) = \frac{س}{س - ١}$

٨. ليكن ق اقتران واحد لواحد شاملا من سه الى صه وليكن هـ : صه ← سه اقتراناً بحيث ان

$(هـ \circ ق)(س) = س$ لكل $س \in سه$

اثبت ان $هـ = ق^{-١}$

هذا يثبت ان معكوس الاقتران وحيد.

٩. ليكن ق: سه ← صه ، هـ : صه ← سه

اقترانين بحيث ان $(هـ \circ ق)(س) = س$ لكل $س \in سه$

و $(ق \circ هـ)(ص) = ص$ لكل $ص \in صه$.

أ. برهن ان ق اقتران واحد لواحد وشاملا من سه الى صه

ب. برهن ان هـ = $ق^{-1}$

١٠ لتكن (ص ، *) زمرة . ولتكن سه مجموعة عير خالية ولتكن ق (سه،صه) مجموعة كل الاقترانات قر: سه ← صه. فلكل زوج ور ، هـ∈ ق (سه،صه)

عرف ور * هـ : سه ← صه بوضع

(ور* هـ)(س) = ور(س) * هـ (س)

١٠. لتكن سه = {س : س∈R ، ٠ ≥ س ≥ ١}، ولتكن (R،+) هي الزمرة المفروضة فتكون قر (سه ، صه) هي المجموعة المكونة من كل الاقترانات ذات القيم الحقيقية التي مجالها الفترة [٠،١].

في هذه الحالة تكون العملية على ق (سه،R) هي العملية العادية لجمع الاقترانات وعلى سبيل المثال ، لتكن

ور(س) = $س^{٣}$ + ٣س + ١ ، هـ(س) = $٢س^{٢}$ - ٢س + ١

حيث ٠ ≥ س ≥١ أوجد قر+ هـ

عرف اقتران وَ : سه ←R بحيث ان ور+ و = ورلكل

ور∈ ق (سه ، R) : و (س) ——— /لكل سه ∈ [٠ ، ١].

عرف الاقتران قرَ ∈ ق (سه ، R) لكل قر∈ ق (سه ، R) بحيث ان قر+ قرَ= و.

ب. لتكن سه مجموعة غير خالية و (صه ، *) زمرة

بين انه اذا كات قر، هـ اقترانين من سه الى صه فان قر* هـ هو اقتران من سه الى صه برهن ان التناظر (قر، هـ) ——— ← قر* هـ يعرف عملية ثنائية على ق (سه ، صه)

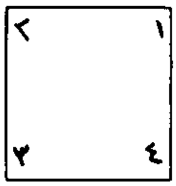
حـ برهن انه اذا كانت سه مجموعة غير خالية و (صه،*) زمرة فان (ق (سه،صه)،*) تكون زمرة حيث* هي العملية المعرفة اعلاه على ق (سه ، صه).

١,٦ زمر التماثل للاشكال الهندسية

هناك مجموعات من التبديلات يمكن تصويرها كتماثلات للاشكال الهندسية المنتظمة او حركتها المتماسكة التي تنقل كل رأس في الشكل الى رأس آخر.

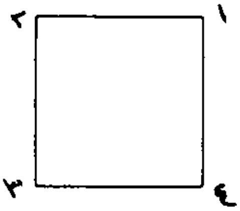
وفي اي حركة متماسكة او تماثل لا يمكن قطع الشكل (كالمربع مثلا او المثلث المتساوي الاضلاع) وثنيه او تغيير هيكله باي وجه ولكن يمكن قلبه او تدويره بحيث ان كل رأس في الشكل ينتقل الى رأس .

لندرس تماثلات المربع . لكي نتصور تماثلات المربع استعمل لوح كرتون او ورقة مربعة وسم رؤوسها بعكس عقارب الساعة ، كما هو مبين في الشكل ١,٩ . اكتب على كل رأس رقمه على وجهي لوح الكرتون.



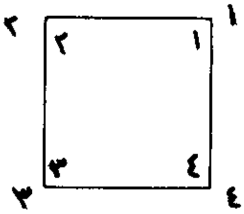
الشكل ١,٩

ارسم المربع على قطعة ورق او لوح من الكرتون وسم مواقع الرؤوس لهذا الرسم ، كما هو مبين في الشكل ١,١٠

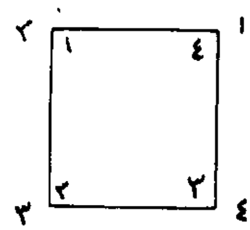


الشكل ١,١٠

ضع لوح الكرتون المربع فوق المربع المرسوم بشرط ان تكون الرؤوس ذات الارقام المتساوية متطابقة ، كما هو مبين في الشكل ١,١١ . والآن ادر لوح الكرتون ٩٠° بعكس عقارب الساعة (حتى تنطبق الرؤوس مرة اخرى). (لاحظ الشكل ١,١٢.)



الشكل ١,١١

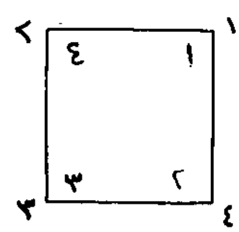


الشكل ١,١٢

بـهـذا الـدوران نـقـل رأس مـن الموضـع ١ الى الموضع ٢ ، ورأس آخر من الموضع ٢ الى الموضع ٣ . وهكذا . فهذا الدوران ، ولنسمه أ١ يمكن وصفه بالتبديلة

$$أ_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

تـابـع ادارة المربع بعكس عقارب الساعة وارسم النتيجة بعد كل دورة . اكتب التبديلة الـتـي تـنـاظر كل دورة وضع رموزاً لهذه التبديلات الجديدة على الترتيب أ٢، أ٣ وهكذا . ولتكن و ترمز للتبديلة التي تمثل الموضع الابتدائي (الشكل ١,١١) · (احتفظ بالرسوم للمستقبل)!
والان ادر المربع حول القطر الذي يصل بين الرأسين ١ و ٣ لتحصل عاى الشكل ١,١٣.
اكتب التبديلة المناظرة ولنرمز لها بالرمز ١ه
ما هي نتيجة الدوران مرة اخرى ، مبتدئاً بالشكل ١,١٣ ؟



الشكل ١,١٣

ابـدأ مـن الـوضـع الابتدائي (الشكل ١,١١) وادر المربع حول القطر الواصل بين الرأسين ٢ و ٤ . ارسـم الـنـتـيـجـة واكـتب التبديلة المناظرة واجعل رمزها ك٢. ما هي نتيجة استمرار الدوران حول القطر؟

مسألة :

جـد الـتـمـاثـلات المتبقية للمربع . صف كل حركة ، ارسم شكلا يبين النتيجة واكتب كل تماثل بصيغة تبديلية .

مسألة :

اثبت ان عدد تماثلات المربع يساوي ______ بالضبط ▲

ان الـتـركـيـب او حـاصل الضرب ، س∘ص يعرف باجراء ص اولا ثم اجراء س على النتيجة وهذا يتفق مع ما اصطلحنا عليه لتركيب التبديلات .

لايجاد اي تركيب س٥ص ابدأ دائماً بالمربع في موضعه الابتدائي .

مسأله :

ابدأ بجدول عملية لتماثلات المربع . وللتوافق اطلب من مدرسك ان يختار اسماً حرفياً لكل تماثل وان يعين ترتيب العناصر في السطر الاعلى لجدول العملية . استعمل الحروف و ، أ ، δ ، u مع الارقام السفلية المناسبة.

احسب العناصر الموجودة في الصفوف الاربعة الاولى والعمودين الاولين في الجدول ١,١٧ واترك الباقي كوظيفة بيتية . حرك مربعك الكرتوني لعمل الجدول. ولايجاد تركيب لأي حركتين . قم بالحركتين على التتابع ، وابدأ دائماً بحيث يكون المربع في موضعه الابتدائي (الشكل ١,١١) وبعد ذلك قارن النتيجة مع الصور التي حصلت عليها من الحركتين واذا شئت فدقق اجاباتك بحساب تركيب التبديلات .

جدول التركيب لتماثلات المربع

٥	

الجدول ١,١٧

مسألة :

لتكن D_4 ترمز الى مجموعة تماثلات المربع . اثبت ان (D_4 ، ٥) تكون زمرة .
هل هذه الزمرة ابدالية ؟

نرى ان مجموعة تماثلات المربع تكون زمرة بالنسبة لعملية التركيب .
والواقع انه في اي مضلع مستو منتظم ذي ن من الاضلاع تكون المجموعة $D_ن$ من كل التماثلات زمرة بالنسبة للتركيب . وهذا هو مدار التمارين التالية :

تمارين :

١. اكمل جدول العملية لتماثلات المربع (انظر المسألة ٦٤) وافحص نتائجك في لقائك التالي مع رفاق صفك.

٢. لتكن $D_٣$ مجموعة تماثلات المثلث المتساوي الاضلاع .
   أ. صف كل تماثل في $D_٣$ بالصور والكلمات . وبعد ذلك اكتب كل تماثل على شكل تبديلة
   ب. اعمل جدول عملية للمجموعة $D_٣$ وبرهن ان ($D_٣$ ، ٥) تكون زمرة.
   هي زمرة تبديلية ؟

٣. لتكن $D_٥$ مجموعة تماثلات الشكل الخماسي المنظم . صف عناصره $D_٥$ وبرهن ان ($D_٥$ ، ٥) تكون زمرة.

٤. لتكن $D_٦$ مجموعة تماثلات الشكل السداسي المنتظم صف عناصره $D_٦$ وبرهن ان ($D_٦$ ، ٥) تكون زمرة .

٥. للتحدي : ليكن ن ≤ ٣ عدداً صحيحاً ثابتاً . ولتكن $D_ن$ مجموعة تماثلات الشكل المستوى المنتظم الذي عدد اضلاعه ن.
   أ. صف العناصر في $D_ن$. سنحتاج الى اعتبار حالتين احداهما عندما تكون ن عدداً زوجياً والاخرى عندما تكون عدداً فردياً.٥
   ب. كم عنصراً موجوداً في $D_ن$ ؟
   حـ اثبت ان ($D_ن$ ، ٥) تكون زمرة.٥
   د. اثبت ان لكل ن ≦ ٣ لا تكون $D_ن$ زمرة تبديلية .

٦. لنناقش مجموعة تماثلات احدى الاشكال المنستوية غير المنتظمة ، وليكن مستطيلا بشكل عام . صف بالصور والكلمات كل تماثل للمستطيل العام . وبعد ذلك اكتب كل تماثل على صورة تبديلية اعمل جدول تركيب واثبت ان المجموعة المكونة من كل التماثلات للمستطيل تكون زمرة بالنسبة لعملية التركيب.

١,٧ التطابق في مضاعفات ن

يعلم الناظر للساعة انها تعمل بنظام عد غير عادي . فالعقرب يتحرك حول القرص من ١ الى ١٢ وبدلا من ان يستمر الى ١٣ فانه يعود ثانية الى ٠١ وبالنسبة الى ساعة اليد فان الساعة الواحدة صباحاً والواحدة بعد الظهر من البارحة او اليوم او الغد او قبل ٣٠ يوماً كلها نفس الشيء . ولهذا فان الساعة تعطينا مثالا على المفهوم الرياضي للتطابق في مضاعفات ن (في هذه الحالة ن = ١٢).

في هذا البند يحتاج الطالب ان يلم بعلاقات التكافؤ ومفهوم القسمة وخوارزمية القسمة (انظر الملحقين ٥،٤).

تعريف :

ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً . نقول ان العددين ٩ و ب متطابقان في مضاعفات ن اذا وفقط اذا كان الفرق بينهما يقبل القسمة على ن . وهذا يعني ان ٩ تطابق ب في مضاعفات ن اذا وفقط اذا وجد عدد صحيح ك ، بحيث ان ب - ٩ = ك ن وبالرموز نكتب ٩ ≡ ب (مض ن) اذا وفقط اذا كانت ن | (ب - ٩).

لاحظ التمرين ١,٨ - ٥ للتعريف عندما تكون ن = ٠

مسألة :

اختر قيم ٩ ، ب ، و ن للحصول على عدة امثلة تحقق ٩ ≡ ب (مض ن) اذا لم يكن ٩ و ب متطابقين في مضاعفات ن فاننا نكتب ٩ ≢ ب (مض ن).

مسألة :

اعط عدة امثلة بحيث تكون ٩ ≡ ب (مض ن)

ان المسألتين التاليتين تبينان ان التطابق في مضاعفات ن قريب الشبه بالتساوي.

مسألة :

اثبت التمهيدية التالية :

تمهيدية :

علاقة التطابق في مضاعفات ن على Z هي علاقة تكافؤ.

اذكر اولا خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي للتطابق في مضاعفات ن (انظر التعريف ١ في الملحق ٤) ثم برهن انها تنطبق على هذه العلاقة .

مسألة :

برهن التمهيدية التالية كما في ٢.

تمهيدية :

اذا كانت أ،ب،حـ ∋ Z تحقق أ ≡ ب (مض ن) . فان

أ + حـ = ب + حـ (مض ن)

أ حـ = ب حـ (مض ن) و

- أ = - ب (مض ن)

وزيادة على ذلك فاذا كانت أ ، ب ، حـ ، د ∋ Z تحقق

أ ≡ ب (مض ن) و حـ ≡ ب (مض ن) . فان

أ + حـ = ب + د (مض ن) و

أ حـ = ب د (مض ن).

أ. برهن العبارة الاولى (أ + حـ = ب + حـ (مض ن))

اترك براهين العبارات الباقية للتمرين ٢

ب. اذكر بالكلمات النتائج التي تشملها التمهيدية . فمثلا امكن اضافة اي عدد صحيح لكل من عددين متطابقين فيكون الناتج عددين متطابقين .

عندما يكون لدينا علاقة تكافؤ يمكن تكوين صفوف تكافؤ . وفي حالة التطابق في مضاعفات ن تعطى هذه الصفوف اسماً خاصاً :

تعريف :

ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً فلكل أ ∋ Z ليكن

أن = {س : س ∋ Z و س ≡ أ (مض ن)}

لاحظ ان كل صف أن هو نفسه صف التكافؤ الذي تنتمي اليه أ

مسألة :

أ. في الصف

صفره = {س : س ∋ Z و س ≡ ٠ (مض ٥)}

أوجد عدة عناصر موجبة وعدة عناصر سالبة . كون صيغة تتولد منها كل عناصر الصف .

ضع الصف على خط الاعداد . ما عدد عناصر الصف صفره ؟

ب. أوجد عدة عناصر موجبة وعدة عناصر سالبة من الصف ١ه .اذكر صيغة تعطي كل عناصر الصف .

حـ استمر في وصف صفوف تطابق في مضاعفات ٥ حتى يكون كل عدد صحيح محتوي في احد الصفوف . كم صفاً يلزم ؟.

هل يوجد في بعض الصفوف عناصر مشتركة ؟ وضح .

تذكر ان صفين من صفوف التكافؤ يكونان متساويين اذا وجد بينهما عنصر واحد مشترك على الاقل.

مسألة :

أ. اكتب قائمة فيها عدة عناصر من كل من الصفوف $(-٤)_{ه}$ ، $١_{ه}$ ، $٦_{ه}$ ، $١١_{ه}$ بين ان هذه الصفوف هي في الحقيقة متساوية اي ان $(-٤)_{ه} = أ_{ه} = ٦_{ه} = ١١_{ه}$ ولهذا فالرموز $(-٤)_{ه}$ ، $١_{ه}$ ، $٦_{ه}$ ، $١١_{ه}$ ما هي الا اسماء مختلفة لصف واحد.

ب. اوجد عدة قيم للعدد الصحيح $ب \in Z$ الذي يحقق $ب_{ه} = ٢_{ه}$ في كل من التمهيدات التالية . حاول ان تعطي برهانا قصيراً جداً باستعمال خصائص علاقة التكافؤ . يمكنك ان تستعمل النظرية ٦ في الملحق ٤.

في كلا المسألتين ن عدد صحيح موجب ثابت .

مسألة :

اكمل العبارة في التمهيدية التالية وبرهن عليها .

تمهيدية :

لكل أ ، $ب \in Z$ ، $أ_{ن} = ب_{ن}$ اذا وفقط اذا كان ــــــــــ .

مسألة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

اذا كان أ ، $ب \in Z$ و $أ_{ن} \cap ب_{ن} \neq \phi$

فان $أ_{ن} = ب_{ن}$.

ان التمهيدية ٧٥ تبين انه اذا كان $أ_{ن} \neq ب_{ن}$ فان $أ_{ن} \cap ب_{ن} = \phi$ ولهذا فان اي صفين مختلفين $أ_{ن}$ و $ب_{ن}$ لا يمكن ان يحتويا عناصر مشتركة .

رأينا ان كل صف تكافؤ مثل $أ_{ه}$ له اسماء عديدة (مثل $(-٤)_{ه}$ ، $٦_{ه}$ ، $١١_{ه}$ وهكذا).

ومن المفيد احياناً تعيين الصف باصغر عنصر غير سالب مثل $١_{ه}$ في المسألة ٧٣ ا).

ولكي نعمل هذا لاي صنف ، $أ_{ن}$ ، نستخدم خوارزمية القسمة لايجاد الباقي عندما تقسم أ على ن . ان هذا الباقي هو العدد الذي نبحث عنه .

مسألة :

ليكن $أ \in Z$ وليكن ن عدداً صحيحاً موجباً .

برهن انه اذا كانت $أ = ن م + ر$ ، $٠ \le ر < ن$ فان $أ_{ن} = ر_{ن}$. هذا الرقم ر ، الباقي عندما قسمت أ على ن ، هو في الواقع اصغر عنصر غير سالب في $أ_{ن}$ (لاحظ المثال ٤).

مسألة :

كم عدد صفوف التكافؤ المختلفة لاي عدد صحيح موجب محدد ، ن ؟

اكتب قائمة بهذه الصفوف مبتدئاً بالصف صفر$_{\circ}$. استخدم المسألة ٧٦ لتبين ان كل صف تكافؤ ان يظهر في مكان ما في قائمتك .

تمارين :

١. في Z$_{٦}$لكل صف تكافؤ

$$أ_{٦} = \{ س : س \in Z \text{ و } س \equiv أ \text{ (مض ٦)} \}$$

أوجد عدة عناصر موجبة وعدة عناصر سالبة . كون صيغة تحصل منها على كل عناصر أ$_{٦}$ ثم مثل هذه الصفوف على خط الاعداد .

٢. اكمل برهان التمهيدية ٧٠

*٣. انظر خاصة الاختزال التالية : اذا كان أحـ ≡ بحـ (مض ن) و حـ ≢ ٠ (مض ن) فان أ ≡ ب (مض ن).

أ. اوضح خاصية الاختزال عندما تكون ن = ٥.

ب. تفحص خاصية الاختزال عندما تكون ن = ٦. هل هذه الخاصية تتحقق ؟ وضح .

حـ. اعط مثالا معاكساً لخاصية الاختزال في حالة ن = ١٠

د. برهن ان خاصية الاختزال صحيحة اذا كانت ن عدداً اولياً .ο

٤. ن عدد صحيح موجب ثابت و أ$\in$Z

اثبت انه اذا كانت أ = ن م+ر ، ٠ ≤ ر< ن تكون ر اصغر عنصر غير سالب في الصف أ$_{ن}$.

٥. ن عدد صحيح موجب ثابت و أ ، ب$\in$Z

برهن ان أ ≡ ب (مض ن) اذا وفقط اذا كان الباقي عند قسمة أ على ن هو نفس الباقي عند قسمة ب على ن .

١,٨ زمر الجمع Z$_{ن}$

لقد رأينا ان كل عدد صحيح موجب ثابت ن يمكن ان تعرف له علاقة تكافؤ تسمى التطابق في مضاعفات ن . وفي هذا البند نتابع دراستنا لصفوف التكافؤ . لهذه العلاقة فنناقش اولا مجموعة صفوف التكافؤ هذه لعدد ثابت ن ثم نعرف عملية جمع لهذه الصفوف لنحصل على زمرة جديدة.

تعريف :

لاي عدد صحيح موجب ثابت ن لتكن Z$_{ن}$ هي المجموعة المكونة من كل صفوف التكافؤ المختلفة

$أ_ن$ حيث $أ \in Z$:

$$Z_ن = \{ أ_ن : أ \in Z \}$$

لاحظ ان كل عنصر في $Z_ن$ ، هو صف تكافؤ (باسماء مختلفة عديدة) وليس عدداً.

مسألة :

أ. اكتب قائمة بالعناصر المختلفة في $Z_٥$ ، في $Z_٦$ في $Z_٧$

ب. اكتب قائمة بالعناصر المختلفة الموجودة في $Z_ن$ حيثن ثابت.

هل $Z_ن$ مجموعة منتهية ؟ أم غير منتهية.

تعريف :

لتكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . فلكل أ ، ب $\in Z$ فان حاصل الجمع $أ_ن + ب_ن$ للصفين $أ_ن$ ، $ب_ن \in Z_ن$

هو صف تكافؤ العدد الصحيح أ + ب.

ولهذا فان $أ_ن + ب_ن = (أ+ب)_ن$

مسألة :

استعمل التعريف ٨٠ لحساب $٣_٥ + ٤_٥$ + $٣_٦ + ٤_٦$ + $٣_٧ + ٤_٧$. يجب ان نبرهن ان الجمع على $Z_ن$ الذي اعطي في التعريف ٨٠ هو عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً . فمن الواضح ان التناظر $(أ_ن ، ب_ن) \leftarrow (أ+ب)$ يقرن الزوج $(أ_ن ، ب_ن)$ بعنصر في $Z_ن$ وبما ان العناصر في $Z_ن$ لها اسماء عديدة فلن يتضح ببساطة ان هذا التناظر هو اقتران ولذا فانه من الضروري ان نبرهن ان التناظر يقرن كل زوج $(أ_ن ، ب_ن)$ بعنصر واحد بالضبط في $Z_ن$ دون اي اعتبار للاسماء التي تختارها للعنصرين $أ_ن$ ، $ب_ن$. فمثلا اننا نعلم ان $٢_٥ = ١٠٢٧_٥$ و $٤_٥ = ٢١٣٤_٥$. (لماذا ؟) واذا كان الجمع المعرف اعلاه عملية ثنائية فاننا يجب ان نحصل على $(٢+٤)_٥ = ١٠٢٧_٥ + ٢١٣٤_٥$

مسألة :

استعمل التعريف ٨٠ لحساب $٢_٥ + ٤_٥$ و $١٠٢٧_٥ + ٢١٣٤_٥$

هل تحصل على نفس الجواب ؟

ب. بين ان $٢_٥ = (-٨)_٥$ وكذلك $٣_٥ = ١٨_٥$

استعمل التعريف ٨٠ لايجاد $٢_٥ + ٣_٥$ ، $(-٨)_٥ + ١٨_٥$. هل الجوابان متساو يان ؟

مسألة :

كي تبرهن ان الجمع اقتران معرف تعريفاً حسناً من $Z_ن \times Z_ن$ الى $Z_ن$.

برهنلتمهيدية التالية :

تمهيدية :

لتكن أ ، ب ، $\bar{أ}$ ، $\bar{ب} \in Z$ تحقق أن = $\bar{أ}$ن و بن = $\bar{ب}$ن فان

أن + بن = $\bar{أ}$ن + $\bar{ب}$ن .

تبين التمهيدية ٨٣ أن الجمع المعطى في التعريف ٨٠ هو عملية ثنائية على $Z_{ن}$. وقبل برهنة ($Z_{ن}$ ، +) زمرة لنأخذ المثال التالي :

مسألة :

أ. كونِ جدول جمع على Z_5 مستعملا الجدول ١,١٨.

ب. اوجد نظير كل عنصر في Z_5.

حـ. هل الجمع في Z_5 تبديلياً ؟ علل اجابتك .

د. حقق حالة خاصة واحدة على خاصية التجمع في Z_5.

+	صفر$_5$	١$_5$
صفر$_5$		

الجدول ١,١٨

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . فتكون ($Z_{ن}$، +) زمرة .

مسألة :

هل الجمع في $Z_{ن}$ تبديلي ؟ برهن اجابتك صحيحة.

لدينا الان امثلة متنوعة من المجموعات منها ما هو تبديلي او غير تبديلي .
ورأينا زمراً تتعين بالجداول وزمراً مكونة من اعداد او مصفوفات او تبديلات ، او تماثلات ، ورأينا اخيراً زمراً من الاعداد الصحيحة في مضاعفات ن. في الفصل القادم ستستعمل هذه الامثلة مراراً لتوضيح نظريات ولوضع بعض الامثلة المعاكسة ، ولكي تساعدنا في اكتشاف النتائج المهمة .

تمرين :

١. كون جدول جمع على $Z_{٦}$. جد عنصراً محايداً في $Z_{٦}$ ثم جد نظيراً جمعياً لكل عنصر في $Z_{٦}$. حقق حالة واحدة على خاصية التجميع في $Z_{٦}$.

٢. أ. ليكن ل عدداً اولياً اكبر من ٢ . اكمل العرضية التالية : ان حاصل الجمع لكل العناصر في $Z_{ل}$ يساوي ________

وبالرموز $\sum_{\text{أ}=٠}^{\text{ل}-١} \text{أ}_{\text{ل}} =$ ________ .

ب. برهن العرضية

حـ هل العرضية صحيحة في $Z_{ن}$ لأي من قيم ن غير الاولية ؟ اذا كان ذلك فلأيٍ منها ؟ هل تكون صحيحة اذا كانت ن = ٢ ؟

د برهن انه اذا كان ل عدداً اولياً اكبر من ٣ ، فان ل تقسم حاصل الجمع الناتج عن اول ل-١ من الاعداد الصحيحة :

$$\text{ل} \mid \sum_{\text{أ}=٠}^{\text{ل}-١} \text{أ}$$

هل هذا صحيح لاي عدد غير اولي ؟

٣* نعلم من نظرية الاعداد انه اذا كانت ك عدداً صحيحاً موجباً و $\text{أ} \in Z$ فالرمز ك أ يعني حاصل جمع أ + أ + ... + أ ، ك من المرات . و يمكننا ان نعرف بالمثل ك $\text{أ}_{ن}$ اذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً و $\text{أ}_{ن} \in Z_{ن}$ ولكن سنقوم بذلك استنتاجاً كما يلي :

$١ \times \text{أ}_{ن} = \text{أ}_{ن}$ ، $٢\text{أ}_{ن} = \text{أ}_{ن} + \text{أ}_{ن}$

اذا عرف ك . $\text{أ}_{ن}$ فان

$(\text{ك} + ١) . \text{أ}_{ن} = \text{ك}. \text{أ}_{ن} + \text{أ}_{ن}$

أ. بين ان ك . $\text{أ}_{ن} = (\text{ك أ})_{ن}$ حيث $\text{ك} \in Z^{+}$. لهذا فالمضروب (ك). $\text{أ}_{ن}$ لصف التكافؤ $\text{أ}_{ن}$

هو صف مضاعفات ك ٢.

ب. احسب (٦) . ($٣_{١٢}$) ، (٦)،($٤_{١٢}$) ، ٥($٢_{١٣}$)، ١٢١($٢_{١٢}$).

٤. للتحدي . للمعادلة ك س = ٠ حيث ك ≠ ٠ حل سهل واحد بالضبط في الاعداد الحقيقية هو س = ٠ ، وفي هذا التمرين ندرس المعادلة المقابلة ، ك $س_ن$ = $صفر_ن$ في زمرة الجمع $Z_ن$. نريد ان نثبت ان هذه المعادلة ك $س_ن$ = $صفر_ن$ حيث ك عدد صحيح ثابت يمكن ان يكون لها عدد من الحلول يصل الى ك هي قيم $س_ن$ في $Z_ن$

لكل من الاعداد الصحيحة ك = ٢،٣،٧،٨، أوجد كل العناصر

$٢_{١٢}$ ∈ $Z_{١٢}$ حيث ان ك $٢_{١٢}$ = $صفر_{١٢}$

استعمل تعريف ك$٢_ن$ في التمرين ٣.

ب. ليكن ن و ك عددين صحيحين موجبين ثابتين . بين ان المجموعة $ع_ن$ = {$٢_ن$: $٢_ن$ ∈ $Z_ن$ ، ك $٢_ن$ = $صفر_ن$}

تكون زمرة بالنسبة للجمع . لاحظ ان $ع_ن$ هي مجموعة كل حلول المعادلة ك $س_ن$ = $صفر_ن$ في $Z_ن$. ليكن ن و ك عددين صحيحين موجبين ثابتين ولتكن د = ق م ٢ (ن،ك) حيث ق م ٢ ترمز الى القاسم المشترك الاعظم ، ن = حـ د ، وك = $ك_١$ د (انظر الملحق ٦حـ)

حـ بين ان ك $حـ_ن$ = $صفر_ن$

د بين انه اذا كانت ٢ ∈ Z و ك $٢_ن$ = $صفر_ن$ فان حـ | ٢ •

هـ اوجد عنصراً $ب_ن$ ∈ $Z_ن$ بحيث يمكن كتابة زمرة الحل

$ع_ن$ = {$٢_ن$: ٢ ن ∈ $Z_ن$، ك $٢_ن$ = $٠_ن$}

بالصيغة $ع_ن$ = {م $ب_ن$: م ∈ Z^+}

كم عنصراً في $ع_ن$ ؟

٥. عرف علاقة تطابق في مضاعفات الصفر على Z وذلك بوضع س ≡ ص (مض ٠) . وتقرأ س تطابق ص في مضاعفات الصفر اذا وفقط اذا كان س−ص = ٠

٢. برهن ان علاقة التطابق في مضاعفات . على Z هي علاقة تكافؤ ، وبالتحديد علاقة التساوي.

ب. عرف [٢]. = {ب : ب ∈ Z و ب ≡ ٢ (مض ٠)} فتكون [٢] صف تكافؤ ٢ في علاقة التكافؤ، هذه، اكتب بعبارة صريحة [٠] . [٢] . [− ٣] و [٢] حيث ٢ ∈ Z . صف كل صفوف التكافؤ لهذه العلاقة .

حـ لتكن $Z_.$ = {[٢]: ٢ ∈ Z}

هل تكون $Z_.$ مجموعة منتهية ام مجموعة غير منتهية ؟ علل اجابتك .

د   عرف اقتراناً ق : Z ← Z وذلك بوضع ق (أ) = [أ].
واذا كانت أ = ب فلماذا تكون ق (أ) = ق (ب) ؟ اثبت ان ق اقتران واحد لواحد وشامل من Z الى Z .

مراجعة

اشارات مهمة

اقتران	عملية ثنائية تجميعية
مجال	عملية ثنائية تبديلية
مدى	جدول عملية
تساوي الاقترانات	مصفوفة ٢ × ٢
اقترانات واحد لواحد	مصفوفة غير منفردة
او تباينية	زمرة تبديلية
اقتران شامل	عنصر محايد
اقتران مركب	عنصر نظير
مجموعة الصور	تبديلية
ضرب (جداء) ديكارتي	زمرة التماثل التامة
عملية ثنائية التركيب	تماثل
تركيب (اقترانين)	التطابق في مضاعفات ن
خاصية الانغلاق	

الرموز

ق (س)	$م_٢(R)$
ق : س ← ص	(س ، ٥) ، (س ، +) ، (س ، ٠)
او س ←ق ص	(ل ، ٠)
Z	أَ ، أ' ، أ̲
Q	ق ٥ هـ (اقترانات)
R	
Z^+	م (س)

R^+	م ≡ ب (مض ن)
$S_ن$	$م_ن$
$D_ع$	$Z_ن$
س × ص	

اسئلة :

١. ما هي قوانين الاختزال للزمرة ؟ اكتب قائمة ببعض الخصائص الاخرى للزمرة . فعلى سبيل المثال ، هل يمكن ان يكون لزمرة اكثر من عنصر محايد واحد.؟

٢. اذكر نظريتين كل منهما تعطي اوليات مختلفة للزمرة

٣. ليكن $ق$: س ← ص و هـ : ص ← ع اقترانين .

كيف يعرف الاقتران المركب هـ ٥ ق ؟

تحت اي شروط يكون للاقتران ق اقتران عكسي $ق^{-1}$: ص ← س وكيف تعرف الاقتران العكسي ؟

ما هي الشروط التي تضعها على ق و هـ ليصبح هـ ٥ ق اقتران واحد لواحد ؟

ما هي الشروط التي تضعها على ق وهـ ليصبح هـ ٥ ق اقتراناً شاملا من س الى ع؟

٤. كم عنصراً موجوداً في الزمرة $S_ن$؟ لاي قيم ن تكون $S_ن$ غير تبديلية ؟

٥. اذا كانت

$$ق = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & .... & ن \\ م_١ & م_٢ & .... & م_ن \end{pmatrix}$$

عنصراً في $S_ن$ فما هو ق (ر) ؟ ما هو $ق^{-1}$ ($م_ر$) ؟

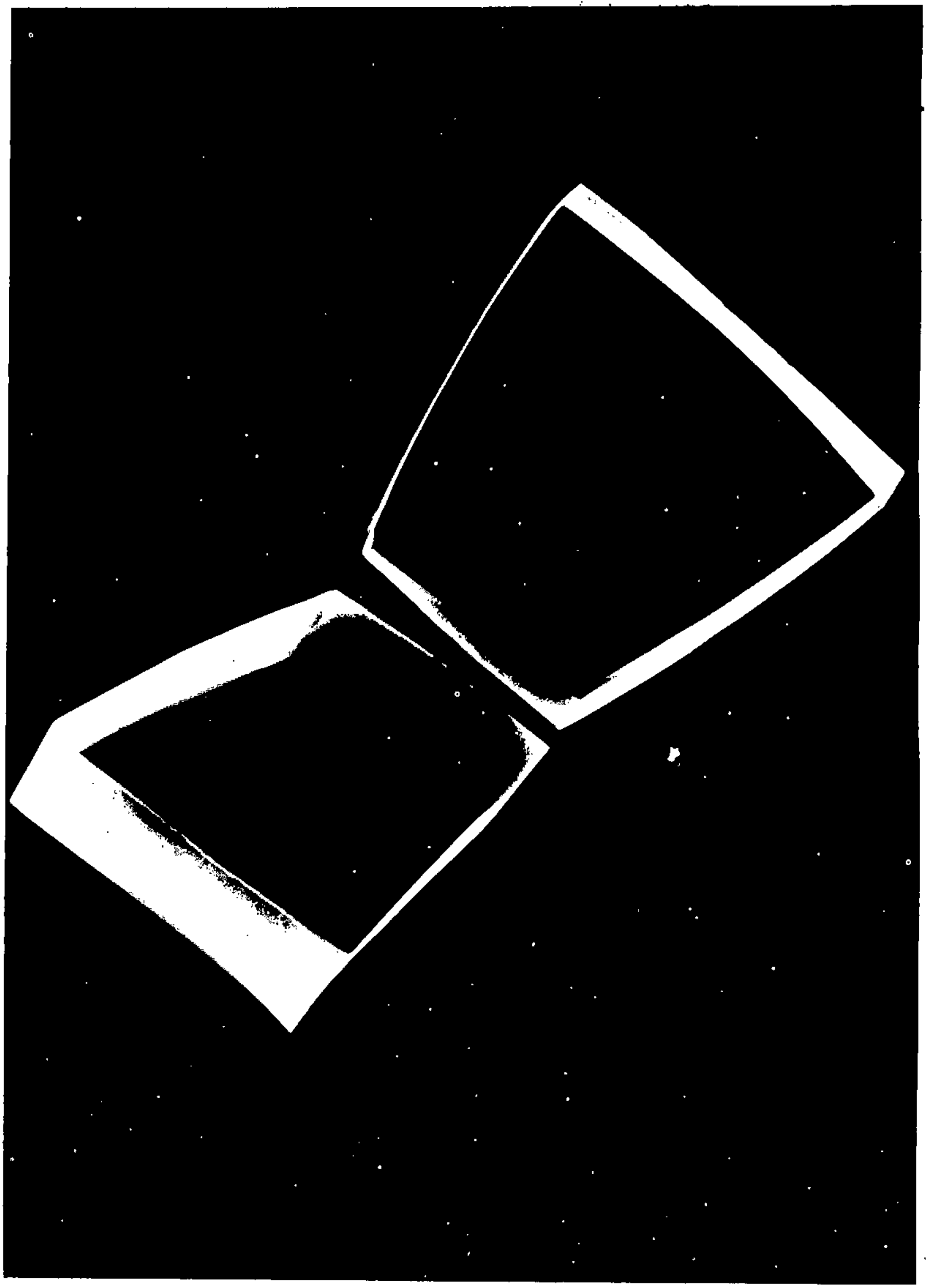
٦. ليكن ن $\in Z^+$ ثابتاً . فاذا كانت م $\in Z$ ، فما هي الاعداد الصحيحة س التي تحقق العلاقة س ≡ م (مض ن) ؟

ما هو العنصر القياسي لزمرة الجمع $Z_ن$ ؟ كم عنصراً موجوداً في المجموعة $Z_ن$؟ كيف يعرف الجمع في $Z_ن$ ؟

٧. اكتب قائمة تحتوي على عدة زمر جمع .

٨. اكتب قائمة تحتوي على عدة زمر ضرب.

تظهر عدة أمثلة مفيدة من الزمر في تمارين هذا الفصل . ان هذه تحتوي على الانظمة التالية :



الفصل الثاني

نظرية الزمر ، ١

قد تكون مجموعة جزئية من زمرة ما س هي نفسها زمرة باستعارة عملية س مثل هذه المجموعة الجزئية تسمى زمرة جزئية من س. وليست كل مجموعة جزئية زمرة جزئية.

سنطور في هذا الفصل نظرية عامة تتعلق بالزمر الجزئية لزمرة اختيارية . وسنعطي الشروط التي تحدد هل اي مجموعة جزئية معطاة هي فعلا زمرة جزئية ام لا . وسنجد ان شروطا حسابية معينة تسري على عدد العناصر التى يمكن ان تكون في زمرة جزئية كما سنعرض بعض الطرق التي يمكن ان تكون في زمرة جزئية كما سنعرض بعض الطرق لتكو ين زمر جزئية من اي زمرة . وسنوضح ونطبق هذه الاعتبارات النظرية لايجاد زمر جزئية من الزمر التى مر ذكرها في الفصل الاول.

وسندرس بعض الاقترانات الخاصة من زمرة الى اخرى ونبين ان زمراً جزئية معينة ترتبط بهذه الاقترانات . وزيادة على ذلك سنستعمل هذه الاقترانات لمعرفة هل اذا كانت لهما زمرتين نفس عدد العناصر تكونان اساسياً زمرتين متشابهتين ، ام مختلفتين . واخيراً، ندرس طريقة لبناء زمرة جديدة من زمرة معطاة ونوع خاص من الزمر الجزئية، ونبين ان الاقترانات الخاصة المذكورة اعلاه مرتبطة ارتباطاً بهذه الزمر الجديدة.

٢,١ الزمر الجزئية

نرى في هذا البند كيف تكون بعض الزمر الجديدة المهمة من الزمر التي نعرفها. واحدى الطرق لذلك هي اختيار مجموعات جزئية من الزمر المعروفة وبالطبع يمكننا ان نبين هل المجموعة الجزئية زمرة ام لا بفحص جميع اوليات الزمرة ولكن هنالك طريقة اكثر كفاءة

وفي هذا البند سنضع الشروط التي تضمن ان تكون مجموعة جزئية ما لزمرة معلومة سه هي نفسها زمرة بالنسبة للعملية المستعارة من سه. ولكن لنبين اولا ماذا نعني بالعملية الثنائية على مجموعة جزئية.

لتكن (سه ، ٥) زمرة ولتكن صه مجموعة جزئية من سه . فانه لكل أ،ب∈صه يكون التركيب (أ٥ب) عنصراً في سه واذا تحققت خاصية الانغلاق على صه بحيث ان أ٥ب∈صه لكل أ،ب، ∈صه ، يكن هنالك اقتران (أ،ب) ← أ٥ب من صه × صه الى صه . ويسمى هذا الاقتران العملية الثنائية المتولدة على صه (بواسطة العملية على سه) . واذا لم تتحقق خاصية الانغلاق على صه فلبعض أ،ب∈صه يكون أ٥ب لا ينتمي الى صه. ولهذا فان الاقتران المعرف على صه×صه بواسطة (أ،ب) ← أ٥ب لا يكون عملية ثنائية على صه.

مثال : في زمرة الجمع R المكونة من الاعداد الحقيقية ، لتكن صه المجموعة Zc المكونة من الاعداد الصحيحة الزوجية . فمن التمرين ١,١ ـ ٢ نرى ان عملية الجمع على R تولد عملية ثنائية على المجموعة Zc ومن جهة اخرى فان عملية الجمع على R لا تولد عملية ثنائية على مجموعة الاعداد الفردية لان هذه المجموعة ليست مغلقة بالنسبة للجمع.

وبايجاز اذا كانت (سه ، ٥) زمرة و صه مجموعة جزئية من سه فان العبارتين التاليتين تكونان متكافئتين:

أ. توجد عملية ثنائية على صه مولده عن العملية الثنائية الاصلية ٥ على سه.

ب. صه مغلقة بالنسبة للعملية ٥ (اي ان لكل أ،ب∈صه، أ٥ب∈صه)

باخذ ما سبق بعين الاعتبار يمكن ان نعرف الان مفهوم الزمرة الجزئية كما يلي :

تعريف :

لتكن (سه ، ٥) زمرة ، صه مجموعة جزئية غير خالية من سه فتكون صه زمرة جزئية من سه

اذا وفقط اذا كانت (صه،٥) زمرة.

لاحظ ان التعريف ١ يقتضي ان تكون العملية في اي زمرة جزئية من سه هي العملية المولدة على صه من العملية الاصلية على سه وزيادة على ذلك فان العملية المتولدة يجب ان تكون تجميعية و يجب ان تحتوي المجموعة صه على عنصر محايد وعلى نظير لكل عنصر فيها. مثلا ان كلا من Q،Z زمر جزئية من R بالنسبة للجمع. ومن جهة اخرى فان المجموعة R^+ المكونة من كل الاعداد الحقيقية الموجبة تكون زمرة بالنسبة لعملية الضرب ولكنها ليست زمرة جزئية من R بالنسبة للجمع.

مسألة :

أ. هل $\{-1,0,1\}$ زمرة جزئية من Z بالنسبة للجمع؟

ب. لتكن صه زمرة جزئية من Z بالنسبة للجمع بحيث ان ٣∈صه . اوجد ستة عناصر اخرى في صه. هل صه منتهية أم لا ؟

مسألة :

برهن ان اي مجموعة جزئية من Z صيغتها $\{\_\_\_\_\_\}$ هي زمرة جزئية من Z بالنسبة للجمع (يحسن دراسة بعض الامثلة أولا)

مسألة :

جد كل الزمر الجزئية من Z_7 بالنسبة للجمع

مسألة :

برهن أن لاي زمرة (سه،٥) بحيث سه ≠ $\{و\}$ زمرتين جزئيتين على الاقل. هما $\{و\}$ و سه.

لان المجموعتين(سه) ، و $\{و\}$ تكونان دائماً زمرتين جزئيتين للزمرة سه فاننا نهتم عادة بأيجاد زمر جزئية غير هاتين . وتعطي لهذه المجموعات الجزئية اسماً خاصاً :

تعريف :

تكون الزمرة الجزئية صه في الزمرة سه زمرة جزئية فعلا اذا وفقط اذا كانت صه ≠ $\{و\}$ و صه ≠ سه وتسمى الزمرتان الجزئيتان سه و $\{و\}$ زمرتين تافهتين.

في جميع الامثلة التي لاحظناها في هذا البند على الزمر الجزئية كان العنصر المحايد للزمرة هو ايضاً العنص المحايد للزمرة الجزئية

وتبين المسألة التالية ان هذا يجب ان يكون دائماً صحيحاً .

مسألة :

برهن انه اذا كانت صه زمرة جزئية من سه فان العنصر المحايد في صه وليكن و هو نفسه العنصر المحايد و للزمرة سه .

مسألة :

لتكن صه مجموعة جزئية فعلا للزمرة سه. اي من أوليات الزمرة يكون دائماً صحيحاً على صه ؟ اي من الأوليات يجب تحقيقها على صه كي نبرهن ان صه زمرة جزئية من سه ؟

(قد ترغب في فحص المجموعات الجزئية التالية :
$\{١،٢،٣،٠٠٠\}$ ، $\{٠،١،٢،٣،٠٠٠\}$ ، $\{-١،٠،١\}$ من Z)

تذكر ان صه ليس من الضروري ان تكون مغلقة بالنسبة للعملية على سه . وهذه الخاصية يجب التحقق منها لأي مجموعة جزئية صه من سه.

وتعطينا النظريتان ٩،١٢ الشروط اللازمة لمعرفة متى تكون المجموعة الجزئية من زمرة ما زمرة جزئية . فكل منهما تبين شرطاً واحداً فقط يجب التحقق منه. فالنظرية ٩ تبحث في الجموعات الجزئية المنتهية للزمر. وهي سهلة التطبيق . حيث انها تحتاج فقط الى ان تكون المجموعة الجزئية مغلقة بالنسبة لعملية الزمرة.

نظرية :

لتكن (سه ، ٥) زمرة ولتكن صه مجموعة منتهية وجزئية فعلا في سه . فاذا كانت صه مغلقة بالنسبة للعملية ٥ فان صه تكون زمرة جزئية من سه.

اترك برهان هذه النظرية حتى التمرين ٢،٢ ـ ٤. وبالرغم من امكانية برهان النظرية الآن فان البرهان اسهل عندما نستخدم المفهوم المطور في ٢،٢.

لاحظنا في البند ١،٦ انه يمكن تمثيل كل من تماثلات المربع كعنصر في زمرة التبديلات $S_٤$ وهكذا تكون $D_٤$ المجموعة المكونة من كل هذه التماثلات مجموعة جزئية فعلا من $S_٤$ ولمحة على جدول التركيب بالنسبة الى $D_٤$. تبين لنا ان $D_٤$ مغلقة بالنسبة للعملية على $S_٤$ وتقول النظرية ٩ ان $D_٤$ زمرة جزئية من $S_٤$ اي أن ($D_٤$، ٥). زمرة (لقد حصلنا على هذه النظرية من قبل بطريقة اكثر تعقيداً).

ولهذا فان $D_٤$ تزودنا بمثال على استخدام النظرية ٩ لتسهيل البرهان على ان مجموعة خاصة منتهية وجزئية من زمرة معروفة تكون نفسها زمرة.

مسألة :

استعمل النظرية ٩ لايجاد جميع الزمر الجزئية من $Z_ن$ بالنسبة لعملية الجمع لكل ن∈ $\{٤،٥،٠٠٠،٩\}$ اعمل قائمة للزمر الجزئية هذه لاستخدامها في البند ٢،٣.

مسألة :

بين بمثال انه اذا كانت صه مجموعة غير منتهية وجزئية من زمرة ما وكانت صه مغلقة بالنسبة لعملية الزمرة فليس من الضروري ان تكون صه زمرة جزئية.

والنظرية التالية تذكر شرطاً لأن تكون اي مجموعة جزئية من الزمرة ، زمرة جزئية. فاذا كانت المجموعة لا منتهية فلا يعد كافياً معرفة ان المجموعة مغلقة بالنسبة لعملية الزمرة . فيجب ان نبرهن انها تحتوي على نظائر.

ونتيجة لأوليات الزمرة فانه اذا كانت صه زمرة جزئية من الزمرة سه بالنسبة للعملية ٥ وكانت أ،ب∈صه فان ب̄∈ صه ومن ثم أ٥ب̄∈صه. والنظرية ١٢ تعطي عكس هذه العرضية.

لاحظ ان النظرية ١٢ صحيحة سواء كانت المجموعة منتهية او غير منتهية.

١٢ مسألة :

اثبت النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (سه ، ٥)زمرة ، صه مجموعة غير خالية وجزئية من سه . فاذا كان أ٥ب̄∈صه لكل أ،ب ∈ صه تكون صه زمرة جزئية من سه . ▲

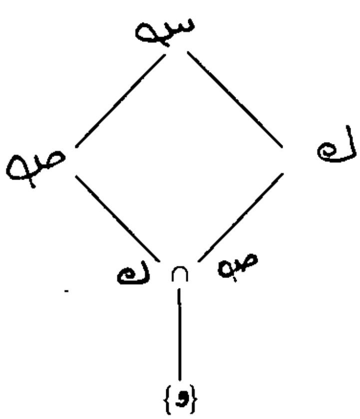
١٣ مسألة :

اعد نص النظرية ١٢ مستعملا الرموز (أ) لزمرة الضرب. (ب) لزمرةالجمع . ان اعادة هذا النص سهل وسيكون مفيداً في مسائل قادمة.

١٤ مسألة :

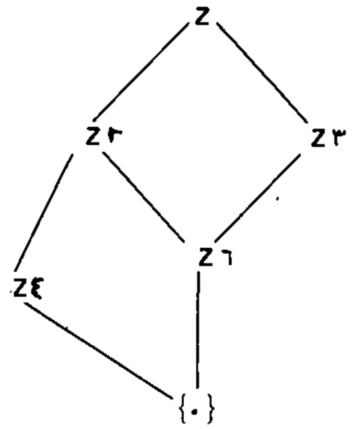
استعمل النظرية ٢التبرهنانه اذا كانت صه و ك زمرتين جزئيتين من سه فان صه∩ك زمرة جزئية من سه . و يمكن استعمال مخطط سهمي لاعطاء صورة عن العلاقة بين الزمر الجزئية لأي زمرة . فمثلا اذا كانت سه زمرة وكانت صه و ك زمرتين جزئيتين من سه فان ص ∩ك تكون زمرة جزئية و صه ∩ ك ⊇ صه ، صه ∩ ك ⊇ ك .

ولبيان هذه العلاقة نرسم سهمياً كما في الشكل ٢,١.



الشكل ٢,١

وفي زمرة الجمع Z تكون المجموعات Z٢ = {٢ن : ن∋Z}، Z٣ = {٣ن : ن∋Z}، Z٤ = {٤ن : ن∋Z}، Z٦ = {٦ن : ن∋Z} كلـهـا زمراً جزئية من Z والواقع ان لهذه الزمر الجزئية خاصية وهي ان Z٤ زمرة جزئية من Z٢ و Z٦ زمرة جزئية لكل من Z٢ و Z٣ (لاحظ ان Z٦ = Z٢ n Z٣) وتبين هذه العلاقة في الشكل ٢,٢



الشكل ٢,٢

لاحظ في الشكل ان زمرة صه١ تقع اسفل زمرة صه٢ وتتصل بها بقطعة مستقيمة او اكثر اذا وفقط اذا كانت صه١ زمرة جزئية من صه٢. و يحتوي المخطط السهمي على الزمرة سه في الاعلى والزمرة الجزئية {و} في الاسفل.

مسألة :

ارسم مخططاً سهمياً لزمر Z٦ الجزئية.

تمارين :

١. جد عدة زمر جزئية من S٤ في كل منها ستة عناصر.
٢. عرف عملية ٥ للمجموعة صه = {-١،٠،١} باستعمال الجدول ٢،١.
   أ. اثبت ان (صه ، ٥) تكون زمرة.
   ب. هل (صه ، ٥) زمرة جزئية من (Z ، +) ؟

٥	٠	١	١-
٠	٠	١	١-
١	١	١-	٠
١-	١-	٠	١

جدول ٢,١

٣. اذا كانت ك زمرة جزئية من صه و صه زمرة جزئية من سه فهل من الضروري ان تكون ك زمرة جزئية من سه ؟ لماذا ؟

٤. برهن العبارة التالية او اذكر مثالا عكسياً ينقضها :

اذا كانت صه و ك زمرتين جزئيتين من سه فان صه $\cup$ ك تكون زمرة جزئية من سه .

٥. يكون المستوى الديكارتي $R^2 = R \times R$ زمرة بالنسبة لعملية الجمع المعرفة بالصيغة (أ،ب) + (حـ،د) = (أ+حـ، ب+د).

ارسم مخططاً بيانياً لكل من المجموعات التالية في المستوى ، و بين هل كل من هذه المجموعات زمرة جزئية ام لا . علل اجاباتك.

أ. {(س،ص) : أس+ب = ص} ، حيث أ،ب $\in R - \{٠\}$ ثابتان.

ب. {(س،ص) : اس = ص} ، حيث أ $\in R - \{٠\}$ ثابت.

حـ. {(س،ص) : س،ص $\in Z$}

د. {(س،ص) : س = ٠}

هـ. {(س،ص) : س $\in Z$}.

٦. لتكن

$$ق = \left\{ \begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ٠ & د \end{pmatrix} : أ ، د \in R \right\}$$

هي المجموعة المكونة من كل المصفوفات القطرية ٢×٢.

باستعمال النظرية ١٢ برهن ان ق زمرة جزئية من م$_٢$(R) بالنسبة للجمع. هل (ق،+) زمرة ابدالية ؟ لماذا ؟

٧. برهن او انف ان المجموعة

$$ق = \left\{ \begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ٠ & د \end{pmatrix} : أ ، د \in R ، أد \neq ٠ \right\}$$

زمرة جزئية من زمرة الضرب ل المكونة من المصفوفات ٢ × ٢ غير المنفردة، هل الضرب تبديلي في ق؟

٨ . برهن او انف أن المجموعة $ع = \left\{ \begin{pmatrix} أ & ب \\ ٠ & د \end{pmatrix} : أ ، ب ، د \in R \right\}$ المكونة من المصفوفات المثلثية العليا تكون زمرة تبديلية جزئية من م$_٢$(R) بالنسبة للجمع .

٩. برهن او انف ان المجموعة $ع_١ = \left\{ \begin{pmatrix} أ & ب \\ ٠ & ك \end{pmatrix} : أ،ب،ك \ni R ، أ ك \neq ٠ \right\}$

زمرة جزئية من زمرة الضرب ل المكونة من المصفوفات ٢×٢ غير المنفردة

هل الضرب تبديلي في $ع_١$؟

١٠ اكمل العرضية التالية وبرهنها : لتكن س $\subseteq R$،

ولتكن $م_٢(سه) = \left\{ \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{pmatrix} : ا،ب،حـ،د \in سه \right\}$

فتكون $م_٢(سه)$ زمرة جزئية من $م_٢(R)$ بالنسبة للجمع اذا وفقط اذا كان ____________

١١* لقد بينت في المسألة ٣ ان اي مجموعة جزئية من Z لها الصيغة $\{ن د : ن \in Z\}$ حيث د عدد صحيح ثابت تكون زمرة جزئية من Z بالنسبة للجمع.

برهن انه لا يوجد زمر جزئية اخرى من Z. وبالتحديد برهن انه اذا كانت صه زمرة جزئية من Z بالنسبة للجمع و صه $\neq \{٠\}$ ، فهنالك عدد صحيح د>٠ بحيث ان صه = $\{ن د : ن \in Z\}$.

١٢ أ. ارسم مخططاً سهمياً مبيناً كل الزمر الجزئية من زمرة الجمع $Z_{٤}$

ب. ارسم مخططاً سهمياً مبيناً كل الزمر الجزئية من زمرة الجمع $Z_{٣}$

١٣ ارسم جزءاً من مخطط سهمي لزمرة الجمع Z محتوياً على جميع الزمر الجزئية ٢Z ، ٣Z ، ... ، ١٢Z.

١٤* ليكن م و ن عددين صحيحين موجبين . ففي زمرة الجمع Z تكون م Z = $\{م ز : ز \in Z\}$ زمرة جزئية من نZ = $\{ن ر : ر \in Z\}$ اذا وفقط اذا كان ____________

اكمل العبارة بوضع شرط على م و ن وبرهنها بعد ذلك.

١٥ أ. في زمرة الجمع Z أوجد مZ$\cap$نZ لعدة ازواج مختلفة من الاعداد الصحيحة الموجبة م و ن.

ب. اذا كان م و ن عددين صحيحين موجبين اختياريين ، فاوجد الزمرة الجزئية مZ$\cap$نZ وبرهن صحة اجابتك. تذكر انها يجب ان تكون بنفس الصيغة مثل مZ و نZ. ●

حـ برهن ان تقاطع زمرتين جزئيتين فعلا من Z تكون زمرة جزئية فعلا.

١٦ اذا كانت (سه،+) زمرة تبديلية لها زمرتان جزئيتان صه و ك ، عرف صه + ك بأنها المجموعة :

صه + ك = $\{ص + ك : ص \in صه ، ك \in ك\}$

فيكون صه + ك تحتوي على كل المجاميع ص + ك الممكنة حيث ص$\in$صه ، ك$\in$ك.

ا. برهن ان صه + ك تكون زمرة جزئية من سه.

في زمرة الجمع $\mathbb{Z}$ أوجد $م\mathbb{Z} + ن\mathbb{Z}$ لعدة ازواج مختلفة من الاعداد الصحيحة الموجبة م و ن.

حـ اذا كانت م و ن عددين صحيحين موجبين اختياريين ، فان $م\mathbb{Z} + ن\mathbb{Z} = ل\mathbb{Z}$ حيث ل عدد ما صحيح.

اوجد ل بدلالة م و ن وبرهن صحة اجابتك. ●

في الزمرة $\mathbb{Z}$ تسمى المتتالية اللانهائية من الزمر الجزئية

$٢\mathbb{Z} \supseteq ٤\mathbb{Z} \supseteq ٨\mathbb{Z} \supseteq ١٦\mathbb{Z} \supseteq \ldots$ سلسلة متناقصة.

أوجد سلسلة متناقصة في $\mathbb{Z}$ تحتوي على الزمرة الجزئية $ك\mathbb{Z}$ ، حيث ك اي عدد صحيح موجب.

٢,٢ رتب العناصر

ان احدى الطرق الطبيعية للبدء ببناء زمرة جزئية هي اختار عنصر $أ \neq$ و في الزمرة ثم اخذ جميع تركيبات أ٥أ ، (أ٥أ) ، أ٥ ، وهكذا. ومن الممكن ان تكون قد استعملت هذه الطريقة لا شعورياً لايجاد الزمر الجزئية من $\mathbb{Z}$ او من $\mathbb{Z}_ن$ حيث ن = ٤،٥،٠٠٠،٩. ولتسهيل هذه الطريقة نحتاج الى بعض الرموز والمصطلحات.

تعريف :

تعرف المضاعفات العددية للعنصر أ∈سه حيث (سه ، +) زمرة جمع بوضع

(٠) · (أ) = ٠

(١) · (أ) = أ

(ن) · (أ) = (ن - ١) أ + أ حيث ن = ٢،٣،٠٠٠

(-ن) · (أ) = ن (-أ) حيث ن = ١،٢،٣،٠٠٠

فحوى التعريف ١٦ أن ٢أ = أ + أ ، ٣أ = ٢أ + أ =(أ+أ) + أ وهكذا . لاحظ انه اذا كانت سه مجموعة من الاعداد الحقيقية فيكون المضاعف العددي هو الضرب العادي لعدد حقيقي بعدد صحيح. وامتداداً للخصائص المألوفة للاعداد الحقيقية نحصل على العرضية التالية :

عرضية :

لتكن (سه،+) زمرة . فلكل أ∈سه ولكل زوج م ،ن∈$\mathbb{Z}$ يكون

$أ^م + أ^ن =$ ـــــــــــــــــــ

$(أ^م)^ن = أ^{(م ن)}$.

اترك برهان هذه العرضية كوظيفة بيتية .

وكما عرفت المضاعف العددي لزمرة الجمع . يمكن تعريف القوى الصحيحة لزمرة مثل $(R - \{٠\} ، \cdot)$ أو $(S_٣ ، ٥)$ حيث تكون عمليتها ليست جمعاً.

تعريف :

تعرف القوى الصحيحة لعنصر $أ \in س$ حيث $(س ، ٥)$ زمرة غير تبديلية بوضع

$أ^٠ = و$

$أ^١ = أ$

$أ^ن = أ^{ن-١} ٥ أ$ حيث ن = ٢ ، ٣ ، ...

$أ^{-ن} = (أ')^ن$ حيث ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

ونتيجة للتعريف ١٨ نحصل على ان $أ^٢ = أ ٥ أ$ ، $أ^٣ = أ^٢ ٥ أ = (أ ٥ أ) ٥ أ$ ، $أ^{-٣} = (أ' ٥ أ') ٥ أ'$

وهكذا ففي زمرة الضرب

$R - \{٠\}$ ، $٢^{-٣} = (\frac{١}{٢})^٣ = \frac{١}{٨}$

وتسهيلا لحساباتنا بقوى مختلفة لنفس العنصر ، نحتاج للعرضية التالية :

عرضية :

اذا كانت $(س ، ٥)$ زمرة وكان $أ \in س$ فان لكل $م، ن \in Z$

$أ^م ٥ أ^ن = أ^{م+ن}$

$(أ^م)^ن = أ^{م ن}$

اترك برهان هذه العرضية للتمرين ٣.

ربما لاحظت خلال عملك مع الزمر مثل $S_٣$، $D_٤$(تماثلات المربع) ، $Z_ن$ ان لكل عنصر من الزمرة قوة أو مضاعفاً يساوي وحدة الزمرة. فمثلا في $S_٣$ نجد ان التبديلة

$$ت = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$$

لها الخاصية ان $ت^٣ = و = ت^٦ = ت^٩$ وهكذا

ولكن $ت^١ \neq و$ وكذلك $ت^٢ \neq و$ وبالمثل ، في $Z_٨$: $(٤).(\hat{٢}) = \hat{٨} = (٨) \cdot (\hat{٨}) = (١٢) \cdot (\hat{٨})$ ، وهكذا

ولكن $(١) \cdot (\hat{٨})$ ، $(٢) \cdot (\hat{٨})$ و $(٣) \cdot (\hat{٨})$ كلها مختلفة عن $\hat{٨}$.

و يعطي للعددين الصحيحين ٣

في ت = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

و ٤ في $٨_٢$ اسم خاص ، يدل عليه التعريف التالي:

تعريف :

ﺃ. لتكن (سه،+) زمرة جمع. ان رتبة عنصر ﺃ∈سه هي اقل عدد صحيح موجب ن يحقق ن ﺃ = ٠ ، واذا كانت م ﺃ ≠ ٠ لكل عدد صحيح موجب م فللعنصر ﺃ رتبة لا نهائية.

ب. لتكن (سه،٥) زمرة ليست ابدالية . ان رتبة عنصر ﺃ∈سه هي اقل عدد صحيح موجب ن يحقق ﺃ^{ن}= و واذا كانت ﺃ^{م} ≠ و لكل عدد صحيح موجب م فللعنصر ﺃ رتبة لا نهائية.

ولكي تجد رتبة عنصر مثل ٢٨ الموجودة في زمرة الجمع $Z_٨$ فاحسب المضاعفات المتتابعة ، (١) · ($٢_٨$) ، (٢) · ($٢_٨$) ، (٣) · ($٢_٨$) وهكذا . حتى تحصل على المضاعف المطلوب الذي يكون مساو ياً ٨.

وبما ان (٤) · ($٢_٨$) = ٨ في حين ان (١) · ($٢_٨$) ، (٢) · ($٢_٨$) و (٣) · ($٢_٨$) كلها مختلفة عن ٨ ، لذا تكون رتبة $٢_٨$ هي ٤.

وبالمثل فلايجاد رتبة $u_١$ في $D_٤$ فاحسب القوى المتتابعة $u_١^١$ ، $u_١^٢$ ، $u_١^٣$ ، وهكذا . وبما ان $u_١^٢$ = و وكذلك $u_١$ ≠ و فتكون رتبة u هي الثانية

مسألة :

ا. جد رتبة كل عنصر في $Z_٥$. جد رتبة عنصرين مغايرين للصفر في $Z_٦$.

ب. جد رتبة كل عنصر في الزمرة $D_٤$ المكونة من تماثلات المربع.

حـ. جد رتبة عنصرين مغايرين للصفر من زمرة الجمع Z.

في البند ١ ، ٢ لعلك كونت الزمر الجزئية من $Z_٦$ باختيار عنصر ما ﺃ$_٦$∈$Z_٦$ واخذ كل المضاعفات لهذا العنصر : ﺃ$_٦$ ، ٢ ﺃ$_٦$، ٣ ﺃ$_٦$ وهكذا. تستخدم رمزاً خاصاً لهذا النوع من المجموعات ونعطيه اسماً خاصاً كما ترينا التعريفات التالية.

تعريف :

لتكن (سه ، +) زمرة جمع . وليكن للعنصر ﺃ∈سه رتبة منتهية ن .

نعرف<ﺃ>بانه المجموعة المكونة من كل المضاعفات رﺃ (ر∈Z^+) للعنصر ﺃ :

<ﺃ>= {ر ﺃ : ر∈Z^+} = {(١)ﺃ ، (٢). ﺃ ، (٣) . ﺃ ، . . . . }

واذا لم تكن (س ، ٥) زمرة جمع ، فتكون <ﺃ> هي المجموعة المكونة من كل القوى ﺃ^{ر} (ر∈Z^+) للعنصر ا :

<ﺃ>= {ﺃ^{ر} : ر∈Z^+} = {ﺃ^١ ، ﺃ^٢ ، ﺃ^٣ ، ...}

مسألة :

أ. في $D_٤$ اوجد كل العناصر في ⟨ح١⟩ ، في ⟨حu١⟩.

ب. في الزمرة $Z_٦$ أوجد المجموعات ⟨٠⟩٦ ، ⟨١⟩٦ ، ⟨٢⟩٦ ، . . . . ، ⟨٥⟩٦.

مسألة :

أ. لتكن (سه ، ٥) زمرة و أ ∈ سه . فاذا كانت رتبة العنصر أ هي ن ، فكم عنصراً مختلفاً موجوداً في ⟨أ⟩ ؟. اكتب قائمة بهذه العناصر.

ب. لتكن (سه ، ٥) زمرة و أ ∈ سه عنصراً له رتبة منتهية ن برهن ان ⟨أ⟩ زمرة تبديلية جزئية من سه . استعمل النظرية ٩ في برهانك.

تعريف :

لتكن (سه ، ٥) زمرة وليكن أ ∈ سه عنصراً له رتبة منتهية ن ، فتسمى ⟨أ⟩ الزمرة الدورية الجزئية المتولدة من العنصر أ.

تمارين :

١ - جد رتبة كل عنصر في $S_٣$.

٢ - ليكن أن عنصراً في زمرة الجمع $Z_ن$ وليكن ر عدداً صحيحاً موجباً رأينا ان ر أن = (ر أ)ن . (التمرين ١,٨-٣).

أ. استعمل هذه الحقيقة لايجاد رتبة كل من العناصر الموجودة في $Z_ن$

ب. جد رتبة كل من العناصر التالية :

$٩_{١٢} \in Z_{١٠٢}$ ، $٧_{٢٥٥}$ $Z_{٢٥٥}$ ، $٨_{٢٢} \in Z_{٢٢٠}$.

٣ - برهن العرضية ١٩. ما هي التغيرات الضرورية لكي تحصل على برهان العرضية ١٧.

٤ - برهن النظرية ٩. أي برهن انه اذا كانت (سه،٥) زمرة و صه مجموعة منتهية غير خالية وجزئية من سه وكانت صه مغلقة بالنسبة للعملية ٥، فان صه زمرة جزئية من سه . ربما ترغب في اختيار عنصر ما ، أ ، من المجموعة المنتهية الجزئية صه واعتبار القوى أ ، أ٢، أ٣، . . . •

٥ - أ. اكتب كلا من الزمر الجزئية في $Z_٨$ بالصيغة ⟨أ٨⟩، حيث أ٨ عنصرا ما ∈ $Z_٨$.

ب. اختر زمرة جزئية من $Z_{١٢}$ رتبتها ستة واكتبها بالصيغة ⟨أ١٢⟩ حيث أ١٢ ∈ $Z_{١٢}$. جد رتبة كل عنصر ر أ١٢ في هذه الزمرة الجزئية . ما العلاقة بين رتبة ر أ١٢ ورتبة أ١٢ ؟

٦ - بين ان لكل زمرة منتهية وغير تبديلية زمرة تبديلية جزئية تختلف عن {و} .

٧* - لتكن (سه ، ٥) زمرة ولتكن أ ، ب ∈ سه.

أ. برهن ان رتبة أ تساوي رتبة أ′.

ب. برهن ان رتبة أ٥ب تساوي رتبة ب٥أ.

٨*- اذا كانت (سه،٥) زمرة وكانت رتبة أ ∈ سه منتهية وتساوي ن وكان ر عدداً صحيحاً يحقق $أ^{ر}$ = و، اثبت ان ن | ر.

٩*- اذا كانت (سه،٥) زمرة ، وكانت رتبة أ ∈ سه منتهية وتساوي ن وكان ر عدداً صحيحاً :

أ. بين انه اذا كان ١ ≤ ر ≤ ن فان نظير $أ^{ر}$ يساوي أ مرفوعاً لقوة موجبة : $(أ^{ر})' = أ^{س}$ حيث س عدد صحيح موجب . وبالمثل ، في زمرة الجمع فان − (ر أ) يساوي احدى مضاعفات أ الموجبة. (ربما ترغب في النظر في بضعة امثلة اولا)

ب. استعمل خوارزمية القسمة في اثبات انه اذا كانت ر ≤ ن فان $أ^{ر} = أ^{ل}$ حيث ل ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ن−١}
واثبت بعد ذلك أن نظير $أ^{ر}$ يساوي أ مرفوعة لقوة غير سالبة . وبالمثل ، في زمرة الجمع ، يكون ر أ = ل أ
حيث ل ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، . . . ، ن− ١} و − (ر أ) تساوي احدى المضاعفات غير السالبة للعنصر أ.

حـ. بين ان {$أ^{ر}$: ر ∈ Z} = <أ> = {$أ^{ر}$: ر ∈ Z^{+}}
= {$أ^{ر}$: ر ∈ Z^{+}} = {و ، أ ، $أ^{٢}$ ، ... ، $أ^{ن-١}$}.
ولهذا اذ كان للعنصر أ رتبة منتهية ن فتكون المجموعة المكونة من كل قوى أ هي نفس المجموعة المكونة من كل القوى الموجبة للعنصر أ.
وتصح نتيجة مشابهة لهذه في حالة زمر الجمع.

١٠ - اثبت بالحساب المباشر انه يمكن كتابة كل عنصر أ ∈ $Z_{١٢}$ كحاصل جمع عنصرين $ب_{١٢}$ و $حـ_{١٢}$ بحيث ان للعنصر $ب_{١٢}$ رتبة تقبل القسمة على ٣ وللعنصر $حـ_{١٢}$ رتبة تقبل القسمة على ٤ . ما العلاقة بين رتب $أ_{١٢}$ ، $ب_{١٢}$ و $حـ_{١٢}$ ؟

١١ - أ. لتكن (سه،٥) زمرة تبديلية وليكن ب عنصراً من سه رتبته م ن . اثبت انه اذا كان م ، ن عددين اوليين نسبياً (القاسم المشترك الاعظم للعددين م ، ن يساوي ١) ، فانه يوجد $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ ∈ سه بحيث ان رتبة $ب_{١}$ تساوي م ورتبة $ب_{٢}$ تساوي ن ، $ب_{١}$ ٥ $ب_{٢}$ = ب.
●

ب. أوجد مثالا في $Z_{١٢}$ لعنصر $ب_{١٢}$ رتبته ٤ ويمكن التعبير عنه بحاصل جمع عناصر رتبة كل منها ٢.

حـ. لتكن سه زمرة تبديلية ، $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، . . . ، $أ_{ر}$ أعداداً أولية مختلفة $حـ_{١}$ ، $حـ_{٢}$ ، . . . ، $حـ_{ر}$ ∈ Z^{+}. اثبت انه اذا كان للعنصر ب ∈ سه رتبة $أ_{١}^{حـ_{١}} أ_{٢}^{حـ_{٢}} . . . أ_{ر}^{حـ_{ر}}$ فيوجد $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ ، . . . ، $ب_{ر}$ ∈ سه بحيث ان ب = $ب_{١}$ ٥ $ب_{٢}$ ٥ ... ٥ $ب_{ر}$.
ورتبة $ب_{ن}$ تساوي $أ_{ن}^{حـ_{ن}}$ ●

١٢*- لتكن سه زمرة تبديلية وليكن أ عدداً اولياً و صهم المجموعة المكونة من كل العناصر في سه والتي تكون رتبها قوى غير سالبة للعدد أ.

أ. في زمرة الجمع $Z_{٢٦}$ أوجد كل العناصر من

صهم = { أ$_{٢٦}$: رتبة أ$_{٢٦}$ تساوي $٢^{ر}$ ، ر $\in Z$ }

صه$_{٢}$ = { أ$_{٢٦}$: رتبة أ$_{٢٦}$ تساوي $٣^{ر}$ ، ر $\in Z$ }

ب. بين انه اذا كانت سه زمرة تبديلية فتكون صهم زمرة جزئية من سه. ●

١٣ للتحدي . لتكن (سه ، ٥) زمرة و أ $\in$ س رتبته ن ، ولتكن ب $\in$ <أ> حيث ان ب = $أ^{س}$ (س $\in Z^{+}$).

أ. جد رتبة ب . علل اجابتك . ●

ب. جد الشروط اللازمة والكافية على سه و ب حتى تكون <ب> = <أ> اي ان تكون الزمرة المتولدة من أ هي الزمرة المتولدة من ب. ●

٢,٣ نظرية لاجرانج والمجموعات المرافقة

رأينا ان لكل زمرة سه $\neq$ {و} زمرتين جزئيتين على الاقل ، الزمرتين الجزئيتين المعروفتين {و} ، سه ودرسنا الشروط التي تساعدنا على تعيين متى تكون مجموعة جزئية من زمرة هي نفسها زمرة . وربما يكون هناك شروط السعة الزمرة الجزئية تساعدنا في استبعاد مجموعات معينة من الزمر الجزئية. مثلا اذا احتوت مجموعة جزئية من $S_{٤}$ على ثلاثة عناصر ، فهل من الممكن ان تكون زمرة جزئية ؟ هل من الممكن لمجموعة جزئية مكونة من خمسة عناصر ان تكون زمرة جزئية من $S_{٣}$؟

وستجيب النظرية الرئيسية في هذا البند أعني نظرية لاجرانج ، على هذه الاسئلة .

تعريف :

رتبة الزمرة (او الزمرة الجزئية) سه هي عدد العناصر الموجودة في سه . ان احدي النتائج الاساسية في نضرية الزمر تكمن في العلاقة بين رتبة الزمر المنتهية ورتبة كل من زمرها الجزئية . وستساعدك المسألة التالية على اكتشاف تلك العلاقة.

مسألة :

ارجع الى قائمتك للزمر الجزئية لـ $Z_{ن}$ حيث ن = ٤ ، ٥ ، ... ، ٩ (بند ٢,١) قارن رتبة الزمرة $Z_{ن}$ حيث ن = ٤ ، ٥ ، ... ٩ مع رتبة كل من زمرها الجزئية.

مسألة :

اذكر نظرية تعطي العلاقة بين رتبة زمرة منتهية سه ورتبة زمرة جزئية اختيارية من سه.

نظرية :

اذا كانت صه زمرة جزئية من زمرة منتهية سه فان ———————— من المحتمل ان تكون قد ذكرت نتيجة تعرف باسم نظرية لاجرانج . دققها مع مدرسك . ان التعريف والمسائل التالية تقودنا الى برهانها .

تعريف :

لتكن (سه،٥) زمرة ، صه اي زمرة جزئية من سه و أ ∈ سه . تعرف المجموعة المرافقة اليمنى أ٥صه للزمرة الجزئية صه في سه بالمجموعة

أ٥صه = {أ٥ص : ص ∈ صه}

لاحظ ان أ٥صه هي المجموعة المكونة من كل العناصر أ٥ص

حيث أ ثابت و ص يتغير خلال الزمرة الجزئية صه.

في زمرة الضرب (سه ، .) تكتب المجموعة المرافقة اليمنى بالصيغة أصه = {أص : ص ∈ صه}

وفي زمرة الجمع (سه،+) تكتب المجموعة المرافقة اليمنى بالصيغة

أ + صه {أ +ص:ص ∈ ص}

انظر الزمرة الجزئية {$٠_٦$ ، $٣_٦$} من زمرة الجمع $Z_٦$. تتكون المجموعة المرافقة اليمنى $١_٦$ + صه من كل العناصر التي صيغتها

$١_٦$ + ص ، ص ∈ صه ولهذا فان

$١_٦$ + صه = {$١_٦$ + $٠_٦$ ، $١_٦$ + $٣_٦$} = {$١_٦$ ، $٤_٦$}.

مسألة :

لكل $أ_٦ ∈ Z_٦$ أوجد جميع العناصر الموجودة في المجموعة المرافقة اليمنى $أ_٦$ + صه حيث صه = {$٠_٦$ ، $٣_٦$}. اعمل ذلك بشكل منتظم اولا بايجاد جميع العناصر الموجودة في المجموعة المرافقة $٠_٦$ + صه وبعد ذلك جد جميع العناصر الموجودة في المجموعة المرافقة $١_٦$ + ص ، وهكذا . ثم اجب على الاسئلة التالية :

أ. هل $أ_٦$ + صه زمرة جزئية من $Z_٦$ لكل $أ_٦ ∈ Z_٦$ ؟

ب. هل كل عنصر من $Z_٦$ موجود في احدى المجموعات المرافقة اليمنى ؟

حـ. هل يمكن لعنصرين مختلفين من $Z_٦$ تعيين نفس المجموعة المرافقة اليمنى ؟ وبكلمات اخرى ، هل يمكن ان تكون $أ_٦ \neq ب_٦$ في $Z_٦$ ولكن

$أ_٦$ + صه = $ب_٦$ + صه ؟

د. هل يكون لمجموعتين مرافقتين يمينيتين مختلفتين اي عناصر مشتركة ؟

هـ ما عدد المجموعات المرافقة اليمنى المختلفة للزمر الجزئية صه؟

و. كم عدد العناصر الموجودة في كل مجموعة مرافقة يمنى ؟

ز. جد علاقة بين رتبة الزمرة $Z_{ن}$ ورتبة الزمرة الجزئية صه وعدد المجموعات المرافقة اليمنى المختلفة لِ صه.

التمهيدية التالية صحيحة سواء كانت الزمرة سه منتهية او غير منتهية، في برهان اي عبارة في التمهيدية، تذكر انك تستطيع استعمال عبارة تسبقها .

مسألة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

لتكن (سه ، ∘) زمرة و صه زمرة جزئية من سه.

ا. ان الزمرة الجزئية صه مجموعة مرافقة يمنى لنفسها (اي انه يوجد عنصر ا ∈ سه بحيث أن ا∘صه = صه).

ب. كل عنص ا∈سه هو عنصر في المجموعة المرافقة اليمنى ا∘صه (وهذا يبين ان كل عنصر ا في سه ينتمي الى احدى المجموعات المرافقة اليمنى لِصه وهي ا∈ا∘صه.)

جـ اذا كانت ا∈ب∘صه فان ا∘صه = ب∘صه ▲

د. اذا كان ا∘صه∩ب∘صه≠∅فان ا∘صه = ب∘صه. ▲

هـ اذا كانت ا∘صه ≠ ب∘صه فان ا∘صه∩ب∘صه = ϕ.

(وتبين هذه النتيجة انه لا يوجد لاي مجموعتين مرافقتين يمنيين مختلفتين لِصه اي عناصر مشتركة . ولهذا فان كل مجموعتين مرافقتين يمينيين لِصه تكونان متساويتين او منفصلتين).

تكون المجموعات الرافقة اليمنى المختلفة لصه تجزئة للزمرة سه. (التجزئة هي عائلة من مجموعات جزئية من سه منفصلة كل عن الأخرى واتحاد كل هذه المجموعات الجزئية يساوي سه.)

ز. اذا كانت صه زمرة جزئية منتهية تحتوي على ك من العناصر ، فيكون عدد العناصر الموجودة في اى مجموعة مرافقة يمنى لِ صه هو ———————— ونحن الآن جاهزون لبرهنة نظرية لاجرانج.

مسألة :

برهنة نظرية لاجرانج باستعمال التمهيدية ٣١. وفي برهانك اجعل ن ترمز الى رتبة الزمرة المنتهية سه ، ك الى رتبة الزمرة الجزئية صه ،و م الى عدد المجموعات المرافقة المختلفة اليمنى لِصه في سه.

تعريف :

عدد المجموعات اليمنى المرافقة المختلفة للزمرة الجزئية صهـ من الزمرة سهـ يسمى دليل صهـ في سهـ.

مسألة :

اكتب صيغة تعبر عن دليل زمرة جزئية صهـ بدلالة رتبة سهـ ورتبة صهـ (انظر مسألة ٣٢).

ان نظرية لاجرانج لا تضمن ان اي زمرة منتهية رتبتهان لهافعلا زمرة جزئية برتبة معينة ففي التمرين ١٤ مثال على زمرة رتبتها اثني عشر وليس لها زمرة جزئية من الرتبة ستة . وبذا فان عكس نظرية لاجرانج ليس صحيحاً . في البند ٢,٢ عرفنا رتبة العنصر ودرسنا الزمر الجزئية المتولدة من عنصر ذي رتبة منتهية . وتبين النظرية التالية العلاقة بين رتبة العنصر ورتبة الزمرة التي يولدها.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

ان رتبة اي عنصر أ في زمرة منتهية تساوي رتبة الزمرة الجزئية ⟨أ⟩ المتولدة من هذا العنصر ورتبة أ تقسم رتبة الزمرة . ▲

في برهاننا لنظرية لاجرانج استعملنا فقط المجموعة المرافقة اليمنى للزمرة الجزئية . فلندرس الآن باختصار المجموعات المرافقة اليسرى للزمرة الجزئية.

تعريف :

لتكن (س،٥) زمرة . ولتكن صهـ زمرة جزئية من سهـ ولنفرض ان أ ∋ سهـ. فالمجموعة المرافقة اليسرى صهـ٥أ لِصهـ هي المجموعة

ص٥أ = {ص٥أ : ص ∋ صهـ}

ويمكن برهنة صيغ مقابلة لكل العبارات الواردة في التمهيدية ٣١ عن المجموعات المرافقة اليسرى للزمرة الجزئية صهـ. فاذا كانت صهـ زمرة جزئية من الزمرة سهـ وكان للزمرة صهـ دليل منته في سهـ ، فيكون عدد المجموعات المرافقة اليمنى لِصهـ مساوياً لعدد المجموعات المرافقة اليسرى لِصهـ. (وهذه الحقيقة مبرهنة في التمرين ٧.)

مسألة :

في زمرة تماثلات المربع Dع لتكن صهـ الزمرة الجزئية {و ، u٢} جد عنصراً ما أ ∋ Dع يحقق أ٥صهـ ≠ صهـ٥أ. يبين هذا المثال ان المجموعات المرافقة اليمنى لزمرة جزئية صهـ ليس من الضروري ان تكون هي نفس المجموعات المرافقة اليسرى لِصهـ.

مسألة :

برهن العرضية : اذا كانت صه زمرة جزئية للزمرة سه وكانت سه تبديلية فان :

أ ∘ صه = صه ∘ أ لكل أ ∈ سه.

تمارين :

١ - اثبت ان كل زمرة رتبتها عدد اولي ليس لها زمر جزئية فعلا.

٢ - جد كل الزمر الجزئية لزمرة تماثلات المربع D_4 .
هنالك عشر من هذه الزمر الجزئية ، بعضها لا تتولد عن عنصر واحد ، وانما تنشأ عن عنصرين على الاقل (وقواهما).

٣*- نحتاج في عملنا القادم الى تحليل المجموعات المرافقة لعدة زمر جزئية من الزمرة D_4 المكونة من تماثلات المربع .

أ. احسب كل المجموعات المرافقة اليمنى والمجموعات المرافقة اليسرى للزمرة الجزئية {و ، μ_2} وسجل نتائجك في الجدول ٢,٢ . ان المدخلة المعطاة في الجدول هي المجموعة المرافقة اليمنى.

$\delta_1 \circ$ {و ، μ_2} = {$\delta_1 \circ$ و ، $\delta_1 \circ \mu_2$}

الجدول ٢,٢

	e	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
المجموعات المرافقة اليمنى لـ[و ، μ_2]								
المجموعات المرافقة اليسرى لـ {و، μ_2}								

ب. اعمل جدولا يشمل جميع المجموعات المرافقة للزمرة الجزئية {و ، ρ_2}

حـ اعمل جدولا يشمل جميع المجموعات المرافقة للزمرة الجزئية {و ، δ_1}

٤ - اوجد كل الزمر الجزئية لـ S_3 وضعها في مخطط سهمي .

٥ - أ. اختر زمرة جزئية صه رتبتها ٢ في S_3 وعين المجموعات المرافقة اليسرى واليمنى لـ صه.

ب. كرر الجزء أ بزمرة جزئية رتبتها ثلاثة في S_3 .

٦- لتكن سه زمرة ، صه زمرة جزئية من سه ، أ ، ب ∈ صه

أ. أثبت ان أ ∈ ب ∘ صه اذا وفقط اذا كانت $ب^{-1}$ ∘ أ ∈ صه . ولهذا فان
أ ∘ صه = ب ∘ صه اذا وفقط اذا كان $ب^{-1}$ ∘ أ ∈ صه لماذا؟

ب. اثبت ان أ∈صه٥ب اذا وفقط اذا كان أ٥بَ∈صه. ولهذا فان صه٥ أ = صه٥ب اذا وفقط اذا كان أ٥بَ∈ص. لماذا؟

حـ اثبت ان أ٥ص = ب٥ص اذا وفقط اذا كان صه٥ أَ = ص٥بَ

٧. لتكن سه زمرة (منتهية او غير منتهية) ولتكن صه زمرة جزئية من سه لها دليل منته ك. ولهذا تكون صه زمرة جزئية من سه ولها ك من المجموعات المرافقة اليمنى المختلفة في سه. استعمل التمرين ٦ لبرهنة انه يوجد بالضبط ك من المجموعات المرافقة اليسرى المختلفة لِصه في سه. يثبت هذا بشكل خاص انه اذا كان الدليل لزمرة جزئية منتهياً (مثلا : في زمرة جزئية من زمرة منتهية)، فان عدد المجموعات المرافقة اليسرى يساوي عدد المجموعات المرافقة اليمنى للزمرة الجزئية.

٨*. لتكن (سه،٥) زمرة تبديلية منتهية، ولتكن رتبة كل من أ، ب∈سه م و ن على الترتيب. اثبت انه اذا كان م و ن عددين اوليين نسبياً (القاسم المشترك الاعظم للعددين م، ن يساوي ١) فان رتبة العنصر أ٥ب تساوي م ن.

٩ - لتكن سه زمرة و صه زمرة جزئية من سه. عرف علاقة على سه وذلك بان تذكر ان أ∼ب اذا وفقط اذا كان بَ٥أ∈صه.

أ. برهن ان ∼ هي علاقة تكافؤ على سه.

ب. لتكن أ∈سه. برهن ان صف التكافؤ$[أ]_{صه}$ = {س : س∈سه ، س∼ أ} يكون مساوياً للمجموعة المرافقة اليمنى أ٥صه.

حـ لتكن سه زمرة الجمع Z ولتكن صه = نZ = {ن ر : ر∈Z} فيكون الشرط بَ٥ أ∈ صه هو بالضبط الشرط أ-ب = ن ر لعدد ما ر∈Z.
بين ان أ∼ب حيث أ،ب∈Z اذا وفقط اذا كان أ ≡ ب (مض ن).
وبعد ذلك اثبت ان صف التكافؤ $[أ]_{صه}$ هو الصف
أن = {س : س∈Z ، س ≡ أ (مض ن)}. ومن ثم فالمجموعة المكونة من المجموعات المرافقة (المختلفة) اليمنى لِـن Z في Z هي الزمرة $Z_{ن}$. وضح هذه النتيجة عندما تكون ن = ٥.

١٠ - في هندسة التحويلات تدرس اقترانات تسمى الانسحابات. ويعرف الانسحاب $\phi_{أ}$: Z ← Z بوضع $\phi_{أ}$ (س) = س + أ لكل س∈Z حيث أ عدد صحيح ثابت. فالانسحاب ϕ يحرك المجموعة يميناً او يساراً أ من الوحدات. لتكن صه الزمرة الجزئية نZ من Z.

أ. برهن ان المجموعات المرافقة اليمنى أ + صه تكون مساوية للمجموعة المنسحبة $\phi_{أ}$(صه) = {أ+س : س∈صه}.

ب. وضح هندسياً انه اذا كانت أ∈صه، فان المجموعة المرافقة اليمنى (او المنسحبة)

$أ$ + صه تكون مساوية صه.

ﺣ ـ في R^2 يعرف الانسحاب $\phi_{هـ،ر} : R^2 \leftarrow R^2$

بوضع $\phi_{هـ،ر}$(س،ص) = (س+هـ،ص+ر) لكل : (س،ص) $\in R^2$ حيث هـ،ر $\in R$ ثابتان . لتكن صه = $\{$(س،ص) : $أ$س = ص$\}$ حيث $أ \in R$ ثابت. فتكون صه زمرة جزئية من R^2 بالنسبة للجمع . ارسم المجموعة $\phi_{هـ،ر}$(صه) مع قيم عدة من هـ ، ر $\in R$. صف هندسياً المجموعات المرافقة (المنسحبة) (هـ،ر) + صه.

١١ ـ ليكن ن و ر عددين صحيحين موجبين بحيث ان ر تقسم ن . انشيء زمرة جزئية من $Z_ن$ رتبتها ر .

وهذا يثبت انه اذا كانت ر احدى عوامل ن فللزمرة $Z_ن$ زمرة جزئية رتبتها ر. لاحظ ان هـذه النتيجة لا تتبع من نظرية لاجرانج .

١٢ ـ برهن بانشاء $D_ن$ ان للزمرة الزوجية ($D_ن$ ،٥) زمرة جزئية رتبتها ن . (انظر التمرين ٦,١-٥) لأنشاء $D_ن$).

١٣ ـ للتحدي . لتكن رتبة الزمرة سه ستة . فاما ان يكون للزمرة سه عنصر رتبته ستة (كما في الزمرة $Z_٦$)او ان يكون هناك عناصر $أ$، ب$_١$ ، ب$_٢$،ب$_٣$ بحيث يكون للعنصر $أ$ رتبه قدرها ثلاثة وللعناصر ب$_١$ ، ب$_٢$ ، ب$_٣$ رتبة اثنين و سه = $\{$و ، $أ$ ، $أ^٢$، ب$_١$ ، ب$_٢$ ، ب$_٣$$\}$ (كما في الزمرة $S_٣$)
برهن هذه العبارة بحل المسائل التالية :

$أ$. اثبت ان سه تحتوي على عنصر رتبته ثلاثة او ستة . كي تثبت ذلك افرض ان لكل عنصر $أ \neq$ و رتبة اثنين ، واثبت ان سه تكون تبديلية ولها زمرة جزئية رتبتها اربعة (هل هذا ممكن) ؟ ●.

ب. افرض ان سه زمرة رتبتها ستة ولا تحتوي على اي عنصر رتبته ستة وليكن $أ \in$ س عنصراً رتبته ثلاثة ولتكن
صه = $\{$و ، $أ$ ، $أ^٢$$\}$=$<أ>$
برهن انه اذا كانت ص $\notin$ صه فتكون صه لها رتبة الاثنين.
لتثبيت ذلك استبعد الاحتمالات
ص^٢ = ص٥$أ^ر$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ص^٢ = $أ$ ، ص^٢ = $أ^٢$.

ﺣ ـ اكمل برهان العرضية .

١٤*ـ للتحدي . سه$_٤$ زمرة تبديلات $\{$١ ، ٢ ، ٣ ، ٤$\}$ تحتوي على عدة عناصر صيغتها

$$\begin{pmatrix} ا & ب & ﺣ & د \\ ب & أ & ﺣ & د \end{pmatrix}$$

منها عددان صحيحان يبقيان ثابتين . والتبديلة

$$\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$$

عنصر من هذا النوع . وتسمى هذه العناصر بالنقلات.

أ. جد كل النقلات في $S_٤$.

لتكن $A_٤$ المجموعة المكونة من عناصر من $S_٤$ هي نتيجة عدد زوجي من النقلات (ليس من الضروري ان تكون كلها مختلفة).

ولهذا تأخذ عناصر $A_٤$ الصيغة

$$\begin{pmatrix} أ & ب & حـ & د \\ ب & أ & حـ & د \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} هـ & و & ز & ح \\ هـ & و & ز & ح \end{pmatrix}$$

او تركيبات من هذه العناصر . وستفترض (بدون برهان حتى البند ٤,٢) انه لا يمكن ان تنتمي اي نقلة للمجموعة $A_٤$.

ب. استعمل النظرية ٩ لبرهان ان $A_٤$ تكون زمرة جزئية من $S_٤$. وتكون المجموعة $A_٤$ زمرة جزئية فعلا . لاننا فرضنا ان اي نقلة لا يمكن ان تنتمي الى المجموعة $A_٤$. ما هي القيم المحتملة لرتبة $A_٤$ ؟

حـ. اعمل قائمة بعناصر $A_٤$ وجد رتبة $A_٤$.

د. جد رتبة كل عنصر في $A_٤$.

هـ. اثبت ان $A_٤$ ليست لها زمرة جزئية من الرتبة ستة. ●

٢,٤ الاقترانات المحافظة

سنعتبر في هذا البند بعض الاقترانات الخاصة التى تقرن زمرة ما سه بزمرة ما $\overline{\text{سه}}$. وليس ما يهمنا هنا كل الاقترانات من زمرة الى أخرى وانما فقط الاقترانات التي تحافظ بشكل ما على عمليات الزمرتين سه ، $\overline{\text{سه}}$.

وتزودنا اللوغرتمات بمثال على هذه الاقترانات : نعلم ان (R ، +) و (R^+ ، ·) زمرتان . للوغرتمات الخاصية انه اذا كان س و ص$\in R^+$ فان لو$_{١٠}$ (س ص) = لو$_{١٠}$ س + لو$_{١٠}$ ص .

ولهذا فيقرن اللوغرتم حاصل الضرب في R^+ بحاصل جمع في R .

تعريف :

لتكن (سه ،٥) و (سَهَ،*) زمرتين .

فالاقتران المحافظ من سه الى سَهَ هو اقتران

ϕ (٩٥ب) = ϕ (٩) * ϕ (ب) لكل ٩ ، ب∈ سه.

ففي الاقتران المحافظ تكون صورة حاصل الضرب (او الجمع) هي حاصل الضرب (او الجمع) للصور . ويمكننا بيان هذا كما في الشكل ٢,٣ .

ϕ : سه ⟵ سَهَ

٩ ⟵ ϕ (١)

ب ⟵ ϕ (ب)

٩٥ب ⟵ ϕ (١٥ب) = ϕ (١) * ϕ (ب)

مسالة :

في كل من اجزاء هذه المسألة حقق هل الاقتران المعطى ϕ : س ⟵ سَهَ اقتران محافظ ام لا ، وعلل اجاباتك.

٩. ϕ من (R - {٠} ، ٠)الى نفسها معرفة بالصيغة ϕ (س) = سن حيث ن عدد صحيح موجب ثابت.

ب. ϕ من (R^+، ٠) الى نفسها معرفة بالصيغة ϕ (س) = س+١.

حـ ϕ (R - {٠} ، ٠) الى (R^+ ، ٠) معرفة بالصيغة ϕ (س) = | س |.

د. ϕ من (Z ، +) الى (٢Z ، +) معرفة بالصيغة ϕ (٩) = ٢ ٩ لكل ٩∈Z.

يجب ان تحتوي كل زمرة على عنصر محايد ونظائر لعناصرها . وبما ان العنصر المحايد والنظائر تعرف صورها بواسطة عملية الزمرة والاقتران المحافظ « يحافظ على العملية » لذا نأمل بتعيين صورها بالنسبة للاقتران المحافظ . وهذا هو مقصد النظرية التالية :

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

ϕ اقتران محافظ من الزمرة (سه،٥) الى الزمرة (سَهَ،*).

فاذا كان وَ العنصر المحايد في سه ، وَ العنصر المحايد في سَهَ . فيكون ϕ (و) = وَ ، ϕ (٩َ) = [ϕ (٩)]′ لكل ٩∈سه.

اذكر نتيجة النظرية ٤١ بالكلمات . بالنسبة لاقتران محافظ

ϕ:س⟵سَهَ تكون صورة العنصر المحايد في سه هي ________ وصورة نظير اي عنصر هي ________

مسألة :

في كل اقتران محافظ في المسألة ٤٠ ، استعمل النظرية ٤١ لحساب ϕ (و) و ϕ (أَ) حيث أ∋س

مسألة :

برهن انه اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً من الزمرة (سه،٥) الى الزمرة (سَه،*) وكان ن عدداً صحيحاً موجباً و أ∋سه كان

ϕ (أ٥أ . . . ٥أ) = ϕ (أ) * ϕ (أ) * . . . * ϕ (أ).

حيث يوجد ن من الحدود في كل تعبير . استعمل تعريف المضاعفات والقوى لكتابة هذه النتيجة عندما تكون (سه ، +) و (سَه ، +) زمرتي جمع وعندما تكون (سه ، ٠) و (سَه ، ٠) زمرتي ضرب .

هنالك تناظر طبيعي أ ← أن من Z الى $Z_{ن}$ وفي المسألة التالية نثبت ان هذا التناظر اقتران محافظ .

مسألة :

ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . عرف اقتراناً ϕ : $Z \leftarrow Z_{ن}$ بوضع ϕ (أ) = أن لكل أ ∋Z.

أ- برهن ان ϕ اقتران محافظ من (Z ، +) الى ($Z_{ن}$ ، +).

ب. هل ϕ اقتران شامل من Z الى $Z_{ن}$ ؟

حـ هل ϕ اقتران واحد لواحد ؟

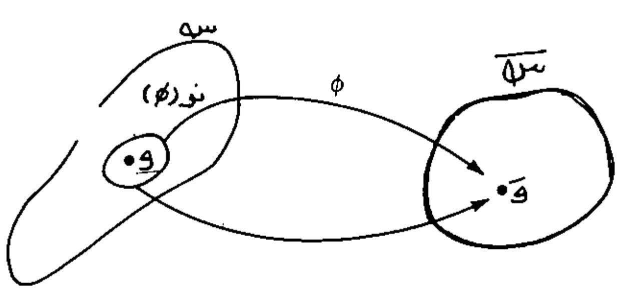
يرتبط كل اقتران محافظ ϕ : سه ←سَه بمجموعتين مهمتين النواة ومجموعة الصور اللتين سندرسهما الآن.

تعريف :

لتكن (سه ، ٥) و (سَه ، *) زمرتين . تعرف نواة اي اقتران محافظ بانها المجموعة من كل العناصر في سه التي تقرن بالعنصر المحايد وَ∋سَ و يرمز لنواة ϕ بالزمر نو (ϕ) ولذا فان

نو (ϕ) = $\{$ س : س∋سه و ϕ (س) = وَ $\}$

(انظر الشكل ٢,٤)



شكل ٢,٤

مسألة :

جد نو(ϕ) للاقتران المحافظ في المسألة ٤٤.

هل هي زمرة جزئية من Z ؟

مسألة :

عرف اقتراناً ϕ : م$_٢$ (R) ← R بوضع

$$\phi\left(\left(\begin{matrix} أ & ب \\ حـ & د \end{matrix}\right)\right) = أ + د$$

وتسمى الصورة ϕ (ل) للمصفوفة ل اثر المصفوفة ل

أ. هل ϕ اقتران محافظ من (م$_٢$ (R) ، +) الى (R، +) ؟ علل اجابتك.

ب جد نواة ϕ. هل هي زمرة جزئية من م$_٢$ (R) ؟

حـ جد مجموعة الصور $\left\{ \phi \text{ (ل) : ل } \in \text{ م}_٢ \text{(R)} \right\}$

تزودنا كل من النواة ومجموعة الصور للاقتران المحافظ بزمرتين جزئيتين مفيدتين والحقيقة القائلة ان هاتين المجموعتين هما زمرتان جزئيتان من زمرتيهما هي فحوى النظريتين ٤٨ و ٥١ . وفي البند ٢،٩ نبين ان نواة الاقتران المحافظ ϕ من الزمرة سه الى الزمرة $\overline{\text{سه}}$ لها دور هام في وصف $\overline{\text{سه}}$.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (سه ، ٥) و ($\overline{\text{سه}}$ ، ٭) زمرتين . فاذا كان ϕ : سه ← $\overline{\text{سه}}$ اقترانا محافظاً كانت نو(ϕ) زمرة جزئية من سه .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (سه،٥) و ($\overline{\text{سه}}$،٭) زمرتين . يكون الاقتران المحافظ ϕ :
سه ←$\overline{\text{سه}}$ واحداً لواحد اذا وفقط اذا كانت نواه ϕ تحتوي فقط على العنصر المحايد في سه
وباختصار يكون الاقتران المحافظ ϕ واحداً لواحد اذاً وفقط اذا كانت نو (ϕ) = $\{$و$\}$.▲

وتتيح لنا النظرية ٤٩ التحقق من كون الاقتران المحافظ متبايناً وذلك بايجاد نواة هذا الاقتران . فاذا كانت النواة تحتوي على عنصر واحد فقط كان الاقتران المحافظ تباينياً . واذا احتوت النواة ولو على عنصر واحد عدا و فان الاقتران المحافظ لا يكون تباينياً . لاحظ انه يمكن التحقق من كون الاقتران المحافظ واحداً لواحد باختيار هذه الخاصية عند النقطة

$\bar{\text{و}} = \phi$ (و).

فالاقتران المحافظ ϕ يكون واحداً لواحد اذا وفقط اذا تحقق الشرط لكل سه ∈ سه ، ϕ (س) = $\bar{\text{و}}$ ⇐ س = و

مسألة :

ليكن ϕ الاقتران المحافظ من (R^+، ·) الى (R ، +) معرفاً بالصيغة ϕ (س) = لو$_{١٠}$ س .
استعمل النظرية ٤٩ لبرهان ان ϕ اقتران تبايني .
اترك برهان النظرية التالية للتمرين ٩.

نظرية :

اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً من الزمرة (سه،٥) الى الزمرة ($\bar{\text{سه}}$،*) تكون مجموعة الصور ϕ (سه) زمرة جزئية من $\bar{\text{سه}}$ (تذكر ان ϕ (سه) = {ϕ (س) :س∈سه} .

تمارين :

١- عرف اقتراناً ϕ من زمرة الضرب ل للمصفوفات ٢×٢ غير المنفردة الى (R − {٠}، ·) بوضع

$$\phi\left(\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{pmatrix}\right) = \text{أد} - \text{ب حـ}$$

لكل $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{pmatrix}$ ∈ ل

فلكل ع∈ل ، تكون ϕ (ع) محددة ع

ا. برهن ان ϕ اقتران محافظ من (ل،·) الى (R− {٠} ، ·).

ب. جد نواة ϕ .

حـ لتكن ع∈ل استعمل الحقيقة ان ϕ اقتران محافظ لايجاد ϕ (ع^{-1})

٢ ـ عرف الاقتران ϕ : م$_{٢}$(R) ← R بوضع

$$\phi\left(\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{pmatrix}\right) = \text{أ} + \text{ب} + \text{حـ د}$$

لكل $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{pmatrix}$ ∈ م$_{٢}$(R) .

ا. هل ϕ اقتران محافظ من (م$_{٢}$ (R) ، +) الى (R ، +) ؟ علل اجابتك.

ب. جد نواة ϕ وصورة م$_{٢}$ (R) بالنسبة الى ϕ .

٣ ـ جد اقترانا محافظاً وشاملاً من (R − {٠} ، ·) الى ({−١،١} ، ·).

٤ ـ عين كل الاقترانات المحافظة من (Z ، +) الى (Z ، +) . علل اجابتك .

٥ - جد اقتراناً محافظاً وشاملا من (Z_8، +) الى (Z_4، +) . لا تنسى ان تبرهن ان اقترانك هو بالفعل اقتران محافظ

٦ - لتكن $\phi : S_3 \leftarrow Z_2$ معرفة بالصيغة

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} ٢^{\cdot} & \text{اذا كانت } \alpha = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}، \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{pmatrix}، \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix} \\ ٢^{١} & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

بـن ان ϕ اقـتـران محافظ . وهذا يبين انه يمكن لزمرة غير تبديلية ان تقترن اقتراناً شاملا بزمرة تبديلية بواسطة اقتران محافظ

٧*- لتكن (سه ، ٥) و ($\bar{سه}$ ، *) زمرتين ولتكن $\bar{س} \in \bar{سه}$. عرف اقترانا ϕ : سه $\leftarrow \bar{سه}$ بالصيغة ϕ (أ) = $\bar{س}$ لكل أ$\in$سه . جد كل العناصر $\bar{س}\in\bar{سه}$ بحيث يكون ϕ اقتراناً محافظاً

٨ - عرف $\phi : Z_{ن} \leftarrow Z_{ر}$ بالصيغة ϕ ($أ_{ن}$) = $أ_{ر}$ لكل أ$\in Z$

أ. اذا كانت ن = ٦ ، ر = ٥ جد ϕ ($٦^{\cdot}$) ، ϕ ($٦^{٣}$) ، ϕ ، ($٦^{٥}$)، $\phi_{ر}$ ($٦^{٦}$).

هل $\phi : Z_{ن} \leftarrow Z_{م}$ اقتران ؟ اذا كانت ن = ٦ و ر = ٣

جد ϕ ($٦^{\cdot}$) ، ϕ ($٦^{٣}$) ، ϕ ($٦^{٥}$) و ϕ ($٦^{٦}$).

هل $\phi : Z_{ن} \leftarrow Z_{م}$ اقتران ؟

ب. برهن ان ϕ تكون معرفة تعريفاً حسناً اذا وفقط اذا كان ر | ن ●

حـ برهن انه اذا كانت ر | ن كان الاقتران $\phi : Z_{ن} \leftarrow Z_{ر}$ اقتراناً محافظاً.

د. اذا كانت ر|ن ، جد نو ϕ و ϕ ($Z_{ن}$) بعبارات صريحة .

٩ - برهن النظرية ٥١.

١٠ -برهن العبارات التالية أو أعط مثالا يناقضها :

اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً وشاملا من زمرة تبديلية (سه ، ٥) الى زمرة ($\bar{سه}$ ، *) كانت $\bar{سه}$ زمرة تبديلية .

١١ -ناقش التأثيرات المحتملة الناتجة عن اقتران محافظ ϕ : سه $\leftarrow\bar{سه}$ على رتبة عنصر ما س $\in$سه :

رتبة س	رتبة ϕ (س)
منتهية	منتهية
منتهية	لا نهائية
لا نهائية	منتهية
لا نهائية	لا نهائية

في كل حالة برهن التوافق المعطى بين رتبة س ورتبة ϕ (س) لا يمكن ان يحصل او اعط مثالا يتحقق فيه هذا التوافق.

١٢ ـ برهن انه اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً شاملا من الزمرة (سه ، ٥) الى الزمرة ($\bar{\text{سه}}$ ، *) وكانت سه = ⟨ا⟩ حيث ا ∈ سه ذو رتبة منتهية فانه يوجد ا̅ ∈ $\bar{\text{سه}}$ بحيث ان ⟨ا̅⟩ = $\bar{\text{سه}}$.

١٣ ـ ليكن ϕ : سه ⟵ $\bar{\text{سه}}$ اقترانا محافظاً من الزمرة (سه ، ٥) الى الزمرة (سه ، ٥) الى الزمرة ($\bar{\text{سه}}$ ، *) وليكن ا ∈ سه عنصراً رتبته منتهية . برهن ان رتبة ϕ (ا) تقسم رتبة ا.

١٤ ـ ليكن ϕ اقتراناً محافظاً من الزمرة (سه ، ٥) الى الزمرة (س ، *) ولتكن $\bar{\text{صه}}$ مجموعة جزئية من $\bar{\text{سه}}$. عرف معكوس صورة $\bar{\text{صه}}$ بانه المجموعة

ϕ^{-1} ($\bar{\text{صه}}$) = ﴿س : س ∈ سه و ϕ (س) ∈ $\bar{\text{صه}}$﴾

ا . عرف ϕ Z ⟵ Z_4 بالصيغة

ϕ (ا) = $ا_4$ لكل ا ∈ Z . ولتكن $\bar{\text{صه}}$ الزمرة الجزئية ﴿ • ، ٢_4 ﴾ من Z_4 . جد ϕ^{-1} ($\bar{\text{صه}}$) وبرهن انها زمرة جزئية من Z. ما هي نو (ϕ) ؟

هل نو (ϕ) زمرة جزئية من ϕ^{-1} ($\bar{\text{صه}}$).

ب. لتكن (سه ، ٥) و ($\bar{\text{سه}}$ ، *) زمرتين وليكن ϕ : سه ⟵ $\bar{\text{سه}}$ اقترانا محافظاً . برهن انه اذا كانت $\bar{\text{صه}}$ زمرة جزئية من $\bar{\text{سه}}$ فان ϕ^{-1} ($\bar{\text{صه}}$) زمرة جزئية من سه وان نو (ϕ) ⊇ ϕ^{-1} ($\bar{\text{صه}}$).

٢,٥ التشاكل

رأينا امثلة عديدة على الزمر منها زمر تختلف اختلافا كبيراً عن غيرها ، فمثلا يظهر ان للزمرتين Z و D_4 خصائص قليلة مشتركة .ولكن هناك زمراً اخرى مثل Z_4 والزمرةالجزئية ﴿و ، $ا_1$ ، $ا_2$ ، $ا_3$﴾ من D_4 فهاتان لهما نفس الرتبة على الاقل . وهنا يطرح السؤال كيف يمكننا مقارنة او تصنيف الزمر بحيث نتبين هل التركيب الاساسي لاي زمرتين معطا تين واحد . واحدى الطرق لذلك تتطلب وجود اقتران واحد لواحد بين الزمرتين يحافظ ايضاً على عملياتها وتتطلب في حالة الزمر المنتهية تواؤم الجدولين.

مسألة :

ا. قارن موضعي العنصرين المحايدين في جدولي العمليتين لزمرة الجمع Z_4 والزمرة الجزئية

ص = $\{$و ، أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3\}$ من D_4 ومن ثم قارن موضع ρ_4 مع أ$_1$ في جدوليهما. ما هي اوجه التشابه التي تلاحظها ؟

ب. نصوغ التناظر بين الزمرتين بتعريف اقتران ϕ من Z_4 الى صه حيث ϕ (أ$_4$) = أ$_1$ و أ = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ . (تذكر ان أ$_1$ = و و أ$_1^4$ = أ$_1$ عندما تكون أ = (١ ، ٢ ، ٣ .) برهن ان ϕ اقتران محافظ شامل متباين من Z_4 الى $\{$و ، أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3\}$.

تعريف :

التشاكل بين الزمرتين (سه ، ٥) و (سهَ ، *) هو اقتران محافظ من سه الى سهَ بحيث يكون تباينياً وشاملا . وتكون الزمرتان (سه ، ٥) و (سهَ ، *) متشاكلتين اذا وفقط اذا امكن ايجاد تشاكل ϕ من سه الى سهَ.

مسألة :

جد تشاكلا بين (Z ، +) وزمرة الجمع $3Z$ = $\{$٣ن : ن$\in Z\}$.

رأينا انه اذا كان ϕ : سه ← سهَ اقتراناً محافظاً فيمكن استعمال نو (ϕ) ومجموعة الصور ϕ (سه) لتعيين هل ϕ واحد لواحد او شامل . ويمكن استخدام هذه النتائج لتقرير متى تكون ϕ تشاكلا.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (سه ، ٥) و (سهَ ، *) زمرتين وليكن ϕ : سه ← سهَ اقتراناً محافظاً . فيكون ϕ تشاكلا اذا وفقط اذا كان نو (ϕ) = $\{$و$\}$ حيث و هو العنصر المحايد في سه و ϕ (سه) = سهَ .

ومن نتائج النظرية ٥٥ اننا نحتاج الى فحص مجموعتين فقط ، وهما النواة ومجموعة الصور ، لتقرير هل الاقتران المحافظ المعطى تشاكل ام لا .

وبوجه خاص ، اذا امكن ايجاد أ $\neq$ و بحيث ان أ$\in$نو (ϕ) فلا تكون ϕ تشاكلا . وبالمثل اذا امكن ايجاد أَ$\in$سهَ بحيث ان أَ$\notin$ ϕ (سه) فان ϕ لا تكون تشاكلا.

مسألة :

حقق فيما اذا كانت كل من الاقترانات التالية تشاكلا من (R $-$ $\{$٠$\}$ ، ٠) الى نفسها.

أ. ϕ (س) = س^2 حيث س$\in$R $-$ $\{$٠$\}$

ب. ϕ (س) = س^3 حيث س$\in$R $-$ $\{$٠$\}$

ان احدى الطرق لتقرير هل من الممكن لزمرتين منتهيتين (سه ، ٥) و (سهَ ، *) ان تكونا متشاكلتين هي مقارنة جدولي عمليتيهما

فاذا اردنا ان يكون الاقتران المفروض تشاكلا فان صورة العنصر المحايد في سه تكون

في حين تكون صورة نظير العنصر $أ \in$ سه هي ________

ونعلم ايضاً انه لكل $أ \in$ سه ، ϕ (أ٥ أ٥ ... ٥ أ) = ϕ (أ)* ...* ϕ (أ) حيث يوجد ن من الحدود في كل تركيب .

فمثلا اعتبر الزمرة الجزئية ص = {و ، u_1 ، u_2 ، $أ_2$} من D_4 والزمرة Z_4 .

اذا اردنا ان يكون الاقتران المفروض ϕ : $Z_4 \rightarrow$ ص تشاكلا فان ϕ (ع٢) = ϕ (ع١ + ع١) = ϕ (ع١) ٥ ϕ (ع١) و ϕ (ع٢) $\neq$ و هل هذا يتحقق مع جدول عملية صه ؟

مسألة :

لتكن (سه ، ٥) و (سه̄ ، *) زمرتين منتهيتين ، رتبة كل منهما ن . افترض انه يمكن وضع عناصر الزمرتين بترتيب معين بحيث يكون للتناظر التبايني $أ_1 \rightarrow \bar{أ}_1$ ، $أ_2 \rightarrow \bar{أ}_2$ ، . . . ، $أ_ن \rightarrow \bar{أ}_ن$ الخاصية التالية : عندما تظهر $أ_م$ في الصف ر والعمود م من جدول عملية سه فان $\bar{أ}_م$ تظهر في الموضع المقابل لجدول عملية سه̄ .

واذن فبأعادة تسمية العناصر لاحدى الزمر يمكننا ان نجعل الجدولين (الجدول ٢,٣ والجدول ٢,٤) متوائمين.

بين انه تحت هذين الشرطين تكون سه و سه̄ متشاكلتين . لعمل ذلك عرف اقتراناً ملائماً ϕ : سه $\rightarrow$ سه̄ واستعمل الجدولين ٢,٣ و ٢,٤ لتبرهن ان ϕ تشاكل.

مسألة :

قارن بين جدولي العملية للزمرة الجزئية

{و ، u_1 ، u_2 ، أ٣} من D_4 والزمرة {أ ، ب ، حـ ، د} المعطاة في التمرين ٢,١ــ٩.

استعمل المسألة ٥٧ لتحقق هل الزمرتان متشاكلتان ام لا .

ربما لاحظت في كل جدول عملية درسناه ان كل صف يحتوي على جميع عناصر الزمرة . وان كل صفين في الجدول مختلفان . فمثلا في (الجدول ٢,٥) جدول الزمرة (Z_3 ، +) يحتوي الصف الاول العناصر ٣٠+ $أ_3$ حيث $أ_3$ تأخذ جميع قيم Z_3 . فيعطينا التناظر $أ_3 \rightarrow$ ٣٠ + $أ_3$ التبديلية.

$$ح_٠ = \begin{pmatrix} ٣٠ & ١_٣ & ٢_٣ \\ ٣٠ & ١_٣ & ٢_٣ \end{pmatrix}$$

والصف الثاني من الجدول يحتوي على كل العناصر $١_٣ + أ_٣$ حيث تأخذ $أ_٣$ جميع قيم Z_3 وهذا التناظر $أ_٣ \rightarrow ١_٣ + أ_٣$ يعطينا التبديلة.

$$ح_١ = \begin{pmatrix} ٣٠ & ١_٣ & ٢_٣ \\ ١_٣ & ٢_٣ & ٣٠ \end{pmatrix}$$

واخيراً يحتوي الصف الثالث على كل العناصر $٢_٣ + أ_٣$
حيث $أ_٣ \in Z_٣$. و يعطينا هذا الصف التبديلة

$$ح_٣ = \begin{pmatrix} ٢_٣ & ١_٣ & ٠_٣ \\ ١_٣ & ٠_٣ & ٢_٣ \end{pmatrix}$$

الجدول ٢,٣

$$\begin{array}{c|cccccccc} \circ & أ_١ & أ_٢ & \cdots & أ_م & \cdots & أ_ن \\ \hline أ_١ & & & & & & \\ أ_٢ & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ أ_ر & & & & أ_ر \circ أ_م = أ_ه & & \\ \vdots & & & & & & \\ أ_ن & & & & & & \end{array}$$

الجدول ٢,٤

$$\begin{array}{c|cccccccc} * & \bar{أ}_١ & \bar{أ}_٢ & \cdots & \bar{أ}_م & \cdots & \bar{أ}_ن \\ \hline \bar{أ}_١ & & & & & & \\ \bar{أ}_٢ & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \bar{أ}_ر & & & & \bar{أ}_ر \circ \bar{أ}_م = \bar{أ}_ن & & \\ \vdots & & & & & & \\ \bar{أ}_ن & & & & & & \end{array}$$

الجدول ٢,٥

+	$٠_{٣}$	$١_{٣}$	$٢_{٣}$
$٠_{٣}$	$٠_{٣}$	$١_{٣}$	$٢_{٣}$
$١_{٣}$	$١_{٣}$	$٢_{٣}$	$٠_{٣}$
$٢_{٣}$	$٢_{٣}$	$٠_{٣}$	$١_{٣}$

مسألة :

أ. اكتب جدول التركيبات للتبديلات $ح_{٠}$ ، $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ المعرفة اعلاه.
لتكن Ω = $\{ح_{٠} ، ح_{١} ، ح_{٢}\}$.
فهل تكون Ω زمرة ؟ (تذكر ان Ω هي مجموعة جزئية منتهية من
م ($\{٠_{٣} ، ١_{٣} ، ٢_{٣}\}$) ، وهي الزمرة المكونة من تبديلات $\{٠_{٣} ، ١_{٣} ، ٢_{٣}\}$

ب. اثبت بمطابقة الجدولين ان التناظر $٠_{٣} \leftarrow ح_{٠}$ ، $١_{٣} \leftarrow ح_{١}$ و $٢_{٣} - ح_{٢}$ يعرف تشاكلا من
$Z_{٣}$ الى الزمرة Ω = $\{ح_{٠} ، ح_{١} ، ح_{٢}\}$.

ان التناظر المعرف في المسألة ٥٩ يبرهن ان $Z_{٣}$ متشاكلة مع Ω الزمرة الجزئية لزمرة التبديلات على $Z_{٣}$. والتعميم من هذه النتيجة لزمرة اختيارية يعتمد على نفس هذا الاسلوب من تكوين التبديلات وهذا التعميم ، ويسمى باسم الرياضي الانجليزي ارثر كايلي ، يعتبر من اروع النتائج في نظرية الزمر . تذكر ان لكل مجموعة غير خالية سه تكون مجموعة التبديلات على سه ، م (سه) زمرة بالنسبة لعملية تركيب الاقترانات.

نظرية :

نظرية كايلي . كل زمرة سه تكون متشاكلة مع زمرة جزئية من زمرة تبديلات . وبشكل خاص تكون سه متشاكلة مع زمرة جزئية من م (سه) .

برهن النظرية بواسطة المسألة التالية :

مسألة :

أ. لتكن أ $\in$ س . عرف اقتراناً
$ح_{أ}$: سه $\leftarrow$ سه بوضع $ح_{أ}$ (س) = أ $\circ$ س لكل س $\in$ سه .
اثبت ان $ح_{أ}$ تبديلية على سه (اي انه اقتران واحد لواحد وشامل من سه الى سه).

ب. اكمل العبارة $ح_{أ} \circ ح_{ب}$ = ______________ . ولعمل ذلك احسب
$(ح_{أ} \circ ح_{ب})$(س) ، حيث س $\in$ سه .

حـ. اثبت ان المجموعة Ω = $\{ح_{أ} :$ أ $\in$ سه$\}$ زمرة جزئية من م(سه) بالنسبة لعملية التركيب .

د. عرف اقتراناً ϕ : سه $\leftarrow$ Ω بوضع

ϕ (أ) = حـ$_{أ}$ لكل أ∈سه

اثبت ان ϕ تشاكل بين سه وΩ.

(لا تنس ان تبرهن (١) أن ϕ اقتران محافظ(٢)أن ϕ اقتران واحد لواحد و (٣) أن ϕ اقتران شامل).

تخبرنا نظرية كايلي (النظرية ٦٠) اننا اذا اردنا ايجاد جميع الزمر من رتبة معينة نحتاج فقط للنظر الى الزمر الجزئية من زمر التبديلات . وبالرغم من أن هذه تحدد انتباهنا فعلاً الا انها لا تصف كل الزمر المرغوبة . والواقع ، ان مسألة ايجاد جميع الزمر من رتبة ن ، حيث ن ، عدد صحيح موجب اختياري هي من اعظم المسائل غير المحلولة في نظرية الزمر ، فالزمر الجزئية من زمر التبديلات ليست جميعها معروفة.

تمارين :

١ ـ لتكن (سه ، ٥) و ($\overline{\text{سه}}$ ، *) زمرتين متشاكلتين . برهن ان (سه ، ٥) زمرة ابدالية اذا وفقط اذا كانت ($\overline{\text{سه}}$ ، *) تبديلية.

٢ ـ اكتب تشاكلا بين ($Z_٦$ ، +) وزمرة جزئية ملائمة من $S_٦$ بالنسبة للتركيب.

٣ ـ في كل جزء من هذا التمرين برهن او انف وجود تشاكل بين الزوج المعطى من الزمر.

أ. ($Z_٨$ ، +) والزمرة ($D_٤$ ، ٥) المكونة من تماثلات المربع .

ب. ($Z_٦$ ، +) و ($S_٣$ ، ٥)

حـ ($S_٣$ ، ٥) والزمرة $D_٣$ المكونة من تماثلات مثلث متساوي الاضلاع بالنسبة لعملية التركيب.

د. الزمرتان الجزئيتان $\{$و ، $u_١$ ، $u_٢$ ، أ$_٢\}$ و $\{$و ، أ$_١$ ، أ$_٢$ ، أ$_٣\}$ من $D_٤$ بالنسبة لعملية التركيب.

٤ ـ عين كل قيم العدد الصحيح ن بحيث يكون الاقتران التالي تشاكلا :

$\phi_ن$ من ($R - \{٠\}$ ، ٠) الى نفسها معرفة بالصيغة $\phi_ن$س (س) = س^ن .

٥ ـ برهن انه اذا كانت صه زمرة جزئية من زمرة الجمع Z و صه ≠ $\{٠\}$ ، فتكون صه متشاكلة مع Z .

٦ ـ برهن او انف وجود تشاكل بين (Z ، +) و (Q ، +) . ●

٧ ـ برهن او انف وجود تشاكل بين (Z ، +) وزمرة الجمع

$$\left\{ \begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ٠ & د \end{pmatrix} : أ ، د \in Z \right\} .$$

٨ ـ برهن او انف وجود تشاكل بين (R ، +) و ($R - \{٠\}$ ، ٠)

٩ ـ ليكن ر ، ن عددين صحيحين موجبين . اكمل العبارة التالية وبرهنها :

تكون الزمرة ($Z_{م}$، +) متشاكلة مع زمرة جزئية من زمرة الجمع $Z_{ن}$ اذا وفقط اذا
__________ .

١٠ ـ لتكن ϕ : $R^{+} \leftarrow R$ معرفة بالصيغة ϕ (س) = لو$_{١٠}$(س) لكل س $\in R^{+}$
ولتكن α : $R \leftarrow R^{+}$ معرفة بالصيغة α(ص) = ١٠^{ص} لكل ص $\in R$.
أ ـ برهن ان $\alpha = \phi^{-1}$ الاقتران العكسي للاقتران ϕ .
ب ـ برهن ان α تشاكل بين (R،+) و (R^{+}،·)
حـ برهن ان ϕ تشاكل بين (R^{+}،·) و (R ، +).
(انظر المسألة ٥٠).

١١*ـ برهن انه اذا كانت ϕ تشاكلا من الزمرة (سه ، ٥) الى زمرة ($\bar{سه}$ ، *). فان ϕ^{-1} تشاكل من ($\bar{سه}$ ، *) الى (سه ، ٥).

١٢ ـ تعرف العبارة « سه متشاكلة مع $\bar{سه}$ » علاقة على الحشد المكون من كل الزمر . اثبت ان هذه علاقة تكافؤ . (اي انها علاقة انعكاس وتماثل وتعدي . (انظر تمرين ١١.)

١٣ـ وضح نظرية كايلي (النظرية ٦٠) باستعمال الزمر الجزئية صه = {و ، u$_{١}$ ، u$_{٢}$ ، أ$_{٢}$} من $D_{٤}$ ه
لكل عنصر أ$\in$صه اكتب الاقتران المناظر ح$_{أ}$ بصيغة تبديلية.
اعمل جدول تركيب للزمرة Ω = {ح$_{أ}$: أ$\in$صه}
اثبت مباشرة (بدون استعمال الاستنتاج من نظرية كايلي)
ان صه متشاكلة مع Ω .

١٤ ـ أ. لتكن سه = {و ، أ} زمرة بالرتبة اثنين . اكتب جدول عملية على سه وبرهن ان سه متشاكلة مع زمرة الجمع $Z_{٢}$.
ب. لتكن سه = {و ، أ ، ب} زمرة رتبتها ثلاثة . اكتب جدول عملية على سه وبرهن ان سه متشاكلة مع زمرة الجمع $Z_{٣}$.

١٥ ـ لتكن سه = {و ، أ ، ب ، حـ} زمرة مكونة من اربعة عناصر. ما هي الرتب المحتملة لعناصر سه ؟
أ. افترض ان سه لها عنصر ، وليكن رتبته اربعة ، اكتب جدول عملية على سه وبرهن ان سه تكون متشاكلة مع زمرة الجمع $Z_{٤}$.
ب. افرض ان سه لا تحتوي على اي عنصر رتبته تساوي اربعة . فتكون رتبة كل عنصر في سه ما عدا العنصر المحايد هي __________ اعمل جدول عملية على سه وبين ان سه تكون متشاكلة مع الزمرة الجزئية {و ، u$_{١}$ ، u$_{٢}$ ، أ$_{٢}$} من $D_{٤}$.
ويبين التمرين١٥ أن اي زمرة رتبتها اربعة تكون متشاكلة اما مع Z او الزمرة الجزئية ع = {و ، u$_{١}$، u$_{٢}$، أ$_{٢}$} من $D_{٤}$. لاحظ ان $Z_{٤}$ و ع ليستا زمرتين متشاكلتين .
(لماذا ؟)

ولهذا فنقول اننا قد عينا كل الزمر غير المتشاكلة التي رتبتها اربعة . وقد عينا في التمرين ١٤ كل الزمر غير المتشاكلة بالرتبتين اثنين وثلاثة.

١٦- عين جميع الزمر غير المتشاكلة التي رتبتها خمسة ولعمل ذلك لتكن سه زمرة رتبتها خمسة . ولتكن أ∈سه بحيث ان أ ≠ و فرتبة العنصر أ تساوي ________ .
اكتب جدول عملية على سه وبرهن ان سه متشاكلة مع زمرة الجمع Z_5.
تبين التمارين ١٤،١٥،١٦، ان اي زمرة بالرتبة اثنين أو ثلاثة أو اربعة او خمسة يجب ان تكون تبديلية.

١٧- برهن ان كل زمرة رتبتها ستة تكون متشاكلة مع زمرة الجمع Z_6 أو مع الزمرة المكونة من التبديلات S_3(انظر التمرين ٢,٣ - ١٣.) ولهذا فتكون Z_6 و S_3 زمرتين غير متشاكلتين رتبة كل منهما ستة .

١٨- ليكن ϕ تشاكلا بين الزمرتين (سه ، ٥) و (سهَ ، *) برهن انه لكل أ ∈سه تكون رتبة ϕ (أ) في سَ مساوية لرتبة أ في سه .

٢,٦ الزمر الدورية

رأينا عدة امثلة على زمر متولدة باستخدام قوى (أو مضاعفات) عنصر منفرد . وتشمل هذه الامثلة زمرة الجمع Z والزمر الجزئية من Z_n بالنسبة للجمع . ونرى في هذا البند ان اي زمرة تحتوي فقط على قوى أو مضاعفات عنصر منفرد تكون متشاكلة مع بعض الزمر المعروفة.

تذكر انه اذا كانت (سه ، ٥) زمرة و أ∈س عنصراً ذا رتبة منتهية ن فان المجموعة : <أ> = {أ^ر : ر∈Z^+} تكون زمرة ابدالية جزئية من سه . (في زمرة جمع <أ> = {ر أ : ر∈Z^+}.)

ولكن اذا كان للعنصر أ رتبة غير منتهية ، فلا تكون المجموعة {أ^ر : ر∈Z^+} أو {ر أ : ر∈Z^+} زمرة جزئية . فمثلا ، المجموعة {٢ر : ر∈Z^+} = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ...} ليست زمرة بالتأكيد ولمثل هذه الحالات نحصل على التعريف التالي :

تعريف :

لتكن (سه ، +) زمرة جمع و أ∈سه لها رتبة لا نهائية ، عرف <أ> بالمجموعة :

<أ> = {ر أ : ر∈Z} = {... ، (-٢)٠أ، (-١)٠أ، (٠)٠أ، (٢)٠أ، ...}

واذا لم تكن سه زمرة جمع و أ∈سه لها رتبة لا نهائية ، نعرف <أ> بالمجموعة

<أ> = {أ^ر : ر∈Z} = {... ، أ^{-٢}، أ^{-١}، أ^{٠}، أ، أ^{٢}، ...}

مسألة :

أ. في زمرة الجمع Z صف كل عناصر المجموعة $\langle 2 \rangle$.

ب. في زمرة الضرب $R-\{0\}$ صف كل عناصر المجموعة $\langle \frac{1}{3} \rangle$

مسألة :

في الزمرة D_4 جد العنصر $ا_1^{-17}$ وعبر عنه بصورة قوة موجبة للزمر $ا_1$ وكذلك عبر عن العنصر u_2^{-21} بصورة قوة موجبة للرمز u_2 .

اذا كانت (سه ، ٥) زمرة و $ا \in$ سه لها رتبة منتهية فان $\{ا^{ر} : ر \in Z\} = \{ا^{ر} : ر \in Z^{+}\}$

ان برهان هذه النتيجة يتبع حالا من التمرين ٢,٢-٩ وهذا يثبت انه يمكن تعريف $\langle ا \rangle$ بانها المجموعة $\{ا^{ر} : ر \in Z\}$ لكل $ا \in$ سه دون اعتبار رتبة ا.

وبهذا فان التعريف الجديد يتفق مع التعريف السابق في الحالة التي تكون فيها رتبة العنصر منتهية . وطبيعي انه في زمرة جمع سه ، اذا كانت ا لها رتبة منتهية فان :

$$\{ر ا : ر \in Z\} = \{ر ا : ر \in Z^{+}\}$$

مسألة :

برهن انه اذا كانت سه زمرة و $ا \in$ سه فتكون $\langle ا \rangle$ زمرة تبديلية جزئية من سه .

(نعلم صحة هذه النتيجة اذا كانت $ا \in$ سه لها رتبة منتهية.)

وتسمى المجموعة $\langle ا \rangle$ بالزمرة الدورية الجزئية المتولدة عن ا . وهناك حالات حيث يوجد عنصر $ا \in$ سه وتكون الزمرة الدورية الجزئية المتولدة عن ا هي سه نفسها . والحالة هذه متضمنة في التعريف التالي :

تعريف :

تسمى الزمرة دورية اذا وفقط اذا امكن ايجاد عنصر $ا \in$ سه بحيث ان سه $= \langle ا \rangle$. و يسمى العنصر ا بمولد سه .

لاحظ ان كل زمرة دورية تكون تبديلية لانه لاي عنصر $ا \in$ سه تكون $\langle ا \rangle$ زمرة تبديلية . لننظر الآن للزمرتين المألوفتين (Z ، +) و ($Z_{ن}$ ، +) حيث ن $\leq$ ٢.

مسألة :

اثبت ان (Z ، +) زمرة دورية . هل يوجد اكثر من عنصر واحد يمكنه (بنفسه) توليد سه ؟

مسألة :

اثبت ان ($Z_{ه}$ ، +) زمرة دورية . هل يوجد اكثر من عنصر واحد يمكنه (بنفسه) توليد $Z_{ه}$ ؟.

مسألة :

ليكن ن $\leq$ ٢ عدداً صحيحاً ثابتاً . اثبت ان ($Z_{ن}$، +) زمرة دورية .

مسألة :

لتكن (سه ، ٥) زمرة دورية متولدة عن عنصر بالرتبة ثلاثة.

كم عنصراً مختلفاً يكون في سه ؟ اعمل جدول عملية للزمرة سه واثبت ان سه تكون متشاكلة مع الزمرة المعروفة ــــــــــــــــ

(انتبه باهتمام الى تعريف رتبة العنصر)

تثبت النظرية التالية ان كل الزمر الدورية المنتهية التي لها نفس الرتبة متشاكلة كما انها تشبه الزمر المعروفة .

مسألة :

اكمل العبارة وبرهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (سه ، ٥) زمرة دورية متولدة عن عنصر رتبته منتهية ن فتكون سه متشاكلة مع الزمرة ــــــــــــــــ . ▲.

مسألة :

اكمل العبارة وبرهن النظرية التالية :

نظرية :

اذا كانت (سه ، ٥) زمرة دورية متولدة عن عنصر رتبته لا نهائية فان سه متشاكلة مع الزمرة ــــــــــــــــ .

والنظريتان ٧١ ، ٧٢ تكملان وصف وتصنيف جميع الزمر الدورية . فاي زمرة دورية منتهية رتبتها ن تتشاكل مع ــــــــــ.

واي زمرة دورية غير منتهية تتشاكل مع ــــــــــــ.

نظرية :

كل زمرة جزئية من زمرة دورية تكون دورية . (اترك برهان هذه النظرية للتمرين ٣). وفي حالة زمرة رتبتها عدد أولي يمكننا في الواقع تقوية النظرية ٧١ للحصول على النظرية التالية المهمة جداً.

مسألة :

اكمل العبارة وبرهن النظرية التالية :

كل زمرة رتبتها عدد اولي تكون دورية . وبالتحديد اذا كان ب عدداً اولياً .

فكل زمرة رتبتها ب تكون دورية ومتشاكلة مع الزمرة ــــــــــــــــ.

تمارين :

١ ـ بين هل كل من الزمر التالية دورية ام لا . علل اجاباتك .

أ. $(S_3 ، ٥)$

ب. $(D_4 ، ٥)$

حـ. الزمرة الجزئية $\{$ و ، $أ_1$، $أ_2$، $أ_3$ من $D_4\}$

د. الزمرة الجزئية $\{$و ، u_1، u_2، $أ_2$ من $D\}$

٢ - برهن ان الزمر المنتهية (سـ ، ٥) تكون زمرة دورية اذا وفقط اذا وجد عنصر أ $\in$ سـ تكون رتبتة نفس رتبه سـ.

٣ - برهن النظرية ٧٣. ●

٤ - برهن او انف ان $(Q$ ، $+)$ تكون زمرة دورية.

٥ - برهن ان كل زمرة غير تبديلية (منتهية او غير منتهية) تحتوي على زمر جزئية تبديلية مختلفة عن $\{$و$\}$.

٦. لتكن سـ زمرة ذات رتبة اولية تساوي ن . صف كل المولدات المحتملة للزمرة سـ (اي كل العناصر أ $\in$ سـ بحيث ان سـ $=\langle$ أ $\rangle$). علل اجابتك.

٧ - لتكن سـ زمرة منتهية دورية رتبتها ن . عين كل الزمر الجزئية الممكنة من سـ .

٨ - لتكن سـ زمرة لا نهائية دورية . عين كل الزمر الجزئية الممكنة للزمرة سـ .

٢,٧ الزمر الجزئية الطبيعية

عندما درسنا المجموعات المرافقة اليمنى واليسرى للزمر الجزئية ، في البند ٢,٣ ، لاحظنا انه ليس من الضروري ان يتساو يا لأي عنصر معين . ولكن عندما تكون للزمرة الجزئية صـ الخاصية أ٥صـ = صـ٥ أ لكل أ$\in$سـ فمن الممكن تكو ين نوع جديد من الزمر باستخدام صـ . وكخطوة اولى لانشاء هذا النوع من الزمر تدرس في هذا البند خصائص زمر جزئية خاصة بحيث تكون المجموعات المرافقة اليمنى هي نفسها المجموعات المرافقة اليسرى .

ولبدء هذا العمل مع الزمر الجزئية فمن المفيد ان نعيد ذكر بعض خصائص المجموعات المرافقة . راجع بانتباه النتائج في التمهيدية ٣١.

مسألة :

في زمرة التماثل $(D_4$، ٥) المكونة من تماثلات المر بع لتكن صـ الزمرة الجزئية $\{$و ، u_1، u_2، $أ_2\}$.

أ. عين العناصر في المجموعة المرافقة اليمنى $أ_1$٥صـ.

ب. عين العناصر في المجموعة المراقة اليمنى $أ_3$٥صـ . اعمل هذا بدون حساب ، باستخدام الخاصية التالية للمجموعات المرافقة :

اذا كان لمجموعتين مرافقتين يمينين ولو عنصر واحد مشترك فتكونان متساو يتين.

حـ. احسب دليل صه في $D_٤$

د. بدون اي حساب عين المجموعات المرافقة اليمنى المتبقية لـ صه في $D_٤$.

(وطبيعي ان نفس الطريقة يمكن استخدامها لايجاد المجموعات المرافقة اليسرى).

تعريف :

لتكن (سه ، ٥) زمرة و صه زمرة جزئية من سه فتكون صه زمرة جزئية طبيعية من سه اذا وفقط اذا كان لكل أ∈سه المجموعة المرافقة اليمنى أ٥صه مساو ية للمجموعة المرافقة اليسرى صه٥أ،اي انه اذا وفقط اذا كان لكل أ∈سه

{ر٥أ : ر∈صه} = صه٥أ = أ٥صه = {أ٥ ر : ر∈صه} .

تنبيه :

لبيان ان زمرة جزئية صه من زمرة سه تكون طبيعية في سه فيجب ان نبرهن على ان صه٥أ = أ٥صه لكل عنصر أ في (كل) الزمره سه . ولا يكفي استخدام تلك العناصر الموجودة في الزمرة الجزئية صه فقط . وفي الواقع اذا كانت أ∈صه فان ص٥أ = صه = أ٥صه.

مسالة :

في الزمرة ($D_٤$ ، ٥) المكونة من كل تماثلات المر بع ، بين هل كل الزمر الجزئية طبيعية ام لا . علل اجاباتك . قد ترغب في حساب دليل كل من الزمر الجزئية وان ترجع الى الجدول ٢,٢ من التمرين ٢,٣-٣.

أ. {و ، $u_٢$}

ب. {و ، $أ_٢$}

حـ. {و ، $u_١$ ، $u_٢$ ، $أ_٢$}.

مسالة :

ينتج مباشرة من المسألة ٣٣ انه اذا كانت الزمرةتبديلية فان كل الزمرة جزئية تكون طبيعية . و يعتقد البعض خطأ بصحة جزء من عكس هذه الحقيقة . انهم يظنون انه اذا كانت صه زمرة جزئية طبيعية من زمرة سه فان ر٥أ = أ٥ر لكل ر∈ص و أ∈سه.

اختر زمرة جزئية طبيعية من $D_٤$ (على سبيل المثال لاحظ المسألة ٧٧) واوجد عنصراً ر في الزمرة الجزئية وعنصراً أ∈$D_٤$ بحيث ان أ٥ر ≠ ر٥أ. و بالرغم من ان تعريف الزمرة الجزئية الطبيعية قد اعطي بدلالة تساوي المجموعات ، فان من المناسب العمل بعناصر المجموعات . وكخطوة اولى في برهنة بعض الصيغ المفيدة المكافئة للتعريف فاننا نحصل على التمهيدية التالية :

مسالة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

لتكن (سه ، ٥) زمرة . تكون الزمرة الجزئية صه من سه زمرة جزئية طبيعية اذا وفقط اذا كان لكل ر∈صه

وكل أ∈سه يوجد عنصران ر١، ر٢ ∈ صه يحققان ر٥أ = أ٥ر١ و أ٥ر = ر٢٥أ ▲

تعطي النظرية التالية عدة شروط كلها متكافئة لكي تكون اي زمرة جزئية زمرة جزئية طبيعية . استعمل التمهيدية ٧٩ لبرهنة تكافؤ العبارتين أ و ب في النظرية (اي لبرهنة ان العبارة أ تتضمن العبارة ب و بالعكس).

اترك بقية البرهان للتمرين ٧.

نظرية :

لتكن (سه،٥) زمرة ولتكن صه زمرة جزئية من سه . فتكون العبارات التالية متكافئة .

أ. صه زمرة جزئية طبيعية من سه .

ب. لكل أ∈سه و ر∈صه يكون
أَ٥ر٥أ∈صه

حـ. لكل أ∈سه يكون
أَ٥صه٥أ ⊇ صه
حيث أَ٥صه٥أ = {أَ٥ر٥أ : ر∈صه}

د. لكل أ∈صه
أَ٥صه٥أ = صه

عرفنا في البند ٢,٤ نواة الاقتران المحافظ φ : سه ← سَهَ واثبتنا ان النواة تكون زمرة جزئية من سه .
و يمكننا تعميم هذه النتيجة كالتالي :

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (سه ، ٥) و (سَهَ ، *) زمرتين وليكن φ : سه ← سَهَ اقتراناً محافظا فتكون نواة φ ، نو (φ) ، زمرة جزئية طبيعية من س . ▲

لقد رأينا انه اذا كانت صه و ع زمرتين جزئيتين من الزمرة (سه ، ٥) فتكون صه∩ع زمرة جزئية .
والعرضية ٨٢ تعميم لهذه النتيجة .

عرضية :

لتكن (سه ، ٥) زمرة . فاذا كانت صه و ع زمرتين جزئيتين طبيعيتين من سه فتكون صه∩ع زمرة جزئية طبيعية من سه .

يترك برهان هذه العرضية للتمرين ١.

مسألة :

لتكن (سه ، ٥) زمرة و صه زمرة جزئية من سه . لقد ذكرنا انه اذا كانت أ∈صه فان أ٥صه = صه = صه٥أ.

ومن المفيد ان نلاحظ ماذا يحصل عندما أ ∉ صه فلتكن ر ∈ صه و أ ∈ سه − صه.

أ. قرر هل ر ٥ أ ∈ صه أو ر ٥ أ ∈ سه − صه.

ب. قرر هل أ ٥ ر ∈ صه أو أ ٥ ر ∈ سه − صه. ▲

مسالة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

اذا كانت (سه ، ٥) زمر منتهية برتبة زوجية ٢ن وكانت صه زمرة جزئية من سه رتبتها ن فتكون صه طبيعية في سه. ▲

وكتطبيقات على النظرية ٨٤ أنظر المسائل ، حتى ٤.

اذا اعدنا الى الذاكرة ان دليل الزمرة الجزئية صه من سه هو عدد المجموعات المرافقة اليمنى المختلفة لِ صه فيمكننا اعادة كتابة النظرية ٨٤ على النحو التالي :

نظرية :

لتكن (سه ، ٥) زمرة منتهية و صه زمرة جزئية دليلها ٢ في سه فتكون صه طبيعية في سه .

وكتعميم لهذه الصيغة من النظرية انظر التمرين ٥.

نظرية :

استعمل النظرية ٨٤ لايجاد زمرة جزئية فعلا وطبيعية للزمرة S_3.

لقد لاحظنا انه لاي زمرة جزئية صه من الزمرة سه فان المجموعات المرافقة لِ صه تتصرف مثل الصفوف في علاقة تكافؤ (مثلا تكون اي مجموعتين مرافقتين لِ صه اما منفصلتين او متساو يتين). وفي البند التالي سندرس المجموعة المكونة من كل المجموعات المرافقة لزمرة جزئية طبيعية (تماما كما درسنا المجموعة المكونة من كل صفوف التكافؤ في مضاعفات ن على Z) ونثبت انه لاي زمرة جزئية طبيعية من الممكن تعريف عملية ثنائية على هذه المجموعة من المجموعات المرافقة .

تمارين :

١ ـ برهن العرضية ٨٢ .

٢ ـ جد كل الزمر الجزئية الطبيعية من D_4 ●

٣ ـ برهن انه لكل عدد صحيح ن ≤ ٣ يوجد للزمرة الثنائية D_n زمرة جزئية طبيعية رتبتها ن.

٤ ـ جد كل الزمر الجزئية الطبيعية من S_3.

٥ ـ برهن النظرية التالية وتعتبر توسيعاً للنظرية ٨٤. ولعمل ذلك يمكنك الاستفادة من التمرين ٢،٣-٧.

٦ - جد اقتراناً محافظاً شاملا من S_3 الى S_2. لا تنس ان نواة الاقتران المحافظ يجب ان تكون زمرة جزئية طبيعية من S_3.

٧ - اكمل البرهان للنظرية ٨٠ . قد ترغب في برهنة مسلسلة التضمينات ب $\Leftarrow$ حـ $\Leftarrow$ د $\Leftarrow$ ب لانك برهنت ان ٢ $\Leftarrow$ ب.

٨*- لتكن (سه ، ٥) و (سه َ ، *) زمرتين وليكن ϕ : سه $\leftarrow$ سهَ اقتراناً محافظاً .

ا. برهن انه اذا كان ϕ شاملا وكانت صه زمرة جزئية طبيعية من سه تكون مجموعة الصور ϕ (صه) زمرة جزئية طبيعية من سهَ.

ب. برهن ان اذا كانت صهَ زمرة جزئية طبيعية من سهَ تكون الصورة العكسية ϕ^{-1} (صهَ) زمرة جزئية طبيعية من سه . انظر التمرين ٢,٤-١٣ لتعريف ϕ^{-1} (صهَ).

٩*- **تعريف :**

اذا كانت (سه ، ٥) زمرة فمركز سه ، و يرمز له بالرمز Z (س) هو المجموعة Z (سه) = {سه : س $\in$ سه و س ٥ ص = ص ٥ س لكل ص $\in$ سه} ولهذا فالعنصر س ينتمي الى مركز سه اذا وفقط اذا كانت س تبديلية مع كل عنصر في سه

٢. جد مركز الزمرة (S_3 ، ٥)

ب. جد مركز الزمرة (D_4 ، ٥)

١٠*- لتكن (سه ، ٥) زمرة . برهن العبارة التالية بالنسبة الى Z (سه) :

٢. Z (سه) زمرة جزئية من سه .

ب. Z (سه) زمرة جزئية تبديلية من سه .

حـ. Z (سه) زمرة جزئية طبيعية من سه .

د. Z (سه) = سه اذا وفقط اذا كانت سه تبديلية.

١١ - جد مركز زمرة الضرب ل المكونة من المصفوفات ٢ × ٢ غير المنفردة.

تنبيه :

Z (ل) ليست مكونة فقط من المصفوفة المحايدة.

١٢*. العنصر المتبادل في الزمر (سه ، ٥) هو اي عنصر يأخذ الصيغة سَ ٥ صَ ٥ س ٥ ص حيث س ، ص $\in$ سه مثلا في D_4 العنصر ٢_1 ٥ U^{-1} ٥ ٢_1 ٥ U متبادل.

لتكن صه المجموعة المكونة من كل المضروبات المنتهية لمتبادلات في سه . و بالتحديد اذا كانت سه$_ر$ ، صه$_ر$ $\in$ سه ، ر = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، ن ، ن أي عدد صحيح موجب فيقول تعريف صه ان التركيب (سَ$_1$ ٥ صَ$_1$ ٥ س$_1$ ٥ ص$_1$) ٥ ... ٥ (سَ$_ن$ ٥ صَ$_ن$ ٥ س$_ن$ ٥ ص$_ن$) يكون عنصراً في صه

٢. برهن ان صه تكون زمرة جزئية من سه . تسمى هذه المجموعة صه بالزمرة الجزئية المتبادلة

من سه .

ب. برهن ان صه تكون زمرة جزئية طبيعية من سه . ●

حـ جد الزمرة الجزئية المتبادلة من D_4 . ابدأ بايجاد المتبادلات في D_4 وقارن مع الزمر الجزئية الطبيعية من D_4.

د. اذا كانت الزمرة (سه ، ٥) تبديلية فتكون الزمرة الجزئية المتبادلة من سه تساوي ________ . هل العكس صحيح ؟ علل اجاباتك.

١٣- برهن انه اذا كانت صه زمرة جزئية من سه و أ∈سه فان أ⁻¹٥صه٥أ زمرة جزئية من سه. و بهذا فان المجموعة أ٥صه٥أ⁻¹ تكون لها فائدة حتى اذا لم تكن صه زمرة جزئية طبيعية من سه . وفي الواقع فالمجموعة أ⁻¹٥صه٥أ يمكن ان تكون مختلفة عن صه اذا لم تكن صه زمرة جزئية طبيعية .

١٤*-لتكن (سه ، ٥) زمرة و صه وعه زمرتين جزئيتين طبيعيتين من سه حيث ان صه∩عه = {و}
اثبت ان ص٥ع = ع٥ص لكل ص∈صه و ع∈عه.

١٥- لتكن صه وعه زمرتين جزئيتين من الزمرة سه. نعرف مركبة اي زمرتين جزئيتين صه و عه بانها المجموعة

صه٥عه = {ص٥ع : ص∈صه و ع∈عه}

أ. في الزمرة D_4 لتكن صه = {و ، أ²} وعه = {و ، u}. لاحظ ان صه تكون طبيعية في D_4. جد صه٥عه وقرر هل هي زمرة جزئية من D_4 ام لا .

ب. اعط مثالا في S_3 لاثبات ان مركبة اي زمرتين جزئيتين ليس من الضروري ان تكون زمرة جزئية .

١٦*-لتكن (سه ، ٥) زمرة و صه وعه زمرتين جزئيتين من سه . برهن العبارتين التاليتين.

أ. اذا كانت صه طبيعية في سه أو عه طبيعية في سه فان صه٥عه تكون زمرة جزئية من سه .

ب. اذا كانت صه طبيعية في سه و عه طبيعية في سه فتكون صه٥عه زمرة جزئية طبيعية من سه.

٢,٨ الزمر الخارجة

ركزنا في البند ٢,٧ على خصائص الزمر الجزئية الطبيعية للزمرة سه (اي الزمرة الجزئية صه حيث تكون المجموعة المرافقة اليمنى أ٥صه مساوية للمجموعة المرافقة اليسرى صه٥أ). و بهذه الخصائص يمكننا الآن بناء زمرة جديدة تكون عناصرها المجموعات المرافقة للزمرة الجزئية الطبيعية صه من سه . وتلعب زمرة المجموعات المرافقة هذه دوراً هاماً في نظرية الزمر . والمدهش هو ان مفهوم زمرة المجموعات المرافقة يتيح لنا تعيين الصور للزمرة سه بالنسبة للاقترانات المحافظة . فلنبدأ بدراسة زمرة الجمع Z والزمرة الجزئية الطبيعية ن Z = {ن ر : ر∈Z} .

مسألة :

أ. لتكن ن = ٥ . اكتب قائمة بالمجموعات المرافقة المختلفة للزمرة الجزئة

٥ Z في زمرة الجمع Z :

٠ + ٥ Z ________________ .

اذكر العلاقة بين هذه المجموعات المرافقة وصفوف التكافؤ

$\bar{0}$، $\bar{1}_ن$، الخ في $Z_ن$

ب. لاي عدد صحيح موجب ن اثبت انه لكل أ∋Z

تكون المجموعة المرفقة أ + ن Z مساو ية لصف التكافؤ أن

حـ. اذا كانت أ،ب∋Z فاوجد المجموعة المرافقة س + نZ المقابلة للمجموع

أن + ب ن في الزمرة $Z_ن$.

وتكتب بصيغة المجموعات المرافقة نكتب (أ + نZ) + (ب + نZ) = ________________

ولهذا نرى ان للزمرة Z والزمرة الجزئية نZ تكون مجموعةالمجموعات المرافقة

{أ + نZ : أ∋Z} زمرة هي بعينها الزمرة $Z_ن$، بالنسبة لعملية جمع المجموعات المرافقة المعرفة بالصيغة :

(أ + نZ) + (ب + نZ) = ________________ + نZ.

لنستعمل $Z_ن$كنموذج لبناء زمرة من زمرة معطاة سه وزمرة جزئية طبيعية صه.

تعريف :

لأي زمرة سه وزمرة جزئية طبيعية صه لتكن سه/صه المجموعة المكونة من كل المجموعات المرافقة اليمنى المختلفة لِ صه في سه . فيكون سه/صه = {أ٥صه : أ∋سه} . و يقرأ الرمز سه/صه غالباً :«سه على صه.».

نريد ان نعرف عملية على المجموعات المرافقة لِصه تجعل سه/صه زمرة.

و باتباع مثال المسألة ٨٦ تعرف (أ٥صه) ٥ (ب٥صه) بانها المجموعة المرافقة (أ٥ب) ٥ص لكل أ ، ب∋ سه

ولهذا فلكل أ ، ب ∋ سه ،

(أ٥صه) ٥ (ب٥صه) = (أ ٥ ب) ٥صه.

مسألة :

لتكن سه = $D_٤$ زمرة تماثلات المر بع ولتكن صه الزمرة الجزئية الطبيعية {و ، $أ_٢$}.

أ. جد دليل صه في سه واكتب قائمة بالعناصر المختلفة لِ سه/صه (أي المجموعات المرافقة المختلفة لـ صه في سه).

ب. احسب ($u_١$٥صه) ٥ ($\delta_٢$٥صه) كما هو معرف اعلاه.

حـ. اثبت ان $u_١$٥صه = $u_٢$٥صه، $\delta_١$٥صه = $\delta_٢$٥صه ، و

($u_١$٥صه) ٥ ($\delta_١$٥صه) = ($u_٢$٥صه) ٥ ($\delta_٢$ ٥ صه)

و يبين هذا ان العملية معرفة تعريفاً حسناً ، على الاقل لهذه المجموعات المرافقة الخاصة .

د. اعمل جدول عملية للمجموعة سه/صه مستخدماً التعريف اعلاه للمجموعة (أ٥صه) ٥ (ب٥صه).

تذكر ان تستعمل فقط المجموعات المرافقة لـصه في جدولك .

هـ جد عنصراً محايداً ومعكوساً لكل عنصر في D_4/صه.

لنعد الان الى المسألة العامة . لتكن سه زمرة ، صه زمرة جزئية طبيعية و سه/صه المجموعة المكونة من المجموعات المرافقة المختلفة لـ صه في سه. لقد عرفنا عملية ٥ على سه/صه بوضع (أ٥صه) ٥ (ب٥صه) = (أ٥ب) ٥ صه لكل أ ، ب∈سه.

فاذا كان (أ٥صه ، ب٥صه) ← (أ٥ب) ٥ صه يكون عملية ثنائية على سه/صه معرفة تعريفاً حسناً فيجب ان تعين لكل زوج من المجموعات المرافقة في سه/صه مجموعة مرافقة واحدة في سه/صه بالضبط و يجب الايعتمد هذا التعيين على الاختيار الخاص لتمثيل المجموعات المرافقة . وحقيقة ان العملية معرفة تعريفاً حسناً تبرهن عليها المسألة التالية .

مسألة :

لتكن صه زمرة جزئية طبيعية من الزمرة سه ولتكن أ$_1$، أ$_2$، ب$_1$، ب$_2$∈سه.

اثبت انه اذا كانت أ$_1$٥صه = أ$_2$٥صه و ب$_1$٥صه = ب$_2$٥صه فان

(أ$_1$٥ب$_2$) ٥صه = (أ$_2$٥ب$_2$) ٥صه

ومن ثم فان

(أ$_1$٥صه) ٥ (ب$_1$٥صه) = (ا$_2$٥صه) ٥ (ب$_2$٥صه) ▲

و بما اننا نعرف الآن انه توجد عملية ثنائية على سه/صه معرفة تعريفاً حسناً اذا كانت صه زمرة جزئية طبيعية فيمكننا برهان ان سه/صه تكون زمرة بالنسبة لهذه العملية .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (سه ، ٥) زمرة و صه زمرة جزئية طبيعية من سه فتكون (سه/صه ،٥) زمرة . تسمى الزمرة سه/صه التي تتكون من جميع المجموعات المرافقة المختلفة من صه في سه بالزمرة الخارجة.

اذا كانت (سه ، +) زمرة جمع فيكتب حاصل جمع مجموعتين مرافقتين أ+صه و ب + صه بالصيغة

(أ+صه) + (ب+صه) = (أ+ب) + صه

واذا كانت (سه ، ٠) زمرة ضرب غالباً ما تكتب أ.ص بالصيغة أصه وحاصل ضرب مجموعتين مرافقتين أصه و بصه في سه/صه بالصيغة

(أصه) . (بصه) = (أب)صه

مسألة :

أ. اختر زمرة جزئية رتبتها اربعة من زمرة الجمع Z_{12} اكتب قائمة المجموعات المرافقة المختلفة للزمرة صه في Z_{12} واعمل جدول جمع الزمرة الخارجة Z_{12}/ صه. استعمل في جدولك الرموز 12^* + صه الخ لعناصر الزمرة Z_{12}/ صه.

ب. برهن ان (Z_{12}/صه ، +) تكون متشاكلة مع الزمرة المألوفة ——————

اذا كانت (سه ، ٥) زمرة منتهية و صه زمرة جزئية طبيعية من سه فتوجد علاقة مهمة بين رتبة الزمرة سه ورتبة الزمرة الجزئية الطبيعية صه ورتبة الزمرة الخارجية سه/صه.

مسألة :

لتكن سه زمرة منتهية و صه زمرة جزئية طبيعية من سه .

عبر عن رتبة الزمرة الخارجة سه/صه بدلالة رتبة سه ورتبة صه .

هناك علاقة وثيقة بين العملية على الزمرة سه والعملية على الزمرة الخارجية سه|صه من سه بالزمرة الجزئية الطبيعية صه . والواقع انه يوجد اقتران طبيعي أ ← أ٥صه ($أ \in$سه) من الزمرة سه الى الزمرة الخارجة سه|صه الذي يعين لكل عنصر أ$\in$سه المجموعة المرافقة أ٥صه المحتو ية على أ.

وكمثال على هذا الاقتران لنعتبر زمرة الجمع $Z_ن = Z/نZ$.

عرف ٣ : $Z \leftarrow Z/نZ$ بوضع ٣ (أ) = أ + نZ (= أن)

لكل أ$\in Z$. ولقد لاحظنا ان ٣ اقتران محافظ وشامل من Z الى $Z/نZ = Z_ن$ وان نو (٣) = ———— .

(انظر المسألتين ٤٤ و ٤٦ .)

مسألة :

وكمثال ثان لنأخذ زمرة تماثلات المربع D_4 والزمرة الجزئية الطبيعية صه = [و ، μ_1، μ_4 ، ρ_2] . عرف ٣ : $D_4 \leftarrow D_4$/صه بوضع ٣ (أ) = أ٥صه لكل أ$\in D_4$.

أ. صف ٣ بايجاد ٣ (أ) لكل أ $\in D_4$

ب. هل تكون ٣ اقتراناً شاملا من D_4 الى D_4/صه ؟

حـ. جد نو (٣).

لنذكر الآن النظرية العامة .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن صه زمرة جزئية طبيعية من الزمرة سه .

عرف ٣ : سه ← سه/صه بوضع ٣ (أ) = أ٥صه لكل أ$\in$سه .

فيكون

ا. ٦٦ اقتراناً محافظاً .

ب. ٦٦ اقتراناً شاملا من سه الى سه/صه.

حـ نواة ٦٦ هي الزمرة الجزئية الطبيعية صه . ▲

يسمى الاقتران المحافظ ٦٦ : سه ← سه/صه المعرف في النظرية ٩٤ بالاقتران المحافظ القياسي وتسمى الزمرة الخارجة سه/صه بالصورة المحافظة لـ سه لانه يوجد اقتران محافظ وشامل من سه الى سه/صه . وفي البند القادم سنواصل دراستنا لزمر يمكن ان تكون صوراً محافظة من سه (اي الزمر سهَ التي يوجد لها اقتران محافظ وشامل من سه الى سهَ).

تمارين :

١ ـ في الزمرة (S_{3}، ٥) اختر زمرة جزئية طبيعية رتبتها ثلاثة .

أ. اعمل جدول عملية الزمرة الخارجة S_{3}/صه.

ب. برهن ان S_{3}/ صه تكون متشاكلة مع الزمرة المألوفة ــــــــــــــــــــــــ

٢ ـ اخترزمرة جزئية طبيعية صه رتبتها ثلاثة في زمرة الجمع Z_{18}

أ. اعمل جدول عملية الزمرة الخارجة Z_{18}/صه.

ب. برهن ان Z_{18}/ صه تكون متشاكلة مع الزمرة المألوفة ــــــــــــــــــــــــ

٣ ـ لتكن (سه ، ٥) زمرة .

أ. برهن ان الزمرة الخارجة سه / {و}تكون متشاكلة مع سه .

ب. صف العناصر المختلفة للزمرة الخارجة سه/سه .

٤*ـ لتكن سه ، سهَ زمرتين وليكن ϕ اقتراناً محافظاً وشاملا من سه الى سهَ و صه زمرة جزئية طبيعية من س.

صهَ = { ϕ (ر) : ر∋صه} . فتكون

صهَ زمرة جزئية طبيعية من سهَ (التمرين ٢,٧ ــ٨) عرف

$\bar{\phi}$: سه / صه ←سهَ / صهَ بوضع

$\bar{\phi}$ (ا٥صه) = ϕ (أ) ٥صهَ . اثبت ان

ا. $\bar{\phi}$ اقتران معرف تعريفاً حسناً

ب. $\bar{\phi}$ اقتران محافظ

حـ $\bar{\phi}$ اقتران شامل من سه / صه الى سهَ / صهَ.

٥ ـ لتكن (سه ، ٥) زمرة،صه زمرة المتبادلات الجزئية من سه (انظر التمرين ٢,٧-١٢).

اثبت ان الزمرة الخارجية سه / صه تكون تبديلية .

٦ ـ لتكن (سه ، ٥) زمرة و صه زمرة جزئية طبيعية من سه .

اثبت انه اذا كانت سه/صه تبديلية فان صه تحتوي على زمرة المتبادلات الجزئية من سه.

٧ - ان السؤال الطبيعي الذي يسأل في دراسة الزمر الخارجة يكون التالي : اذا كانت المجموعات المرافقة معرفة لأي زمرة جزئية فلماذا تكون الزمرة الخارجة معرفة فقط للزمر الجزئية الطبيعية ؟

ان زمرة جزئية من $D_٤$ تساعد في الاجابة على هذا السؤال وذلك باثبات ان العملية المقترحة في المجموعة سه/صه لا تكون معرفة تعريفاً حسناً اذا لم تكن صه طبيعية . لتكن صه = ⟨و ، μ⟩.

أ. هل صه طبيعية في $D_٤$؟

ب. اثبت ان أ١ ٥ صه = δ١ ٥ صه و أ٣ ٥ صه = δ٢ ٥ صه .

حـ اثبت ان المجموعتين المرافقتين (أ١ ٥ أ٣) ٥ صه و (δ١ ٥ δ٢) ٥ صه غير متساو يتين.

د. هل (أ١ ٥ صه) ٥ (أ٣ ٥ صه) = (δ١ ٥ صه) ٥ (δ٢ ٥ صه)؟

٨ - لتكن سه زمرة و صه زمرة جزئية من سه و سه/صه المجموعة المكونة من المجموعات المرافقة اليمنى لـ صه في سه . لقد لاحظنا انه اذا كانت صه زمرة جزئية طبيعية من سه فان التناظر

(أ ٥ صه ، ب ٥ صه) ← (أ ٥ ب) ٥ صه

يعرف عملية ثنائية على سه/صه تعريفاً حسناً.

برهن العكس : اذا كان التناظر يعرف عملية ثنائية على س/ص تعريفاً حسناً فتكون صه زمرة جزئية طبيعية من سه . ●

٩ - و ينشأ سؤال طبيعي آخر عن دراسة الزمر الخارجة هو التالي :

اذا كانت صه زمرة جزئية طبيعية من زمرة سه فما هي الخصائص التي تأخذها سه/صه من سه؟

حقق فيما اذا كانت العبارات التالية صحيحة ام خطأ . اذا كانت صحيحة فاعط برهاناً لها واذا كانت خطأ فاعط مثالا معاكساً.

لتكن صه زمرة جزئية طبيعية من (سه، ٥).

أ. اذا كانت سه تبديلية فان سه/صه تبديلية .

ب. اذا كانت سه دورية فتكون سه/صه دورية.

حـ اذا كانت سه لا نهائية فتكون سه/صه لا نهائية.

١٠ *- لتكن (سه ، ٥) زمرة و صه زمرة جزئية طبيعية من سه و أ ∈ سه .

أ. اثبت ان رتبة أ ٥ صه في سه/صه تقسم رتبة أ في سه.

ب. اثبت انه اذا كان ب عدداً اولياً ، أ ∉ صه و $(أ ٥ صه)^{ب}$ = صه في سه/صه فيوجد عنصر حـ ∈ س رتبته تساوي ب.

١١ *- اثبت نظرية كوشي للزمر التبديلية : اذا كانت (سه ، ٥) زمرة تبديلية منتهية وكان ب عدداً أولياً يقسم رتبة سه فيوجد أ ∈ سه - ⟨و⟩ حيث ان $أ^{ب}$ = و . ●

٢,٩ الصور المحافظة والزمر الخارجة

لاحظنا في البند السابق ان الاقتران الطبيعي أ ← أ٥صه للعنصر أ من الزمرة سه الى مجموعة المرافقة أ٥صه من زمرة جزئية طبيعية كان اقتراناً محافظاً شاملا من الزمرة سه الى الخارج سه/صه .

وبصورة عامة اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً وشاملا من زمرة سه الى زمرة سه تكون نو (ϕ) زمرة جزئية طبيعية من سه . وهكذا فان هذا الاقتران المحافظ يعين زمرة جزئية طبيعية صه من سه وزمرة خارجة سه/صه . وفي هذا البند نريد ان نقارن بين الزمرة الخارجة سه/صه مع زمرة الصورة $\overline{\text{سه}}$.

تعريف :

تكون الزمرة ($\overline{\text{سه}}$ ، $*$) صورة محافظة للزمرة (سه ، ٥) اذا وفقط اذا وجد اقتران محافظ وشامل من سه الى $\overline{\text{سه}}$ (اي اقتران محافظ ϕ : سه ← $\overline{\text{سه}}$ يحقق ϕ (سه) = $\overline{\text{سه}}$).

مسألة :

عرف اقتراناً شاملا ϕ من ($Z_{١٢}$ ، +) الى ($Z_{٣}$ ، +) بوضع ϕ(أ$_{١٢}$) = أ$_{٣}$ لكل أ $\in Z$.

أ. برهن ان ϕ اقتران محافظ وشامل من $Z_{١٢}$ الى $Z_{٣}$.
وبذا تكون $Z_{٣}$ صورة محافظة للصورة $Z_{١٢}$.

ب. جد العناصر في صه = نو (ϕ).

حـ. بين ان لكل عنصر ب$_{١٢} \in$ ٢$_{١٢}$ + صه يكون ϕ (ب$_{١٢}$)= ϕ (٢$_{١٢}$) .

د. برهن ان $Z_{١٢}$ /صه تكون متشاكلة مع $Z_{٣}$. انظر المسألة ٩١ لجدول الجمع للزمرة $Z_{١٢}$/صه.

ان التمهيدية التالية للاقترانات المحافظة مفيدة ليس في برهان النظرية ١٠١ ادناه فحسب وانما ايضاً في حل المعادلات الخطية (انظر التمرين ٢).

اترك برهان التمهيدية ٩٧ والنتيجة ٩٨ للتمرين ١.

تمهيدية :

لتكن (سه ، ٥) و ($\overline{\text{سه}}$ ، ٥) زمرتين وليكن ϕ : سه ← $\overline{\text{سه}}$ اقتراناً محافظاً.

ولتكن أ ، ب $\in$ سه فيكون ϕ (أ) = ϕ (ب) اذا وفقط اذا كان ب = أ٥ر حيث ر عنصر ما $\in$ نو (ϕ).

نتيجة :

ليكن ϕ : سه ← $\overline{\text{سه}}$ اقتراناً محافظاً من زمرة (سه ، ٥) الى زمرة ($\overline{\text{سه}}$ ، $*$).

ولتكن صه = نو (ϕ) . فيكون ϕ (أ) = ϕ (ب) اذا وفقط اذا كان ب $\in$ أ٥صه أو ما يكافئه أ٥صه = ب٥صه.

مسألة :

لنفحص الاقتران المحافظ ٦٦ : $Z \to Z_{ن}$

المعرف بوضع ٦٦ (أ) = أ$_{ن}$ لكل أ $\in Z$. اجعل أ $\in Z$ ثابتاً واستخدم التمهيدية ٩٧ والنتيجة ٩٨ لاثبات ان ٦٦ (ب) = أ$_{ن}$ اذا وفقط اذا كان ب = أ + ر حيث ر $\in$ نZ. وزيادة على ذلك فان ٦٦ (ب) = ٦٦ (أ) اذا وفقط اذا كان أ + نZ = ب + نZ .

لاحظنا من المسألة ٩٦ انه اذا كانت $\phi : Z_{12} \to Z_{3}$ معرفة بوضع

ϕ (أ$_{12}$) = أ$_3$ لكل أ $\in Z$ و ص = نو (ϕ) تكون Z_{12} /ص متشاكلة مع Z_3 .

وفي برهنة وجود تشاكل قد تكون استخدمت التناظر أ$_{12}$ + ص $\leftarrow$ أ$_3$.

فلندرس هذا التناظر .

مسألة :

عرف $\bar{\phi}$: Z_{12} /ص $\leftarrow Z_3$ بوضع $\bar{\phi}$ (أ$_{12}$ + ص) = أ$_3$ = ϕ (أ$_{12}$).

أ. احسب (أ$_{12}$ + ص) لكل مجموعة مرافقة مختلفة أ$_{12}$ + ص في Z_{12} /ص.

استخدم التمهيدية ٩٧ لتثبت ان $\bar{\phi}$ تكون اقتراناً معرفاً تعريفاً حسناً (اي انه اذا كانت أ$_{12}$ + ص = ب$_{12}$ + ص فان $\bar{\phi}$ (أ$_{12}$ + ص) = $\bar{\phi}$ (ب$_{12}$ + ص)).

(انظر الشكل ٢,٥).

$$\begin{tikzcd} Z_{12} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\phi"'] & Z_{12}/\text{ص} \arrow[d, dashed, "\bar{\phi}"] \\ & Z_3 \end{tikzcd}$$

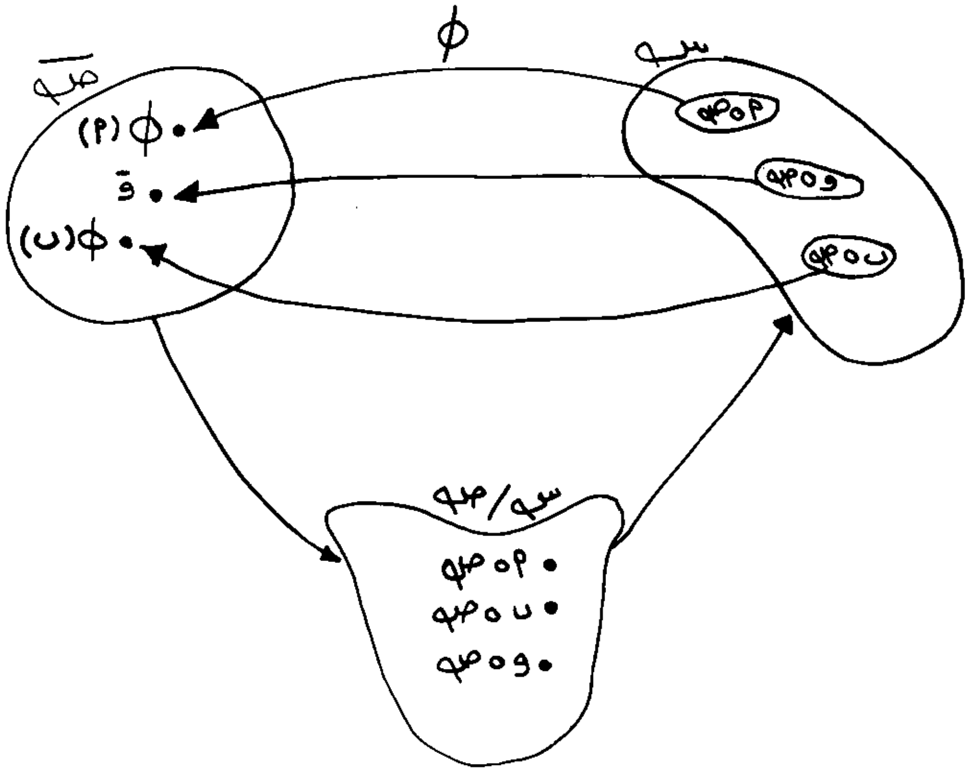
شكل ٢,٥

ب. اثبت ان ϕ تكون اقتراناً محافظاً .

حـ جد نو $(\bar{\phi})$

د. اثبت ان $\bar{\phi}$ تكون تشاكلا من Z_{12} /ص الى Z_3

لتكن (س ، ∘) و (س̄ ، *) زمرتين وليكن ϕ اقتراناً محافظاً وشاملا من س الى س̄ و ص = نو (ϕ) فتخبرنا التمهيدية ٩٧ والنتيجة ٩٨ ان كل عنصر من المجموعة المرافقة أ∘ص (أ $\in$ س) يقترن بالعنصر $\bar{\phi}$ (أ) وانه اذا كانت أ∘ص $\neq$ ب∘ص فان ϕ (أ) $\neq$ ϕ (ب) . وبهذا فان العنصر أ∘ص من زمرة الخارج س/ص يتناظر مع العنصر ϕ (أ) من س̄ . فنريد ان نبرهن ان التناظر أ∘ص $\to \bar{\phi}$ (أ) من س/ص الى س̄ يكون اقتراناً هو في الواقع تشاكل . (انظر الشكل ٢,٦.)



شكل ٢,٦

نظرية :

نظرية التشاكل الاولى للزمر . ليكن ϕ اقتراناً محافظاً وشاملا من الزمرة (سه،٥) الى الزمرة (سه̄،*).

لتكن صه = نو (ϕ) فان سه̄ تشاكل زمرة الخارج سه/صه.

برهن النظرية حسب خطوات حل المسألة التالية :

مسألة :

(لتكن (سه ، ٥) ، (سه̄ ، *) زمرتين وليكن ϕ : سه ← سه̄ اقتراناً محافظاً شاملا من سه الى سه̄ فاذا كان صه = نو (ϕ) ، عرف $\bar{\phi}$: سه/صه ← سه̄ بوضع $\bar{\phi}$ (٥٩صه) = ϕ (٩) لكل ٩∋سه.

(انظر الشكل ٢,٧).

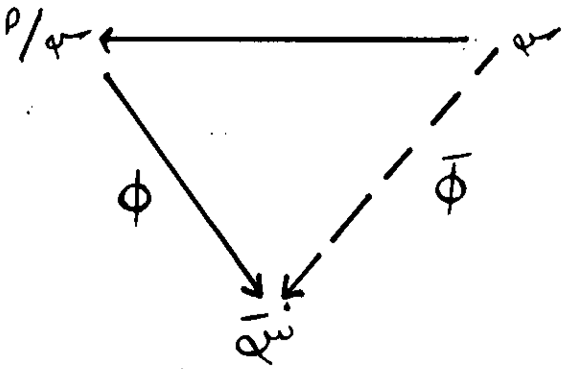
٩. بين ان $\bar{\phi}$ اقتران معرف تعريفاً حسناً (اي انه اذا كانت ٥٩ص = ب٥ص فان $\bar{\phi}$ (٥٩صه) = $\bar{\phi}$ (ب٥صه).

ب. برهن ان $\bar{\phi}$ اقتران محافظ.

حـ جد نو ($\bar{\phi}$) (اي جد كل العناصر س∋سه بحيث ان $\bar{\phi}$ (س٥صه) = وَ)

د. بين ان $\bar{\phi}$ واحد لواحد.

هـ بين ان ϕ اقتران شامل من سه/صه الى سه̄.



شكل ٢,٧

مسألة :

برهن انه اذا كانت $\bar{\phi}$: سه/صه ← سَ هي التشاكل المعرف في المسألة ١٠٢ واذا كانت ٦٦ : سه ← سه/صه هي الاقتران المحافظ المعرف بالصيغة ٦٦ (م) = م○صه لكل م∋س فان $\bar{\phi}$ ○ ٦٦ = ϕ.

فينتج ان التشاكل $\bar{\phi}$: س/صه ← سهَ المعرف في المسألة ١٠٢ هو التشاكل الوحيد من سه/صه الى سَه الذي يحقق $\bar{\phi}$ ○ ٦٦ = ϕ واذا كان $\bar{\phi}_1$ اي اقتران من سه/صه الى سهَ حيث $\bar{\phi}_1$ ○ ٦٦ = ϕ ، فان

$\bar{\phi}_1$ (م○صه) = $\bar{\phi}_1$ (٦٦ (م)) = ϕ (م)

لكل م∋سه فان $\bar{\phi}_1$ = $\bar{\phi}$.

وباستخدام تعريف الصورة المحافظة للزمرة يمكن اعادة كتابة نظرية التشاكل الاولى كما يلي :

نظرية :

لكل صورة محافظة سهَ لـ سه توجد زمرة جزئية طبيعية صه في سه حيث تكون سه متشاكلة مع سه/صه.

ويربط نظرية التشاكل الاولى مع النظرية ٩٤ نحصل على الخاصية التالية للصور المحافظة للزمرة. افرض اننا نريد اجاد كل الزمر التي تكون صوراً محافظة لزمرة معطاه سه ولكن ليست متشاكلة فيما بينها فتقول النظرية الاولى للتشاكل بانه ليس من الضروري ان تنظر الى ابعد من الزمر الخارجة في سه. وبالتأكيد فان كل زمرة جزئية طبيعية صه من الزمرة سه تعين صورة محافظة من سه وهي الزمرة الخارجة سه/صه. وزيادة على ذلك اذا كانت سه صورة محافظة لـ سه فتكون سه متشاكلة مع احدى الزمر الخارجة . وبذا فلكي نجد المجموعة المكونة من كل الزمر غير المتشاكلة التي تكون صوراً محافظة من سه فنحتاج الى ان نختار فقط الزمر الخارجة التي لا تكون متشاكلة بعضها مع بعض .

في المسائل التالية سندرس أمثلة لهذه الخاصية .

مسألة :

١. اختر زمرة جزئية فعلا صه من Z_{12} رتبتها ر ≠ ٤.

اكتب قائمة بعناصر $Z_{١٢}$ /صه واعمل جدول الجمع للزمرة $Z_{١٢}$ /صه وجد زمرة مألوفة بحيث تكون متشاكلة مع $Z_{١٢}$ /صه.

ب. جد كل الزمر غير المتشاكلة التي تكون صوراً محافظة للزمر ($Z_{١٢}$ ، +).

مسألة :

ا. لتكن الزمرة ($\overline{\text{سه}}$ ، +) صورة محافظة لزمرة منتهية (سه ، ٥) . جد علاقة بين رتبة $\overline{\text{سه}}$ ورتبة س

ب. استخدم العلاقة في أ لتعيين اي من الزمر ($Z_{ن}$، +) يمكن ان تكون صوراً محافظة من ($Z_{١٥}$ ، +).

تمارين :

١ ـ اثبت التمهيدية ٩٧ والنتيجة ٩٨.

٢ ـ عرف $\emptyset$: $م_{٢}(R) \longrightarrow م_{٢}(R)$ بوضع $\emptyset$ (سه) = ع سه حيث ع $\in م_{٢}(R)$ مصفوفة ثابتة.

ا. بين ان $\emptyset$ تكون اقتراناً محافظاً من ($م_{٢}(R)$ ، +) الى نفسها.

ب. لتكن

$$ع = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$$

جد نو ($\emptyset$) ، بهذا الاختيار للمصفوفة ع .

حـ بين ان

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$$

تكون حلا للمعادلة $\emptyset$ (سه) = $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ -٥ & -٤ \end{pmatrix}$

حيث اخترنا ع كما في ب. استخدم التمهيدية ٩٧ لبيان ان $\emptyset$

$$\emptyset\,(\text{سه}) = \begin{pmatrix} ٥ & ٥ \\ -٥ & -٤ \end{pmatrix}$$

اذا وفقط اذا كانت

$$س = \begin{pmatrix} ٢ + \propto & ٣ + B \\ -١ + ٢\propto & ٢ + ٢B \end{pmatrix}$$

حيث $\propto$، $B \in R$. وبذا فان منظومة المعادلات

٢س - ع = ٥
٢ص - ن = ٤
-٢س + ع = -٥
-٢ص + ن = -٤

أو

$$\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ن \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ -٥ & -٤ \end{pmatrix}$$

له الحل س = ٢+ α، ص = ٣+β ، ع = ١+٢α، ون = ٢+٢β لكل α ، $\beta \in R$.
والواقع ان هذه الطريقة ليست ضرورية في حالة المصفوفات ٢ × ٢ ولكنها مفيدة جداً مع منظومات اوسع من المعادلات الخطية ومع المعادلات التفاضلية .

٣ ـ لتكن (سه ، ٥) زمرة رتبتها ب ، حيث ب عدد أولي : ولتكن ($\overline{سه}$ ، *) صورة محافظة لـ سه . بين انه اما ان تكون $\overline{سه}$ = $\{$ و $\}$ أو ان تكون $\overline{سه}$ متشاكلة مع سه .
اعط برهانين مختلفين لهذه الفرضية احدهما باستخدام نظرية التشاك الأولى (النظرية ١٠١)

٤ ـ في زمرة ما سه يمكن ان يوجد اثنتان (او اكثر) من الزمر الجزئية الطبيعية صه و ع بحيث ان سه/صه تكون متشاكلة مع /ع.
اعط مثالا لهذه الظاهرة في $D_ع$.

٥ ـ لتكن $R^2 = R \times R$ وليكن الجمع معرفاً بالصيغة
(أ،ب)+(حـ،د) = (أ+حـ،ب+د) لكل (أ،ب) ، (حـ،د) R^2

أ. لتكن صه = $\{$(س،ص) : س = ٠$\}$ فتكون صه زمرة جزئية طبيعية من R^2 و يمكن تمثيل R^2/صه بالمجموعة المكونة من المستقيمات س = ر حيث ر$\in R$.
بين ان R^2/صه تكون متشاكلة مع الزمرة $\overline{سه}$ = $\{$(س ، ص) : ص = ٠$\}$.
لعمل ذلك جد اقتراناً محافظا وشاملا ϕ من R^2 الى $\overline{سه}$ حيث نو (ϕ) هي المجموعة الجزئية المعطاة صه واستخدام نظرية التشاكل الاولى .

ب. ثبت أ$\in R$ - $\{$ ٠ $\}$. وعرف ϕ : R^2 الى R. بوضع ϕ (س ، ص) = أس - ص : بين أن ϕ اقتراناً محافظاً شامل من R^2 إلى R جد نو (ϕ) وصف نو (ϕ) هندسياً.

حـ ثبت أ$\in R$ - $\{$ ٠ $\}$ ولتكن ص =$\{$(س ، ص) : أس = ص$\}$. بين ان R^2/صه تكون متشاكلة مع R.

٦ ـ لتكن سه زمرة الجمع م$_٢$(R) ولتكن صه الزمرة الجزئية المكونة من المصفوفات القطرية :

$$صه = \left\{ \begin{pmatrix} \text{أ} & 0 \\ 0 & \text{د} \end{pmatrix} : \text{أ ، د} \in R \right\}$$

ولتكن $\overline{سه}$ = $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \text{ب} \\ \text{حـ} & 0 \end{pmatrix} : \text{ب ، حـ} \in R \right\}$

أ. برهـن ان سه/صه تكون متشاكلة مع $\overline{سه}$. لعمل ذلك جد اقتراناً محافظاً وشاملا من س الى $\overline{سه}$ بـحـيـث ان نـو (ϕ) هـي المجـمـوعـة الجزئية صه المعطاة واستخدام نظرية التشاكل الاولى.

ب. صف التشاكل $\overline{\phi}$: س/صه ← $\overline{سه}$ المعرف في المسألة١٠٢ . لعمل ذلك ، لتكن

$$ع_{١} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{حـ}_{١} & \text{د}_{١} \end{pmatrix}$$

احسب $\overline{\phi}$ (ع + صه)

حـ لتكن $ع_{٢}$ اي عنصر من المجموعة المرافقة $ع_{١}$ + صه.
عبر عن $ع_{٢}$ بدلالة $ع_{١}$ واحسب بعد ذلك $\overline{\phi}$ ($ع_{٢}$ + صه).

٧ ـ المجموعة

$$ع = \left\{ \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ 0 & \text{د} \end{pmatrix} : \text{أ ، ب ، د} \in R \right\}$$

المكونة من كل المصفوفات المثلثية العليا تكون زمر جزئية من زمرة الجمع $م_{٢}$(R).
جد زمرة جزئية ملائمة $\overline{سه}$ من $م_{٢}$(R) وبرهن ان $م_{٢}$(R)/ع تكون متشاكلة مع $\overline{سه}$.
(اذا كان هناك شك حول الطريقة ، انظر التمرين ٦)

٨ ـ لتكن سه ، صه ، $\overline{سه}$ المجموعات الجزئية التالية من $م_{٢}$(R) :

$$سه = \left\{ \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{pmatrix} : \text{أ ، ب ، حـ ، د} \in R \text{ و أد } - \text{ب حـ} > 0 \right\}$$

$$صه = \left\{ \begin{pmatrix} \text{أ} & 0 \\ 0 & \text{أ} \end{pmatrix} : \text{أ} \in R \text{ ، أ} > 0 \right\}$$

$$\overline{سه} = \left\{ \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{د} \end{pmatrix} : \text{أ ، ب ، حـ ، د} \in R \text{ و أد } - \text{ب ج} = 1 \right\}$$

أ. برهن ان سه تكون زمرة جزئية لزمرة الضرب ل المكونة من كل المصفوفات ٢ × ٢ غير المنفردة .

ب. برهن ان صه تكون زمرة جزئية طبيعية من سه.

حـ برهن ان (سَه ، ٠) تكون زمرة .

٩ ـ لتكن سه ، صه و سَه زمر الضرب المعرفة في التمرين ٨

أ عرف اقتراناً ϕ سه ← سَه بوضع

$$\phi \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أس & ب س \\ حـس & دس \end{pmatrix}$$

حيث سه عدد مناسب يعتمد على المصفوفة

$$\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{pmatrix} \in سه$$

اختر العدد س بحيث ان

$$\phi \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{pmatrix} \in سَه$$

ب. برهن انه بالاختيار المناسب للعدد الحقيقي س لكل مصفوفة ع $\in$ سه يكون الاقتران ϕ اقتراناً محافظاً شاملا من س الى سَه .

حـ برهن ان سه/صه تكون متشاكلة مع سَه .

١٠ ـ أ. جد اقتراناً محافظاً وشاملا من ($Z_{١٢}$ ، +) الى ($Z_{٣}$ ، +).

ب. برهن وجود اوعدم وجود اقتران محافظ وشامل من ($Z_{٤}$ ، +) الى ($Z_{٢}$ ، +).

١١ ـ أ. لتكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . عين كل الزمر غير المتشاكلة التي تكون صوراً محافظة للزمرة ($Z_{ن}$ ، +) . اجعل عبارتك صريحة . لتكن $ر_{١}$ ،$ر_{٢}$،...،$ر_{هـ}$ كل عوامل ن المختلفة وري > ١.

استعمل هذه الاعداد الصحيحة في وصف الصور المحافظة في $Z_{ن}$.

ب. اكمل العبارة التالية ثم برهنها : ليكن م ، ن عددين صحيحين موجبين بحيث ان م $\leq$ ن . فتكون ($Z_{م}$ ، +) صورة محافظة من ($Z_{ن}$ ،+)اذا وفقط اذا كان ________

١٢ـ عين كل الزمر غير المتشاكلة التي تكون صوراً محافظة للزمرة ($S_{٣}$ ، ٥).

١٣- لتكن (سه ، +) زمرة تبديلية و صه مجموعة غير خالية .
لتكن قه (صه ، سه) المجموعة المكونة من كل الاقترانات .
قر : صه ← سه . الجمع قر + ك للاقترانين .
قر ، ك ∈ قر (صه ، سه) معرفة بوضع
(قر + ك) (س) = قر (س) + ك (س)
لكل س ∈ صه . فتكو (قه (صه ، سه) ، +) زمرة . (انظر التمرين ١,٥-١٠.)
أ. ليكن أ ∈ ص عنصراً ثابتاً وليكن
$ع_{أ}$ = { قر : قر ∈ قر (صه ، سه) و قر (أ) = ٠ }
بين ان $ع_{أ}$ تكون زمرة جزئية طبيعية من قه (صه ، سه).
ب. ليكن أ ∈ صه ثابتاً . عرف اقتراناً $\phi_{أ}$: قه (صه ، سه) ← سه بوضع ϕ (قر) = قر(أ)
لكل قر ∈ قه (صه ، سه) . اثبت ان ϕ تكون اقتراناً محافظاً وشاملا من قه (صه ، س) الى سه ثم جد نواة $\phi_{أ}$.
حـ بين ان قه (صه ، سه) /$ع_{أ}$ تكون متشاكلة مع سه.
١٤- لتكن ع و صه زمرتين جزئيتين طبيعيتين من الزمرة (سه،٥) فتكون المجموعة ع • صه
= { ع • صه : ع ∈ ع ، ص ∈ صه }
مجموعة جزئية طبيعية من سه (التمرين ٢,٧-١٦). نريد ان نبرهن ان (ع٥صه)/صه تكون متشاكلة مع ع/(ع∩ص). وتعرف هذه النتيجة بنظرية التشاكل الثانية للزمر.
أ. برهن ان صه تكون زمرة جزئية طبيعية من ع٥صه وان ع∩صه تكون زمرة جزئية طبيعية من ع.
ب. عرف ϕ : ع ← (ع٥صه)/صه بوضع
ϕ (ع) = ع٥صه برهن ان ϕ تشاكل من ع الى (ع٥صه) /صه.
جد نواة ϕ .
حـ برهن ان (ع٥صه) /صه تكون متشاكلة مع ع/(ع∩صه)
د. برهن انه اذا كانت ع∩صه = { و } فان (ع٥صه)/صه تكون متشاكلة مع ع.
هـ في $م_{٢}$(R) ، لتكن

$$ع = \left\{ \begin{pmatrix} . & أ \\ د & . \end{pmatrix} : أ ، د \in R \right\} \text{ و}$$

$$صه = \left\{ \begin{pmatrix} ب & . \\ . & حـ \end{pmatrix} : ب ، حـ \in R \right\}$$

فتكون ع و ص زمرتين جزئيتين طبيعيتين . استخدم نظرية التشاكل الثانية (الجزء حـ اعلاه) لتبرهن ان $م_٢(R)$/ص متشاكلة مع ع.

و. في $م_٢(R)$ ، لتكن

$$ع = \left\{ \begin{pmatrix} ب & ا \\ د & ٠ \end{pmatrix} : ا ، ب ، د \in R \right\}$$

$$ص = \left\{ \begin{pmatrix} ٠ & و \\ ك & ق \end{pmatrix} : و ، ق ، ك \in R \right\}$$

برهن ان $م_٢(R)$/ص تكون متشاكلة مع $ع/ع_١$ حيث

$$ع_١ = \left\{ \begin{pmatrix} ٠ & ا \\ د & ٠ \end{pmatrix} : ا ، د \in R \right\}$$

ثم برهن ان $م_٢(R)$/ ص متشاكلة مع الزمرة الجزئية

$$\left\{ \begin{pmatrix} ب & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} ب \in R \right\}$$

٢,١٠ لمحــة تاريخية

يتعلم الطالب في المدرسة الثانوية في موضوع الجبر ان للمعادلة أس^{٢} + ب س + حـ = ٠
حيث أ ، ب ، حـ اعداد حقيقية ، أ $\neq$ ٠ ، حل صيغته

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أحـ}}}{٢\,\text{أ}}$$

وهذه الصيغة تصح لاي من هذه المعادلات . وكل ما يتوجب عمله لايجاد حل لمعادلة تربيعية خاصة (مثل ٣س^{٢} - س + ٥ = ٠) هو تعويض الاعداد بدل الحروف المناسبة في المعادلة.

كان حل المعادلة التربيعية معروفا للهندوس ونقله العرب الى العالم الغربي*.

والواقع ان كلمة (جبر) آتية من اسم كتاب الفه فلكي عربي . وقد وضع فيه حلول للمعادلات الخطية (أس + ب = ٠) وللمعادلة التربيعية . والاسم الاصلي «الجبر والمقابلة» ترجم في القرن الثاني عشر الى اللاتينية مطولا ثم اختصر الى «الجبر» فلفظة الجبر العربية آتية من جبر المعادلة اي حفظ توازن بنقل الحدود من كفة لأخرى . وتعني المقابلة التبسيط كتجميع الحدود في المعادلة.

وبالرغم من ان حلول المعادلات الخطية والتربيعية كانت معروفة عند الهندورس والعرب فقد جهد الرياضيون لقرون عدة لايجاد صيغة يمكن ان تعطي الحلول للمعادلات الحدودية العامة.

سهـ س^{ن} + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ... + أ$_{١}$ س + أ$_{.}$ = ٠

أو أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ... + أ$_{١}$ س + أ$_{.}$ = ٠ (أ$_{ن}$ $\neq$ ٠)

حيث أ$_{.}$ ، أ$_{١}$ ، ... ، أ$_{ن}$ إختيارية ولكنها اعداد نسبية ثابتة . وقد ارادو ان تشمل هذه الصيغة طرقاً جبرية فقط من : جمع وطرح وضرب وقسمة واخذ الجذور (اي الجذور الرائية). وكما اشرنا

---

*ما يذكره المؤلف عن التاريخ القديم لعلم الجبر ، وبخاصة ما يتعلق منه بالدور العربي يحتاج الى تصحيح ، وقد اشرنا الى ذلك في مقدمة الفصل الاول من هذا الكتاب ، وازيد على ذلك ما يلي :

١ - كان اول من وضع كتاباً بين فيه الاصول الاولية لعلم الجبر هو ابو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي ، وهو رياضي فلكي مسلم عاش في القرن التاسع الميلادي ووضع كتابه المذكور حوالي سنة ٨٢٥ ميلادية وسماه كتاب الجبر والمقابلة . اما الجبر فيشمل جبر الكسور ، اي الضرب بالمضاعف المشترك البسيط للمقامات ثم نقل الحدود السالبة من احد طرفي المعادلة الى الطرف الآخر بحيث تصير الحدود كلها موجبة . واما المقابلة فتعني اختزال الحدود المتشابهة في طرفي المعادلة ، بحيث تصبح بابسط صيغة.

٢ - صحيح ان الهنود كانوا لديهم معرفة عملية بحل بعض المعادلات التربيعية ، ولكن يبقى ان اول من قنن هذه المعرفة وجعلها علماً ذا اصول هو الخوارزمي.

في مقدمة الفصل ١ فقد حل نيقولا ترتاجليا (١٤٩٩ ـ ١٥٦٧) معادلة الدرجة الثالثة .

وقد وصف حله في رسالة الى ج. كاردان الذي نشر الحل (دون اذن من ترتاجليا). وفي عام ١٥٤٥ أعطى فيراري (١٥٢٢ـ١٥٦٥) احد طلبة كاردان حلا لمعادلة الدرجة الرابعة . ولم يكن معروفاً حتى مطلع القرن التاسع عشر هل للمعادلة الحدودية العامة من الدرجة $\text{ن} \geq 5$ حل بصيغة جبرية ام لا .*

وبالطبع كان هناك حلول معروفة لانواع خاصة من المعادلات الحدودية (مثلا $\text{س}^{\text{ن}} = 1$) ولكن كان ابل (١٨٠٢-١٨٢٩) وجالوا (١٨١١-١٨٣٢) اول من اثبت عدم وجود صيغة جبرية محضة يمكن ان تصلح لجميع المجموعات $\text{أ}_{.}$ ، أ_1 ، ... $\text{أ}_{\text{ن}-1}$ من العوامل النسبية في المعادلة سه . والخطوة الرئيسية نحو الاجابة على هذه المسألة وتطوير علم الجبر المجرد قام بها لاجرانج (١٧٣٦-١٨١٣) في بحث نشر في حوالي عام ١٧٧٠ . واشار الى وجود علاقة بين جذور المعادلة الحدودية (معادلة سه) والعوامل $\text{أ}_{.}$ ، أ_1 ،... ، $\text{أ}_{\text{ن}-1}$. وبصورة خاصة اذا كانت α_1 ، α_2 ،... ، $\alpha_{\text{ن}}$ جذوراً للمعادلة فان

$$\text{س}^{\text{ن}} + \text{أ}_{\text{ن}-1}\text{س}^{\text{ن}-1} + \text{أ}_1\text{س} + \text{أ}_{.} = (\text{س} - \alpha_1)\,(\text{س} - \alpha_2)\cdots(\text{س} - \alpha_{\text{ن}})$$

حيث $\text{أ}_{\text{ن}-1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\text{ن}}$.

$$\text{أ}_{\text{ن}-2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{\text{ن}-1}\alpha_{\text{ن}}$$

$$\text{أ}_{.} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{\text{ن}}$$

ان هذه العلاقات التي تعطي عوامل المعادلة بدلالة جذورها لا تتغير اذا تغير ترتيب الجذور ولذلك تسمى بالاقترانات التماثلية .

ومن هذه العلاقات بين الجذور والمعاملات ابتكر لاجرانج طريقة لحل معادلات الدرجة الثالثة والرابعة اولا بايجاد معادلة مرتبطة بها درجتها اقل من درجة المعادلة الاصلية . وعلى اي حال فعندما طبقت هذه الطريقة على معادلة من الدرجة الخامسة حصل لاجرانج على معادلة مرتبطة بها من الدرجة السادسة.

ومن هذا استنتج لاجرانج اخيراً ان الحل للمعادلة العامة من الدرجة الخامسة قد يكون مستحيلا باستخدام طرق جبرية صرفة.

واخيراً برهن آبل عام ١٨٢٤ ان المعادلة العامة التي درجتها اكبر من اربعة لا يمكن حلها بالطرق الجبرية . ولكن هذا البحث احتوى على خطأ صححه فيما بعد آبل نفسه . (وقد اعطى برهانين صحيحين). وهكذا بقي السؤال بدون حل وهو اي من صفوف المعادلات الحدودية يمكن حلها بطرق جبرية.

وقد استغرق ذلك الشاب الفرنسي جالوا لتعيين تلك الصفوف من الحدوديات التي يمكن حلها بالطرق الجبرية .

وقد اشتمل عمله على المفاهيم الاساسية للزمر الجزئية الطبيعية و «الحقل الموسع» . ولم تشع نتائجه حتى ١٨٧٠ بعد اربعين سنة تقريباً من قتله في مبارزة سياسية ، وعمره ٢١ سنة.

استخدم جالوا الزمر الجزئية الطبيعية ودليل الزمر الجزئية لتعيين صفوف المعادلات التي يمكن حلها . ومن الحقائق المثيرة ان عمل جالوا لم يعط طريقة لتقرير هل للمعادلات حل ام لا (بدلالة الجذور) فحسب بل برهن على استحالة بعض العمليات الهندسية مثل تثليث الزاوية وانشاء مربع له نفس مساحة دائرة معطاة (تربيع الدائرة) بمجرد استخدام فرجار ومسطرة غير مدرجة .

اول من اعطى تعريفاً للزمرة هو كوشي (١٧٨٩-١٨٥٧). وقد كانت مذكراته اول دراسة دقيقة لزمر التعويضات التي نسميها في هذا الكتاب بزمر التبديلات - ولقد نشرت هذه المذكرات في حوالي عام ١٨٤٠ . ولم يوضع تعريف للزمرة حتى ١٨٥٣ عندما وضع الانجليزي ارثر كالي (١٨٢١-١٨٩٥) تعريفاً للزمر المجردة ولم يعترف الرياضيون الآخرون فوراً بعمل كالي وذلك لان المصفوفات والرباعيات لم تكن منتشرة في ذلك الوقت. (انظر التمرين ٣,٧ - ١٠)

واول من استعمل كلمة (مصفوفة) كان الرياضي الانجليزي ج. سلفستر (١٨١٤-١٨٩٧) وذلك عام ١٨٥٠ . واستعمل كلمة (مصفوفة) ليميز الترتيب المستطيل مثل

$$\begin{pmatrix} \text{أ}_{١ن} & \cdots & \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢ن} & \cdots & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{من} & \cdots & \text{أ}_{م٢} & \text{أ}_{م١} \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{حـ} \end{pmatrix}$$

من المحدودة مثل :

$$\text{أد} - \text{ب حـ} = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{حـ} \end{vmatrix}$$

التي هي ببساطة عدد حقيقي . وبما ان المحددات كانت قد درست لسنوات عديدة قبل ١٨٥٠ فقد عرفت عدة خصائص للمصفوفات رغماً عن انها لم تذكر بهذه الصيغة وكان كالي اول من نشر بحوثاً عن نظرية المصفوفات المختلفة عن مقابلتها من المحددات ومن ثم فغالباً ما ينسب له الفضل في ابتكار المصفوفات .

اما مفهوم التطابق في مضاعفات الاعداد الصحيحة فقد اظهر في عمل اويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) ولاجرانج ولاجندر - (١٧٥٢ - ١٨٣٣) وجاوس (١٧٧٧ - ١٨٥٥) . وكان جاوس هو

الـذي اقترح الرمز الذي نستعمله بصيغة مختصرة (ربما بتقليد كوشي) : أ ≡ ب (مض ن). وظهر هـذا الـرمـز في كتاب جاوس في الحساب المحقق وقد ظهر عام ١٨٠١. وظهر في هذا المؤلف برهان جـاوس لنظرية فيرمات الصغرى بدلالة التطلبقات وهي $\text{أ}^{\text{ب}-1} \equiv$ ١ (مض ب) لكل أ $\in Z$ على ان لا يكون مضاعفات للعدد الاولي ب. (انظر المسألة ٦٤ في الفصل ٣ من اجل البرهان.)

مراجعـة

اشارات هامة

عملية على مجموعة جزئية
زمرية جزئية
زمرة جزئية فعلا
المجموعة المرافقة اليمنى لزمرة جزئية
المجموعة المرافقة اليسرى لزمرة جزئية
زمرة جزئية طبيعية
مخطط سهمي
مضاعفات عنصر
قوى عنصر
رتبة عنصر
رتبة زمرة
دليل زمرة جزئية
زمرة خارجة
زمرة جزئية دورية متولدة عن عنصر أ
زمرة دورية

اقتران محافظ
تشاكل
نواة الاقتران
اقتران محافظ قياسي
صورة محافظة
صورة عكسية
مركز زمرة
التبادل
الزمرة الجزئية المتبادلة

الـــــــرمـــــــــــــوز

أ^{ن} ، ن - أ
<أ>
أ ∘ صه ، صه ∘ أ

نو (ϕ)
ϕ (سه)
سه/صه

مسائل :

١ ـ ما هو العنص المحايد للزمر الجزئية ؟

٢ ـ أ. اذكر معيارا خاصا لاثبات ان مجموعة جزئية منتهية وغير خالية من اي زمرة سه تكون زمرة جزئية هل هذا المعيار يصلح للمجموعة اللانهائية ؟

ب. اذكر معياراً خاصاً لاثبات ان مجموعة جزئية (منتهية او غير منتهية) لزمرة تكون زمرة جزئية.

٣ - لتكن صه و ع زمرتين جزئيتين من زمرة سه .
هل تكون اي من المجموعتين صه$\cap$ع أو صه$\cup$ع زمرة جزئية من سه ؟
اذا كانت صه و ع زمرتين جزئيتين طبيعيتين من سه فهل تكون صه$\cap$ع أو صه$\cup$ع زمرة جزئية طبيعية من سه ؟

٤ - لتكن سه زمرة منتهية و أ$\in$سه ما العلاقة بين رتبة أ ورتبة سه ؟ ما العلاقة بين رتبة العنصر أ ورتبة الزمرة الجزئية الدورية المتولدة عن أ ؟

٥ - ما هي الزمر الجزئية من Z ؟

٦ - اذكر نظرية لاجرانج . هل من الضروري ان يكون عكس نظرية لاجرانج صحيحاً ؟

٧ - ما العلاقة بين دليل الزمرة الجزئية لزمرة منتهية ورتبة الزمرة ورتبة الزمرة الجزئية؟
ما العلاقة بين الدليل لزمرة جزئية طبيعية ورتبة زمرة الخارج سه/صه؟

٨ - تحت اي شروط سواء على الزمرة الجزئية او على الزمرة يكون من الضروري للزمرة الجزئية ان تكون زمرة جزئية طبيعية ؟

٩ - اذا كانت سه و $\overline{\text{سه}}$ زمرتين وكان ϕ : سه $\leftarrow$ $\overline{\text{سه}}$ اقتراناً محافظاً فما هي صور العنصر المحايد في سه ، ونظير عنصر أ$\in$ سه؟

١٠- يرافق كل اقتران محافظ ϕ من زمرة سه الى زمرة $\overline{\text{س}}$ مجموعتان : النواة ومجموعة الصورة . هل هاتان المجموعتان زمرتان جزئيتان من زمرهما ؟ هل هما زمرتين طبيعيتين ؟ تحت اي شروط على هذه المجموعات يكون الاقتران المحافظ تشاكلا ؟

١١- ما هي الطريقة التي يمكن بها اثبات ان زمرتين منتهيتين (صغيرتين) تكونان متشاكلتين؟

١٢- اذكر نظرية كايلي.

١٣- ما هي الزمر الدورية غير المتشاكلة ؟ كل زمرة دورية تتشاكل مع زمرة مألوفة . فاذا كانت رتبة الزمرة الدورية المعطاة ن فمع اي زمرة تكون متشاكلة ؟ اذا كانت للزمرة المعطاة رتبة غير منتهية فمع اي زمرة تكون متشاكلة ؟

١٤- اذا كان لزمرة رتبة اولية فمع اي زمرة تكون متشاكلة ؟ ما هي الزمر الجزئية لزمرة رتبتها اولية ؟ ما هي رتبة اي عنصر لزمرة رتبتها اولية ؟

١٥- اعط اربعة شروط على الاقل لكي تكون الزمرة الجزئية طبيعية .

١٦- لأي من الزمر الجزئية صه في سه يمكن لعملية ثنائية ان تعرف تعريفاً حسناً على المجموعة المكونة من المجموعات المرافقة سه/صه ؟ كيف تكون هذه العملية معرفة ؟

١٧- ما هو الاقتران المحافظ القياسي من سه الى زمرة خارج سه/صه؟

١٨- اذكر نظرية التشاكل الاولى للزمر . وضح ماذا تعني .

١٩ـ كيف تستطيع «تعيين كل الزمر غير المتشاكلة التي تكون صوراً محافظة لزمرة سہ»؟
ان اجوبة المسائل التالية موجودة في التمارين :

٢٠ـ صف كل الزمر غير المتشاكلة ذات الرتب اثنين ، ثلاثة ، اربعة ، خمسة ، ستة على الترتيب
.

٢١ـ لتكن سہ و سہ̅ زمرتين وليكن ϕ : سہ ـ سہ̅ اقتراناً محافظاً . أي من خصائص سہ̅ التالية ترثها سہ̅.

(أ) اذا كانت نو (ϕ) $\neq$ {و} و ϕ ليس شاملا .

(ب) اذا كانت نو (ϕ) $\neq$ {و} و ϕ شاملا .

(حـ) اذا كان ϕ تشاكلا.

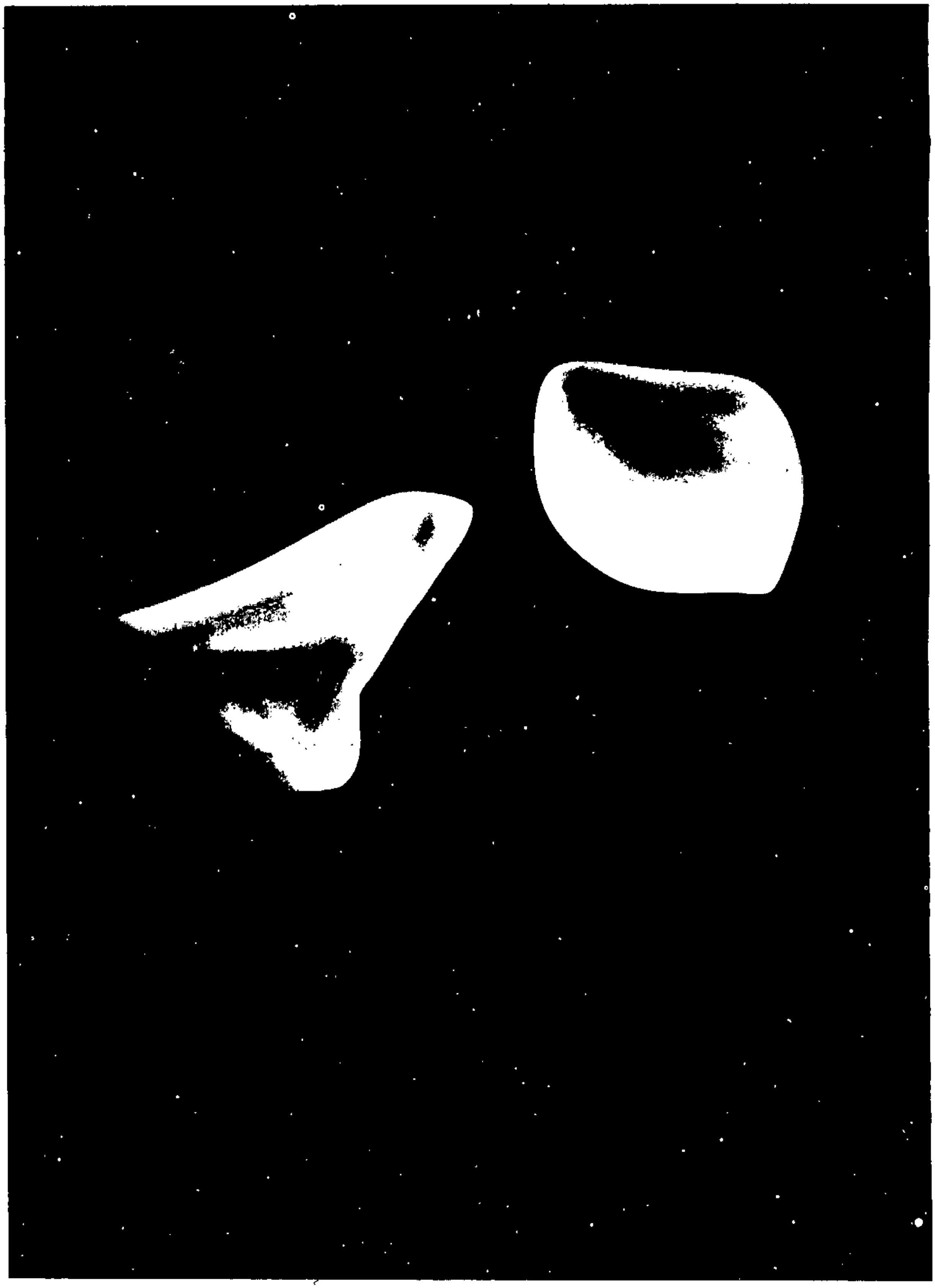
أ. سہ زمرة تبديلية.

ب. تحتوي سہ على زمرة جزئية فعلا صہ.

جـ تحتوي سہ على زمرة جزئية طبيعية فعلا ع.

٢٢ـ متى تكون (Zن ، +) صورة محافظة للزمرة (Zم ، +) ؟

٢٣ـ ما هي الزمر الجزئية لزمرة الجمع Zن ؟



فصل ٣

الحلقـات

الحلقات الكاملة

الحقول

هنـاك مـجـمـوعـات عـديـدة مـألوفة مثل Z ، R ، و م$_٢$(R)لكل منها عمليتان ثنائيتان ـ الجمع والضرب ـ الا ان المجموعة تكون زمرة بالنسبة لعملية الجمع فقط . ان هذه المجموعات Z ، Q ، R ، م$_٢$ (R) مـع عملية الضرب لها صفات مختلفة . فالمجموعتان R ـ$\{٠\}$، Q ـ $\{٠\}$ تـكـونـان زمـرتـيـن بالنسبة للضرب ولكن Z ـ$\{٠\}$ليست زمرة مع انها تتحقق فيها قوانين الاخـتـزال بالنسبة لعملية الضرب . ومن جهة اخرى يمكن ايجاد مصفوفتين غير الصفر في م$_٢$(R) يكون حاصل ضربهما صفر ؛ فمثلا ،

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

وزيـادة على ذلـك فـلا يـكـون الـضـرب تـبادلياً في م$_٢$(R) وتصلح المجموعات Z ، Q ، R و م$_٢$(R) نـمـاذج لأنـواع مـخـتـلـفـة من النظم الجبرية في هذا الفصل ، ولنبدأ بأخذ مجموعات لها عمليتان تجميعيتان ترتبطان بخاصية توزيعية . وكلما زدنا متطلبات الضرب نتقدم من الحلقات مثلم$_٢$(R) الى الحلقات الكاملة مثل Z الى الحقول مثل Q و R.

٣,١ الحلقات : تعريف وامثلة

لنبدأ فوراً بتعريف

تعريف :

الحلقة (ح ، ،.) هي مجموعة غير خالية ح عليها عمليتان ثنائيتان ، نرمز لهما عادة بالرمزين + (جمع) و . (ضرب) ، تحقق الفرضيات التالية :

أ. الجمع تجميعي : لكل أ ، ب ، حـ∈ح ، (أ + ب) + حـ = أ + (ب + حـ).

ب. الجمع تبديلي : لكل أ ، ب∈ ح

أ + ن = ب + أ

حـ. يوجد في ح عنصر محايد للجمع : يوجد عنصر نرمز له بالرمز . في ح بحيث أ + ٠ = أ لكل أ ∈

د. يوجد نظير للجمع : لكل أ∈ح يوجد عنصر نرمز له بالرمز ــ أ في ح بحيث ان أ + (- أ) = ٠

هـ. يكون الضرب تجميعياً : لكل أ ، ب ، حـ∈ح ، (أ.ب). حـ = أ. (ب.حـ)

و. يكون الضرب توزيعياً من اليمين ومن اليسار بالنسبة للجمع :

لكل أ ، ب ، حـ :

أ.(ب + حـ). = (أ.ب) + (.جـ)

(ب + حـ) . أ = (ب. أ) + (حـ أ)

ولنثبت ان نظاماً معيناً (ح ، + ، .) يكون حلقة يجب ان نتأكد اولا ان الجمع والضرب يكونان عمليتين ثنائيتين على ح . ومن ثم يجب ان نبرهن ان ح تكون مغلقة بالنسبة للجمع والضرب (اي لكل أ ، ب ∈ ح ، أ + ب ∈ ح و أ.ب ∈ ح). لاحظ ان الأوليات أ الى د في التعريف أ تقول إن (ح ، +) تكون زمرة ابدالية وبذا فيمكن ذكر تعريف الحلقة كما يلي :

تعريف :

الحلقة (ح ، + ، .) هي مجموعة ح عليها عمليتان ثنائيتان + و . بحيث

أ. تكون (ح ، +) زمرة تبديلية.

ب. يكون الضرب تجميعياً.

حـ. يكون الضرب توزيعياً من اليمين ومن اليسار بالنسبة للجمع .

وعندما نتعامل مع الاعداد الحقيقية غالباً ما نحذف اشارة الضرب ونرمز لضرب أ و ب بوضع الاول بجانب الثاني منكتب أب لحاصل ضرب أ و ب . وبالمثل ، من المعتاد ان يرمز لضرب عنصرين في الحلقة (ح ، + ، .) بوضعهما متجاورين ولهذا فان أ.ب تصبح

أب. وفي تعبير مثل أب + أحـ فيفترض ان يكون الضرب قد انجز اولا (اي يكون أب + أحـ = (أ.ب) + (أ.حـ).

تعريف :

تكون الحلقة (ح ، + ، .) حلقة بعنصر محايد (او وحدة) اذا وفقط اذا امكن ايجاد عنصر يرمز له بالرمز ١ في ح بحيث ان

أ.١ = ١.أ = أ لكل أ ∈ ح. و يسمى العنصر ١ بالعنصر المحايد للضرب.

وعندما درسنا الزمر افردنا تلك التي لها عملية تبديلية واعطيناها اسماً خاصاً . و بالمثل سنفرد الحلقات التي لها ضرب تبادلي . وكما سنرى فيما بعد كثيراً ما يكون لهذه الحلقات خصائص خاصة اخرى.

تعريف :

تكون الحلقة (ح ، + ، .) تبديلية اذا وفقط اذا كان الضرب عملية تبديلية على ح : أب = ب أ لكل أ ، ب ∈ ح.

مسألة :

عين هل كل من النظم التالية حلقة ام لا ؟ حلقة بعنصر محايد ؟ حلقة تبديلية ؟ وحلقة تبديلية بعنصر محايد ؟ علل اجابتك . كن حراً باستخدام النتائج السابقة على الزمر . انظر الملحق ٣ عن خصائص الاعداد الحقيقية والبندين ١,١ و ١,٢ بشأن م (R).

أ. (R ، + ، .)

ب. (Q ، + ، .)

حـ (Z ، + ، .)

د. (م$_٢$(R) ، + ، .)

هـ ٢ Z = {٢ ر : ر∈Z} مع عمليتي الجمع والضرب العاديتين للاعداد.

و. {س : س غير نسبية} = R − Q مع عمليتي الجمع والضرب العاديتين للاعداد.

خلال دراستنا للزمر درسنا زمرة الجمع Zن المكونة من صفوف تكافؤ من مضاعفات ن . ونرغب ان نعرف الآن عملية ضرب على Zن ونبرهن ان النظام (Zن ، + ، .) يكون حلقة . و يساعدنا في هذا الواجب النتيجة التالية بالنسبة لضرب صفوف تكافؤ من مضاعفات ن : اذا كانت أ ، ب ، حـ ، د ∈ ح بحيث ان أ ≡ حـ (مض ن) ون ≡ د (مض ن) فان أب ≡ حد (مض ن).

مسألة :

ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . عرف حاصل الضرب أن . بن للعنصرين أن و بن بوضع أ.بن = (أب)ن

أ. اعط عدة امثلة على هذا التعريف .

ب. برهن ان التناظر

$(أ_ن ، ب_ن) \leftarrow أ_ن . ب_ن$

يكون عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً عل $Z_ن$. (لعمل ذلك اثبت انه اذا كانت

$أ_ن = حـ_ن$ و $ب_ن = د_ن$ فان $أ_ن ب_ن = حـ_ن د_ن$ أو

ما يكافئه $(أب)_ن = (حـد)_ن$.)

تسمى هذه العملية بالضرب على $Z_ن$.

حـ اعمل جداول الضرب على $Z_٥$ و $Z_٦$.

د. اثبت ان $(Z_ن ، + ، .)$ تكون حلقة.

تمارين :

١ - عين اي من المجموعات التالية بالنسبة لعملتي الجمع والضرب العاديتين للاعداد تكون حلقة بعنصر محايد . علل اجاباتك.

أ. $\{ ٣ن : ن \in Z \}$

ب. $\{ \frac{م}{٥^ن} : م \in Z ، ن \in Z^+ \}$

حـ $\{ أ + ب\sqrt{د} : أ ، ب \in Q \}$ حيث د عدد أولي وهكذا يكون $\sqrt{د}$ عدداً غير نسبي

٢ - اعمل جدول ضرب على $Z_٤$.

٣ - لتكن سه مجموعة غير خالية . ولتكن ج المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية من سه . عرف عمليتين ثنائيتين $\oplus$ و $\odot$ على ج كما يلي :

$صه \oplus ع = (صه - ع) \cup (ع - صه)$ و $صه \odot ع = صه \cap ع$ لكل $صه ، ع \in ج$.

اثبت $(ج ، + ، \odot)$ تكون حلقة تبديلية بعنصر محايد . ●

٤ - هل المجموعة $\left\{ \begin{pmatrix} أ & ب \\ . & أ \end{pmatrix} : أ ، ب \in R \right\}$

بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين للمصفوفات تكون حلقة ؟ حلقة تبديلية؟ حلقة بعنصر محايد ؟

٥ - لتكن (سه ، +) زمرة تبديلية . اثبت انه يوجد ضرب على سه بحيث ان النظام (سه ، +) يكون حلقة تبديلية لهذا فاي زمرة تبديلية يمكن عملها حلقة تبديلية.

٦ - لتكن (ج، + ، ٠) حلقة و سه مجموعة غير خالية ولتكن ق (سه ، ج) المجموعة المكونة من كل الاقترانات من سه الى ج . فنعرف الجمع ق+ د للاقترانين ق، د $\in$ ق (سه ، ج) بوضع

(قر + د) (س) = قر(س)+د(س) لكل س ∈ سه (الجمع النقطي)

ونعرف الضرب قر هـ للاقترانين قر، هـ ∈ قه (سه ، ح) بوضع

(قر هـ) (س) = قر(س) . هـ (س) لكل س ∈ سه (الضرب النقطي). لقد لاحظنا ان (قه (سه ، ح) ، +) تكون زمرة (التمرين ١,٥ ــ ١٠).

أ. اعط امثلة عدة على عناصر ق (Z_4 ، Z_4).

ب. لتكن سه الفترة [٠،١]. في قه (سه ، R) ولتكن قر(س) = $س^2$

و هـ(س) = ٢س + ١ لكل س ∈ سه . جد ق + هـ ، قر هـ

حـ في قه (Z_4 ، Z_4) لتكن قر($أ_4$) = ٣ $أ_4$ ولتكن هـ ($أ_4$) = $أ_4^2$ لكل $أ_4$ ∈ Z_4. جد (قر+ هـ) ($أ_4$) و (قر هـ) ($أ_4$) لكل $أ_4$ ∈ Z_4

د. لتكن (ح ، + ، .) حلقة و سه مجموعة غير خالية .

اثبت ان (قه (سه ، ح) ، + ، ٠) تكون حلقة.

هـ اثبت ان الضرب يكون تبديلياً في ق (سه ، ح) اذا وفقط اذا كانت ح حلقة تبديلية.

و. اثبت ان قه (سه ، ح) لها اقتران محايد ضربي اذا وفقط اذا كانت ح لها عنصر محايد ضربي .

٧ ـ نقول ان الاقتران قر: R^2 ← R^2 خطي اذا امكن ايجاد أ ، ب ، حـ ، د ∈ R بحيث ان قر(س ، ص) = (أس + ب ص ، حـس + دص).

لكل (س ، ص) ∈ R^2 . لتكن ل (R^2) المجموعة المكونة من كل الاقترانات الخطية ق : R^2 ← R^2 . نعرف الجمع

ق + هـ للاقترانين ق ، هـ ∈ ل (R^2) بوضع

(قر+ هـ) (س ، ص) = قر(س ، ص) + هـ (س ، ص).

لاحظ ان ل (R^2) تكون مجموعة جزئية من قه (R^2، R^2) وان عملية الجمع هي نفسها لكلا المجموعتين.

أ. برهن ان (ل (R^2) ، +) تكون زمرة تبديلية .

ب. برهن ان ل (R^2) تكون مغلقة بالنسبة لتركيب الاقترانات فاذا كانت قر، هـ ∈ ل (R^2) فان ق∘هـ ∈ ل (R^2) وبذا فان التركيب يكون عملية ثنائية تجميعية على ل (R^2).

ح. برهن ان التركيب يكون توزيعياً بالنسبة للجمع على ل.(R^2)

د. برهن ان ل (R^2) تكون حلقة بعنصر وحدة.

٨*- لتكن (سه ، +) زمرة تبديلية . ولتكن محا (سه) المجموعة المكونة من كل الاقترانات المحافظة من سه الى سه . ولهذا فان ∅ سه ← سه تكون في محا (سه) اذا وفقط اذا كان

ϕ (أ + ب) = ϕ (أ) + ϕ(ب) لكل أ ، ب ∈ س . عرف الجمع ϕ_1 + ϕ_2 لاقترانين ϕ_1، ϕ_2 محا (س) بوضع

(ϕ_1 + ϕ_2) (أ) = ϕ_1 (أ) + ϕ_2 (أ) لكل أ ∈ س.

أ. اعط امثلة عديدة لعناصر محا (Z).

ب. في محا (Z) جد ϕ_1 + ϕ_2 اذا كانت ϕ_1 (أ) = ٣ أ و ϕ_2 (أ) = - ٧ أ لكل أ ∈ Z .

حـ اثبت انه اذا كانت ϕ_1 ، ϕ_2 ∈ محا (س) فتكون ϕ_1 + ϕ_2 ∈ محا (س).

د. اثبت ان (محا (س) ، +) تكون زمرة تبديلية .

٩*- لتكن (س ، +) زمرة تبديلية . لكل زوج من الاقترانات المحافظة ϕ_1 ، ϕ_2 ∈ محا (س) يعرف التركيب كالمعتاد بوضع (ϕ_1 ∘ ϕ_2) (أ) = ϕ_1 (ϕ_2 (أ)) لكل أ ∈ س.

أ. في محا (Z) جد ϕ_1 ∘ ϕ_2 للاقترانين المحافضين المعرفين بالصيغة ϕ_1 (أ) = ٣ أ و ϕ_2 (أ) لكل أ ∈ Z.

ب. في محا (Z_4) جد ϕ_1 ∘ ϕ_2 للاقترانين المحافظين ϕ_1 و ϕ_2 المعرفين بالصيغتين ϕ_1 ($أ_4$) = ٢ أ و ϕ_2 ($أ_4$) = - $أ_4$ لكل $أ_4$ ∈ Z_4.

حـ لتكن (س ، +) زمرة تبديلية و ϕ_1 ، ϕ_2 ∈ محا (س).
اثبت ان ϕ_1 ∘ ϕ_2 ∈ محا (س).

د. برهن ان (محا (س) ، + ∘) تكون حلقة اذا كانت س زمرة تبديلية.

هـ لتكن أ ، ب ، حـ ، د ∈ R . عرف ϕ : $R^2 \to R^2$ بوضع
ϕ (س ، ص) = (أس + ب ص ، جس + دص) لكل (س ، ص) ∈ R^2.
بين ان ϕ اقتران محافظ من R^2 الى نفسها.
(تذكر ان الجمع يكون معرفاً على R^2 بالصيغة (س،ص) + (ع،ن) = (س+ع،ص+ن)).
جد اقترانين محافظين ϕ_1 ، ϕ_2 ∈ محا (R^2) بحيث ان ϕ_1 ∘ ϕ_2 ≠ ϕ_2 ∘ ϕ_1 .
يبين هذا ان محا (س) ليس من الضروري ان تكون تبديلية بالنسبة لعملية التركيب.

٣,٢ الخصائص الأولية للحلقة

تؤكد لنا الأوليات أ الى د في التعريف ١ انه لأي حلقة ح تكون (ح ، +) زمرة تبديلية . وهذا يعطينا فوراً الخصائص التالية للحلقة (ح ، + ، .).

فرضية :

أ. اذا كانت أ ، ب ، حـ ∈ ح و أ + ب = حـ + د فان ب = حـ
(الاختزال في الجمع)

ب. اذا كانت حـ ∈ ح و حـ + أ = أ لبعض أ ∈ ح فان حـ = ٠
(وحدانية العنصر المحايد الجمعي).

حـ اذا كانت أ ، ب ∈ ح و أ + ب = ٠ فان ب = ـ أ.
(وحدانية النظير الجمعي).

د. لكل أ ، ب ∈ ح يوجد س وحيد في ح:
بحيث ان أ + س = ب . وفي الواقع س = ب + (-أ) وغالباً ما نرمز لـِس بالصيغة ب ـ أ . (تعرف هذه عملية الطرح في الحلقة.)

هـ لكل أ ∈ ح فان ـ (ـ أ) = أ.

يوجد خصائص اخرى للحلقة تنتج عن وجود الضرب ومن خاصية التوزيع. برهن هذه الخصائص في المسألة التالية .

مسألة :

ا. لكل أ ∈ ح ، أ. (٠) = (٠) .أ = (٠) ▲

ب. لكل أ ، ب ∈ ح، أ (ـ ب) =-(أب) و (ـ أ) ب = ـ (أب).

حـ لكل أ ، ب ∈ ح ، (ـ أ) (ـ ب) = (أب).

د. اذا كانت (ح ، + ، .) حلقة لها عنصر محايد ١ وامكن ايجاد عنصر س ∈ ح بحيث ان
س أ = أ س = أ لكل أ ∈ ح، فان س = ١
(وحدانية العنصر المحايد الضربي اذا وجد).

هـ اذا كانت (ح ، + ، .) حلقة لها عنصر محايد ١ واذا امكن ايجاد أ ، $أ^{-1}$ و ب في ح بحيث ان $أ^{-1}$ أ = أ $أ^{-1}$ = ١ ، أب = ب أ = ١ فان $أ^{-1}$ = ب
(وحدانية النظير الضربي اذا وجد).

و. لكل أ ، ب ، حـ ∈ ح ، أ (ب ـ حـ) = أب ـ أحـ و (ب ـ حـ) أ = ب أ ـ حـ أ.

تمارين :

١ ـ برهن انه اذا كانت ح حلقة بعنصر محايد ١ و ح ≠ {٠} فان ١ ≠ ٠ .

في التمارين التالية لتكن (ح ، + ، .) حلقة . في التمارين ٢ ـ ٨ اكمل وصحح العبارة اذا لزم . ثم برهن النتيجة.

٢ - ـــــ - (أ + ب) ـــــ
ـــــ - (أ - ب) ـــــ

٣ - (أ - ب) - حـ = أ ـــــ (ب ـــــ حـ)
أ - (ب - حـ) = (أ ـــــ ب) ـــــ حـ

٤ - أ + [ب+ (حـ + د)] = (ـــ + ـــ) + (ـــ + ـــ) + (ـــ + ـــ)
= [(أ+ب) + ـــــ] + ـــــ

٥ - (أ+ب) . (حـ+د) = (أحـ+بحـ) + (ـــــ+ـــــ)
(أ-ب) . (حـ-د) = (احـ+ـــــ) - (ـــــ)

٦ - (أ-ب)+(حـ-د) = (أ+ـــــ)-(ـــــ+ـــــ)
(أ+ب)-(حـ+د) = (أ-ـــــ)+(ـــــ)

٧ - - (٠) = (٠)
(-١) أ = - أ اذا كانت ح لها عنصر محايد ضربي ١.

٨ - أ-ب = حـ-د اذا وفقط اذا كان أ+ـــــ=ـــــ+حـ

٩ - ان التعبير عن وحدانية العنصر المحايد الجمعي هي انه كانت أ + حـ = أ لبعض أ∋ح فان حـ = ٠. ومن جهة اخرى فان التعبير عن وحدانية العنصر المحايد الضربي هي انه

اذا كانت س أ = أس = أ لكل أ ∋ ح فان س = ١.

اثبت ان العبارة الاخيرة لا يمكن تغييرها لتقرأ «اذا كانت س أ = أ س = أ لبعض أ ∋ ح فان س = ١». اعمل هذا بايجاد عنصر ع∋ م$_٢$(R) مغاير للمصفوفة المحايدة ومصفوفة مغايرة للصفر ص∋ م$_٢$(R) بحيث ان ع ص = ص = ص ع.

١٠ اثبت بالتناقض انه اذا كان أ و ب عنصرين في ح مغايرين للصفر و أب = ٠ فلا يمكن ان يكون لـ أ نظير ضربي .

١١ في الحلقة ح يسمى اي عنصر أ بحيث ان أ^٢ = أ بالعنصر الجامد . وقد يكون مستغرباً ايجاد حلقة بعنصر محايد ح يمكن ان يكون فيها عنصر جامد أ بحيث أ ≠ ٠ و أ ≠ ١.

أ. جد كل العناصر الجامدة في $Z_٦$ ، $Z_{١٢}$ ، $Z_٧$.

ب. برهن انه اذا كانت ر عدداً فردياً يكون العنصر (ر)$_{٢ر}$ عنصراً جامداً في $Z_{٢ر}$

حـ. جد عدة عناصر جامدة في م$_٢$(R) .

د. عين كل قيم س بحيث تكون

$$\begin{pmatrix} \text{س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} \end{pmatrix}$$

عنصراً جامداً في م$_{٢}$ (R).

هـ   جد علاقة بين س ، ص بحيث تكون المصفوفة

$$\begin{pmatrix} \text{س} & -\text{س} \\ \text{ص} & -\text{ص} \end{pmatrix}$$

عنصراً جامداً في م$_{٢}$(R) .

٣,٣ الحلقات الجزئية والمثاليات

في دراستنا للزمر رأينا انه اذا كانت ص مجموعة جزئية في زمرة معروفة س فما علينا الا ان نفحص شرطاً خاصاً (أ٥بَ ∈ ص لكل أ ، ب ∈ ص) لمعرفة هل ان ص نفسها زمرة بالنسبة للعملية التي على س . وباتباع هذا الاسلوب سننظر في «الحلقات الجزئية» ونفتش عن اقل شروط تفرض على المجموعة الجزئية لتصبح حلقة جزئية من الحلقة الاصلية.

تعريف :

لتكن (ح ، + ، ٠) حلقة . فتكون المجموعة الجزئية ص في ح حلقة جزئية من ح اذا وفقط اذا كانت (ص ، + ، ٠) حلقة (اي تكون ص حلقة بالنسبة للعمليتين الناتجتين من ح).

ولتعيين هل ان مجموعة جزئية معطاة ص من الحلقة ح حلقة جزئية فعلا فيجب ان نقرر فيما اذا كانت ص زمرة جزئية من ح بالنسبة للجمع ام لا.

تذكر ان ص تكون زمرة جزئية من زمرة الجمع ح اذا وفقط اذا كانت ص مغلقة بالنسبة للطرح : أ + (− ب) = أ − ب ∈ ص لكل ا ، ب ∈ ص (انظر النظرية ١٢ في الفصل ٢). ما هي الخصائص الاخرى التي يجب التحقق منها لاثبات ان ص تكون حلقة ؟

مسألة :

فيما يلي عين هل المجموعات الجزئية ص من الحلقة ح تكون حلقة جزئية ام لا . اذا كانت ص حلقة جزئية فهل تكون حلقة تبديلية ؟ حلقة بعنصر محايد ؟ علل اجابتك.

أ.   ح = م$_{٢}$(R)

ص = $\left\{ \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{د} \end{pmatrix} : \text{د} \in R \right\}$

ب.   ح = Z

ص = ن Z = { ن ر : ر ∈ Z } حيث ن ∈ Z ثابت.

لاي حلقة ح ≠ { ٠ } حلقتان جزئيتان على الاقل هما { ٠ } و ح . (لماذا ؟).

وكما عملنا بالزمر فنرغب ان نعطي اسماً خاصاً للحلقات الجزئية غير $\{0\}$ و ح.

تعريف :

تكون اي حلقة جزئية من ح حلقة جزئية فعلا اذا وفقط اذا كانت مختلفة عن $\{0\}$ و ح.

مسألة :

لاي قيم ن $\in Z^{+}$ تكون نZ حلقة جزئية فعلا من Z ؟

كي نبسط العمل على تقرير هذه المجموعة الجزئية ص من الحلقة ح حلقة جزئية ام لا لنجد شرطاً مشابهاً لشرط الزمر الجزئية من اي زمرة.

مسألة :

لتكن (ح ، + ، ٠) حلقة و ص مجموعة جزئية من ح. استخدم مقياس الزمر الجزئية اعلاه لايجاد (ادنى) شرط ضروري وكاف لكي تصبح المجموعة الجزئية ص حلقة جزئية من ح . اذكر هذا الشرط بصيغة نظرية على النحو التالي :

نظرية :

لتكن (ح ، + ، ٠) حلقة . تكون المجموعة الجزئية ص من ح حلقة جزئية من ح اذا وفقط اذا

حقق هذه النتيجة مع مدرسك.

كيف تستطيع تكوين حلقات جزئية ؟ بالتأكيد لا يكفي اعتبار المجموعة $<\text{أ}>$ المكونة من كل مضاعفات العنصر (او قواه) فمثلا في Q فان المجموعة :

$$<\tfrac{1}{2}> = \{(\text{ر}) \cdot (\tfrac{1}{2}) : \text{ر} \in Z\}$$

لا تكون حلقة جزئية لان $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ليس عنصراً في المجموعة .

وفي المسألة التالية نختبر طريقة لايجاد حلقات جزئية .

مسألة :

أ. استعمل النظرية ١٣ لتبرهن انه اذا كانت (ح ، + ، ٠) حلقة وكان أ $\in$ ح ثابتاً فالمجموعات

$$\text{أ}\text{ح} = \{\text{أس} : \text{س} \in \text{ح}\} \quad \text{و}$$
$$\text{ح}\text{أ} = \{\text{س أ} : \text{س} \in \text{ح}\}$$

تكون حلقات جزئية من ح .

ب. جد كل الحلقات الجزئية :

$١Z_{٦}$ ، $٢Z_{٦}$ ، . . . ، $٥Z_{٦}$ من $Z_{٦}$.

لاحظ انه يمكننا استخدام المسألة ١٤ أ لنبرهن ان كل المجموعات

نZ = $\{\text{ن ر} : \text{ر} \in Z\}$ (ن $\in Z^{+}$) تكون حلقات جزئية من Z.

مسألة :

اثبت ان المجموعة nZ حيث ن عدد صحيح موجب ثابت لها الخاصية التالية لكل $r \in nZ$ ، $l \in Z$ فان rl (أو lr) عنصر في nZ .

كثير من الحلقات الجزئية لاي حلقة معطاة قد يكون لها خاصية الانغلاق المذكورة في المسألة ١٥. ولهذه الحلقات الجزئية اسم يعطيه التعريف التالي :

تعريف :

لتكن (ح ، + ، ・) حلقة . تسمى الحلقة الجزئية ص من ح مثالية يمنى في ح اذا وفقط اذا كان لكل ص و ر∈ ح يكون رص ∈ ص. او بعبارة اخرى تكون الحلقة الجزئية ص من ح مثالية يمنى في ح اذا وفقط اذا كان لكل ر∈ ح ، رص ⊇ ص.

وتسمى الحلقة الجزئية ص من ح مثالية يسرى في ح اذا وفقط اذا كان ص ∈ ص و ر ∈ ح فان ص ر∈ ص. او بعبارة اخرى تكون الحلقة الجزئية ص من ح مثالية يسرى اذا وفقط اذا كان لكل ر∈ح ، ص ر ⊇ ص.

تدعى الحلقة الجزئية من ح مثالية (او مثالية من الجانبين) اذا وفقط اذا كانت مثالية من اليمين ومثالية من اليسار معاً. اي ان الحلقة ص من ح تكون مثالية في ح اذا وفقط اذا كان لكل ر∈ ح ، رص ⊇ ص و ص ر ⊇ ص.

عندما تبرهن ان مجموعة خاصة تكون مثالية فلا تنس ان تبرهن انها تكون حلقة جزئية.

مسألة :

هل المجموعة ص = $\left\{ \begin{pmatrix} أ & ب \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} : أ ، ب \in R \right\}$

مثالية يمنى في م$_2$(R) ؟ مثالية يسرى في م$_2$(R) ؟ مثالية من الجانبين ؟

علل اجاباتك.

لقد عرفنا في المسألة ١٤ مجموعتين جزئيتين أح و ح أ في الحلقة ح واثبتنا ان هاتين المجموعتين تكونان حلقتين جزئيتين . والآن يمكننا ان نقول المزيد عن هذه الحلقات الجزئية.

مسألة :

اثبت انه اذا كانت (ح ، + ، ・) حلقة وكان أ∈ ح ثابتاً فتكون الحلقة

ص$_1$ = ح أ مثالية يمنى.

لقد لاحظنا ان مفهوم الزمر نشأ عن رغبة لايجاد حل للمعادلات الحدودية . وبالمثل فمفهوم المثاليات ترجع جذوره الى محاولة لحل مسألة مشهورة لا تزال غير محلولة حتى يومنا هذا.

ان اشهر المسائل غير المحلولة في الرياضيات مسألة ايجاد حل لنظرية فيرمات الاخيرة التي تقول انه اذا كان ن > ٢ عدداً صحيحاً فلا توجد اعداد صحيحة س ، ص ، ع كلها غير الصفر

تحقق $\text{س}^{\text{ن}} + \text{ص}^{\text{ن}} = \text{ع}^{\text{ن}}$.

ولقد ادت المحاولات لبرهنة نظرية فيرمات الاخيرة بشكل عام (وعلى الاخص لكل الاعداد الاولية ب > 2) الى ابتكار المثاليات في نظرية الحلقات ضمن مفاهيم اخرى.

في عام ١٨٤٣ اعتقد كومير (١٨١٠ - ١٨٩٣) ، وهو رياضي الماني بدأ كطالب في علم اللاهوت ، انه قد حل نظرية فيرمات الاخيرة . قال كومير ، ليكن ب عدداً اولياً ولنأخذ العدد α الذي يكون حلا للمعادلة الحدودية $\alpha^{\text{ب}-1} + \alpha^{\text{ب}-2} + \ldots + \alpha + 1 = 0$

وبذا تكون α الجذر البائي للوحدة لان $\alpha^{\text{ب}} - 1 =$

$$(\alpha - 1)\,(\alpha^{\text{ب}-1} + \alpha^{\text{ب}-2} + \ldots + \alpha + 1) = 0$$

انشأ كومير المجموعة المكونة من الاعداد التي تأخذ الصيغة

$\text{أ}_0 + \text{أ}_1\alpha + \ldots + \text{أ}_{\text{ب}-2}\,\alpha^{\text{ب}-2}$ حيث $\text{أ}_0 ، \text{أ}_1 ، \ldots ، \text{أ}_{\text{ب}-2}$ اعداد صحيحة.

وعرف لهذه المجموعة مفاهيم مثل «اعداد صحيحة» ، «اعداد اولية» ، «والقسمة» . وافترض بعد ذلك نظرية تحليل وحيد تشبه النظرية الاساسية في الحساب (انظر النظرية ١٤ في الملحق ٦).

وعند هذه النقطة كان برهانه خطأ لأن التحليل الوحيد يتحقق فقط لاعداد اولية معينة . ولكنه املا باستعادة التحليل الوحيد ابتكر مفهوم الاعداد المثالية وبذا برهن ان نظرية فيرمان الاخيرة تصح لاعداد أولية عديدة ن.

وعلى اية حال لم تكن الاعداد المثالية معرفة تعريفاً حسناً وقد وسع ديركند (١٨٣١-١٩١٦) مفهوم الاعداد المثالية واستخدم المثاليات لمعاجة مسألة التحليل الوحيد لما يسمى بالاعداد الجبرية (الاعداد التي تكون حلولا للمعادلات الحدودية التي معاملاتها اعداداً صحيحة). فمثلا وسع مفهوم الاعداد الاولية بادخال فكرة المثالي الاولى (وهو مثالي صه بحيث اذا كانت صه $\ni$ ر ص فان صه $\ni$ ص أو ر $\ni$ ص) . وهذه ستدرسها في الفصل ٥ . ولم يكتف ديركيند بذكر أوليات لتعريف المثاليات بل ذكر ايضاً اوليات للحلقات والحقول (انظر البند ٣,٧) . ولقد ظهرت هذه التعاريف ونتائج عديدة لديركند عام ١٨٧١ في ملحق لمجلة في نظرية الاعداد (Zahlentheorie Dirichlet's حرره ديركند نفسه ، اذ كان لمدة خمسين عاماً يدرس في مدرسة المانية ثانوية تقنية.

تمارين :

١ - عين اي من المجموعات صه التالية حلقة جزئية من $\text{م}_2(R)$.
واذا كانت صه حلقة جزئية ، هل تكون تبديلية ؟ حلقة بعنصر محايد ؟
علل اجابتك.

أ. $\text{صه} = \left\{ \begin{pmatrix} \text{أ} & 0 \\ 0 & \text{د} \end{pmatrix} ، \text{أ} ، \text{د} \in R \right\}$

(المجموعة المكونة من كل المصفوفات القطرية)

ب. صه = $\left\{ \begin{pmatrix} أ & ب \\ . & د \end{pmatrix} : أ ، ب ، د \in R \right\}$

(المجموعة المكونة من المصفوفات المثلثية العليا)

٢*- لتكن صه مجموعة جزئية من الحلقة ح . اثبت ان صه تكون مثالية يمنى في ح اذا كانت صه زمرة جزئية من ح بالنسبة للجمع ، ولكل صه $\in$ صه و ر $\in$ ح رص $\in$ صه و يمكن استخدام هذه النتيجة لتبسيط البرهان على ان مجموعة جزئية معينة من الحلقة تكون فعلا مثالية يمنى . وهناك نتيجة مشابهة تصح على المثاليات اليسرى.

٣ - لتكن ح حلقة بعنصر محايد.

أ. برهن انه اذا كانت صه مثالية فعلا في ح فان $1 \notin$ صه (برهن بالتناقض).

ب. برهن انه اذا كانت صه مثالية فعلا و أ لها نظير ضربي في ح فان أ $\notin$ صه. (برهن بالتناقض.)

٤ - جد كل المثاليات للمجموعات التالية . علل اجاباتك

أ. $Z_٦$ ‏ ‏ ‏ حـ ‏ ‏ ‏ Q

ب. Z ‏ ‏ ‏ د ‏ ‏ ‏ R

٥ - ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . عين كل الحلقات الجزئية وكل المثاليات للحلقة $Z_ن$.

٦*- لتكن $Q[\sqrt{٢}] = \{$ أ + ب $\sqrt{٢}$: أ ، ب $\in Q\}$.

برهن ان $Q[\sqrt{٢}]$ تكون حلقة جزئية من R.

برهن او انف ان $Q[\sqrt{٢}]$ تكون مثالية في ح .

(انظر التمرين ٢,٢ - ٥ و ٢,٢ - ٦).

٧ - جد عنصراً ع $\in$ $م_٢$(R) حيث ان ع ($م_٢$(R)) = $\left\{ \begin{pmatrix} حـ & . \\ . & د \end{pmatrix} : حـ ، د \in R \right\}$

وهذا يبرهن ان هذه المجموعة تكون حلقة جزئية من $م_٢$(R) ومثالية يسرى . اثبت ان ع ($م_٢$(R)) لا تكون مثالية يمنى

٨ - أ. لتكن

ع = $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$

جد الحلقة الجزئية ع ($م_٢$(R)) من $م_٢$(R) . اثبت انه لكل

س ∈ ع (م٢(R)). فان عس = س.
وبدا تكون ع عنصراً محايداً أيمن للحلقة الجزئية . هل يكون ع عنصراً محايداً لهذه الحلقة ؟ علل اجابتك.

ب. ليكن ﺃ عنصر جمود في زمرة ح (اي العنصر الذي يحقق ﺃ٢ = ﺃ). برهن ان ﺃ يكون عنصراً وحده أيمن للحلقة الجزئية ﺃح.

*٩ اثبت ان م٢(R) ليس لها مثاليات فعلا من الجانبين . لعمل ذلك افترض ان صه ⊋ م٢(R) تكون مثالية و صه ≠ {٠}. فيجب ان نبرهن على ان صه = م٢(R).
ابدأ باعتبار حواصل الضرب س ص ، ص س حيث ص ∈ ص ، س تكون احدى المصفوفات

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

١٠- ا. برهن انه اذا كانت صه١ و صه٢ حلقتين جزئيتين من حلقة ح فتكون صه١ ∩ صه٢ حلقة من ح.

ب. برهن انه اذا كانت صه١ و صه٢ كلتاهما مثاليتين يمينين في ح فتكون صه١ ∩ صه٢ مثالية يمنى في ح. ومن الطبيعي ان تصبح عرضيات مشابهة للمثاليات اليسرى ومن الجانبين.

١١- ا. برهن انه اذا كانت صه١ ، صه٢ مثاليتين في حلقة ح و صه١ + صه٢ = {ﺃ + ب : ﺃ ∈ صه١ و ب ∈ صه٢} فان صه١ + صه٢ تكون مثالية في ح تحتوي على كل من صه١ و صه٢.

ب. جد صه١ + صه٢ صراحة عندما تكون ح = Z ، صه١ = Z٢١ و صه٢ = Z١٢.

١٢ لتكن (ح، + ، ٠) حلقة تبديلية و سه مجموعة غير خالية لاحظنا في التمرين ٣,١ - ٦ أن المجموعة قر(سه ، ح) المكونة من كل الاقترانات قر: سه ← ح تكون حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المعرفتين ل قر، د ∈ قر(سه ، ح) كالتالي :

(قر + د) (س) = قر(س) + د(س)

(قر د) (س) = قر(س) . د (س)

لكل س ∈ سه. اي من المجموعات الجزئية من قه (سه ، ح) التالية تكون حلقات جزئية ؟ اي تكون مثاليات في قه (سه ، ح) ؟ علل اجاباتك.

ﺃ. {قر: قر ∈ ق (سه ، ح) و قر(س٠) = ٠} حيث س٠ ثابت.

ب. { قر: قر ∈ ق (سه ، ج) و قر(س.) = أ } حيث س. ∈ سه و أ ∈ ج تكون ثابتين.

حـ. { أقر : ق ∈ ق (س ، ح) قر(سه ، ج) } حيث أ ∈ ج ثابتة و أقر اقتران معرف بوضع (أقر) (س)

= أ (قر(س)) لكل س ∈ سه.

١٣ - لتكن (سه ، +) زمرة تبديلية . فتكون المجموعة محا (سه) المكونة من كل زمر الاقترانات المحافظة من سه الى نفسها حلقة بالنسبة لمجموع وتركيب اي اقترانين محافظين ϕ_1 ، ϕ_2 ∈ محا (سه) معرفتين بالصيغة.

$(\phi_1 + \phi_2)$ (س) = ϕ_1(س) + ϕ_2(س) و

$(\phi_1 \circ \phi_2)$ (س) = ϕ_1 (ϕ_2 (س))

لكل س ∈ س . (انظر التمرينين ٣,١ - ٨ و ٣,١ - ٩).

اي من المجموعات التالية تكون حلقات جزئية من محا (سه)؟

وايها تكون مثاليات يسري ؟ علل اجاباتك .

ا. { ϕ : ϕ ∈ محا (سه) و ϕ اقتران شامل من سه الى سه}.

ب. { ϕ : ϕ ∈ محا (سه) و ϕ تشاكل }

حـ { ϕ : ϕ ∈ محا (سه) و ϕ (س.) = ٠ } حيث س. ∈ سه - {٠} ثابتة

د. { ϕ^{-} . $\phi \circ$: ϕ ∈ محا (سه) } حيث ϕ. ∈ محا (سه) ثابتة.

٣,٤ الاقترانات المحافظة

لتكن ح و حَ حلقتين فانهما تكونان زمرتي جمع . ومن ثم فيمكننا اعتبار اقتران محافظ (بين زمرتين) أو تشاكل ϕ من (ح، +) الى (حَ، +) . وقد يحافظ هذا الاقتران على العملية الثانية للضرب في الحلقتين وقد لا يحافظ . وفي هذا البند نفحص اقترانات من ح الى حَ تدعى الاقترانات المحافظة الحلقية التي تحافظ على كل من الجمع والضرب.

تعريف :

لتكن (ح، + ، ·) و (حَ، + ، ·) حلقتين . يكون الاقتران ϕ : ح ← حَ اقتراناً محافظاً (بين حلقتين) اذا وفقط اذا كان لكل أ ، ب ، ∈ ح،

ϕ (أ + ب) = ϕ (أ) + ϕ (ب) و ϕ (أب) = ϕ (أ) ϕ (ب)

و يكون اي اقتران ϕ : $R \leftarrow \bar{R}$ تشاكلا (بين حلقتين) من ح الى حَ اذا وفقط اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً (بين حلقتين) وكان ϕ واحداً لواحد وتشاكلا . وتقول ان حلقتين ح و حَ متشاكلتان اذاً وفقط اذا امكن ايجاد تشاكل من ح الى حَ.

مسألة :

ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً . عرف اقتراناً ϕ من الحلقة Z الى الحلقة $Z_{ن}$ بوضع ϕ (أ) = أن لكل أ ∈ Z . برهن ان ϕ اقتران محافظ حلقي . لقد استعملت كلمة (اقتران محافظ) لكل من الاقتران المحافظ الزمري والاقتران المحافظ الحلقي . وفي العادة يجب ان لا يكون هناك اي التباس . فمفهوم انه اذا كان ϕ : صه ← صهَ اقتراناً محافظاً وكانت كل من صه و صهَ زمرتين (ولكن ليسا كلاهما حلقتين) فيكون ϕ اقتراناً محافظاً زمرياً بينما اذا كانت صه و صهَ حلقتين فيكون ϕ اقتراناً محافظا حلقياً. وبالطبع يمكن ان يكون اقتران من الحلقة ح اقتراناً محافظاً زمرياً ليس اقتراناً محافظاً حلقياً (اي انه يحافظ على الجمع وليس الضرب). فمثلا الاقتران ϕ : Z ← نZ المعرف ϕ (أ)=ن أ لكل أ ∈ Z هو اقتران محافظ زمري ولا يحافظ على الضرب في الحلقة.

وفي مثل هذه الحالة يكون ضرورياً تخصيص الاقتران بانه اقتران محافظ زمري.

لاحظ انه اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً (حلقياً) من حلقة ح الى حلقة حَ فيكون ϕ اقتراناً محافظاً (زمرياً) من (ح ، +) الى (حَ ، +) . وبذا فيمكننا ان نتكلم عن نو ϕ (اي المجموعة

نو (ϕ) = {ر : ر ∈ ح و ϕ (ر) = ·}

وصورة ح بالنسبة الى ϕ (اي المجموعة

ϕ (ح) = {ϕ (ر) : ر ∈ ح)}

مسألة :

عرف اقتراناً ϕ : R ← م$_{٢}$(R) بوضع

$$\phi(أ) = \begin{pmatrix} أ & ٠ \\ ٠ & أ \end{pmatrix}$$ لكل أ ∋ R.

أ. هل يكون ϕ اقتراناً محافظاً حلقياً ؟ علل اجاباتك.

ب. هل تكون نو ϕ حلقة جزئية من R ؟

حـ هل تكون الصورة لـ R بالنسبة الى ϕ حلقة جزئية من م$_{٢}$(R) ؟ هل تكون مثالية في م$_{٢}$(R) ؟

مسألة :

لتكن ع مصفوفة لها نظير ضربي.

عرف اقتراناً $\phi_{ع}$: م$_{٢}$(R) ← م$_{٢}$(R) بوضع

$$\phi_{ع}(س) = ع \cdot س \cdot ع^{-١}$$

لكل س ∋ م$_{٢}$(R). وكمثال على هذا الاقتران ، لتكن ع = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

وهكذا فان

$$ع^{-١} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١- \end{pmatrix}$$

أ. برهن ان $\phi_{ع}$ اقتران محافظ

ب. جد نواة $\phi_{ع}$.

حـ برهن ان $\phi_{ع}$ اقتران شامل من م$_{٢}$(R) الى نفسها.

د. هل يكون $\phi_{ع}$ تشاكلا ؟

عند دراستنا للاقترانات المحافظة الزمرية اثبتنا ان نواة الاقتران المحافظ تكون زمرة جزئية (طبيعية) من المجال وتشغل المثاليات مكانا في نظرية الحلقة مشابهاً للزمر الجزئية الطبيعية في نظرية الزمرة . وبذا قد نتوقع ان نواة الاقتران المحافظ الحلقي تكون حلقة جزئية هي ايضاً مثالية .

مسألة :

لتكن (ح، + ، ٠) و (حَ ، + ، ٠) حلقتين وليكن ϕ : ح ← حَ اقتراناً محافظاً . برهن العبارات

التالية :

أ. صورة ح بالنسبة الى ϕ تكون حلقة جزئية من حَ (انظر النظرية ٥١ في الفصل ٢).

ب. تكون نواة ϕ مثالية في ح. (انظر النظرية ٤٨ في الفصل ٢).

عرضية :

لتكن (ح، + ، ·) و (حَ، + ، ·) حلقتين وليكن ϕ اقتراناً محافظاً من ح الى حَ. فيكون ϕ تشاكلا اذا وفقط اذا كانت نو (ϕ) = $\{\cdot\}$ و ϕ (ح) = حَ

اترك برهان هذه العرضية للتمرين ٢.

تزودنا المسألة التالية بمثال للدور الذي تلعبه المثاليات في دراسة الاقترانات المحافظة لاي حلقة معينة.

مسألة :

لتكن ح حلقة بلا مثاليات فعلا وليكن ϕ اقتراناً محافظاً من ح الى حلقة حَ. برهن انه اذا كانت ϕ (ر) $\neq$ · لبعض ر $\in$ ح فان ϕ (س) $\neq$ · لكل س $\in$ ح غير الصفر .

وبذا تكون الاقترانات المحافظة على ح هي فقط الاقتران المحافظ «الصغرى» (اي ϕ (ر) = · لكل ر $\in$ ح) وتلك الاقترانات تكون واحداً لواحد . (لماذا؟)

تمارين :

اي من الاقترانات التالية اقترانات محافظة (حلقية) ؟

علل اجاباتك . اذا كان الاقتران ϕ اقتراناً محافظاً فجد نو (ϕ) وحقق انه يكون مثالية في مجال الاقتران.

أ. ϕ : $Z_{٦} \rightarrow Z_{٢}$ معرف بالصيغة ϕ (أ$_{٦}$) = أ$_{٢}$ لكل أ $\in Z$.

ب. ϕ : $R \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ د & ح \end{pmatrix} : ح ، د \in R \right\}$

معرف بالصيغة

$$\phi\,(ر) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ د & \cdot \end{pmatrix} \quad \text{لكل } ر \in R$$

حـ. ϕ : م$_{٢}(R) \rightarrow R$ معرف بالصيغة

$$\phi \begin{pmatrix} ب & ا \\ د & ح \end{pmatrix} = ا + د$$

ϕ : R ← م$_٢$(R) معرفة بالصيغة

$$\phi\,(ر) = \begin{pmatrix} ر^{-} & ر^{٢} \\ ر & ر^{٢} \end{pmatrix}$$

لكل ر $\in$ R

٢ - برهن العرضية ٢٤.

٣ - جد اقتراناً محافظاً ϕ : Z ← Z$_ن$ حيث ان نو (ϕ) = ن Z = {ن ر : ر $\in$ Z}
برهن ان الاقتران الذي عرفته يكون اقتراناً محافظاً حلقياً.

٤ - لتكن (ح، + ، ٠) حلقة بعنصر محايد و سه مجموعة غير خالية ولتكن قه (سه ، ح) الحلقة المكونة من كل الاقترانات من سه الى ح بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب النقطي (انظر التمرين ٣,١ - ٦). عين هل اي من الاقترانات التالية التي مجالها قه (سه ، ح) اقتران محافظ ام لا.

اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً فجد نواة ϕ وصورة ق (سه ، ح) بالنسبة الى ϕ .

أ. $\phi_أ$: قه (سه ، ح) ← ح معرف بالصيغة $\phi_أ$ (ق) = ق (أ)
لكل ق $\in$ قه (سه ، ح) وحيث يكون أ $\in$ سه ثابتاً .

ب. ϕ : قه (سه ، ح) ← قه (سه ، ح) معرف بالصيغة
ϕ (ق) = ق^٢ لكل ق $\in$ ق (س ، ح)

حـ. لتكن ق$_١$ $\in$ قه (سه ، ح) اقتران له نظير ضربي ١/ق$_١$. عرف
ϕ : قه (سه ، ح) ← قه (سه ، ح) بوضع
ϕ (ق) = ق$_١$ ق . ١/ق$_١$ لكل ق $\in$ قه (سه ، صه).

٥ - لتكن ل (R^٢) المجموعة المكونة من كل الاقترانات الخطية
ق : R^٢ ← R^٢ (حيث ق $\in$ ل (R^٢) معرف بالصيغة
ق(س ، ص) = (أس + ب ص ، حـ س + د ص)
لبعض الاعداد الحقيقية الثابتة أ ، ب ، حـ ، د) . فبعمليتي الجمع النقطي وتركيب الاقترانات تكون ل (R^٢) حلقة بعنصر محايد (انظر التمرين ٣,١ - ٧).
برهن ان ل (R^٢) تكون متشاكلة (حلقياً) مع الحلقة م$_٢$(R).●

٦ - برهن انه اذا كانت ح حلقة وكان ϕ : م$_٢$ (R) ← ح اقتراناً محافظاً يحقق ϕ (ع) $\neq$ ٠ لبعض ع $\in$ م$_٢$(R) فان ϕ (سه) $\neq$ ٠ لكل سه $\in$ م$_٢$ (R) . ●

٧ - لتكن ح حلقة بعنصر محايد ١ ولتكن حَ حلقة و ϕ : ح ← حَ اقتراناً محافظاً.
برهن انه اذا كانت ϕ (١) = ٠ ، فان نو (ϕ) = ح (اي ϕ (ر) = ٠ لكل ر $\in$ ح).

٨. لتكن ح و حَ حلقتين و ϕ : ح ← حَ اقتراناً محافظاً . برهن العبارات التالية :

أ. اذا كان ϕ اقتراناً شاملا من ح الى حَ وكانت ح تبديلية فتكون حَ تبديلية (انظر المسألة ٢١ لوضع مثال ينتقض العبارة اذا حذف الشرط ان ϕ اقتران شامل).

ب. اذا كانت ϕ واحداً لواحد (ولكن ليس من الضروري ان تكون شاملة) و حَ تبديلية فتكون ح تبديلية .

حـ. اثبت بمثال انه اذا لم يكن ϕ واحداً لواحد فيمكن ان تكون حَ تبديلية في حين أن ح لا تكون تبديلية.

٩ . لتكن (ح ، + ، ·) حلقة بعنصر محايد ١ ولتكن (حَ ، + ، ·) حلقة.

ليكن ϕ اقتراناً محافظاً شاملا من ح الى حَ. برهن العبارات التالية :

أ. للحلقة حَ عنصر محايد ضربي وَ = ϕ (١).

ب. اذا كانت ر لها مظير ضربي في ح فان ϕ (ر) لها نظير ضربي في حَ.

ما هو نظير ϕ (ر) ؟

١٠ . ليكن ϕ اقتراناً محافظاً من حلقة ح الى حلقة حَ.

برهن العبارات التالية :

أ. اذا كانت صهَ مثالية في حَ . فالصورة العكسية

ϕ^{-1} (صهَ) = {ر : ر ∈ ح و ϕ (ر) ∈ صهَ} تكون مثالية في ح .

(انظر التمرين ٢,٤ - ١٤).

ب. اذا كان ϕ اقتراناً شاملا من ح الى حَ و صه مثالية في ح فمجموعة الصورة ϕ (صه) تكون مثالية في حَ . و يمكن عمل عبارات مشابهة للمثاليات اليمنى واليسرى.

٣,٥ الحلقات الحدودية

هل هناك طرق للبدء بحلقة ج بعنصر محايد وبناء حلقات اخرى تحتوي على ج؟ وكتوضيح لحل هذا السؤال، لنعتبر الحلقة Q واي عدد غير نسبي α. فكل من Q و α محتواة في الحلقة R. لنجد اصغر حلقة جزئية $Q[\alpha]$ تحتوي كلا منها Q وα. ونعني «باصغر حلقة جزئية» ان تكون كل حلقة جزئية من R تحتوي على Q وα تحتوي ايضاً على $Q[\alpha]$.

مسألة :

لتكن صه اي حلقة جزئية من R التي تحتوي على كل من Q و α.

أ. وضح لماذا يجب ان تكون كل العناصر التالية في صه : α، α^2، α^3، α^r، حيث ر اي عدد صحيح موجب ، 3α، $-\alpha^4$ و $2\alpha^4 + (-\frac{4}{5})\alpha^3 + 4\alpha^2 - \frac{3}{7}$.

ب. اثبت ان صه يجب ان تحتوي على كل التعابير التي تأخذ الصيغة
$$أ_ن \alpha^ن + أ_{ن-1}\alpha^{ن-1} + \dots + أ_1\alpha + أ_0$$
حيث ن تكون اي عدد صحيح غير سالب و $أ_0$ ، $أ_1$، ... ، $أ_ن \in Q$.
اعط عدة امثلة محددة لعناصر بهذه الصيغة .

$$\text{لتكن } Q[\alpha] = \left\{ \sum_{ر=0}^{ن} أ_ر\alpha^ر : ن \in Z^+ \cup \{0\}، أ_ر \in Q ، 0 \leq ر \leq ن \right\}$$

ان امثلة خاصة على عناصر في $Q[\alpha]$ معطاة في الجزأين أ و ب.

تحقق ان $Q[\alpha]$ تكون حلقة جزئية من R ومن ثم فانها اصغر حلقة جزئية تحتوي على كل من Q و α.

ولننظر الآن في بعض الامثلة المحددة لهذه الحلقة الجزئية.

مسألة :

لتكن $\alpha = \sqrt{2}$. في هذه الحالة يمكننا ان نحصل على وصف صريح لـ $Q[\sqrt{2}]$.

اثبت ان

$$Q[\sqrt{2}] = \{أ + ب\sqrt{2} : أ ، ب \in Q\}$$

(انظر التمرين ١,٢-٥ و ١,٢-٦) لاحظ انه في $Q[\sqrt{2}]$،

$أ + ب\sqrt{2} = حـ + د\sqrt{2}$ اذا وفقط اذا كان أ = حـ ، ب = د

مسألة :

وكتوضيح آخر للحلقة $Q[\alpha]$ ، لتكن $\alpha = \sqrt[4]{2}$ فتكون $Q[\sqrt[4]{2}]$ اصغر حلقة جزئية من R التي تحتوي على كل من Q و $\sqrt[4]{2}$.

اثبت ان $Q[\sqrt[4]{2}] = \{ a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt[4]{2} + a_3\sqrt[4]{8} : a_r \in Q ،\ r = 0 ، 1 ، 2 ، 3 \}$

وهكذا فان $Q[\sqrt{2}] \subseteq Q[\sqrt[4]{2}]$.

لقد لاحظنا في المسألتين ٢٧ و ٢٨ أن كلا من العددين $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{2}$ له الخاصية ان احدى قواه هي عنصراً للحلقة Q . وهذا لا ينطبق على العدد π .
وزيادة على ذلك فتخبرنا نظرية الاعداد انه لكل عدد صحيح موجب ن ولكل مجموعة $\{a_0 ، a_1 ، \dots ، a_n\} \subseteq Q$

حيث $a_n \neq 0$ فيكون العدد
$a_n \pi^n + a_{n-1}\pi^{n-1} + \dots + a_1\pi + a_0$.
غير نسبي . في ضوء هذا نعتبر الحلقة $Q[\pi]$ لاحظ ان
$Q[\pi] = \{ \sum_{r=0}^{n} a_r \pi^r : n \in Z^+ \cup \{0\} ، a_r \in Q ، 0 \leq r \leq n \}$.
يكون العنصران $\sum_{r=0}^{n} a_r \pi^r$ و $\sum_{r=0}^{m} b_r \pi^r$ في الحلقة $Q[\pi]$ متساويين
اذا وفقط اذا تساوت معاملات القوى π المتساوية . وبهذا تكون المعاملات في Q،
$\sum_{r=0}^{n} a_r \pi^r = \sum_{r=0}^{m} b_r \pi^r$ اذا وفقط اذا كان كان $m = n$ و $a_r = b_r$
حيث $r = 0 ، 1 ، 2 ، \dots ، n$.
اترك برهان الحقيقة للتمرين ٢ . وهذا النوع من المساواة حداً حداً ، لا يكون صحيحاً للحلقات

$Q[\sqrt{2}]$ او $Q[\sqrt[4]{2}]$.

مسألة :

اعط مثالا لتعبيرين $\sum_{r=0}^{n} a_r (\sqrt{2})^r$ و $\sum_{r=0}^{m} b_r (\sqrt{2})^r$

بحيث يكونان متساويين في $Q[\sqrt{2}]$ ولكن $a_r \neq b_r$ بعض قيم ر

مسألة :

ا. بما ان $Q[\pi]$ حلقة جزئية من R ، فنحصل على الخاصتين التجميعية والتبديلية للجمع . باستخدام هاتين الخاصتين جد المعامل لِـ $\pi^{\text{هـ}}$ في الجمع
$\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\, \pi^{\text{ر}} + \sum_{\text{ر}=0}^{\text{م}} \text{ب}_{\text{ر}}\, \pi^{\text{ر}}$ حيث $\text{م} \leqq \text{ن}$.

ب. عند ضرب عنصرين من $Q[\pi]$ تستطيع استخدام قانون توزيع لنحصل على التعبير التالي :

$$\left(\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\, \pi^{\text{ر}}\right)\left(\sum_{\text{ك}=0}^{\text{م}} \text{ب}_{\text{ك}}\, \pi^{\text{ك}}\right) = \left(\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\, \pi^{\text{ر}}\right) \text{ب}_{\text{م}}\, \pi^{\text{م}}$$

$$+ \left(\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\, \pi^{\text{ر}}\right) \text{ب}_{\text{م}-1}\, \pi^{\text{م}-1} + \dots$$

$$+ \left(\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\, \pi^{\text{ر}}\right) \text{ب}_{1}\, \pi + \left(\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\, \pi^{\text{ر}}\right) \text{ب}_{0}.$$

في هذا الضرب ما هو معامل $\pi^{\text{ن}+\text{م}}$ ؟ ، معامل π^{0} ؟ معامل $\pi^{\text{م}+\text{ن}-1}$ ؟
للاجابة على السؤال كيف نستطيع بناء حلقة اوسع من حلقة معطاة ، لنعمم الحلقة $Q[\pi]$. لتكن ح حلقة بعنصر محايد ولتكن س ترمز لعنصر لا ينتمي الى ح. فاذا كانت س و ح كلتاهما محتواة في حلقة اوسع فأي تعبير يأخذ الصيغة $\text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}} + \text{أ}_{\text{ن}-1}\text{س}^{\text{ن}-1} + \dots + \text{أ}_{1}\text{س} + \text{أ}_{0}$.
الذي معاملاته $\text{أ}_{\text{ر}} \in$ ح يكون عنصراً في هذه الحلقة الاكثر اتساعاً. ولكننا لا نفترض ان كلا من س و ح محتواة في حلقة اوسع. وبدلا عن ذلك تكون التعبيرات
$\text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}} + \text{أ}_{\text{ن}-1}\text{س}^{\text{ن}-1} + \dots + \text{أ}_{1}\text{س} + \text{أ}_{0}$.
حيث ن يكون عدداً غير سالب و $\text{أ}_{\text{ر}} \in$ ح ، ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ن .
ونشترط ان للعنصر س الخاصية التالية : تكون الصيغتان
$\text{أ}_{0} + \text{أ}_{1}\text{س} + \dots + \text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{ب}_{0} + \text{ب}_{1}\text{س} + \dots + \text{ب}_{\text{م}}\text{س}^{\text{م}}$ متساويتين حيث
$\text{أ}_{\text{ر}}$ ، ب $\in$ ح حيث ر = ٠ ، ١ ، ... ، ن و ك = ٠ ،١ ،....،م
اذا وفقط اذا كان م = ن و $\text{أ}_{\text{ر}} = \text{ب}_{\text{ر}}$ لجميع ر = ٠،١،....،ن. ويسمى عنصر س بهذه الخاصية غير معين على ح.

وباستخدام Q [٣٦]كدليل يمكننا ان نعرف الآن مجموعة تحتوي على كل من س وعناصر ح.

تعريف :

لتكن (ح ، + ، ٠) حلقة بعنصر محايد ولتكن س غير معينة على ح .

ترمز ح [س] بالمجموعة المكونة من كل الصيغ ع: $أ_ن$ $س^ن$ + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + ... + $أ_١$ س + $أ_٠$.

حيث ن عدد صحيح غير سالب و $أ_ر \in$ ح ، ر = ٠، ١، ٢، ...، ن.

نعرف ١. س = س ولأي أ $\in$ ح نعرف $أس^٠$ لتكون العنصر أ. وتسمى $أ_ر$ في الصيغة $أ_ر س^ر$ بمعامل $س^ر$. وتسمى الصيغة التي تأخذ الشكل ع بالحدودية في س ذات المعاملات في ح.

وبذا فان ح [س] تكون المجموعة المكونة من كل الحدوديات في س ذات المعاملات في ح.

مسألة :

أ. اعط عدة امثلة على عناصر من Z [س].

ب. اعط عدة امثلة على عناصر من $Z_٤$[س].

لتكن (ح ، + ، ٠) حلقة بعنصر محايد . فتسمى الحدودية

(٠) $س^ن$ + (٠) $س^{ن-١}$ + ... + (٠) س + (٠)

بالحدودية الصفرية ونرمز لها عادة بالرمز (٠) .

ولكل حدودية في ح [س] - {٠} يوجد اكبر عدد صحيح غير سالب م بحيث يكون معامل $س^م$ مخالفاً للصفر . ويسمى هذا العدد الصحيح م درجة الحدودية ويسمى المعامل $أ_م$ لـ $س^م$ بالمعامل الرئيسي للحدودية.

والحدودية الصفرية درجتها حسب التعريف صفر . واذا كان للحدودية ق(س) $\in$ ح [س] الدرجة م فانه يمكننا كتابة

ق(س) = $أ_ن$ $س^ن$ + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ +...+ $أ_م$ $س^م$ + $أ_{م-١}$ $س^{م-١}$ +...+ $أ_١$ س + $أ_٠$.

حيث ن > م علماً بان $أ_ر$ = ٠ لكل ر = م + ١، ...، ن فمثلا

٢$س^٢$ + ١ = ٠$س^٤$ + ٠$س^٣$ + ٢$س^٢$ + ٠ س + ١.

وبذا فيمكن اعتبار ان لحدوديتين نفس العدد من الحدود مع ان درجتهما يمكن ان تكونان مختلفتين . ومن ناحية اخرى فعندما نعمل بحدوديات معينة نجد عادة من الملائم ان نحذف الحدود ذات المعاملات الصفرية.

تعريف :

حاصل الجمع ق(س) + د (س) لحدوديتين

$$\text{ق}(\text{س}) = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\,\text{س}^{\text{ر}} \quad ، \quad \text{د}(\text{س}) = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{ب}_{\text{ر}}\,\text{س}^{\text{ر}}$$

في ح [س] يعرف بالحدودية

$$\text{ق}(\text{س}) + \text{د}(\text{س}) = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} (\text{أ}_{\text{ر}} + \text{ب}_{\text{ر}})\,\text{س}^{\text{ر}}$$

$$= (\text{أ}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}})\,\text{س}^{\text{ن}} + (\text{أ}_{\text{ن}-1} + \text{ب}_{\text{ن}-1})\,\text{س}^{\text{ن}-1} + \dots + (\text{أ}_0 + \text{ب}_0)$$

وبهذا فان معامل $\text{س}^{\text{ر}}$ في الجمع ق(س) + د(س) يكون الجمع المعاملات $\text{س}^{\text{ر}}$ في ق(س) ود (س). تذكر انه اذا كانت درجة ق(س) م≥ن فان $\text{أ}_{\text{ر}} = 0$ لكل ر = م + ١ ، … ، ن وبالمثل بالنسبة الى د (س).

مسألة :

أ. في Z (س) جد حاصل جمع الحدوديتين

$\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^3 + 1$ ، $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 + 1$

ب. في Z_4 [س] جد حاصل جمع الحدوديتين

$\text{ق}(\text{س}) = 2_4\text{س}^3 + 3_4\text{س} + 2_4$ و $\text{د}(\text{س}) = 2_4\text{س}^3 + 2_4\text{س}^2 - 3_4$

تعريف :

حاصل ضرب حدوديتين $\text{ق}(\text{س}) = \text{أس}^{\text{ن}}$ و $\text{د}(\text{س}) = \text{ب}\,\text{س}^{\text{م}}$ في ح [س] هو الحدودية

له $\text{ق}(\text{س})\,\text{د}(\text{س}) = \text{أب}\,\text{س}^{\text{م}+\text{ن}}$

ويعرف حاصل ضرب حدوديتين $\text{ق}(\text{س}) = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\,\text{س}^{\text{ر}}$

و $\text{د}(\text{س}) = \text{ب}\,\text{س}^{\text{م}}$ بالحدودية

صه $\text{ق}(\text{س})\,\text{د}(\text{س}) = \text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}}(\text{ب}\text{س}^{\text{م}}) + \text{أ}_{\text{ن}-1}\text{س}^{\text{ن}-1}(\text{ب}\text{س}^{\text{م}}) + \dots + \text{أ}_1\text{س}(\text{ب}\text{س}^{\text{م}}) + \text{أ}_0\text{ب}\text{س}^{\text{م}}$.

واخيراً نعرف حاصل ضرب حدوديتين عامتين بالحدودية

ضه $\quad \text{ق}(\text{س})\ \text{د}(\text{س}) = \left(\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\text{س}^{\text{ر}}\right)\left(\sum_{\text{ى}=0}^{\text{م}} \text{ب}_{\text{ى}}\text{س}^{\text{ى}}\right)$

$$= \left(\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\text{س}^{\text{ر}}\right)\text{ب}_{\text{م}}\text{س}^{\text{م}} + \left(\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\text{س}^{\text{ر}}\right)\text{ب}_{\text{م}-1}\text{س}^{\text{م}-1} = \dots$$

$$+ \left(\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\text{س}^{\text{ر}}\right)\text{ب}_1\text{س} + \left(\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\text{س}^{\text{ر}}\right)\text{ب}_0$$

لاحظ ان تعريف حاصل الضرب ذو ثلاث مراحل . وفي حساب حاصل ضرب حدوديتين يبدأ الطالب بالتعريف ضه وبعدها يطبق تعريف صه واخيراً تعريف له.

مسألة : ٣٦

أ. جد حاصل الضرب لازواج الحدوديات في المسألة ٣٤. ما درجة حاصل الضرب في كل حالة ؟

ب. اذا كانت (ح، + ، ٠)حلقة بعنصر محايد فاوجد حاصل الضرب للحدوديتين في ح [س].

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}_2\text{س}^2 + \text{أ}_1\text{س} + \text{أ}_0$ و $\text{د}(\text{س}) = \text{ب}_3\text{س}^3 + \text{ب}_2\text{س}^2 + \text{ب}_1\text{س} + \text{ب}_0$

اكتب حاصل الضرب بالصيغة $\sum \text{ح}_{\text{ر}}\text{س}^{\text{ر}}$. اذا كانت $\text{أ}_2\text{ب}_3 \neq 0$ فما درجة ق(س) د(س)؟

مسألة : ٣٧

أ. لتكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \sum \text{أ}_{\text{ر}}\text{س}^{\text{ر}} \quad \text{و}\quad \text{د}(\text{س}) = \sum_{\text{ى}}^{\text{م}} \text{ب}_{\text{ى}}\text{س}^{\text{ى}}$$

جد معاملات $\text{س}^{\text{م}+\text{ن}}$ ، $\text{س}^{\text{م}+\text{ن}-1}$، س و س^0 . في حاصل الضرب ق(س) د(س).

ب. بين ان $\text{أ}_{\text{ر}}\text{ب}_{\text{ر}}$ يظهر في معامل $\text{س}^{\text{ك}}$ في حاصل الضرب ق(س) د(س) اذا وفقط اذا كان ر + ى = ك او ما يكافئه ، ى = ك − ر. وبعد ذلك بين ان معامل $\text{س}^{\text{ك}}$ في حاصل الضرب ق(س) د(س) هو ــــــــــــ .

مسألة : ٣٨

أ. لتكن ق(س) ، د(س) حدوديتين درجاتهما ن و م على الترتيب في ح [س] ولتكن ن $\leq$ م

فان درجة مجموعهما $ق_ر$(س) + د (س) لا تزيد عن ــــــــــ ، لان درجة حاصل الضرب $ق_ر$(س) د (س) لا تزيد عن ــــــــــ . اكمل العبارات وبرهن عليها.

ب. بين بمثال ان التساوي يمكن ان لا يتحقق في كلا الحالتين.

حـ. اعط مثال على حدوديات يكون لحاصل جمعها وحاصل ضربها الدرجة العظمى التي ذكرت اعلاه.

صرنا الان على استعداد لبرهنة ان ح[س] تكون حلقة تحتوي على الحلقة الاصلية فعلا

مسألة : ٣٩

لتكن (حـ، + ، ٠) حلقة ذات عنصر محايد فتكون (ح (س) ، + ، ٠) حلقةبعنصر محايد وتدعى الحلقة الحدودية على ح . وزيادة على ذلك تكون ح حلقة جزئية من ح [س].

وفي المسألة التالية جزء من برهان النظرية وسيأتي اكمال البرهان في التمارين .

مسألة : ٤٠

برهن اولا ان (ح [س] ، +) زمرة تبديلية . (استخدم رمز الجمع $\sum_{ر=0}^{ن} أ_ر س^ر$)

ان الخاصيتين التجميعية والتوزيعية قد تركتا للتمرينين ٣ و ٤.

جد عنصراً محايداً للضرب في حـ[س] . وبعد ذلك برهن ان حـ تكون حلقة جزئية فعلا من حـ[س].

نظرية :

لتكن (حـ، + ، ٠) حلقة . فتكون ح[س]حلقة تبديلية اذا وفقط اذا كانت ح حلقة تبديلية.

يترك برهان هذه النظرية للتمرين ٥.

تمارين :

١ ـ اي من التالية تكون حلقة جزئية من Z [س] ؟ علل اجاباتك.

أ. $\{أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + \dots + أ_1 س : أ_ر \in Z ، ن \in Z^+\}$.

وبما انه من الممكن ان تتغير في Z^+ فتكون هذه المجموعة مكونة من كل الحدوديات الثابتة أصفار.

ب. $\{أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + \dots + أ_4 س^4 : أ_ر \in Z ، 4 \leq ر \leq ن ، ن \geq 4\}$

حـ $\{أ_ن س^ن + \dots + أ_1 س + أ_0 : أ_ر \in Z ، ر = 0، \dots، 5\}$

د. $\{$(س - أ) قـ (س) : قـ(س) $\in$ Z [س] حيث أ $\in$ Z ثابت ان هذه المجموعة مكونة من كل الحدوديات في Z [س] التي تكون مضاعفات س - أ.

٢ - برهن انه في الحلقة Q [$\sqrt{٣}$]

$$\sum_{ر=٠}^{ن} أ_ر \sqrt{٣}^{ر} = \sum_{ل=٠}^{م} ب_ل \sqrt{٣}^{ل}$$ حيث م و ن عددان صحيحان غير سالبين و أ$_ر$، ب$_ل$ $\in$ Q لكل ٠ $\leq$ ر $\leq$ ن ، ٠ $\leq$ ل $\leq$ م ، اذا وفقط اذا كان م = ن (أ$_ر$ = ب$_ر$ لكل ر = ٠، ١، ...، ن.

٣ - لتكن (ح ، + ، ٠) حلقة بعنصر محايد . برهن ان الضرب يكون تجميعياً في ح [س].

٤ - لتكن (ح، + ، ٠) حلقة بعنصر محايد . برهن ان الضرب يكون توزيعياً على الجمع في ح [س].

٥ - برهن النظرية ٤١ .

٦ - برهن على ان Z$_ن$[س] تكون حلقة لا نهائية لكل عدد صحيح ن $\geq$ ٢.

٧ - برهن انه اذا كانت ح احدى الحلقات Z ، Q أو R فلكل قـ(س) ، هـ (س) $\in$ ح [س] - $\{٠\}$ تكون درجة حاصل الضرب قـ(س) هـ (س) تساوي حاصل جمع درجتي قـ(س) و هـ (س).

وبالرمز فلو رمزنا لدرجة الحدودية هـ (س) بالرمز در(هـ (س)) فان

در (قـ(س) هـ (س)) = در (قـ(س)) + در (هـ (س))

حيث قـ(س) و هـ (س) حدوديتان غير صفريتين في الحلقات Z [س] أو Q [س] أو R [س].

ما هي الخاصية الخصوصية للحلقات Z ، Q أو R التي استعملتها في برهانك ؟

٨ - أ. وصفنا في المسألة ٢٦ اصغر حلقة جزئية من R تحتوي في كلا من Q وعدد غير نسبي α. وبشكل عام لتكن ح اي حلقة جزئية من خلقة حَ بعنصر محايد و α اي عنصر في حَ - ح . اثبت انه يوجد اصغر حلقة جزئية ح [α] من حَ بحيث تحتوي على ح و α وصف العناصر في ح [α].

ب. لتكن ح = Q [$\sqrt{٢}$] . صف العناصر في ح [$\sqrt{٣}$].

هذه هي الحلقة Q [$\sqrt{٢}$] مضافاً لها $\sqrt{٣}$ وتكتب عادة Q [$\sqrt{٢}$، $\sqrt{٣}$]

٩ - أ. ليس للمعادلة $أ^٢ - ٢ = ٠$ حل في Q . اثبت انه يوجد حل للمعادلة في $Q[\sqrt{٢}]$.

ب. اثبت ان لكلا المعادلتين $أ^٢ - ٢ = ٠$ و $أ^٤ - ٢ = ٠$ حلولا في $Q[\sqrt[٤]{٢}]$.

جـ لتكن ج حلقة جزئية من R ذات عنصر محايد . افترض انه ليس للمعادلة $\alpha^{ن} - أ = ٠$ حل في ج ، حيث $أ \in ج^+ = \{س : س \in ح\}$ ولتكن $\alpha = \sqrt[ن]{أ}$ رمزاً يمثل حلاً للمعادلة ابن حلقة بحيث يكون للمعادلة حل فيها وصف عناصر هذه الحلقة.

١٠*-ليكن α عدداً حقيقياً ليس موجوداً في Z . ولتكن

$$Z[\alpha] = \{\sum أ_ر \alpha^ر : أ_ر \in Z ، ن \in Z^+ \cup \{٠\}\}$$

أ. برهن ان $Z[\alpha]$ تكون حلقة جزئية من R .

ب. برهن انه اذا كانت ص حلقة جزئية من R بحيث تحتوي على Z و α فان $Z[\alpha] \subseteq$ ص (ولهذا فان $Z[\alpha]$ تكون اصغر حلقة تحتوي على Z و α).

جـ برهن ان $Z[\alpha]$ تكون حلقة جزئية فعلا من $Q[\alpha]$.

د. برهن انه اذا كانت جـ $\in Z^+$ و $\alpha = \sqrt{جـ} \notin Z$ فان Z

$$Z[\alpha] = \{أ + ب\sqrt{جـ} : أ ، ب \in Z\}$$

١١ ـ لتكن جـ $\in Q$ عدد يحقق $\sqrt{جـ} \notin Q$.

أ. برهن ان $Q[\sqrt{جـ}] = \{أ + ب\sqrt{جـ} : أ ، ب \in Q\}$

ب. برهن انه اذا كانت $أ + ب\sqrt{جـ} \in Q[\sqrt{جـ}] - \{٠\}$

فان $(أ + ب\sqrt{جـ})^{-١}$ يكون عنصراً في $Q[\sqrt{جـ}]$.

١٢ .أ. لتكن (ج ، + ، ٠) حلقة ذات عنصر محايد ولتكن س غير معينة على ج . لقد بينا الحلقة ج [س] والآن لتكن ص غير معينة على ج [س] وتبديلية مع س . صف العناصر في ج [س] [ص]. نرمز لهذه الحلقة عادة بالرمز ج [س ، ص].

ب. صف طريقة لبناء الحلقة ج $[س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن]$

المكونة من الحدوديات في ن من العناصر غير المعينة $س_١ ، س_٢ ،... ، س_ن$ التي تتبادل بعضها مع بعض . اعط عدة امثلة لعناصر من ج $[س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن]$

ج -

٣,٦ الحلقات الكاملة

رأينا حتى الآن خصائص متباينة للضرب في الحلقات المختلفة . وتفحصنا حلقات عامة يمكن للضرب فيها ان يكون فقط تجميعياً وتوزيعي على الجمع . ومر معنا ايضاً حلقات لها عنصر محايد ضربي وحلقات يكون فيها الضرب تبادلياً . ونركز الآن انتباهنا على خاصية الاختزال للضرب في حلقة. وهذه الخاصية تتحقق في بعض الحلقات وتفشل فشلا ذريعاً في حلقات اخرى وسنتعامل خلال هذا البند مع حلقات غير تافهة (اي حلقات باكثر من عنصر واحد).

مسألة :

اعتبر الخاصيتين التاليتين في حلقة ما ح :

أ. لكل أ ، ب ، حـ ∈ ح اذا كانت أحـ = بحـ و حـ ≠ ٠ فان أ = ب .

ب. لكل س ، ص ∈ ح اذا كانت س‌ص = ٠ فان س = ٠ أو ص = ٠

تحقق فيما اذا كانت كل من هاتين الخاصيتين صحيحة في $Z_٦$.

مسألة :

برهن النظرية التالية

نظرية :

لتكن (ح ، + ، ٠) حلقة . فتكون العبارتان التاليتان متكافئتين (اي ان كليهما صحيحة او كليهما خطأ).

أ. لكل أ ، ب ، حـ ∈ ح اذا كانت أحـ = ب حـ و حـ ≠ ٠ فان أ = ب.

ب. لكل س ، ص ∈ ح اذا كانت س‌ص = ٠ فان س = ٠ أو ص = ٠ ▲

في اي حلقة معطاة ح تضمن النظرية ان العبارتين أ و ب متكافئتان لكنها لا تضمن صحة العبارتين.

ويمكن كتابة النظرية التالية بالصيغة التالية :

نظرية :

لتكن (ح، + ، ٠) حلقة . فان العبارتين التاليتين متكافئتان :

أ. لكل أ ، ب ، حـ ∈ ح اذا كانت أحـ = بحـ و حـ ≠ ٠ فان أ = ب

ب. لكل س ، ص ∈ ح اذا كانت س ≠ ٠ و ص ≠ ٠ فان ــــــــــ

اذا لم تتحقق العبارة ب في حلقة معطاة فهناك اسم خاص تطلقه على تلك العناصر التي كانت السبب في ذلك .

تعريف :

لتكن (ح، + ، ·) حلقة . فاذا كانت س ، ص ∈ ح و س ≠ · و ص ≠ · ولكن س ص = ·
فتسمى س و ص قواسم الصفر او قواسم صفرية.

مسألة :

جد القواسم الصفرية في $Z_{٦}$ ، في $Z_{٥}$.

اذا تحقق تكافؤ العبارتين أ و ب في النظرية ٤٣ (أو أَ ، بَ في ٤٣َ) في حلقة تبديلية ذات عنصر محايد فتعطي الحلقة اسماً خاصاً.

تعريف :

الحلقة الكاملة (ح، + ، ·) هي حلقة تبديلية ذات عنصر محايد بحيث يتحقق قانون الاختزال للضرب اي انه لكل أ ، ب ، حـ ∈ ح اذا كانت أحـ = ب حـ و حـ ≠ · فان أ= ب.

مسألة : ٤٣

اي من النظم التالية تكون حلقات كاملة مع العمليات العادية ؟
علل اجاباتك . انظر الملحق ٣ عن حصائص الاعداد الحقيقية .

أ. (Z ، + ، ·)

ب. (Q ، + ، ·)

حـ (R ، + ، ·)

د. ($Z_{٦}$ ، + ، ·)

مسألة : ٤٤

لتكن $Q[\sqrt{٢}] = \{$ أ + ب $\sqrt{٢}$ ، أ ، ب ∈ Q $\}$.

رأينا ان $Q[\sqrt{٢}]$ تكون حلقة جزئية من R بالنسبة للعمليتين العاديتين في R.

برهن او انف ان ($Q[\sqrt{٢}]$ ، + ، ·) تكون حلقة كاملة.

تذكر ان العناصر في $Q[\sqrt{٢}]$ كلها اعداد حقيقية.

لقد لاحظنا انه اذا لم تتحقق العبارة ب من النظرية ٤٣ فيجب ان يكون للحلقة قواسم صفرية . وبما ان هذه العبارة مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بالاختزال للضرب **فيقودنا هذا الى ان نسأل** السؤال التالي :

مسألة : ٤٥

هل يمكن لحلقة كاملة (ك ، + ، ·) ان يكون لها قواسم صفرية ؟ علل اجابتك .
اعد ذكر التعريف لحلقة كاملة بدلالة قواسم الصفر بدلا من الاختزال.

لتعيين قيم ن ∋ Z^+ التي تكون فيها $Z_ن$ حلقة كاملة لنكتشف اولا احتمالات وجود قواسم الصفر في $Z_ن$.

مسألة : ٤٦

اثبت انه اذا كانت ن = رم حيث ن ، ر ، م اعداد صحيحة اكبر من ١ فان $ر_ن$ و $م_ن$ تكونان قواسم للصفر في الحلقة $Z_ن$ (يجب ان تبرهن ان كلا من $ر_ن$ و $م_ن$ لا يكون العنصر الصفري في $Z_ن$)

مسألة :

اكمل العبارة التالية وبرهنها : تكون الحلقة $Z_ن$ حلقة كاملة اذا وفقط اذا كانت ن ــــــــــ.

تمارين :

١ ـ أ. هل تتحقق خاصية الاختزال للضرب (العبارة ا في المسألة ٤٣) في ($م_٢$(R) ، + ، ٠) ؟ لماذا ؟

ب. هل تكون $م_٢$(R) حلقة كاملة ؟ لماذا ؟

٢ ـ جد حلقة جزئية من $م_٢$(R) تكون حلقة كاملة.

٣ ـ أ. برهن انه اذا كانت (ح ، + ، ٠) حلقة وكان س ∋ ح قاسماً للصفر فلا يوجد لهذا العنصر نظير ضربي .

ب. هل عكس العبارة صحيح ؟ اي اذا كانت س ∋ ح ليس لها نظير ضربي فهل من الضروري ان يكون س قاسماً للصفر ؟

٤ ـ لتكن ك حلقة كاملة . فاذا كانت ص حلقة جزئية من ك ، فهل من الضروري ان تكون حلقة كاملة ؟ علل اجابتك.

٥ ـ لتكن ق(R ، R) الحلقة المكونة من كل الاقترانات من R الى نفسها بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب النقطي .

(انظر التمرين ٣,١ - ٦ . اثبت ان ق (R ، R) لا يكون حلقة كاملة).

٦ ـ هل تكون Z [س] ، الحلقة المكونة من الحدوديات على Z في عنصر غير معين س ، حلقة كاملة ؛ علل اجابتك.

٧ ـ برهن انه اذا كانت (ح ، + ، ٠) حلقة كاملة واذا كانت ق(س) . هـ (س) ∋ ح [س] - {٠} فتكون درجة حاصل الضرب ق (س) هـ (س) هو حاصل جمع درجتي ق(س) و هـ (س) وبالرموز

در (ق(س) هـ (س)) = در (ق(س)) + در (هـ (س))

٨ ـ لتكن (ح ، + ، ٠) حلقة ذات عنصر محايد . برهن ان ح [س] تكون حلقة كاملة.

اذا وفقط اذا كانت ح حلقة كاملة

٩*- لتكن ح و ح َ حلقتين وليكن ϕ : ح ← ح َ تشاكلا.

اثبت انه اذا كانت ح حلقة كاملة فتكون ح َ حلقة كاملة .

و يكون العكس صحيحاً ايضاً لانه اذا كان ϕ تشاكلا فيكون الاقتران العكسي ϕ^{-1} تشاكلا . (انظر التمرين ٢,٥ - ١١).

١٠*-برهن انه اذا كانت حـ $\in Z^+$ و $\sqrt{حـ} \notin Z$ فتكون الحلقة

$Z[\sqrt{حـ}] = \{ ا + ب\sqrt{حـ} : ا ، ب \in Z \}$ حلقة كامله.

١١*-لقد واجهت سابقاً الاعداد المركبة ا + ب ت حيث ا ، ب $\in R$. ان الحرف ت يرمز لما يسمى بالعدد التخيلي الذي يحقق ت^2 = -١.

تذكر ان

(ا + ب ت) + (حـ + د ت) = ____________ و

(ا + ب ت) . (حـ + د ت) = ____________.

ان الفكرة في المسألة التالية هي بناء المجموعة المكونة من الاعداد المركبة من المجموعة المألوفة R^2 .

لتكن $C = R^2$ = $\{$(ا ، ب) : ا ، ب $\in R\}$. فمن تعريف الضرب الديكارتي فان (ا ، ب) = (حـ ، د) اذا وفقط اذا كان ا = حـ و ب = د.

لقد لاحظنا ان الجمع لعنصرين (ا ، ب) و (حـ ، د) من C يعرف بالشكل :

(ا ، ب) + (حـ ، د) = (ا + حـ ، ب + د)

وبهذا الجمع تكون C زمرة تبديلية . (انظر التمرين ١,١ - ٤ و ١,٢-١٠).

و يعرف حاصل ضرب العنصرين (ا ، ب) و (حـ ، د) في C بان (ا ، ب) . (حـ ، د) = (احـ - ب د ، اد + ب حـ).

ا. برهن ان (C ، + ، ·) تكون تبديلية ذات عنصر محايد.

ب. اثبت ان كل عنصر من C مخالف للصفر له نظير ضربي

حـ هل تكون (C ، + ، ·) حلقة كاملة ؟ علل اجابتك.

د. جد عنصراً (α، β) $\in C$ بحيث ان (α، β)^2 = (-١ ، ٠)

هـ برهن ان (R ، + ، ·) تكون متشاكلة مع حلقة جزئية من C مكونة من كل العناصر (ا ، ٠) حيث ا $\in R$.

٣,٧ الحقـول

رأينـا عـدة حـلـقـات تبديلية ذات عنصر محايد يكون فيها لكل عنصر غير الصفر نظير ضربي . هـذه الـحـلـقـات تـدعـى الـحـقـول . وفي هـذا البند نستخدم نظريـة الحقول في برهنة بعض النتائج المهمة والمفيدة في نظرية الاعداد.

ونناقش في نهاية البند لمحة تاريخية عن الحقول.

تعريف :

الـحـقـل (قر، + ، ·) هـو حـلـقـة تـبـديلية غير تافهة ، قر ذات عنصر محايد بحيث يكون لكل عنصر في قر مغاير للصفر نظير ضربي في قر.

مسألة :

اي من المجموعات التالية هي حقول بالنسبة للعمليتين العاديتين الجمع والضرب ؟ علل اجاباتك.

أ. R

ب. Q

حـ Z

د. $Z_{٥}$

هـ $Z_{٦}$

الـحلقة زمرة بالنسبة للجمع . فمتى تكون المجموعة المكونة من عناصر غير صفرية في حلقة زمرة بالنسبة للضرب ؟ تعطي النظرية التالية جواباً لهذا السؤال في الحالة التي تكون فيها الحلقة تبديلية.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن حـ حلقة تبديلية . فتكون حـ حقلا اذا وفقط اذا كانت حـ $-\{٠\}$ زمرة بالنسبة للضرب.

نـعـلـم ان كـل حـلـقـة كاملة هي حلقة . والمسألة التالية تكمل هذه السلسلة باثبات ان كل حقل هو حاقة كاملة.

مسألة :

أ. برهن انه اذا كان (ق ، + ، ·) حقلا فانه حلقة كاملة .

ب. هل كل حلقة كاملة هي حقل ايضاً ؟ علل اجابتك ببرهان أو باعطاء مثال على حلقة كاملة ليست حقلا.

هنالك عكس لمضمون المسألة ٥٥ أ عندما تكون الحلقة الكاملة منتهية . وهذا هو محتوى النظرية التالية :

مسألة :

اثبت النظرية التالية :

نظرية :

كل حلقة كاملة منتهية هي حقل : فاذا كانت (ق، + ، ٠) حلقة كاملة وكانت ق مجموعة منتهية تكون (ق، + ، ٠) حقلا .

عليك ان تبرهن ان لكل عنصر أ ∈ ق − {٠} نظيراً ضربياً ولعمل ذلك اعتبر المجموعة {أ ، أ^٢ ، أ^٣ ، ...} . هل يمكن ان تكون كل هذه العناصر مختلفة ؟

مسألة :

اكمل النظرية التالية و برهنها.

نظرية :

تكون الحلقة ($Z_ن$، + ، ٠) حقلا اذا وفقط اذا كانت ن ________ .

لقد لاحظنا في الزمرة (سه ، ٥) ان للمعادلة ٥أس = ب حلا وحيداً هو س = ________ في سه (البند ١,٣). ولكن قد لا يكون للمعادلة أس = ب أي حل في الحلقة ح. فمثلا للمعادلة ٢س = ٤ الحل الوحيد س = ٢ في Z ولكن ليس للمعادلة ٢س = ١ حل في Z .

ومن جهة اخرى ، اذا كانت أ ، ب ∈ Q و أ ≠ ٠ فللمعادلة

أس = ب حل وحيد س = ________ في Q . سترى في المسألة التالية انه اذا كانت ق حقلا يكون لكل معادلة خطية

أس = أ ، ب ∈ ق و أ ≠ ٠ ، حل في ق.

مسألة :

أ. برهن انه اذا كانت (ق، + ، ٠) حقلا و أ ، ب ∈ ق بحيث أ ≠ ٠
فللمعادلة أس = ب حل وحيد القيمة س في ق .

ب. برهن ان كل حلقة تبديلية ح ذات عنصر محايد تكون حقلا اذا وفقط اذا كان لكل أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ ٠
حل س ∈ ح ، للمعادلة أس = ب.

تعريف :

تكون المجموعة الجزئية صه من الحقل (ق، + ، ٠) حقلا جزئياً من ق اذا وفقط اذا كانت (صه ، + ، ٠) حقلا .

مسألة :

عرفنا ان المجموعة الجزئية ص من الحلقة ح تكون حلقة جزئية اذا وفقط اذا كان لكل أ ، ب $\in$ ص كل من أ-ب وأب في ص.

جد بالمقابل شرطاً لازماً وكافياً لان تصبح ص حقلا جزئياً من الحقل ق و برهن صحة اجابتك.

لقد رأينا ان كا حلقة غير تافهة ح تحتوي على الاقل على المثاليتين $\{0\}$، ح. و يمكن ايضاً بيان ان بعض الحلقات لا تكون حتى حلقات كاملة ليس لها مثاليات فعلية . (انظر التمرين ٣،٣ - ٩). وعدم وجود المثاليات هذا يسري بشكل عام على الحقول كما هو مبين في المسألة القادمة .

مسألة :

أ. اثبت ان الحقل ق ليس له مثاليات فعلا .

ب. بين بمثال ان هناك حلقات كاملة تحتوي على مثاليات فعلية .

كثيراً من الطلبة المبتدئين يكتبون $(أ+ب)^{ن}$ بالشكل $أ^{ن}+ب^{ن}$ حيث $أ_ن، ب_ن \in Z$ و $ن \in Z^+$ ونخبرهم دائما ان هذه النتيجة ليست صحيحة . والآن سنبرهن انه اذا كان $أ_د$ و $ب_د$ عنصرين في $Z_د$ حيث د عدد اولي فالواقع ان

$$(أ_د+ب_د)^{د} = (أ_د)^{د}+(ب_د)^{د} .$$

ونبرهن ايضاً انه اذا كان د عدداً اوليا و $أ \in Z$ ليست من مضاعفات د فان د تقسم كلا $أ^{د}-أ$ و $أ^{د-1}-1$

. (فمثلا يعني هذا ان ١٣ تقسم $س^{١٢}-١$ لكل $س \in Z - \{١٣ر : ر \in Z\}$)

مسألة :

لتوضيح هذه النتائج بنضرية الاعداد ، اختر عدداً اولياً معيناً $د \geq ٣$.

واختر عنصرين معينين $أ_د$ و $ب_د \in Z_د - \{٠_د\}$.

ا. احسب $(أ_د)^{د-1}$ و $(ب_د)^{د-1}$

ب. احسب $(أ_د+ب_د)^{د}$ و $(أ_د)^{د}+(ب_د)^{د}$

يمكن استخدام المسألة التالية في برهان النتائج السابقة بشكل عام.

مسألة :

أ. اذا كان ن عدداً صحيحاً حيث يكون $Z_ن$ حقلا فما هي رتبة زمرة الضرب $Z_ن-\{٠_ن\}$؟

ب. ليكن ن عدداً صحيحاً حيث $Z_ن$ حقل ، ولتكن $أ_ن \in Z_ن-\{٠_ن\}$

اثبت ان رتبة العنصر $\text{أ}_{\text{ن}}$ في زمرة الضرب $Z_{\text{ن}} - \{\hat{\text{ن}}\}$ تقسم العدد الصحيح ن - ١.

مسألة : ٦٤

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن د عدداً اولياً .

أ. فاذا كانت $\text{أ} \in Z_{\text{د}} - \{\text{٠}_{\text{د}}\}$ فان $(\text{أ}_{\text{د}})^{\text{د}-١} = \text{أ}_{\text{د}}$ ، $(\text{أ}_{\text{د}})^{\text{د}} = \text{أ}_{\text{د}}$.

ب. اذا كانت $\text{أ} \in Z$ و أ ليست من مضاعفات د فان $\text{أ}^{\text{د}-١} = ١$ (مض د) ▲

حـ. اذا كانت $\text{أ} \in Z$ فان $\text{أ}^{\text{د}} \equiv \text{أ}$ (مض د).

تعرف النتائج في المسألة ٦٤ ب و ٦٤ حـ بنظرية فيرمات الصغرى.

لقد كان فيرمات (١٦٠١ - ١٦٦٥) محامياً فرنسياً وكانت الرياضيات هوايته . ومع ذلك فقد انجز بعض الاضافات القيمة لنظرية الاعداد وعدة فروع اخرى في الرياضيات .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

ليكن د عدداً اولياً .

أ. فاذا كانت أ ، ب $\in Z$ فان $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{د}} \equiv (\text{أ}^{\text{د}} + \text{ب}^{\text{د}})$ (مض د)

ب. واذا كانت $\text{أ}_{\text{د}} ، \text{ب}_{\text{د}} \in Z_{\text{د}}$ فان

$$(\text{أ}_{\text{د}} + \text{ب}_{\text{د}}) = (\text{أ}_{\text{د}}) + (\text{ب}_{\text{د}})$$

مسألة :

اثبت ان ١٣ تقسم $\text{س}^{١٢} - ١$ حيث س عدد صحيح لا يساوي اياً من مضاعفات ١٣.

ان مفهوم الحقل قدمه أبل في بحث نشره عام ١٨٢٩ . واستعمل جالوا بعد فترة وجيزة مفهوم الحقل مع انه لا هو ولا أبل استعملا هذا الاسم الذي تعرفه اليوم ولا تعاملا مع اي شيء عدا الحقول مثل Q و R ذات العناصر العددية . لقد فهم كلاهما الحقل بأنه مجموعة من الاعداد مغلقة بالنسبة للجمع ، والطرح والضرب والقسمة ، على عناصر غير الصفر .

لقد كان اهتمام جالوا بحقول مثل $Q(\alpha)$ =

$$Q(\alpha) = \left\{ \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} (\text{أ}_{\text{ر}} \alpha^{\text{ر}}) \Big/ \sum_{\text{ه}=٠}^{\text{م}} \text{ب}_{\text{ه}} \alpha^{\text{ه}}) : \text{أ}_{\text{ر}} ، \text{ب}_{\text{ه}} \in Q ، \right.$$

$$\text{م، ن} \in Z \cup \{0\} \text{ و } \sum_{\text{ك}=0}^{\text{م}} \text{ب}_{\text{ك}}\, \alpha^{\text{ك}} \neq 0 \Big\}$$

حيث تكون α عدداً حقيقياً.

يسمى مثل هذا الحقل الآن بالحقل الموسع.

كـان ديدكند هو الذي ابتكر اسم الحقل وقد وضع مجموعة من الاوليات عن الحقول العددية ، وذلك عام ١٨٧١ وكان و يبر (١٨٤٢ ـ ١٩١٣) هو الذي بدأ بدراسة الحقول المجردة في اواخر القرن التاسع عشر.

وقـد قـدم ، ضمن الاشياء الأخرى ، صيغة مجردة لانجازات جالوا في حل المعادلات الحدودية . وفي الواقع لقد اعتبر و يبر الزمر والحقول المفهومين الرئيسيين في الجبر المجرد واعتبر الحقول امتداداً للزمر.

وأولـيـاتـه الـتـي بها عرف الحقل الجرد هي نفسها ما تقدم ذكره في التعريف ٥٢ اذا كتبنا تعريف الحلقة الـتـبـديـلـيـة . ولقد اشترط و يبز ان تكون وحيدة (وهذا شرط يمكن برهانه كما هو مبين في البند ١,٣). وفي نهاية القرن التاسع عشر كانت الحقول المعروفة هي حقول الاعداد النسبية ، والحقيقية والمركبة ، وحقول الاعـداد الـجـبـريـة مـثـل $\{\text{أ} + \text{ب}\sqrt{-5} : \text{أ، ب} \in Q\}$، وحـقـول الاقترانات النسبية بمتغير واحد أو اكثر (اي الاقترانات الناتجة عن قسمة حدوديات بمعاملات في حلقة معطاة من الاعداد).

تمارين :

١ ـ عين الحقول في المجموعات التالية . علل اجاباتك.

أ. $Q[\sqrt{2}] = \{\text{أ} + \text{ب}\sqrt{2} : \text{أ، ب} \in Q\}$ بـالـنـسـبـة لـعـمـليتي جمع الاعداد العادية وضربها . (انظر المسألة ٤٨ والتمرين ٢,١-٦).

ب. مجموعة الاعداد المركبة $C = \{(\text{أ، ب}) : \text{أ، ب} \in R\}$

بـالنسبة لعمليتي الجمع المعرفة بوضع (أ ، ب) + (حـ ، د) = (أ+ حـ ، ب +د) وعملية الضرب بالصيغة (أ ، ب) . (حـ ، د) = (أحـ − ب د ، أد + ب حـ). (انظر التمرين ٣,٦ - ١١).

حـ Z [س] الحلقة المكونة من الحدوديات على Z في س.

٢ ـ جد نظائر الضرب لعدة عناصر في $Z_{١١}$.

٣ ـ في اي حقل ق يمكن تعريف عملية قسمة بوضع أ / ب = أب$^{-1}$ حيث أ ، ب ∈ ق و ب ≠ ٠ .

أ. في $Z_{٧}$ احسب $\frac{٤_{٧}}{٣_{٧}}$.

ب. في $Z_{١١}$ احسب $\frac{٥}{٦}$.

حـ لیکن قہ حقلا . برهن العبارات التالية :

$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right) \cdot \left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right) = ١$ $\text{حـ}\ \ \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـأ}}{\text{ب}}$

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{د}} =$ ______ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \cdot \frac{\text{جـ}}{\text{د}} =$ ______

$\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} + \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ $\frac{\text{أ}/\text{ب}}{\text{جـ}/\text{د}} = \frac{\text{أد}}{\text{بجـ}}$

٤ - اعمل جدولين للجمع والضرب لحقل ذي اربعة عناصر . هل يمكن ان يكون هذا الحقل متشاكلا مع $(Z_{٤}$ ، + ، ٠$)$
(تأكد من تحقيق خاصية التوزيع) .

٥ - برهن انه اذا كان قہ حقلا و حـ حلقة متشاكلة مع قہ تكون حـ حقلا .

٦ - ان احد الاسئلة الهامة في نظرية الاعداد هو التالي :

لتكن م ، ن موجبتين وان ن>م . اذا قسمت $٢^{ن} - ٢^{م}$ العدد $٣^{ن} - ٣^{م}$ فهل يكون صحيحاً ان $٢^{ن} - ٢^{م}$ تقسم $س^{ن} - س^{م}$ لكل س ≥ ٢ ؟ في هذا التمرين ندرس زوجين من قيم م ، ن .

أ. بين ان $٢^{٣} - ٢$ تقسم $س^{٣} - س$ لكل عدد صحيح س ≥ ٢ .

ب. بين ان $٢^{٨} - ٢^{٢}$ تقسم $٣^{٨} - ٣^{٢}$. ثم برهن ان $٢^{٨} - ٢^{٢}$ تقسم $س^{٨} - س^{٢}$ لكل عدد صحيح س ≥ ٢.

٧ - ليكن قہ حقلا منتهياً يزيد عدد عناصره عن عنصرين . بين ان حاصل جمع كل العناصر في قہ يساوي صفراً.

٨ - ليكن حـ عنصراً في Z^{+} ليس مربعاً كاملا اي ان $\sqrt{\text{حـ}} \notin Z$

ا. نعلم من البند ٣,٥ ان

$$Q[\sqrt{\text{حـ}}] = \{\text{أ} + \text{ب}\sqrt{\text{حـ}} : \text{أ} ، \text{ب} \in Q\}$$

تكون حلقة تبديلية ذات عنصر محايد . هل تكون $Q[\sqrt{\text{حـ}}]$ حقلا ؟
علل اجابتك .

ب. نعلم من التمرين ٣,٦ - ١٠ أن $Z[\sqrt{\text{حـ}}]$ حلقة كاملة. فهل يكون

Z [$\sqrt{-ح}$] حقلا ؟ علل اجابتك .

٩ - لتكن

ع = {(أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ، أ$_4$) : أ$_ر$ ∈ R ، ر = ١،٢،٣،٤}

يكون عنصران من ع متساو بين اذا وفقط اذا كانت مركبتاهما متساو يتين اي ان :

(أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ، أ$_4$) = (ب$_1$ ، ب$_2$ ، ب$_3$ ، ب$_4$) اذا وفقط اذا كان أ$_ر$ = ب$_ر$ لكل ر = ١،٢،٣،٤. نعرف حاصل جمع اي عنصرين في ع بوضع

(أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ، أ$_4$) + (ب$_1$ ، ب$_2$ ، ب$_3$ ، ب$_4$) = (حـ$_1$ ، حـ$_2$ ، حـ$_3$ ، حـ$_4$)

حيث حـ$_ر$ = أ$_ر$ + ب$_ر$ لكل ر = ١،٢،٣،٤. و يعرف المضاعف العددي

α(أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ، أ$_4$) حيث $\alpha \in R$ بالصيغة

α(أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ، أ$_4$) = (αأ$_1$ ، αأ$_2$ ، αأ$_3$ ، αأ$_4$)

لتكن و$_1$ = (١ ، ٠ ، ٠ ، ٠) ، و$_2$ = (٠ ، ١ ، ٠ ، ٠)

و$_3$ = (٠ ، ٠ ، ١ ، ٠) ، و$_4$ = (٠ ، ٠ ، ٠ ، ١)

أ جد ٣ (٢ ، -١ ، ٣ ، ١) + ٢(-٣ ، -٥ ، ٢ ، ٠)

ب. بين ان كل عنصر في ع يمكن كتابته بالصيغة

أ$_1$و$_1$ + أ$_2$و$_2$ + أ$_3$و$_3$ + أ$_4$و$_4$

حـ بين ان (ع ، +) زمرة تبديلية .

١٠ - لتكن ع المجموعة المعرفة في التمرين ٩. عرف جدولا لضرب و$_1$ ، و$_2$ ، و$_3$ ، و$_4$ حسب الجدول ٣,١ . واذا كانت س ∈ {و$_1$ ، و$_2$ ، و$_3$ ، و$_4$}

الجدول ٣٫١

.	و$_1$	و$_2$	و$_3$	و$_4$
و$_1$	و$_1$	و$_2$	و$_3$	و$_4$
و$_2$	و$_2$	-و$_1$	و$_4$	-و$_3$
و$_3$	و$_3$	-و$_4$	-و$_1$	و$_2$
و$_4$	و$_4$	و$_3$	-و$_2$	-و$_1$

فعرف الضرب لـ س = أ$_1$و$_1$ + أ$_2$و$_2$ + أ$_3$و$_3$ + أ$_4$و$_4$ و ص = ب س بالصيغة:

س . ص = (أ$_1$و$_1$ + أ$_2$و$_2$ + أ$_3$و$_3$ + أ$_4$و$_4$) (ب س)

= أ$_1$ب (و$_1$س) + أ$_2$ب (و$_2$س) + أ$_3$ب (و$_3$س) + أ$_4$ب (و$_4$س)

واذا كان سه = أ$_1$و$_1$ + أ$_2$و$_2$ + أ$_3$و$_3$ + أ$_4$و$_4$

صه = ب$_1$ و$_1$ + ب$_2$و$_2$ + ب$_3$و$_3$ + ب$_4$و$_4$ عنصرين في ع فعرف حاصل ضربهما بالصيغة :

سه . صه = سه . (ب$_1$و$_1$ + ب$_2$و$_2$ + ب$_3$و$_3$ + ب$_4$و$_4$)

= سه . (ب$_1$و$_1$) + سه . (ب$_2$و$_2$) + سه . (ب$_3$و$_3$) + سه . (ب$_4$و$_4$).

أ. فمثلا

(٢و$_2$ − ٣و$_3$) (٤و$_3$ + و$_4$) = (٢و$_2$ − ٣و$_3$) (٤و$_3$) + (٢و$_2$ − ٣و$_3$) (و$_4$) = ________

ب. جد حاصلي الضرب (٤و$_2$ − ٣و$_3$ + ٢و$_4$) (و$_1$ + و$_2$ + و$_3$ + و$_4$)،

(أو$_1$ + بو$_2$ + حـو$_3$ + دو$_4$) (أو$_1$ − بو$_2$ − حـو$_3$ − دو$_4$).

حـ. برهن ان أ$_1$و$_1$ + أ$_2$و$_2$ + أ$_3$و$_3$ + أ$_4$و$_4$ = (٠،٠،٠،٠) اذا وفقط اذا كان

أ$_1^2$ + أ$_2^2$ + أ$_3^2$ + أ$_4^2$ = ٠ .

د. افترض ان الضرب المعرف اعلاه يكون عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً وبحيث تكون تجميعية وتوزيعية على الجمع . برهن ان (ع، + ، ٠) تكون حلقة ذات عنصر محايد وان الضرب ليس تبديلياً على ع.

هـ. اثبت ان كل عنصر غير الصفر ، من ع، له معكوس ضربي.

لا تحاول ان تحل المعادلة صه سه = و$_1$ حيث صه∈ع ثابتة وبدلا من ذلك استعمل الجزء ب . تذكر ان عليك ان تبرهن ان النظير عنصر في ع.

والمجموعة ع هي مثال على جبرية القسمة ــ حلقة ذات عنصر محايد وضرب عددي حيث لكل عنصر مخالف للصفر نظير . ان أول من عرف هذه الحلقة هو هاملتون (١٨٠٥ - ١٨٦٥) الذي سمى هذه الاعداد بالرباعيات . ويمكن تفسير المركبات الاربعة بانها تحدد الموضع بدلالة الزوايا والمسافة وبالمثل فان الرباعيات لها تفسير مفيد للفيزياء والهندسة.

١١*-وكما يوجد خوارزمية قسمة للحلقة الكاملة Z فكذلك يوجد خوارزمية قسمة للحلقة الكاملة قه [س] المكونة من كل الحدوديات على حقل قه . ويمكن ذكر هذ على النحو التالي :

نظرية : لتكن قه حقلا و هـ(س) ، د(س) ∈ قه [س] - {٠}

فهناك حدوديتان ك (س) وب (س) في قه [س] حيث ان هـ(س) = د (س) ك (س) +ب(س)

و ب (س) = ٠ أو در (ب (س)) $<$ در (د (س)).

فتسمى الحدودية ك (س) خارج القسمة ويسمى ب (س) الباقي عند قسمة هـ (س) على د (س).

أ. لكل من الحدوديات هـ (س) و د (س)$\in$ Z [س] ادناه جد خارج القسمة والباقي عند قسمة هـ (س) على د (س).

د (س)	هـ (س)
س^٢ + ٤	س^٣ - س^٢ + ٣
٣س^٣	٤س^٢ - ٥
س - ١	س^٥ + ١

ب. ليكن ق حقلا ولتكن هـ (س) ، د (س)$\in$ ق [س] -$\{٠\}$

فلبرهنة خوارزمية القسمة لتكن

صـ =$\{$هـ (س) - د (س) ى (س) : ى (س)$\in$ق[س]$\}$

برهنة انه يوجد ك (س) $\in$ ق (س) بحيث يكون

ر (س) = هـ (س) - د (س) ك (س).

صفراً او ان درجتها هي الدنيا في كل حدوديات صـ . ثم برهن بالتناقض ان

در (ر (س))<در (د (س)) اذا كانت ر (س) $\neq$ ٠ ●

١٢- ليكن ن عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً برهن ان العنصر أن$\in$ Zن نظيراً ضربياً اذا وفقط اذا كان أ و ن عددين اوليين نسبياً (أي ان القاسم المشترك الاعظم لـ أ و ن و يرمز له بالرمز ق.م أ هو ١).

١٣- خذ زمرة الضرب Z$_{١٧٠}$ - $\{١٧٠\}$.

أ. اكتب قائمة بالعناصر المختلفة في<٤$_{١٧}$> =$\{$(٤$_{١٧}$)^ر : ر$\in$Z$^+\}$. وهي زمرة الضرب الجزئية المتولدة عن العنصر ٤$_{١٧}$. ثم جد قيمة ن بحيث تكون (<٤$_{١٧}$>،٠) متشاكلة مع زمرة الجمع Zن .

ب. اعد الجزء ا للزمرة الجزئية<٢$_{١٧}$>.

عين العناصر في<٣$_{١٧}$>. هل تكون زمرة الضرب Z$_{١٧}$- $\{١٧٠\}$ زمرة دورية ؟

١٤- أ. في زمرة الضرب Z$_{١٣}$- $\{١٣٠\}$

اكتب قائمة بالعناصر المختلفة للزمرة الجزئية< ٤$_{١٣}$>= $\{$ (٤$_{١٣}$)^ر : ر$\in$ Z$^+\}$

٣,٨ حقول الخوارج

ان المجموعة Z حلقة كاملة ولكن العنصرين ١ و -١ فقط لهما نظيران في Z . ولكن كل الخوارج $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ حيث ب ≠ ٠ ، أ ، ب ∈ Z توجد في الحقل Q الذي يحتوي على Z . ولهذا الحقل عملية جمع معرفة بالصيغة :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أد} + \text{بجـ}}{\text{ب د}}$$

وعملية الضرب المعرفة بالصيغة :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \cdot \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ب د}}$$

والاحتياطات لازمة مع هذه العمليات لانه يمكن لعدد نسبي ان يكتب بطرق عديدة مختلفة ولكننا نعلم ان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ اذا وفقط اذا كان أد = بجـ

لنأخذ حلقة كاملة اختيارية ك ونبين ، مستخدمين هذه الافكار كحافز ، انه «يمكن وضع ك داخل» حقل بحيث يكون لكل عنصر غير الصفر نظير ضربي . يسمى حقل خوارج ك .

لتكن ك حلقة كاملة فالخطوة الأولى لبناء حقل الخوارج ناخذ

صهـ = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ ك و ب ≠}.

تعريف : ٦٧

يكون الزوجان (أ ، ب) و (جـ ، د) من صهـ متكافئتين ، و يرمز لذلك بالرمز (أ ، ب)∼(جـ. د) ، اذا وفقط اذا كان أد = بح

مسألة : ٦٨

برهن ان العلاقة ∼على ك المعطاة في التعريف ٦٧ هي علاقة تكافؤ على صهـ . (انظر الملحق ٤).

قد لا نفترض في برهانك ان للعناصر غير الصفرية في ك نظائر ضرب او ان القسمة معرفة في ك تذكر ان الفكرة من هذا العمل هي انشاء نظائر ضرب لعناصر غير صفرية في ك .

تعريف : ٦٩

لتكن ك حلقة كاملة . ولكل (أ ، ب) ∈ صهـ لتكن

[أ ، ب] = {(جـ ، د) : (جـ ، د) ∈ صهـ و (جـ ، د)∼(أ ، ب)}

فيكون [أ ، ب] صف التكافؤ للعنصر (أ ، ب) في صه$_{ن}$.

مسألة : ٧٠

لتكن ك = Z في هذه المسألة فقط . برهن ان [٢ ، ٣] = [٤ ، ٦]. جد عدة ازواج من اعداد صحيحة أ ، ب بحيث أن [أ ، ب] = [٢ ، ٣]. لتكن ك حلقة كاملة و أ ، ب ، أ$_{١}$ ، ب$_{١}$ ∈ ك بحيث ب ، ب$_{١}$ ≠ ٠ .

تذكر ان [أ ، ب] = [أ$_{١}$ ، ب$_{١}$] اذا وفقط اذا كان (أ ، ب) ~ (أ$_{١}$ ، ب$_{١}$) .

مسألة : ٧١

اذا كانت [أ ، ب] = [أ$_{١}$ ، ب$_{١}$] ، جد علاقة بين أ ، ب ، أ$_{١}$ و ب$_{١}$ في ك

لتكن ك حلقة كاملة ولتكن

ج (ك) = { [أ ، ب] : (أ ، ب) ∈ صه$_{ن}$ }

فكل عنصر في ج (ك) هو صف تكافؤ من الازواج المرتبة (الجائزة) لعناصر من ك .

مسألة : ٧٢

اكتب قائمة تحتوي على عدة عناصر من ج (Z)

هل [٢ ، ٠] عنصر في ج (Z) ؟

اذا اردنا ان تكون ج (ك) حقلا فعلينا تعريف عمليتي الجمع والضرب على ج (ك). ونستعمل العمليتين كدليل على الاعداد النسبية.

تعريف : ٧٣

يعرف الجمع (+) على ج (ك) بوضع

[أ ، ب] + [حـ ، د] = [أد + بحـ ، ب د]

لكل [أ ، ب] ، [حـ ، د] ∈ ج (ك) . و يعرف الضرب (٠) بوضع

[أ ، ب] ٠ [حـ ، د] = [أحـ ، ب د]

لكل [أ ، ب] ، [حـ ، د] ∈ ج (ك).

مسألة : ٧٤

في ج (Z) احسب ناتج [١ ، ٣] + [-٢ ، ٥] وحاصل الضرب [١ ، ٣] [- ٢ ، ٥] .

مسألة : ٧٥

لتكن ك حلقة كاملة . برهن انه اذا كانت [أ ، ب] = [أ$_{١}$ ، ب$_{١}$] ،

[حـ ، د] = [حـ$_{١}$ ، د$_{١}$] فان [أ ، ب] . [حـ ، د] = [أ$_{١}$ ، ب$_{١}$] . [حـ$_{١}$ ، د$_{١}$]

(اي [أحـ ، ب د] = [أ$_{١}$ حـ$_{١}$ ، ب$_{١}$ د$_{١}$]).

تبين المسألة ٧٥ ان الضرب يكون عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً على ج (ك) . وبالمثل فالجمع يكون عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً على ج (ك) . و يترك برهان هذه الحقيقة للتمرين ٢ .

نظرية : ٧٦

لتكن ك حلقة كاملة فتكون المجموعة ح (ك) حقلا بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المعطاتين في التعريف ٧٣ وتسمى المجموعة ح (ك) بحقل خوارج ك . وفي المسألة التالية برهان جزئي للنظرية ٧٦.

مسألة : ٧٧

أ. برهن ان (ح (ك) ، +) زمرة تبديلية.

ب. جد العنصر المحايد للضرب في ح (ك) وعلل اختيارك.

جـ بين انه اذا كانت [٩ ، ب] ≠ [(٠) ، ١] فللصف [٩ ، ب] نظير ضربي.

- يترك للتمرين ٣ برهان ان ح (ك) -{[٠ ، ١]} زمرة تبديلية بالنسبة للضرب ، اما برهان ان الضرب توزيعي على الجمع في ح (ك) فمتروك للتمرين ٤.

مسألة : ٧٨

لتكن ك حلقة كاملة

٩. برهن ان المجموعة كَ = {[٩ ، ١] : ٩ ∈ ك}

هي حلقة جزئية من ح (ك) .

ب. برهن ان ك تكون متشاكلة مع كَ . لذلك عرف اقترانا ϕ : ك ← كَ وبرهن ان ϕ تشاكل.

و يستعمل الرمز $\frac{٩}{ب}$ غالبا لصف التكافؤ [٩ ، ب] حيث ٩ و ب عنصران في الحلقة الكاملة ك و ب ≠ ٠ وهذا يوافق الرمز المألوف للاعداد النسبية .

تمارين :

١ - ٩. في ح (Z_n) اثبت ان [٩ه ب] = [١ ، ب$^{-1}_{ه}$ ٩] اذا كانت ب$_{ه}$ ≠ ٠

ب. اكتب قائمة بصفوف التكافؤ ، المختلفة في حقل خوارج $Z_{ه}$ برهن ان هذا الحقل متشاكل مع $Z_{ه}$ نفسها.

٢ - لتكن ك حلقة كاملة . برهن ان الجمع يكون عملية ثنائية معرفا تعريفا حسنا على ح (ك)

٣ - لتكن ك حلقة كاملة . برهن ان ح (ك) - {[٠ ، ١]} يكون زمرة تبديلية بالنسبة للضرب.

٤ - لتكن ك حلقة كاملة . برهن أن الضرب يكون توزيعيا على الجمع في ح (ك)

٥ - لتكن ك حلقة كاملة ولتكن ق حقلا يحتوي على ك . برهن انه يوجد حقل جزئي قَ (من ق) حيث قَ تحتوي على ك وتكون قَ متشاكلة مع ح (ك) .

٦ - برهن ان المجموعة

$$ك = \left\{ \frac{\text{م}}{\text{ن}} : \text{م} \in Z \text{ ون} \in Z^{+} \right\}$$

هي حلقة كاملة وجد حقلا جزئياً من Q يكون متشاكلا مع حقل الخوارج ج (ك) .

٧ - برهن ان Q ، حقل الاعداد النسبية ، يكون متشاكلا مع ج (Z) ، حقل الخوارج في Z . اولا عليك تعريف تناظر Q ← ج (Z) وبرهن انها تكون اقتراناً معرفاً تعريفاً حسناً وبعد ذلك عليك ان تبرهن ان هذا الاقتران تشاكل (حلقي) . (أو استعمل التمرين ٥).

٨ - الحلقة Z٢ المكونة من الاعداد الصحيحة الزوجية لا تكون حلقة كاملة لانها لا تحتوي على عنصر محايد . ولكن ليس لهذه الحلقة قواسم صفرية . ونعلم ان Z٢ تكون محتواة في Q. في هذا التمرين ستكون حقل خوارج لحلقات مثل Z٢ ونثبت في الجزء د ان Q متشاكلة مع حقل خوارج Z٢ ومن ثم فهي اصغر حقل يحتوي على Z٢.

فبصورة عامة اذا كانت ج ≠ {٠} حلقة تبديلية بدون قواسم صفرية فاننا نكون حقل خوارج للحلقة ج.

لتكن صم ج = {(ا ، ب) ، ا ، ب ∈ ج و ب ≠ ٠}

للزوجين (ا ، ب) ، (حـ ، د) ∈ صم ج عرف (ا ، ب) ~ (حـ ، د) اذا وفقط اذا كان اد = ب حـ.

ا. اثبت ان العلاقة ~ تكون علاقة تكافؤ على صم ج .

ب. ليكن ا/ب صف التكافؤ للعنصر (ا ، ب) :

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \left\{ (\text{حـ ، د}) : (\text{حـ ، د}) \in \text{صم ج و } (\text{حـ ، د}) \sim (\text{ا ، ب}) \right\}$$

$$\text{لتكن ج (ج)} = \left\{ \frac{\text{ا}}{\text{ب}} : (\text{ا ، ب}) \in \text{صم ج} \right\}$$

عرف جمعاً (+) وضرباً (٠) على ج (ج) كما يلي :

$$\left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right) + \left(\frac{\text{حـ}}{\text{د}}\right) = \frac{\text{اد} + \text{ب حـ}}{\text{ب د}}$$

$$\left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right) \cdot \left(\frac{\text{حـ}}{\text{د}}\right) = \frac{(\text{ا حـ})}{(\text{ب د})}$$

برهن ان الجمع والضرب عمليتان ثنائيتان على ج (ج) معرفتان تعريفاً حسناً.

حـ برهن ان (ج (ج) ، + ، ٠) حقل . يمكنك استخدام اي من البراهين السابقة التي لا

تعتمد على وجود عنصر محايد في ج.

د. برهن ان ج($Z2$) يكون متشاكلا مع حقل الاعداد النسبية Q تذكر ان التشاكل يجب ان يكون تشاكلا حلقياً.

٩ - ليكن ح عنصراً في Z^+ بحيث لا يكون مربعاً كاملا اي ان $\sqrt{ح} \notin Z$. من التمرين ٣,٦ - ١٠ نعلم ان

$$Z[\sqrt{ح}] = \{أ + ب\sqrt{ح} : أ ، ب \in Z\}$$

هي حلقة كاملة . وبذا تستطيع ان تكون حقل الخوارج ج($Z[\sqrt{ح}]$).

عرف : ϕ : ج($Z[\sqrt{ح}]) \leftarrow Q[\sqrt{ح}]$ بالصيغة

ϕ ([س ، ص]) = س ص$^{-1}$ لكل [س ، ص] $\in$ ج ($Z[\sqrt{ح}]$).

أ. برهن ان ϕ اقتران معرف تعريفاً حسناً بقيم في $Q[\sqrt{ح}]$.

ب. برهن ان ϕ تشاكل من ج ($Z[\sqrt{ح}]$) الى $Q[\sqrt{ح}]$.

ولهذا فاذا كانت ح $\in Z^+$ يكون حقل الخوارج للحلقة $Z[\sqrt{ح}]$. متشاكلا مع حقل جزئي من R هو $Q[\sqrt{ح}]$

مراجعة

عبارات هامة

حلقة	حقل جزئي
حلقة ذات عنصر محايد	قاسم للصفر
حلقة تبديلية	طرح
حلقة جزئية	قسمة
حلقة جزئية فعلا	اقتران محافظ (حلقي)
مثالية يمنى	تشاكل (حلقي)
مثالية يسرى	حدودية في س على ح
مثالية ذات جانبين	حلقة الحدوديات على ح
حلقة كاملة	درجة الحدودية
حقل	حقل الخوارج

الرموز

(ح ، + ، ·)	$\phi(\text{ح})$
$\text{أ}^{\text{ن}}$ ، $\text{ب}^{\text{ن}}$	$\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ر}}\,\text{س}^{\text{ر}}$
أ − ب	$Q[\propto]$
$\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$	ح[س]
$\text{أ}\text{ح}$ ، $\text{ح}\text{أ}$	ح (ل)
نو (ϕ)	[أ ، ب] $\ni$ ح (ل)

امثلة :

حلقات : $Z2$ ، Z ، Q ، R ، $\text{م}_{\text{م}}(R)$ ، $Z_{\text{ن}}$ ، Z ن ، $Q[\sqrt{2}]$ ، $Q[\overline{36}]$

حلقات كاملة : Z ، Q ، R ، $Z_{\text{ن}}$ حيث ن ——— ، $Q[\sqrt{2}]$.

حقـول : Q ، R ، Zن حيث ن ———

في التمارين :

(ق (سه ، ح) ، + ، ٠) ، (محا (سه) ، + ، ٥) ، (C ، + ، ٠) ،
(ح [س١ ، س٢ ، . . . ، سن] ، + ، ٠) ، (ح ، + ، ٠) .

مسائل :

١ - ما هي الأوليات للحلقة ؟ للحلقة الكاملة ؟ للحقل ؟

٢ - اذكر اربع خصائص اولية للحلقة تنتج من خصائص الزمرة . اذكر عدة خصائص لحلقة تنتج عن وجود الضرب وقانون التوزيع.

٣ - اذا وجد عنصر محايد للضرب في حلقة فهل يكون وحيداً ؟ هل يمكن لعنصر في حلقة ان يكون له اكثر من نظير ضربي واحد ؟

٤ - صف كل الحلقات الجزئية وكل المثاليات في Z .

٥ - ما هو اقل شرط ضروري وكاف لكي تكون اي مجموعة جزئية من الحلقة حلقة جزئية ؟ ما هو المعيار المقابل لمجموعة جزئية من الحقل حتى تكون حقلا جزئياً ؟

٦ - لتكن ح حلقة و أ ∋ ح فهل تكون المجموعة أ ح مثالية يمنى ام مثالية يسرى في ح ؟ فهل تكون المجموعة ح أ مثالية يسرى ام مثالية يمنى في ح ؟

٧ - ليكن ϕ اقتراناً محافظاً من حلقة ح لحلقة حَ . هل تكون نواة ϕ حلقة جزئية من ح؟ هل تكون مثالية في ح؟ هل تكون مجموعة الصورة ϕ (ح) حلقة جزئية من حَ؟ هل تكون ϕ (ح) مثالية في حَ؟

٨ - هل يلزم ان تكون درجة حاصل ضرب ق(س) د(س) لحدوديتين على حلقة ح هي حاصل الجمع لدرجتي ق (س) و د (س) ؟ ما اكبر درجة يمكن ان تكون لحاصل الجمع ق(س)+د(س) ؟

٩ - ما الفارق الاساسي بين الحلقتين Q [$\sqrt{٢}$] و Q [٣٦] ؟

١٠ - ما الشرط الذي تضعه على قواسم الصفر في الحلقة ليتكافأ مع الاختزال للضرب ؟ هل يمكن لحلقة كاملة ان يكون لها قواسم صفرية ؟

١١ - مع اي قيم ن تكون Zن حلقة كاملة ؟ حقلا ؟

١٢ - ما الشرط الذي يكفي للتأكد من ان حلقة كاملة تكون حقلا ؟

١٣ - اكتب قائمة بكل المثاليات لحقل ما .

١٤ ـ لتكن (ح ، + ، ٠) حلقة . ماذا يجب ان يتحقق في (ح - {٠} ، ٠) اذا كان ح حقلا ؟

اذا كانت ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد وكانت كل معادلة بالصيغة

أس = ب حيث أ ، ب ∈ ح و أ ≠ ٠

لها حل س ∈ ح فماذا يمكن ان يقال عن ح فوق ما تقدم ؟

١٥ ـ اعط مثالا لحلقة ليست حلقة كاملة ولحلقة كاملة ليست حقلا .

١٦ ـ صف بناء حقل الخوارج من حلقة كاملة .

لقد اجيب على الاسئلة التالية في التمارين.

١٧ ـ اذا كانت ح و حَ حلقتين وكان ϕ : ح ← حَ اقتراناً محافظاً فصحيح غالباً ان خصائص ح تنتقل الى حَ.

مع اي من الخصائص التالية يكون هذا صحيحاً بصورة عامة ؟

مع ايها تكون صحيحاً اذا كانت ϕ شاملة ؟ مع ايها تكون صحيحاً اذا كانت ϕ تشاكلا .

أ. ح حلقة تبديلية.

ب. ح حلقة ذات عنصر محايد.

حـ. ح حلقة كاملة.

د. ح. حقل.

هـ. ح تحتوي على مثالية صہ فعلية ذات جانبين.

١٨ ـ ليكن ϕ اقتراناً محافظاً وشاملا من حلقة ح الى حلقة حَ. فاذا كانت صہ ⊇ ح مثالية فهل تكون ϕ (صہ) مثالية في حَ ؟ اذا كانت صَہ مثالية في حَ فهل تكون ϕ^{-1} (صَہ) مثالية في ح؟

١٩ ـ اعط مثالا لحلقة ليست حقلا ولا تحتوي على اي مثالية فعلية .

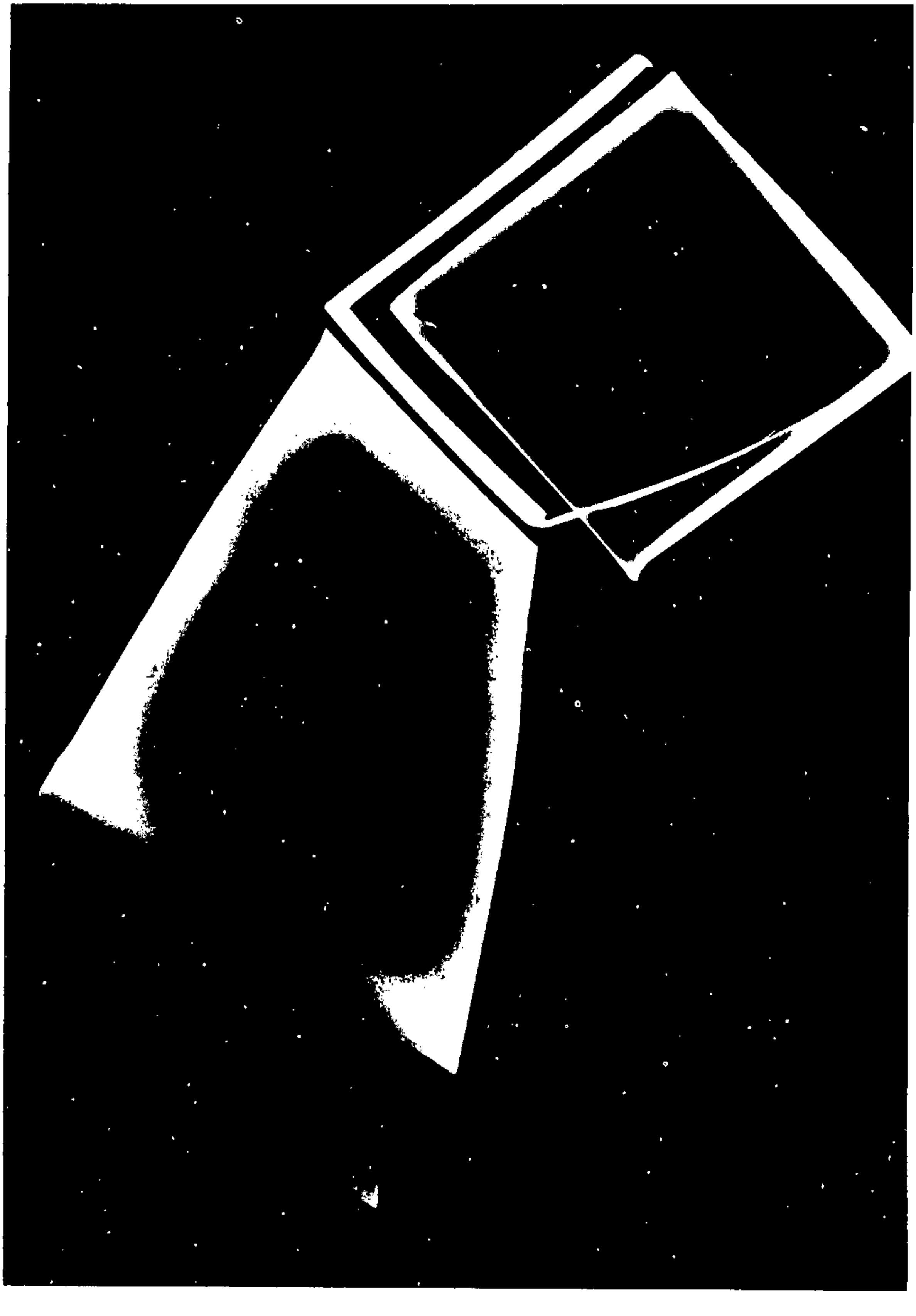
٢٠ ـ مع اي نوع من الحلقات ح يكون صحيحاً ان

در (قہ(س) . د (س)) = د ر(ق (س)) + در (د (س)).

لكل الحدوديات اللاصغرية قہ(س) ، د (س) ∈ ح [س] ؟

مع اي نوع من الحلقات ح من الضروري ان تكون ح [س] حلقة كاملة ؟ هل يمكن ان يكون ح [س] حقلا ؟

٢١ ـ اذا كانت الحلقة الكاملة لہ محتواة في حقل قہ فصف حقلا جزئياً من قہ يكون متشاكلا مع حقل الخوارج ح (لہ).



فصل ٤

نظرية الزمرة ٢

تدرس في هذا الفصل ثلاثة مواضيع خاصة من نظرية الزمر . سنبحث في زمر جزئية خاصة من الزمرة مكونة من كل تبديلات المجموعة $\{١ ، ٢ ، ... ، ن\}$.

وقبل اثبات وجود هذه الزمر الجزئية تدرس تبديلات خاصة تسمى دورات ونقلات .

ونبين ان كل تبديلة يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب دورات او كحاصل ضرب نقلات . وفي البند ٤,٣ سندرس مجموعة جزئية من مجموعة كل التبديلات للزمرة $س_ن$ ، ونبين ان هذه المجموعات الجزئية المكونة من كل التشاكلات من $س_ن$ الى نفسها تكون زمرة بالنسبة للتركيب .

وفي البند ٤,٤ نعطي طريقة لبناء زمرة بتعريف عملية على الضرب الديكارتي لزمرتين معلومتين . واخيراً نفحص زمراً يمكن تمثيلها «كضرب داخلي» مقارن لزمرتين جزئيتين فعلا .

٤,١ الدورات والنقلات في زمرة التبديلات

لقد قدمنا في البند ١,٥ زمرة التماثل $S_ن$ المكونة من كل تبديلات المجموعة $\{١ ، ٢ ، ... ، ن\}$ (اي كل اقترانات الواحد لواحد الشاملة التي تقرن هذه المجموعة بنفسها) . وقد عبرنا عن

العنصر $ق_ر$ للزمرة $S_ن$ برمز السطرين التالي :

$$ق_ر = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & \cdots & ن \\ أ_١ & أ_٢ & \cdots & أ_ن \end{pmatrix}$$

حيث $ق_ر$ (ر) = أ ر ، ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن ونبين في هذا البند ان كل تبديلة في $S_ن$ يمكن كتابتها على شكل تركيب لتبديلات خاصة معينة تسمى دورات أو حتى تبديلات ابسط تسمى نقلات.

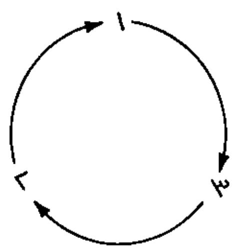
كل عنصر فى $S_٣$ يكون مثلا على دورة . فمثلا اذا كانت $ق_ر$ التبديلة

$$ق_ر = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$$

فنحصل على ان $ق_ر$(١) = ٣ ، $ق_ر$(٣) = ٢ ، $ق_ر$(٢) = ١ .

ويمكن تصوير هذه التبديلة $ق_ر$ بدوران دائري للرموز ١ ، ٢ ، ٣ كما هو مبين في الشكل ٤,١ .

الشكل ٤,١



ان هذه التبديلة $ق_ر$ التي تأخذ ١ الى ٣ و ٣ الى ٢ و ٢ الى ١ تكتب بالرمز المختزل $ق_ر$ = (١ ٣ ٢) . وبهذا ذي الصف الواحد فان صورة كل عنصر هي العنصر الذي يليه الى يساره ما عدا صورة آخر عنصر فتكون العنصر الاول في الصف وبهذا فان (٣ ٢ ١) هي ايضاً رمزاً للتبديلة

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$$

وهكذا فان التبديلة لا يكون لها تمثيل وحيد بدلالة الرمز بصف واحد.

وبصورة عامة فان العنصر الذي يقرن بنفسه بالتبديلة يحذف من رمز الصف الواحد. وبهذا ففي $S_٣$ فان رمز الصف الواحد (١ ٢) يعني التبديلة.

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

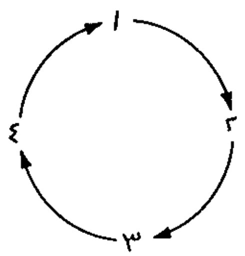
واذا اقترن كل عنصر بنفسه في تبديلة فتكتب التبديلة على النحو (١) أو (٢) أو (٣)

مسألة :

اكتب كل تبديلة في $S_٣$ برمز الصف الواحد .

توجد دورات في كل من الزمر $S_ن$ (ن $\geq$ ٢) . فمثلا لتكن $ق_ه \in S_٤$ حيث $ق_ه$(١) = ٢ ، $ق_ه$(٢) = ٣ ، $ق_ه$(٣) = ٤ و $ق_ه$(٤) = ١ . فبرمز الصف الواحد فان $ق_ه$= (١ ٢ ٣ ٤) وتكون $ق_ه$ دورة . ويمكن تصوير التبديلة $ق_ه$ بدورة دائرية للرموز ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كما هو مبين في الشكل ٤,٢

الشكل ٤,٢



لاحظ انه توجد عدة طرق لكتابة الدورة نفسها برمز الصف الواحد. فمثلا كتابة الدورة (١ ٢ ٣ ٤) بالصيغ (٢ ٣ ٤ ١) ، (٣ ٤ ١ ٢) أو (٤ ١ ٢ ٣).
وهذه كلها ترمز الى نفس التبديلة وهي

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$$

مسألة :

اعط مثالا لدورة في $S_٦$ وصورها بدورة دائرية لرموزها . لنعرف الآن رسمياً مصطلح «الدورة»

تعريف :

تكون التبديلة $ق_ه \in S_ن$ دورة طولها ر اذا وفقط اذا وجدت مجموعة جزئية $\{أ_١ ، أ_٢ ، ... ، أ_ر\}$ من $\{١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن\}$ بحيث أن $ق_ه(أ_١) = أ_٢$ ، $ق_ه(أ_٢) = أ_٣$ ، ... ، $ق_ه(أ_{ر-١}) = أ_ر$

$ق_ه(أ_ر) = أ_١$

وبحيث ان ق (ى) = لكل ى $\in$ {١ ، ٢ ، ... ، ن} - {أ$_١$ ، أ$_٢$ ، ... ، أ$_ر$} .

وتكتب الدورة ق$_ر$ بالصيغة (أ$_١$ أ$_٢$ ... أ$_ر$) برمز الصف الواحد وحذفت الارقام التي تقترن بنفسها من الصيغة .

لاحظ انه حسب التعريف اذا كانت ق$_ر$ دورة طولها واحد فان ق تقرن عنصراً ما أ$_١$ بنفسه و ق$_ر$ (ر) = ر لكل ر $\in$ {١ ، ٢ ، ... ن} - {أ$_١$} . وبهذا فان كل دورة طولها ١ تقرن كل عنصر بنفسه . و يرمز لمثل هذه الدورة بالرمز (١) أو (٢) أو (ر) لكل ر = ١ ، ٢ ، ...، ن . وتبديلية العنصر المحايد هي التبديلة الوحيدة التي طولها واحد .

نقول احياناً ان الدورة (أ$_١$ أ$_٢$... أ$_ر$) ذات الطول ر $\geq$ ٢ تحرك العناصر التي عددها ر في {أ$_١$ ، أ$_٢$ ، ... ، أ$_ر$} ونترك العناصر التي في المجموعة {١ ، ٢ ، ... ، ن} - {أ$_١$ ، أ$_٢$ ، ... ، أ$_ن$} ثابتة .

واذا كانت ر = ١ فان كل عنصر من {١ ، ٢ ، ... ، ن} يبقى ثابتاً.

مسألة :

اكتب كل من الدورات التالية بصيغة الصف الواحد وجد طول كل دورة .

ا. $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ & ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$

ب. $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ & ١ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

حـ $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ١ & ١ \\ ٤ & ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

د. $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ & ١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

مسألة :

في $S_٥$ لتكن ق = (١ ٢ ٣ ٤ ٥) و د = (١ ٢ ٥ ٣ ٤)

تذكر انه عند حساب مركبة لتبديلتين فيجب ان تبدأ بالتبديلة اليسرى ولهذا فان (ق ∘ د) (١) = ق(د (١)) = ق (٢) = ٣ ، ق ∘ د = (١ ٣ ــــــــ)

واحسب الآن (ق ∘ د) (٣) واكمل الدورة .

ب. احسب د ∘ ق . هل تكون ق ∘ د = د ∘ق ؟

وليست كل التبديلات دورات . فمثلا التبديلة

$$د = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$$ ليست دورة . (لماذا ؟).

ولكن يمكن كتابتها بالتركيب : د =

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

او بالتركيب د = (١ ٢) ∘ (٣ ٤) ، بصيغة الصف الواحد

مسألة :

أ. في $S_٦$ عبر عن التركيب

(١ ٣ ٥ ٦) ∘ (٢ ٦ ١)في صيغة الصفين :

(١ ٣ ٥ ٦) ∘ (٢ ٦ ١) = (١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

تذكر ان الدورة (٢ ٦ ١) تترك ٣ ، ٤ ، ٥ ثوابت .

ب. بين أن الاقتران المركب :

(١ ٣ ٥ ٦) ∘ (٢ ٦ ١) يمكن ايضاً كتابته

كتركيب من الدورتين (١ ٢) و (٣ ٥ ٦).

جـ احسب (٢ ٦ ١) ∘ (١ ٣ ٥ ٦) بصيغة الصفين .

هل هذا الاقتران المركب يساوي التركيب في الجزء أ ؟

مسألة :

هل من الضروري ان يكون التركيب لدورتين دورة ؟ علل اجابتك .

تعريف :

تكون الدورتان $(أ_1\ أ_2 \ldots أ_ر)$ و $(ب_1\ ب_2 \ldots ب_م)$

منفصلتين اذا وفقط اذا كانت المجموعتان $\{أ_1، أ_2، \ldots، أ_ر\}$ و $\{ب_1، ب_2، \ldots، ب_م\}$

منفصلتين :

$$\{أ_1، أ_2، \ldots، أ_ر\} \cap \{ب_1، ب_2، \ldots، ب_م\} = \emptyset$$

وبهذا فان اي دورتين تكونان منفصلتين اذا وفقط اذا كانت العناصر التي تحركها احداها تبقى ثابتة في الأخرى .

لاحظنا عدة امثلة من التركيبات لدورات منفصلة واخرى غير منفصلة . لنبحث في هذه التركيبات ونعين متى يمكن ابدال الدورات.

مسألة :

أ. عبر عن تركيب الاقترانين $(1\ \ 3)\ \ 5\ \ (2\ \ 4)$ و $(2\ \ 4)\ \ 5\ \ (1\ \ 3)$ بدلالة صيغة الصفين . هل هما متساو يان ؟

ب. لتكن $ق_ر = (1\ \ 2\ \ 5)$ و $د = (3\ \ 4)$.
هل تكون $ق_ر ∘ د = د ∘ ق_ر$؟

حـ. ناقشنا في المسألة ٥ الدورتين $ق_ر = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)$
و $د = (1\ \ 2 ∘ 3\ \ 4)$ فهل تكون $ق ∘ د = د ∘ ق$ ؟
في المسألة ٦ اعتبرنا الدورتين $ق = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 6)$ و
$د = (2\ \ 6\ \ 1)$. فهل تكون $ق_ر ∘ د = د ∘ ق$ لهاتين الدورتين ؟

د. لاحظنا امثلة على تراكيب من دورات منفصلة واخرى غير منفصلة.
اي العبارات التالية تعتقد انها صحيحة ؟ اذا لم تكن $ق_ر$ و $د$ دورتين منفصلتين في $S_ن$
فان $ق_ر ∘ د = د ∘ ق_ر$
اذا كانت $ق_ر$ و $د$ دورتين منفصلتين في $S_ن$ فان $ق_ر ∘ د = د ∘ ق_ر$.

برهن اجابتك بفرض ان $(أ_1\ أ_2 \ldots أ_ر)$ و $(ب_1\ ب_2 \ldots ب_م)$ دورتان ــــــــ في $S_ن$
وبرهن تبادلهما :

$(أ_1\ أ_2 \ldots أ_ر) ∘ (ب_1\ ب_2 \ldots ب_م) =$

$(ب_1\ ب_2 \ldots ب_م) ∘ (أ_1\ أ_2 \ldots أ_ر)$.

لاحظنا ان كل عنصر في S_3 هو دورة . وليس هذا صحيحاً في $S_ن$ اذا كانت $ن > 3$. و

نبرهن فيما يلي انه يمكن التعبير عن كل تبديلة كتركيب من دورات منفصلة . وقبل برهان هذه النظرية لننظر في عدة امثلة من تبديلات لا تكون دورات ونرى كيف يمكن التعبير عنها كتركيب من زوج من الدورات المنفصلة.

مسألة :

عبرعن كل من التبديلات التالية كتركيب من اثنين او اكثر من الدورات المنفصلة ازواجاً

أ. $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ١ & ٢ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

ب. $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ & ٦ \\ ٣ & ٤ & ١ & ٢ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

حـ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ & ٦ \\ ٥ & ٦ & ٢ & ٣ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$

د. $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ & ٦ & ٧ \\ ٤ & ٦ & ١ & ٣ & ٧ & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

مسألة :

لتكن

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & \cdots & ن \\ أ_{١} & أ_{٢} & \cdots & أ_{ن} \end{pmatrix}$$

تبديلة في $S_{ن}$. استعمل المسألة ١٠ كدليل ، وبين طريقة «لتحليل» هذه التبديلة الى دورات (اي ايجاد دورات منفصلة ازواجاً يعطي تركيبها التبديلة الاصلية).

وبالمسألة ١١ نكون قد برهنا اول عبارة من النظرية التالية :

اما برهان الجزء الثاني من العبارة بخصوص وحدانية التركيب فيترك للتمرين ٨.

نظرية :

يمكن التعبير عن اي تبديلة كدورة منفردة او كتركيب دورات منفصلة ازواجاً.وهذا التركيب وحيداً فيما عدا ترتيب العوامل واعتبار الدورات التي طولها ١.

ان دورة (ٱ ب) ذات الطول اثنين تنقل عنصرين من المجموعة ١ ، ٢ ، ... ، ن وتترك ن - ٢ من العناصر (العناصر المتبقية) ثابتة . ولهذا السبب فان الدورة ذات الطول اثنين اعطيت اسماً خاصاً .

تعريف :

تسمى كل دورة طولها اثنان نقلة .

لاحظ ان اي نقلة يمكن كتابتها بالصيغة (ٱ ب) حيث ٱ<ب لأن (ٱ ب) = (ب ٱ).

مسألة :

ٱ. بين ان الدورة (١ ٢ ٣) يمكن كتابتها كترتيب نقلتين بالشكل :

(١ ٣) ٥ (١ ٢) .

ب. عبر عن الدورة (١ ٢ ٣ ٤) كتركيب نقلات .

حـ عبر عن الدورة (١ ٢ ٣ ٤ ٥) كتركيب نقلات .

د. عبر عن دورة اختيارية (ٱ١ ٱ٢ . . . ٱر) كتركيب نقلات.

مسألة :

اثبت النظرية التالية :

نظرية :

يمكن التعبير عن اي تبديلة كتركيب نقلات .

لاحظ من الامثلة في المسألة ١٤ انه ليس من الضروري لهذه النقلات ان تكون منفصلة .

مسألة :

عبر عن كل من التبديلات التالية كتركيب نقلات .

ٱ. (١ ٤ ٢)

ب. (١ ٣ ٥ ٦)

حـ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

د. $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ١ & ٢ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

تبين النظرية ١٥ ان النقلات في زمرة التماثل $S_{ن}$ هي اللبنات الاساسية في بناء الزمرة . ولكي نجد كل العناصر في الزمرة نجد ان $\frac{ن(ن-١)}{٢}$ من النقلات في الزمرة ونكون تركيبات هذه النقلات . وهذا يسهل نظرياً ولكنه اصعب في التطبيق اذا كانت ن كبيرة .

تمارين :

١ ـ عبر عن كل من التبديلات التالية كتركيب دورات منفصلة .

أ. $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ & ٦ & ٧ & ٨ \\ ٣ & ٤ & ٥ & ٦ & ١ & ٨ & ٧ & ٢ \end{pmatrix}$

ب. $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ & ٦ & ٧ \\ ٤ & ٥ & ٧ & ١ & ٢ & ٣ & ٦ \end{pmatrix}$

حـ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ & ٦ & ٧ & ٨ & ٩ \\ ٧ & ٨ & ٩ & ١ & ٢ & ٣ & ٤ & ٥ & ٦ \end{pmatrix}$

٢ ـ عبر عن كل من التبديلات التالية كتركيب من دورات منفصلة.

أ. $(١ \; ٣ \; ٢ \; ٤) \circ (٣ \; ٤ \; ٥)$

ب. $(٤ \; ٦ \; ٣) \circ (٣ \; ٦ \; ٢) \circ (١ \; ٥ \; ٣)$

حـ $(٧ \; ٨ \; ٦ \; ٢) \circ (٣ \; ٤ \; ٢) \circ (١ \; ٦ \; ٥ \; ٨)$

٣ ـ عبر عن كل تبديلة في التمرين ١ كتركيب من نقلات.

٤ ـ عبر عن كل تبديلة في التمرين ٢ كتركيب من نقلات .

٥ ـ اعمل قائمة بكل العناصر في $S_{٤}$. ابدأ بكتابة قائمة بكل الدورات التي طولها اثنان ، ثلاثة ، اربعة .

٦ - أ. جد نظير النقلة (أ ب)

ب. بين ان تحليل التبديلة الى نقلات ليس وحيداً.

٧ - جد نظير الدورة (أ١ أ٢ . . . أر)

٨ - برهن ان تحليل التبديلة التي ليست دورة بشكل تركيب من دورات منفصلة ازواجاً وحيد فيما عدا ترتيب العوامل والاشتمال على الدورات التي طولها واحد .

٩ - تذكر ان رتبة العنصر قه $\in S_ن$ هي اصغر عدد صحيح موجب م حيث ان قهم يساوي لتبديلة العنصر المحايد في $S_ن$ (انظر البند ٢,٢).

جد رتبة كل من التبديلات التالية :

ا. (١ ٢ ٣)

ب. (١ ٢ ٣ ٤)

١٠ - اكمل العبارة التالية ثم برهن النظرية :

نظرية :

الدورة (أ١ أ٢ . . . أر) ذات الطول ر في $S_ن$ رتبتها ______

١١ - لتكن قه $= \alpha \circ \beta$ حيث α ، β دورتان منفصلتان وفي هذه الحالة يكون $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.
وهكذا فان قه٢ $= (\alpha \circ \beta)^٢ = \alpha^٢ \circ \beta^٢$. (لماذا ؟) اثبت ان قه٣ $= \alpha^٣ \circ \beta^٣$ وان قهم $= \alpha^م \circ \beta^م$ لكل عدد صحيح موجب م .

١٢ - استخدم النتائج في التمرين ١٠ و ١١ لايجاد رتبة كل من التبديلات التالية :

أ. (٢ ١ ٣) ∘ (٥ ٦ ٧ ٨)

ب. (٢ ١ ٤) ∘ (٣ ٥)

حـ (٢ ٤ ١) ∘ (٣ ٥ ٧ ٦)

د. (١ ٢ ٣ ٤) ∘ (٥ ٦ ٩ ١٠ ٧ ٦)

هـ (١ ٢ ٦) ∘ (٣ ٤) ∘ (٥ ٧ ٩ ٨ ١٠)

١٣ - استخدم النتائج في التمارين ١٠ ، ١١ ، ١٢ لاكمال العبارات التالية ثم برهن النظرية:

نظرية :

رتبة التبديلة يساوي ________ رتب الدورات المنفصلة التي تركيبها هو هذه التبديلة.

١٤ ـ اكمل العبارة التالية بوضع شرط على ر ثم برهن العرضية :
اذا كانت $ق_ر = (أ_١ \; أ_٢ \; . \; . \; . \; أ_ر)$ دورة طولها
$ر > ٢$ وكانت ر ________ تكون $ق_ر \circ ق_ر$ دورة . ●

٤,٢ التبديلات الزوجية والفردية

سنواصل في هذا البند دراسة زمر التبديلات $S_{\text{ن}}$ حيث ن = ٢ ، ٣ ، ٤ . . . . لقد تجنبنا حتى الآن مسألة الزمر الجزئية من $S_{\text{ن}}$ عدا القيم الصغيرة ن = ٣ و ن = ٤ (ونظرية كالي) . ولكن بمساعدة الدورات وحدودية خاصة يمكننا بيان ان $S_{\text{ن}}$ تتكون من مجموعتين منفصلتين من التبديلات وهي التبديلات « الزوجية » و « الفردية » .
ونبرهن ايضاً ان مجموعة كل التبديلات الزوجية تكون زمرة جزئية من $S_{\text{ن}}$. ولحل بعض الصعوبات الفنية ندرس اولا حدودية خاصة ذات ن من المتغيرات . وستساعدنا هذه الحدودية في التمييز بين تبديلة تنقل عدداً زوجياً من ازواج العناصر في المجموعة $\{١ ، ٢ ، .... ، \text{ن}\}$ وبين اخرى تنقل عدداً فردياً من الازواج .

تعريف :
لتكن ن $\leq$ ٢ عدداً صحيحاً ثابتاً ، عرف حدودية $\text{ق}_{\text{ن}}(\text{ن})$ عواملها اعداد صحيحة في ن من المتغيرات المختلفة $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ، ... ، $\text{س}_{\text{ن}}$ بوضع $\text{ق}_{\text{ن}}(\text{ن}) = \prod_{١ \leq \text{ر} < \text{م} \leq \text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{م}})$ حيث يرمز $\prod$ للضرب.

مسألة :
اكتب العوامل $\text{ق}^{(٣)}$ و $\text{ق}^{(٤)}$

$\text{ق}^{(٣)} = (\text{س}_{١} - \text{س}_{٢})$ (________) (________)

$\text{ق}^{(٤)} =$ ____________________

تعريف :

ليكن ن $\leq$ ٢ عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً ولتكن $\theta \in S_{\text{ن}}$ وبذا فان θ تكون تبديلية للمجموعة $\{١ ، ٢ ، ... ، \text{ن}\}$.

ونعرف حدودية تقابل θ بوضع

$$\text{ق}^{(\text{ن})}(\theta) = \prod_{١ \leq \text{ر} < \text{م} \leq \text{ن}} (\text{س}_{\theta(\text{ر})} - \text{س}_{\theta(\text{م})})$$

فلنقارن $ق^{(ن)}_{\theta}$ مع $ق^{(ن)}$: لايجاد العوامل في $ق^{(ن)}_{\theta}$، فبكل بساطة نبدل كل عامل $(س_ر - س_م)$ في $ق^{(ن)}_{\theta}$ بالعامل $(س_{\theta(ر)} - س_{\theta(م)})$ وبذا فان $ق^{(ن)}_{\theta}$ تصبح حدودية في ن من المتغيرات $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$ ولكن مع تبديل الارقام السفلى بالتبديلة θ .

لتكن ن = ٣ ولتكن $\theta = (١ \quad ٢) \in S_٣$. فان

$$ق^{(٣)}_{\theta} = (س_٢ - س_١)(س_٢ - س_٣)(س_١ - س_٣) = - ق^{(٣)}.$$

مسألة :

لتكن ن = ٣ فلكل تبديلة $\theta \in S_٣$ احسب $ق^{(٣)}_{\theta}$ وجد علاقة بين $ق^{(٣)}_{\theta}$ و $ق^{(٣)}$. احتفظ بهذه النتائج لاستعمالها فيما بعد .

مسألة :

ليكن ن $\geq$ ٢ عدداً صحيحاً ثابتاً . اثبت انه لكل $\theta \in S_ن$ نحصل على $ق^{(ن)}_{\theta} = ق^{(ن)}$ أو $ق^{(ن)}_{\theta} = - ق^{(ن)}$.

تعريف :

ليكن ن $\geq$ ٢ عدداً صحيحاً ثابتاً . تكون التبديلة $\theta \in S_ن$ تبديلية زوجية اذا وفقط اذا كان $ق^{(ن)}_{\theta} = ق^{(ن)}$ وتكون تبديلية فردية اذا وفقط اذا كان $ق^{(ن)}_{\theta} = - ق^{(ن)}$. نستعمل الرمز $A_ن$ للمجموعة المكونة من كل التبديلات الزوجية في $S_ن$:

$$A_ن = \left\{ \theta : \theta \in S_ن ، ق^{(ن)}_{\theta} = ق^{(ن)} \right\}$$

وتبين المسألة ٢١ ان كل عنصر من $S_ن$ اما ان يكون تبديلة زوجية او تبديلة فردية . وبما ان $A_ن$ تكون المجموعة المكونة من التبديلات الزوجية فان ى − ٨ تكون المجموعة المكونة من كل التبديلات الفردية

مسألة :

لتكن ن = ٣

٢. عين المجموعة $A_٣$ المكونة من كل التبديلات الزوجية في $S_٣$ والمجموعة $S_٣ - A_٣$ المكونة من كل التبديلات الفردية في $S_٣$.

ب. هل المجموعة المكونة من التبديلات الفردية زمرة جزئية من $S_٣$ ؟

حـ ما العلاقة بين الرتبة في $A_٣$ والرتبة في $S_٣$ ؟

ما دليل $A_٣$ في $S_٣$ ؟

مسألة :

هل تكون التبديلة المحايدة زوجية ام فردية في $S_{ن}$ ؟ وضح .

مسألة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

ليكن ن ≥ ٢ عدداً صحيحاً ثابتاً . فكل نقلة (أ ب) حيث أ≠ب في $S_{ن}$ هي تبديلة ▲

اذا كانت α ، $\beta \in S_{ن}$ فان $\alpha \circ \beta \in S_{ن}$ ولحساب $\text{ق}^{(ن)}_{\beta\circ\alpha}$

لاحظ ان

$$\text{ق}^{(ن)}_{\beta\circ\alpha} = \prod_{1 \le \text{ر} < \text{م} \le \text{ن}} \left(\text{س}_{(\beta\circ\alpha)(\text{ر})} - \text{س}_{(\beta\circ\alpha)(\text{م})} \right)$$

$$= \prod_{1 \le \text{ر} < \text{م} \le \text{ن}} \left(\text{س}_{\alpha(\beta(\text{ر}))} - \text{س}_{\alpha(\beta(\text{م}))} \right)$$

ولذا فلكي نحسب $\text{ق}^{(ن)}_{\beta\circ\alpha}$ نطبق اولا التبديلة β على $\text{ق}^{(ن)}$ لنحصل على $\text{ق}^{(ن)}_{\beta} = \text{ق}^{(ن)}$ أو $\text{ق}^{(ن)}_{\beta} = -\text{ق}^{(ن)}$.
ونطبق على هذه النتيجة التبديلية α . اذا شئت فحاول هذا مع تبديلية في $S_{٣}$ أو $S_{٤}$.

مسألة :

ليكن ن ≥ ٢ عدداً صحيحاً ثابتاً . و α ، $\beta \in S_{ن}$. ففي كل من الحالات في الجدول ٤,١ عين هل $\alpha \circ \beta$ تبديلية زوجية ام فردية.

الجدول ٤,١

α	β	$\beta\circ\alpha$
زوجي	زوجي	
زوجي	فردي	
فردي	زوجي	
فردي	فردي	

تذكر النظرية ١٥ أنه يمكن التعبير عن كل تبديلة كتركيب من نقلات . فمثلا :

(١ ٢ ٣) = (١ ٢) ∘ (١ ٢) ،

(١ ٢ ٣ ٤) = (١ ٤) ∘ (١ ٣) ∘ (١ ٢)

و يعطينا هذا وسيلة ملائمة لمعرفة التبديلات الزوجية والفردية .

مسألة : ٢٧

برهن الفرضيلت التالية : لتكن ن ≥ ٢ ، ولتكن $\theta \in S_{ن}$. فاذا امكن التعبير عن θ بطريقة واحدة على الاقل كتركيب من عدد زوجي من النقلات فتكون θ تبديلة ———— . واذا امكن التعبير عن θ بطريقة واحدة على الاقل كتركيب من عدد فردي من النقلات فان θ تكون تبديلة ———— .

والنتيجة الفورية لفرضيات المسألة ٢٧ هي النظرية التالية :

نظرية :

لتكن ن ≥ ٢ . فالتبديلة $\theta \in S_{ن}$ تكون تبديلة زوجية اذا وفقط اذا امكن التعبير عنها بطريقة واحدة على الاقل كحاصل ضرب نقلات عددها ———— .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن ن ≥ ٢ . فان $A_{ن}$ مجموعة كل التبديلات الزوجية هي زمرة جزئية من $S_{ن}$ ▲

تدعى الزمرة الجزئية $A_{ن}$ من $S_{ن}$ بالزمرة المتبادلة على ن من الرموز.

تذكر ان زمرة التماثل $S_{ن}$ رتبتها ———— .

تساعدنا المسألة التالية والمسألة ٣١ في تعيين رتبة الزمرة $A_{ن}$ من $S_{ن}$

مسألة :

برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

اي تبديلتين فرديتين في $S_{ن}$ تنتميان لنفس المجموعة المرافقة اليمنى من $A_{ن}$. وبكلمات اخرى اذا كانت α ، β تبديليتين فرديتين في $S_{ن}$ تكون α عنصراً في المجموعة المرافقة اليمنى $A_{ن} \circ \beta$ ▲

مسألة :

اثبت التمهيدية التالية :

تمهيدية :

ليكن ن ≥ ٢ عدداً صحيحاً ثابتاً . فللزمرة الجزئية $A_{ن}$ من $S_{ن}$ عدد من المجموعات المرافقة في $S_{ن}$ مقدارها ———— بالضبط اي ان دليل الزمرة الجزئية $A_{ن}$ في $S_{ن}$ هو ————)

مسألة :

برهن النظرية التالية :

ليكن ن $\geqslant$ ٢ عدداً صحيحاً ثابتاً . فللزمرة الجزئية $A_{ن}$ من $S_{ن}$ رتبة قدرها ______________ ،
وتكون $A_{ن}$ زمرة جزئية طبيعية من $S_{ن}$.

تمارين :

١ - عين هل كل من التبديلات التالية زوجية ام فردية :

أ. $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ & ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، د $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ & ١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

ب. $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ & ١ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، هـ $\begin{pmatrix} ٨ & ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٧ & ٨ & ١ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

حـ $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٤ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، و $\begin{pmatrix} ٧ & ٦ & ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٣ & ٢ & ١ & ٧ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

٢ -

أ. اكتب قائمة بكل عناصر الزمرةالمتبادلة $A_{٤}$ في $S_{٤}$. ●

ب. بين ان $A_{٤}$ لها زمر جزئية بالرتب اثنين وثلاثة واربعة على الترتيب .

حـ بين ان $A_{٤}$ هي الزمرة الجزئية الموصوفة في التمرين ٢,٣ ــ ١٤.
لقد لاحظنا في ذلك التمرين ان $A_{٤}$ ليس لها زمرة جزئية رتبتها ستة.

٣ - اكتب قائمة بالتبديلات الفردية في $S_{٤}$. تكون هذه التبديلات احدى المجموعتين المرافقتين لـ $A_{٤}$ في $S_{٤}$.

٤ - بين ان الدورة ($أ_{١}$، $أ_{٢}$ .. $أ_{ر}$) ذات الطول ر في $S_{ن}$ تكون
تبديلة زوجية اذا كانت ر ______________ ،
وتبديلة فردية اذا كانت ر ______________ .

٥ - عرف اقتراناً ϕ من $S_{ن}$ الى $Z_{٢}$ بوضع

$$\phi(أ) = \begin{cases} ٠_{٢} & \text{اذا كانت أ تبديلة زوجية} \\ ١_{٢} & \text{اذا كانت أ تبديلة فردية} \end{cases}$$

برهن ان ϕ اقتران محافظ وان نو $(\phi) = A_{ن}$.

٤,٣ التشاكل الذاتي والمرافقات

لنعد الى دراستنا للاقترانات المحافظة وتشاكلات الزمر باعتبار تلك التشاكلات التي تقرن الزمرة سه بنفسها . لقد لاحظنا ان المجموعة م (سه) المكونة من كل الاقترانات الواحد لواحد الشاملة التي تقرن سه بنفسها تكون زمرة هي زمرة التبديلات على سه . فيمكننا ان نسأل هل المجموعة المكونة من كل التشاكلات ϕ : سه $\longrightarrow$ سه هي زمرة جزئية من م (سه) وقبل الاجابة على هذا السؤال نطور بعض الاصطلاحات والرموز .

تعريف :

التشاكل الذاتي للزمرة سه هو تشاكل شامل من سه الى نفسها لكل زمرة تشاكل ذاتي واحد على الاقل هو الاقتران المحايد ح المعرف بالصيغة ح (س) = س لكل س $\in$ سه.

مسألة :

أ. لتكن ل زمرة الضرب المكونة من كل المصفوفات غير المنفردة ٢ × ٢ . بين ان الاقتران ϕ : ل $\longleftarrow$ ل المعرف باعتبار

$$\phi(\text{سه}) = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} \cdot \text{سه} \cdot \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}^{-١}$$

لكل سه $\in$ ل تشاكلا ذاتياً من ل .

لاحظ ان

$$\phi(\text{سه}) = \text{صه س صه}^{-١} \text{ حيث صه } = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

ب. بين ان الاقتران $\phi : Z_٦ \longleftarrow Z_٦$ المعرف باعتبار $\phi(أ_٦) = ٥_٦ أ_٦$ لكل $أ_٦ \in Z_٦$ تشاكلا ذاتياً لزمرة الجمع $Z_٦$.

مسألة :

لتكن سه زمرة و أ $\in$ سه ثابتة . عرف اقتراناً $\phi_{أ}$: سه $\longleftarrow$ سه بوضع $\phi_{أ}$ (سه) = أ٥س٥أ$^{-}$ لكل س $\in$ سه . اثبت ان $\phi_{أ}$ يكون تشاكلا ذاتياً على سه .

(الاقتـران ϕ في المسألة ٣٤' أ هو مثال على هذا التشاكل الذاتي) واي تشاكل ذاتي على سه بالصيغة المعرفة في المسألة ٣٥ يدعى تشاكلا ذاتياً داخلياً على سه . واذا لم يكن التشاكل الذاتي تشاكلا ذاتياً داخلياً فيسمى تشاكلا ذاتياً خارجياً .

مسألة :

عرف $\phi : Z \longrightarrow Z$ بوضع ϕ (س) = − س

لكل س $\in Z$. اثبت ان الاقتران ϕ يكون تشاكلا ذاتياً خارجياً من (Z ، +)

لنبحث الآن في سلوك التشاكل الذاتي الداخلي للزمرة سه .

ولننظر اولا الى مثال .

مسألة :

اعتبر الزمرة (S_3، ٥) والتبديلة

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

أ. صف $\phi_{\text{أ}}$ بايجاد $\phi_{\text{أ}}$(س) لكل س $\in S_3$.

ب. لتكن صه زمرة جزئية طبيعية رتبتها ثلاثة في S_3 .
بين ان $\phi_{\text{أ}}$(س) $\in$ صه لكل س $\in$ صه . ولهذا فان الزمرة الجزئية الطبيعية صه تقترن بنفسها بالاقتران الشامل ϕ .

حـ. خذ زمرة جزئية ع بالرتبة اثنين في S_3 بحيث ان أ$\notin$ ع . هل يكون $\phi_{\text{أ}}$ اقتراناً شاملا من ع الى نفسها ؟
جد مجموعة الصور $\phi_{\text{أ}}$ (ع) والمجموعة

$$\text{أ} ٥ \text{ع} ٥ \text{أ}^{-} = \{ \text{أ} ٥ \text{ع} ٥ \text{أ}^{-} : \text{ع} \in \text{ع} \}$$

وقارن بينهما . قارن بين ع، $\phi_{\text{أ}}$(ع) . هل تكون ع زمرة جزئية طبيعية من S_3 ؟
لقد لاحظنا انه اذا كانت (سه ، ٥) زمرة وكان ϕ : سه $\longrightarrow$ سه اقتراناً محافظاً فان

مجموعة الصور ϕ (سه) = $\{ \phi$ (س) : س$\in$سه$\}$ تكون زمرة جزئية من سه (النظرية ٥١ في الفصل ٢) . واذا كانت صه زمرة جزئية من سه فيمكننا تعريف اقتران ϕ_1: صه$\rightarrow$ سه بوضع ϕ_1 (س) = ϕ (س) لكل س$\in$ صه ويكون هذا الاقتران ϕ_1 اقتراناً محافظاً . (لماذا ؟) . وبذا فان مجموعة الصور

ϕأ (صه) = ϕ (صه) تكون زمرة جزئية من سه .

مسألة :

لتكن (سه ، ٥) زمرة ، صه زمرة جزئية من سه و أ∈ سه . جد تشاكلا ذاتياً على سه بحيث تكون المجموعة أ٥صه٥ أَ هي صورة صه بالنسبة للتشاكل الذاتي وهذا يثبت ان أ٥صه٥ أَ هي زمرة.

اذا كانت صه هي زمرة جزئية من زمرة ما سه فتسمى الزمرة الجزئية أ٥ص٥ أَ بمرافقة صه بالعنصر أ . وبالنسبة للعنصر س ∈ سه تكون مرافقة س في أ هي العنصر أ٥س٥ أَ . انظر التمرينين ٩, ١٠ للعمل بالمرافقات .

مسألة :

لتكن صه زمرة جزئية من الزمرة سه ولتكن أ∈سه ثابتة . كيف تكون العلاقة بين صه و أ٥صه٥ أَ ؟ (انظر النظرية ٨٠ في الفصل ٢ لرؤية اشكال متكافئة لتعريف الزمرة الجزئية الطبيعية).

مسألة :

اثبت النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (سه ، ٥) زمرة . تكون الزمرة الجزئية صه طبيعية في سه اذا وفقط اذا اقترنت صه بنفسها في كل تشاكل داخلي على سه (اي ان ϕأ (صه) = صه لكل أ ∈ سه) .

ولنعد الآن الى سؤالنا الاصلي في هذا البند : هل تكون المجموعة من كل التشاكلات الذاتية على سه زمرة جزئية من م (سه) ، الزمرة المكونة من كل التبديلات على سه ؟ والاجابة على السؤال في النظرية التالية.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (سه ، ٥) زمرة . فالمجموعة ذ (سه) المكونة من كل التشاكلات الذاتية على سه هي زمرة بالنسبة لعملية تركيب الاقترانات . .

ما هو وضع التشاكلات الذاتية الداخلية للزمرة ، سه في بنية المجموعة ذ (سه) ؟ تجيب المسألتان التاليتان على هذا السؤال .

مسألة :

أ. برهن ان المجموعة ك المكونة من كل التشاكلات الذاتية الداخلية للزمرة (سه ، ٥) هي زمرة جزئية من ذ (سه) المكونة من كل التشاكلات الذاتية على سه .

ب. لتكن $\psi \in$ ذ(سه) و $\phi_م \in$ ك احسب

$(\psi \circ \phi_م \circ \psi^{-1})$ (س) لكل س $\in$ سه .

مسألة :

استعمل المسألة ٤٢ لبرهنة النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (سه ، ٥) زمرة . فتكون المجموعة ك المكونة من كل التشاكلات الذاتية الداخلية على سه زمرة جزئية طبيعية من ذ (سه) زمرة كل التشاكلات الذاتية على سه .

لقد رأينا مثالا لتشاكل ذاتي خارجي للزمرة (Z ، +) ولكن لم نلاحظ امثلة على التشاكلات الذاتية الداخلية . ولكن المسألة القادمة تصف كل التشاكلات الذاتية الداخلية للزمرة (Z ، +) اضافة الى كل التبديلات الاخرى.

مسألة :

لتكن (سه ، +) زمرة تبديلية ، اعط وصفاً كاملا للزمرة المكونة من كل التشاكلات الذاتية الداخلية على سه . وتصبح هذه النتيجة اي زمرة تبديلية مهما يكن الرمز المستعمل للعملية .

تمارين :

١ ـ جد تشاكلا ذاتياً خارجياً لزمرة الجمع $Z_ن$

٢ ـ لنوسع نتيجة المسألة ٣٦ . افرض (سه ، ٥) زمرة ، وعرف

ϕ (س) = س لكل س $\in$ سه .

أ. برهن انه اذا كانت سه زمرة تبديلية فأن ϕ تشاكل ذاتي على سه .

ب. هل العكس صحيح ؟ وضح

٣ ـ جد كل التشاكلات الذاتية الداخلية على ($D_٤$ ، ٥) وهي زمرة تماثلات المربع .

٤ ـ أ. جد كل التشاكلات الذاتية الداخلية على ($S_٣$ ، ٥)

ب. هل يوجد تشاكل ذاتي خارجي على ($S_٣$ ، ٥) ؟ وضح

٥ ـ جد كل التشاكلات الذاتية على (Z ، +) . ●

٦ ـ جد كل التشاكلات الذاتية على (Q ، +) . ●

٧ ـ جد كل التشاكلات الذاتية على ($Z_د$ ، +) حيث د عدد أولي

٨ ـ لتكن (سه ، ٥) زمرة . تذكر ان مركز الزمرة سه هو المجموعة

Z (سه) = {س : س $\in$ سه و س٥ص = ص٥س لكل ص $\in$ سه}

(انظر التمرينين ٢,٧-٩ و ٢,٧-١٠) . برهن انه اذا كانت أ $\in$ Z (سه) فان $\phi_أ$ (س) =

س لكل س ∈ سه .

برهن او انف العكس

٩ - لتكن (سه ، ٥) زمرة نقول ان س هي مرافقة ص اذ وفقط اذا وجد أ ∈ سه حيث ان س = أ٥ص٥أَ . برهن ان العلاقة «س هي مرافقة ص» هي علاقة تكافؤ على سه.

١٠ - أ. لتكن (سه ، ٥) زمرة . حسب التمرين ٩ تكون العلاقة «س هي مرافقة ص» هي علاقة تكافؤ لهذه العلاقة . برهن ان المركز Z (سه) للزمرة سه هو اتحاد كل صفوف التكافؤ التي يحتوي كل منها عنصراً واحداً بالضبط

ب. برهن انه اذا كانت س زمرة منتهية فان عدد صفوف التكافؤ المرافقة التي تحتوي على عنصر واحد يقسم رتبة سه .

١١ - لتكن (سه ، ٥) زمرة ولتكن Z (سه) ترمزالى مركز سه . اثبت ان زمرة الخارج سه / Z (سه) تتشاكل مع الزمرةك (سه) المكونة من كل التشاكلات الذاتية الداخلية على سه . ●

١٢ - تعريف لتكن (سه ، ٥) زمرة ولتكن صه مجموعة جزئية غير خالية من سه. يعرف مطّبع صه بالمجموعة ت (صه) = {أ : أ ∈ سه و صه ٥ أ = أ٥صه} .

أ. برهن ان ت (صه) = {أ : أ ∈ سه و أ٥صه٥أَ = صه}

ب. برهن ان ت (صه) زمرة جزئية من سه .

١٣ - لتكن س عنصراً لزمرة سه .

أ. برهن ان ت {س} = {أ : أ ∈ سه و س٥أ = أ٥س}

ب. برهن ان س تبقى ثابتة بالتشاكل الذاتي الداخلي ϕأ اذا وفقط اذا بقيت أ ثابتة في التشاكل الذاتي الدخلي ϕس

حـ. برهن ان ب ∈ ت ({س}) اذا وفقط اذا كان س ∈ ت ({ب}).

١٤ - جد المطبع ت ({س}) لكل عنصر س ∈ S_3

(انظر التمرين ١٣ أ).

١٥ - لتكن صه زمرة جزئية من الزمرة سه .

أ. برهن ان صه زمرة جزئية طبيعية من ت (صه) .

ب. برهن ان ت (صه) هي اكبر زمرة جزئية من سه تكون فيها صه زمرة جزئية طبيعية .

٤,٤ الجداءات المباشرة الخارجية

يتكون المستوى الاحداثي المألوف R^2 من كل الازواج المرتبة (أ ، ب) حيث أ $\in R$ و ب $\in R$. وقد رأينا في التمرين ١,٢ - ١٠ أن المجموعة R^2 تكون زمرة بالنسبة لعملية الجمع (+) المعرفة بجمع الاحداثيات :(أ ، ب) + (حـ ، د) = (أ + حـ ، ب + د) .
وفي هذا البند نعمم المثال R^2 ونبين كيف نكون زمرة جديدة من اي زمرتين صه و عـ مفروضتين . ونبرهن ان هذه الزمرة الجديدة (واسعة) بمعنى انها تحتوي على زمرة جزئية متشاكلة مع صه وزمرة جزئية اخرى متشاكلة مع عـ .

تعريف :

لتكن (صه ، ٥) و (عـ ، *) زمرتين . فالجداء المباشر الخارجي لـ صه ، عـ هو الجداء الديكارتي

صه × عـ = { (ص ، ع) : ص ∈ صه ، ع ∈ عـ }

بالنسبة لعملية معرفة كالتالي :

(ص ،ع) □ (ص$_1$ ، ع$_1$) = (ص٥ص$_1$ ، ع*ع$_1$) .

لكل ص ، ص$_1$ ∈ صه و ع ، ع$_1$ ∈ عـ و يرمز للجداء المباشر الخارجي لـ صه و عـ بالرمز صه × عـ

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

اذا كانت (صه ، ٠) ، (عـ ، *) زمرتين ، فان (صه×عـ ، □) زمرة .

اذا كانت (صه ، ٠) و (عـ ، ٠) زمرتي ضرب فتكتب العملية على صه × عـ بالصيغة

(ص ، ع) · (ص$_1$ ، ع$_1$) = (ص ص$_1$ ، ع ع$_1$)

وتسمى الضرب .

واذا كانت (صه ، +) و (عـ ، +) زمرتي جمع فتكتب العملية على صه×عـ بالصيغة

(ص ، ع) + (ص$_1$ ، ع$_1$) = (ص + ص$_1$ ، ع + ع$_1$)

وتسمى الجمع .

وفي هذه الحالة يسمي بعض المؤلفين صه × عـ الجمع المباشر الخارجي لـ صه ، عـ .

مسألة :

أ. لنأخذ الزمرتين (Z_2 ، +) و (Z_3 ، +) .
اكتب قائمة بالعناصر في $Z_2 \times Z_3$. ما رتبة الزمرة $Z_2 \times Z_3$ ؟

ب. لتكن (صه ، ٥) و (ع ، *) زمرتين منتهيتين .
عبر عن رتبة الزمرة (صه × ع ، □) بدلالة رتبة صه ورتبة ع .
تذكر انه اذا كانت (سه ، +) زمرة فالمضاعف ن أ ($ن \in Z$) للعنصر $أ \in$ سه يعرف استقرائياً كما يلي : (٠) أ = ٠
ن . أ = (ن − ١) . أ + أ حيث $ن \in Z^+$ ، و (− ن) أ = ن (− أ) حيث $ن \in Z^+$ ،
وبالمثل اذا كانت (سه ، ٥) زمرة لا جمعية فتعرف القوى $أ^ن$ ($ن \in Z$) للعنصر $أ \in$ س كما يلي :
$أ^٠$ = و ، $أ^ن = أ^{ن-١}$ ٥ أ حيث
$ن \in Z^+$ و $أ^{-ن} = (\bar{أ})$ حيث $ن \in Z^+$.
وتدلنا المسألة التالية كيف نحسب القوى او المضاعفات من صه × ع لزمرتين معينتين صه و ع وهي تفيدنا اذا رغبنا في ايجاد رتبة عنصر ما من صه × ع.

مسألة :

لتكن صه ، ع زمرتين ، وليكن(صه ، ع) عنصراً في صه × ع. وليكن ن عدداً صحيحاً موجباً.

أ. اذا كان صه و ع زمرتي ضرب ، فاحسب $(ص ، ع)^٢$ و $(ص ، ع)^٣$.
ثم $(ص ، ع)^ن$ = (ـــــــ ، ـــــــ) .

ب. اذا كانت صه و ع زمرتي جمع ، احسب (ص ، ع) و ٣ (ص ، ع) .
ثم ن (ص ، ع) = (ـــــــ ، ـــــــ) .

في المسألة التالية ننظر في امثلة اخرى للجداء المباشر ونبحث في العلاقة بين رتبة (ص ، ع)$\in$ صه × ع ورتبة ص $\in$ صه و ع $\in$ ع.

مسألة :

اعتبر زمرتي الجمع $Z_٢$ و $Z_٣$

أ. جد رتبة كل عنصر في $Z_٢ \times Z_٣$

ب. هل $Z_٢ \times Z_٣$ زمرة دورية ؟ (انظر البند ٢,٦ لتعريف الزمرة الدورية)

حـ برهن او انف ان $Z_٢ \times Z_٣$ تتشاكل مع زمرة الجمع $Z_٦$.

مسألة :

اعتبر زمرتي الجمع $Z_٤$ و $Z_٦$

أ. جد اصغر عدد صحيح موجب ر بحيث ان ر . $أ_٤$ = ٠ لكل $أ_٤ \in Z_٤$

ب. جد اصغر عدد صحيح موجب م بحيث ان م . $ب_٦$ = $٠_٦$ لكل $ب_٦ \in Z_٦$

حـ جد اصغر عدد صحيح موجب ن بحيث ان ن ($أ_٤$ ، $ب_٦$) = ($٠_٤$ ، $٠_٦$)
لكل ($أ_٤$ ، $ب_٦$)$\in Z_٤ \times Z_٦$.

احسب كل حواصل الجمع الممكنة (أ٢ ، ٣) + (٢ ، ب٣) لعنصرين الاول منها في $Z_{٢}$ والثاني في $Z_{٣}$

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن صه و ع زمرتين ، فان

أ. صَه و عَ تكونان زمرتين جزئيتين من صه و ع.

ب. صَه $\cap$ عَ = { ــــــــــــــــ } .

حـ. لكل عنصر هـ $\in$ صه × ع تمثيل واحد بالضبط صيغته هـ = صَ ∘ عَ حيث صَ $\in$ صَ و عَ $\in$ عَ

د. تكون صه متشاكلة مع صَه ، ع متشاكلة مع عَ

مسألة :

برهن ان زمرة الخارج $(Z_{٢} \times Z_{٣}) / \bar{Z}_{٢}$ تكون متشاكلة مع الزمرة ــــــــــ . تذكر ان عنصر الزمرة الخارج هو مجموعة مرافقة صيغتها (أ٢، ب٣) + $\bar{Z}_{٢}$. جد كل المجموعات المرافقة المختلفة لـ $\bar{Z}_{٢}$.

ان نظرية التشاكل الاولى من النتائج الهامة المفيدة للفصل ٢ . وتقول هذه النظرية انه اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً شاملا من زمرة سه الى زمرة سَه وكانت نو (ϕ) = ع فتكون الزمرة الخارجة سه / ع متشاكلة مع سَه . فمثلا اذا اردنا ان نبرهن ان (صه × ع) / صَه متشاكلة مع زمرة سَه نحتاج فقط الى تعريف اقتران ϕ من صه × ع الى سَه ونبرهن انه اقتران محافظ شامل يحقق صَه = نو (ϕ) .

مسألة :

أ. برهن التمهيدية التالية :

تمهيدية :

لتكن صه و ع زمرتين . فهناك اقتران محافظ شامل ϕ من صه × ع الى صه بحيث ان نو (ϕ) = عَ

ب اذكر نتيجة مماثلة للزمرة ع .

مسألة : ٥٩

اكمل العبارة التالية وبرهن النظرية :

نظرية :

لتكن صه و ع زمرتين . فتكون الزمرة الخارجة (صه × ع) / صَه متشاكلة مع ــــــــــــ

د. قرر هل $Z_{٤} \times Z_{٦}$ زمرة دورية ام لا .

و. برهن او انف أن $Z_{٤} \times Z_{٦}$ متشاكلة مع زمرة الجمع $Z_{٢٤}$

مسألة :

لتكن صه و عـ زمرتين منتهيتين ولتكن ص $\in$ صه و ع $\in$ عـ.

عبر عن رتبة العنصر (ص ، ع) $\in$ صه × عـ بدلالة رتبة ص ورتبة ع .

رأينا في البند ٢,٦ ان كل زمر الجمع $Z_{ن}$ ، ن $\in Z^{+}$ دورية وان كل زمرة دورية رتبتها ن تكون متشاكلة مع $Z_{ن}$. ونرغب الآن في الاجابة على السؤال التالي : لأي من الاعداد الصحيحة الموجبة م ، ن يكون الجداء المباشر الخارجي $Z_{م} \times Z_{ن}$ زمرة دورية ؟

ان هذا ما تحتويه النظرية التالية .

مسألة :

اكمل العبارات التالية :

نظرية :

أ. يكون الجداء المباشر الخارجي لزمرتي الجمع $Z_{م}$ و $Z_{ن}$ زمرة دورية اذا وفقط اذا كان ________ .

ب. تكون زمرة الجمع $Z_{م} \times Z_{ن}$ متشاكلة مع زمرة الجمع $Z_{من}$ اذا وفقط اذا ________ .

نظرية :

لتكن (صه ، ٥) و (عـ ، *) زمرتين . فيكون الجداء المباشر الخارجي صه × ع تبديلياً اذا وفقط اذا كانت كل من صه و عـ تبديلية .

اترك برهان النظرية للتمرين ١ .

ذكرنا عند بداية هذا البند ان صه × عـ واسعة بمعنى انها تحتوي على زمرة جزئية متشاكلة مع صه وزمرة جزئية اخرى متشاكلة مع عـ. وفي المسائل القادمة نعرف وندرس هذه الزمرة الجزئية وزمرها الخارجية.

تعريف :

لتكن صه و عـ زمرتين ، ولتكن $\acute{صه}$ = صه × $\{و_{ع}\}$ =

$\{($ص ، $و_{ع})$: ص $\in$ صه$\}$ و $\acute{ع}$ = $\{و_{ص}\} \times$ عـ = $\{($$و_{ص}$ ، ع$)$: ع $\in$ ع$\}$

لاحظ ان $\acute{صه}$ و $\acute{ع}$ عرفتا باعتبارهما مجموعتين جزئيتين من صه × عـ .

مسألة :

في $Z_{٢} \times Z_{٣}$ جد عناصر المجموعتين $\acute{Z}_{٢}$ و $\acute{Z}_{٣}$.

والزمرة الخارجة (صه × ع) / ع̅ متشاكلة مع ــــــــــــــ .

تمارين :

١ ـ برهن النظرية ٥٣ .

٢ ـ اذا كانت صه و ع زمرتين دوريتين منتهيتين في الشرط على رتبتي صه و ع الذي يضمن ان تكون صه × ع زمرة دورية . برهن نتيجتك .

٣ ـ برهن او انف ان $Z \times Z$ زمرة دورية بالنسبة للجمع .

٤ ـ لتكن صه و ع زمرتين ولتكن صه$_{١}$ و ع$_{١}$ زمرتين جزئيتين من صه و ع على الترتيب . برهن ان صه$_{١}$ × ع$_{١}$ زمرة جزئية من صه × ع .

٥ ـ جد كل الزمر الجزئية في $Z \times Z$ بالنسبة للجمع .

٦ ـ لتكن (صه$_{١}$ ، ٥) ، (صه$_{٢}$ ، ٥) ... (صه$_{ن}$ ، ٥) زمر

عرف جداء مباشراً خارجياً صه$_{١}$ × صه$_{٢}$ × ... × صه$_{ن}$ وعملية على الجداء المباشر الخارجي . برهن ان صه$_{١}$ × صه$_{٢}$ × ... × صه$_{ن}$ تكون زمرة بالنسبة لهذه العملية .

٧ ـ أ. برهن او انف ان زمرة الجمع $Z_{٢} \times Z_{٣} \times Z_{٥}$ تكون متشاكلة مع زمرة الجمع $Z_{٣٠}$

ب. برهن او انفِ ان $Z_{٢} \times Z_{٤} \times Z_{٥}$ تكون متشاكلة مع زمرة الجمع $Z_{٤٠}$

٤,٥ الجداءات المباشرة الداخلية

اعتبرنا في ٤,٤ ان (صہ ، ٥) و (عـ ، +) اي زمرتين ، وكونتا الجداء المباشر الخارجي صہ × عـ. وفي هذا البند نبين ما معنى ان تكون زمرة ما سہ الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين . ونبين انه يمكن التعبير عن عدة زمر مألوفة بصيغة جداء مباشر داخلي لزمرتين طبيعيتين . ونجد ايضاً علاقة بين الجداء المباشر الداخلي والجداء المباشر الخارجي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين لأي زمرة.

اذا كانت صہ و عـ زمرتين جزئيتين من الزمرة سہ فيكون تعريف صہ ٥ عـ بانه المجموعة

$$\text{صہ} \circ \text{عـ} = \left\{ (\text{ص} \circ \text{ع}) : \text{ص} \in \text{صہ} \text{ ، } \text{ع} \in \text{عـ} \right\}$$

مسألة :

برهن ان المجموعة صہ٥عـ تكون زمرة جزئية طبيعية للزمرة سہ اذا كانت صہ و عـ زمرتين جزئيتين طبيعيتين من سہ . ▲

انظر التمرين ٢,٧ ــ ١٥ لدراسة امثلة عما يحدث اذ لم تكن صہ و عـ زمرتين جزئيتين طبيعيتين.

تعريف :

لتكن صہ و عـ زمرتين جزئيتين طبيعيتين للزمرة سہ . فتكون سہ الجداء المباشر الداخلي لـ صہ و عـ اذا وفقط اذا كان سہ = صہ٥عـ و صہ ∩ عـ = {و}.

مسألة :

١. في زمرة الجمع م$_٢$(R) لتكن

$$\text{صہ} = \left\{ \begin{pmatrix} \text{أ} & ٠ \\ ٠ & \text{د} \end{pmatrix} : \text{أ ، د} \in R \right\} \text{ و}$$

$$\text{عـ} = \left\{ \begin{pmatrix} ٠ & \text{ب} \\ \text{حـ} & ٠ \end{pmatrix} : \text{ب ، حـ} \in R \right\}$$

برهن ان م$_7$ (R) هي الجداء المباشر الداخلي للزمرتين صه و عـ .

ب. اثبت ان زمرة الجمع

$$Q\left[\sqrt{2}\right] = \left\{ أ + ب\sqrt{2} : أ ، ب \in Q \right\}$$

هي الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين فعلا .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

اذا كانت سه زمرة هي الجداء المباشر الداخلي للزمرتين الجزئيتين الطبيعيتين صه و عـ . فان ص∘ع = ع∘ص لكل ص ∈ صه و ع ∈ عـ

لاحظ ان النظرية ٦٣ لا تقول ان سه زمرة تبديلية . انها تقول ببساطة ان العنصرين ص و ع يتبادلان اذا اختيرا من الزمرتين الجزئيتين الطبيعيتين صه و عـ على الترتيب حيث صه ∩ عـ = {و} و صه∘عـ = سه .

مسألة :

برهن النظرية التالية

نظرية :

لتكن صه و عـ زمرتين جزئيتين طبيعيتين من الزمرة سه . فتكون سه الجداء المباشر الداخلي للزمرتين صه و عـ اذا وفقط اذا كان لكل عنصر هـ ∈ سه تمثيل واحد بالضبط صيغته هـ = ص∘ع حيث ص ∈ صه و ع ∈ عـ

لقد لاحظنا ان الجداء المباشر الخارجي صه × عـ للزمرتين صه و عـ يحتوي على زمرتين جزئيتين طبيعيتين صَه و عَـ بحيث ان كل عنصر هـ ∈ صه × عـ يكون تمثيله وحيداً كالتركيب هـ = صَ∘عَ حيث صَ ∈ صَه و عَ ∈ عَـ (النظرية ٥٦) ولهذا يمكن كتابة الجداء المباشر الخارجي ايضاً كجداء مباشر داخلي صَه∘عَـ .

مسألة :

أ. بين ان زمرة الجمع Z_6 هي الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين بالرتبتين اثنين وثلاثة على الترتيب.

ب. بين ان زمرة الجمع Z_6 متشاكلة مع الجداء المباشر الخارجي للزمرتين في الجزء أ.

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

تكون الزمرة (صه ، ٥) الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين صه و ع اذا وفقط اذا كانت سه متشاكلة مع الجداء المباشر الخارجي صه × ع .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

اذا كانت (سه ، ٥) الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين صه و ع فتكون سه / صه متشاكلة مع ع و سه / ع متشاكلة مع صه .

تقول النظرية ٥٢ب ان زمرة الجمع $Z_{م} \times Z_{ن}$ متشاكلة مع زمرة الجمع $Z_{من}$ اذا وفقط اذا ______ . لنستعمل هذه النتيجة مع نظرية ٦٦ لتعيين متى تكون $Z_{من}$ جداء مباشراً داخلياً .

مسألة :

اكمل العبارة التالية وبرهن النظرية .

نظرية :

تكون زمرة الجمع $Z_{من}$ الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين رتبتهما م و ن على الترتيب ، اذا وفقط اذا ______

تمارين :

١ - جد عدة طرق لتمثيل زمرة الجمع $م_{م}$ (R) بصيغة جداء مباشر داخلي لزمرتين جزئيتين فعلا .

٢ - اثبت ان زمرة الضرب .

$$\left\{ \begin{pmatrix} أ & \cdot \\ \cdot & د \end{pmatrix} : أ ، د \in R \text{ و } أد \neq \cdot \right\}$$

يمكن تمثيلها بصيغة الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين فعلا .

٣ - عين هل يمكن تمثيل كل من الزمر التالية بصورة جداء مباشر داخلي لزمرتين جزئيتين فعلا ام لا .
علل استنتاجك .
أ. $(Z ، ٥)$
ب. $(S_3 ، ٥)$
حـ $(D_4 ، ٥)$
٤ - جد كل قيم ن بحيث يمكن تمثيل الزمرة ($Z_ن$ ، +) بصيغة جداء مباشر داخلي لزمرتين جزئيتين فعلا . علل استنتاجك.
٥ - لتكن سه زمرة متشاكلة مع الجداء المباشر الخارجي $صه_1 \times ع_2$ لزمرتين $صه_1$ و $ع_2$. برهن ان سه تكون الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين في سه .
٦ - وضح النظرية ٦٧ بايجاد زمرتين جزئيتين فعلا لزمرة الجمع Z_{12} .
٧ - اعتبر المجموعة $Z[\sqrt{2}] = \{ أ + ب\sqrt{2} : أ ، ب \in Z \}$
أ. اثبت ان $Z[\sqrt{2}]$ زمرة جزئية من R بالنسبة للجمع .
ب. اثبت ان $Z[\sqrt{2}]$ هي الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين فعلا صه و ع . ثم وضح النظرية ٦٧ بايجاد تشاكل صريح بين $Z[\sqrt{2}]$/ص و ع وتشاكل بين $Z[\sqrt{2}]$ / ع و ص
٨ - برهن ان زمرة الجمع Q لا يمكن تمثيلها كجداء مباشر داخلي لزمرتين جزئيتين فعلا.
٩ - برهن ان زمرة الجمع R لا يمكن تمثيلها كجداء مباشر لزمرتين جزئيتين فعلا.
١٠ - لتكن (سه ، ٥) زمرة . ولتكن $صه_1$ ، $صه_2$ ، ... ، $صه_ن$ زمراً جزئية طبيعية من سه . ولتكن
$صه_1 ٥ صه_2 ٥ ... ٥ صه_ن = \{ ص_1 ٥ ص_2 ... ٥ ص_ن : ص_ر \in صه_ر$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن$\}$
أ. برهن الاستقراء ان $صه_1 ٥ صه_2 ٥ ... ٥ صه_ن$ تكون زمرة جزئية طبيعية من سه .
ب. نقول ان سه هي الجداء المباشر الداخلي للزمر الجزئية الطبيعية $صه_1$ ، $صه_2$ ، ... ، $صه_ن$ اذا وفقط اذا كان كل عنصر هـ $\in$ سه يمكن تمثيله تمثيلا وحيداً كتركيب بالصيغة

هـ = ص$_1$ ٥ ص$_2$ ٥ ... ٥ ص$_ن$ حيث ص$_ر$ ∋ صه$_ر$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن .
برهن انه اذا كان سه الجداء المباشر الداخلي للزمرة الجزئية الطبيعية
صه$_1$ ، صه$_2$ ، ... ، صه$_ن$ فان سه = صه$_1$ ٥ صه$_2$ ٥ ... ٥ صه$_ن$ و

صه$_ر$ ∩ صه$_م$ = {و} لكل ر ، م ∋ {١ ، ٢ ، ... ، ن}، ر ≠ م.

١١ ـ لتكن (سه ، +) زمرة تبديلية منتهية رتبتها ن. فاذا كان د عدداً اولياً يقسم ن فلتكن صه$_د$ المجموعة المكونة من كل عناصر سه التي تكون رتبتها احدى قوى د . فتكون صه$_د$ زمرة جزئية من سه (التمرين ٢,٢-٢) اثبت انه اذا كانت ن = د$_1^{ك_1}$ د$_2^{ك_2}$ ... د$_م^{ك_م}$ حيث د$_1$ ، د$_2$ ، ... ، د$_م$ اعداد أولية مختلفة
و ك$_1$ ، ك$_2$ ، ... ، ك$_م$ ∋ Z^+ ، صه$_{د_1}$ ، صه$_{د_2}$ ،...، صه$_{د_م}$:
سه = صه$_{د_1}$ + صه$_{د_2}$ + ... + صه$_{د_م}$. ●
يبين التمرين ٢,٨ - ١١ ان كلا من المجموعات صه$_{د_ى}$ تحتوي على عنصراً مخالف للعنصر المحايد.

مراجعة

دورة	تشاكل ذاتي
نقلة	تشاكل ذاتي داخلي
طول الدورة	تشاكل ذاتي خارجي
دورات منفصلة	مرافقة لزمرة
تبديلية زوجية	مرافقة لعنصر
تبديلية فردية	جداء مباشر خارجي
زمرة متبادلة	جداء مباشر داخلي

الرموز

(م$_1$ م$_2$ ... م$_ر$)	د (سه)
ق(ن)	ك
ق$_\theta$(ن)	صه × عَ
A$_ن$	صَه = صه × {وع}
م ∘ صه ∘ م$^{-1}$	عَ = {وصه} × ع
م$\varnothing$	س = ص ∘ ع

اسئلة :

١ - بين طريقة لتحليل اي تبديلة الى تركيب دورات . هل هذا التركيب وحيد ؟

٢ - بين طريقة لتحليل اي تبديلة الى تركيب نقلات . هل هذا التحليل وحيد ؟

٣ - هل النقل تبديلة فردية ام زوجية ؟ متى يكون تركيب ر من النقلات زوجياً ؟ متى يكون فردياً ؟

٤ - تحت اي شروط على α ، $\beta \in S_ن$ يكون التركيب $\alpha \circ \beta$ تبديلة زوجية ؟ تبديلة فردية ؟

٥ - ما دليل الزمرة المتبادلة A$_ن$ في S$_ن$ ؟
ما رتبة A$_ن$ ؟

٦ - اذكر شرطاً بدلالة تشاكل ذاتي داخلي لتعيين هل كانت الزمرة الجزئية طبيعية ام لا

٧ - هل تكون المجموعة دَ (سه) المكونة من كل التشاكلات زمرة الذاتية بالنسبة للتركيب ؟ .
هل تكون المجموعة ك المكونة من كل التشاكلات الذاتية الداخلية زمرة جزئية من دَ (س) ؟
هل تكون زمرة جزئية طبيعية ؟

٨ ـ تحت اي شرط على م و ن يكون الجداء المباشر الخارجي $Z_{م} \times Z_{ن}$ زمرة دورية بحيث تكون متشاكلة مع $Z_{من}$ ؟ تحت اي شرط على م و ن تكون $Z_{من}$ الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين احداهما برتبة م والثانية برتبة ن ؟

٩ ـ اذا كانت صه و عـ زمرتين جزئيتين طبيعيتين من زمرة سه فهل تكون صه∘عـ زمرة جزئية من سه ؟ هل تكون زمرة جزئية طبيعية ؟ اذا كانت صه ∩ عـ ≠ {و} أو صه∘عـ = سه فهل يمكن تمثيل كل عنصر من سه تمثيلا وحيداً . بالصيغة هـ ≠ ص∘ع حيث صه
صه و ع ∈ عـ؟

١٠ ـ اذا كان سه الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين (فعلا) فهل تكون سه متشاكلة مع جداء مباشر خارجي لزمر غير تافهة ؟

١١ ـ اذا كانت سه = صه × عـ فاي زمرة تكون متشاكلة مع سه / صهَ ؟

اذا كانت سه الجداء المباشر الداخلي لزمرتين جزئيتين طبيعيتين صه و عـ فاي زمرة تتشاكل مع سه / صه ؟

فصل ٥

الحلقات الخارجة والمثاليات

وجدنا في الفصل ٢ ان الزمر الجزئية الطبيعية تلعب دوراً هاماً في انشاء زمر خارجة . وفي هذا الفصل تلعب المثاليات دوراً مماثلا في تكوين «الحلقات الخارجة» وعندما نحصل على مثل هذه الحلقات ندرس شروط كونها حلقات كاملة أو حقولا. وتعطينا هذه الشروط صفين من المثاليات : المثاليات «الاولية» والمثاليات «العظمى» .

وكتطبيق على ذلك ندرس حلقة الاقترانات المتصلة ومثالياتها العظمى .

ولكننا نبدأ ببعض الموضوعات عن نظرية الحلقات الحدودية .

وتزودنا هذه الحلقات ببعض الامثلة الهامة لدراسة البنود القادمة.

٥,١ المثاليات في الحلقات الحدودية

يدرس الطالب في المدرسة الثانوية صيغ الحدوديات والمعادلات . وفي التفاضل والتكامل يتعلم الطالب ان الحدوديات ذات المعاملات العددية أو النسبية يمكن اعتبارها اقترانات وسنرى في هذا البند انه اذا كانت (ح ، + ، ٠) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و قہ(س) ∋ ح [س] فاننا نستطيع ان نعرف «الاقتران الحدودي» على حباستخدام قہ(س) وبعدها يمكن استخدام هذا الاقتران لتحقيق هل الحدودية س − م ، م ∋ ح أحد عوامل الحدودية قہ(س) ام لا .

تعريف :

لتكن (ح، + ، ·) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد . فلكل

$$ق_ه(س) = \sum_{ك=٠}^{ن} أ_ك\, س^ك \in ح[س]$$

يرمز $ق_ه(ر)$ للعنصر $ق_ه(ر) = \sum_{ك=٠}^{ن} أ_ك\, ر^ك$ في ح و يعرف التناظر

ر ⟵ $ق_ه(ر)$ حيث ر ∈ ح اقتراناً

$ق_ه$: ح ⟵ ح نسميه اقتراناً حدودياً وقاعدة التناظر فيه ر ⟵ $ق_ه(ر)$.

فمثلا الصيغة الحدودية

$ق_ه(س) = س^٣ - س^٢ - ٤س + ٤$

في Z [س] تعين الاقتران الحدودي ق : Z ⟵ Z المعرف بوضع

ق (ر) = $ر^٣ - ر^٢ - ٤ر + ٤$ لكل ر ∈ Z

مسألة :

أ. في Z [س] لتكن

$ق_ه(س) = س^٣ - س^٢ - ٤س + ٤$

جد ق (١) ، ق (٢) و ق (-١) . اثبت ان س -١ و س - ٢ عاملان في $ق_ه(س)$:

يمكنك عمل ذلك باثبات ان

$ق_ه(س) = (س - ١)\,(س - ٢)\,هـ(س)$

حيث هـ (س) ∈ Z [س]

ب. في $Z_٥$ [س] لتكن $ق_ه(س) = أ_٥\, س^٥ - أ_٥\, س$. جد $ق_ه(أ_٥)$

لكل $أ_٥ \in Z_٥$.

مسألة :

اثبت انه اذا كانت (ح ، + ، ·) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و $ق_ه(س)$ ،

هـ (س) ∈ ح [س] حيث $ق_ه(س)$ = هـ (س)

فان $ق_ه(ر)$ = هـ (ر) لكل ر ∈ ح.

اذا كانت (ح، + ، ·) احدى الحلقات الكاملة Z ، Q أو R فان عكس الفرضية في المسألة ٣ تكون صحيحة. وهذا سيبرهن في المسألة ٧.

تعريف :

لتكن ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ولتكن ق(س) ∈ ح [س]

أ. تكون اي حدودية هـ (س) ∈ ح (س) عاملا في قه(س) اذا وفقط اذا وجد حدودية ك(س) ∈ ح [س] حيث ان ق(س) = هـ (س) ك (س) .

ب. يكون العنصر أ ∈ ح احد اصفار الاقتران الحدودي قه اذا وفقط اذا كان قه(أ) = ٠

وبالتجربة نعلم ان الحدودية التربيعية $أ_٢$س^٢ + $أ_١$س + أ. ∈ Z [س] لها عامل س - ل اذا وفقط اذا كانت ل صفراً للحدودية ، اي $أ_٢$ل^٢ + $أ_١$ل + أ. = ٠ .

ونريد ان نثبت ان نتيجة ممثالة تصح على اى حدودية في ح [س] حيث ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد . وكخطوة اولى في هذا الاتجاه لنبتكر طريقة لقسمة حدودية قه(س) ∈ ح [س] على الحدودية س - أ .

اذا كانت قه (س) ∈ ح [س] حيث در (ق (س)) = ن ≥ ١ فان

قه(س) = $أ_ن$ س^ن + $أ_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + . . . + $أ_١$س + أ .

حيث $أ_ن$ ≠ ٠ ولكن

$أ_ن$ س^ن = $أ_ن$ س$^{ن-١}$ (س - أ) $أ_ن$ أس$^{ن-١}$ ولهذا فان

قه(س) = $أ_ن$ س$^{ن-١}$ (س - أ) + $أ_ن$ أس$^{ن-١}$ + $\sum_{ر=٠}^{ن-١}$ $أ_ر$ س^ر

مسألة :

استعمل الطريقة السابقة لتبيان هل س - ١ عامل في Z [س] ام لا للحدودية

س^٣ + ٢س + ٣ = س^٢ (س - ١) + __________ .

نظرية :

لتكن ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ولتكن قه(س) ∈ ح [س] . فيكون العنصر أ ∈ ح صفراً لاقتران الحدودية قه اذا وفقط اذا كان س - أ عاملا للحدودية قه(س) . او بعبارة مكافئة قه (أ) = ٠ حيث أ ∈ ح اذا وفقط اذا كان

قه(س) = (س - أ) ك (س)

حيث الحدودية ك (س) ∈ ح [س]

برهن النظرية ٦ بحل المسألة التالية :

مسألة :

أ. اثبت انه اذا كانت قه(س) ∈ ح [س] حيث ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد واذا كانت

ق$_ن$(س) = (س - ٩) ك (س)

فان ق$_ن$(٩) = ٠

يبرهن العكس باستخدام المبدأ الثاني للاستقراء . ولعمل ذلك لتكن هـ$_ن$ هي العرضية : لكل حدودية ق$_ن$(س) رتبتها ن في ح[س] ، اذا كانت ق$_ن$(٩) =٠ فان س - ٩ احد عوامل ق$_ن$(س).

اثبت ان هـ$_١$ صحيحة.

افرض ان العبارة هـ$_ر$ صحيحة لجميع قيم ر حيث ١ ≤ ر ≤ ن :

فلكل حدودية ق$_ن$(س) رتبتها ر ≤ ن ، اذا كانت ق$_ن$(٩) =٠،يكون س -٩ احد عوامل ق$_ن$(س).

ولبرهان ان هـ$_{ن+١}$ تكون صحيحة افرض ان قَ$_ن$(س) حدودية درجتها ن + ١ بحيث ان قَ$_ن$(٩) = ٠ ، وبرهن ان قَ$_ن$(س) = (س - ٩) ك (س).

حيث ك(س)∋ ح [س]. ولعمل ذلك طبق الطريقة التي نوقشت قبل مسألة ٥ للحدودية قَ$_ن$(س) التي رتبتها ن + ١ .

مسألة :

جد كل الاصفار في Z للاقتران الحدودي

ق (ر) = ر^٣ - ر^٢ - ٤ر + ٤

كم صفراً يوجد للاقتران الحدودي هـ (ر) = ر^٢ - ٢ في Z ؟ في Q ؟ في R ؟

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن ح حلقة كاملة ولتكن ق$_ن$(س) ∋ ح [س] حدودية رتبتها ن ≥ ١ . فالاقتران الحدودي ق$_ن$ له ن من الاصفار على الاكثر وللحدودية ق$_ن$(س) على الاكثر ن من العوامل ذات الصيغة س - ٩ ، ٩∋ ح . ويتطلب اي برهان صحيح لنظرية ٩ استعمال الشرط ان ح حلقة كاملة . و يبين المثال التالي ان النظرية ٩ يمكن ان تفشل فشلا ذريعاً اذا لم تكن ح حلقة كاملة .

مسألة :

خذ الحدودية ذات الدرجة الأولى ق$_ن$(س) = ٦$_{١٢}$ س في Z$_{١٢}$ [س] .

بين ان للاقتران الحدودي ق$_ن$ستة اسفار في Z$_{١٢}$ وان للحدودية ستة عوامل مختلفة من درجة الواحد في Z$_{١٢}$[س] . هل تكون ق$_ن$(س) حاصل الضرب لهذه العوامل الستة ؟

والان وبعد ان درسنا عوامل واصفاراً للحدوديات في ح [س] فلنركز اهتمامنا على المثاليات في ح [س] .

مسألة :

لتكن ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد وليكن $\text{أ} \in$ ح عنصراً ثابتاً . اثبت ان المجموعة $ل_{\text{أ}}$ =

{ق (س) $\in$ ح [س] ، $ق_{\text{أ}}$(أ) = ٠} تكون مثالية في ح [س] وان

$ل_{\text{أ}}$ = (س − أ) ح [س]

= {(س − أ) هـ (س) : هـ (س) $\in$ ح [س]}

لقد رأينا انه يمكن كتابة كل مثالية في Z بالصيغة ن Z حيث ن $\in Z$ ثابتة. وتبين المسألة ١١ ان بعض المثاليات في ح [س] تكون مشابهة للمثاليات في Z بمعنى انه يمكن كتابتها «كمضاعف» (س − أ) ح [س] ، للحلقة ح [س] . ورأينا ايضاً في البند ٣,٣ انه اذ كانت ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد فان كل مجموعة صيغتها ر ح (ر $\in$ ح) تكون مثالية في الحلقة ح . وبذا ، فاذا كانت ك (س) $\in$ ح [س] فتكون ك (س) ح [س] مثالية في ح [س] .

تعريف :

لتكن ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد . فتكون المثالية ص في ح مثالية رئيسية اذا وفقط اذا كان ص = أح = {أر : ر $\in$ ح}

لبعض أ $\in$ ح . وغالباً ما يرمز للمثالية الرئيسية بالرمز (أ) ، حيث (أ) = أح = {أر : ر $\in$ ح}

لاحظ انه ليس من الضروري ان تكون المثالية الرئيسية مثالية فعلية . والواقع ، ان المثالية {٠}

هي المثالية الرئيسية :(٠) = {(٠) · ر : ر $\in$ ح}

في حين ان الحلقة ح هي نفسها مثالية رئيسية ، المثالية (١) = {١ · ر : ر $\in$ ح}.

وتعطينا المسألة التالية مثالا على مثالية رئيسية وعلى مثالية ليست رئيسية .

مسألة :

أ. اثبت ان المجموعة

{(س + ٢) ق (س) + (س +٤) هـ (س) : ق (س) ، هـ (س) $\in Q$ [س]}

تكون مثالية رئيسية في Q [س] ، وهي المثالية (١) . ▲

ب. اثبت ان المجموعة

{(س + ٢) قه(س) + (س + ٤) هـ(س) : قه(س) ، هـ (س)∋ Z [س]}

ليست مثالية رئيسية في Z [س] . اثبت اولا ان س + ٢ ، س + ٤ و ٢ تكون كلها في المثالية .

رأينا انه في الحلقة Z تكون كل مثالية مثالية رئيسية .
وللحلقة التي بهذه الخاصية اسم خاص :

تعريف :

تكون الحلقة التبديلية التي لها عنصر محايد حلقة مثالية رئيسية اذا وفقط اذا كانت كل مثالية في ح مثالية رئيسية.
وتبين المسألة ١٣ ان Z [س] لا تكون حلقة مثالية رئيسية وسنثبت في المسألة ١٥ انه اذا كان قه حقلا كانت قه[س] حلقة مثالية رئيسية .
ولكي نبرهن هذه النتيجة على حلقات الحدوديات المعرفة على الحقل قه، نحتاج الى خوارزمية القسمة التالية للحدوديات :
(انظر التمرين ٣,٧ ــ ١١)

نظرية :

لتكن (قه ، + ، ٠) حقلا ولتكن
ق (س) ، هـ (س)∋قه [س] بحيث ان هـ (س) ≠ ٠
فيكون هناك حدوديتان ك (س) ، ر (س)∋ قه [س] بحيث ان
قه(س) = هـ (س) ك (س) + ر (س)
وان ر (س) = ٠ أو
در (ر (س))< در (هـ (س))

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن (له، + ، ٠) حقلا . فتكون له [س] حلقة مثالية رئيسية . ولهذا ، اذا كانت صه⊂ له [س] مثالية ، يكون هناك حدودية د(س)∋ صه بحيث ان صه = (د (س))

= {د (س) هـ (س) : هـ (س) ∋ له (س)}

تمارين :

١ - أثبت انه في Z_6 [س] تكون الحدوديتان س -2_6 ، س - 4_6 عاملين في الحدودية $س^2$ - س.

٢ - اعط مثالا على حدوديتين مختلفتين قہ(س) و هـ (س) في Z_6 [س] بحيث ان قہ($أ_6$) = هـ ($أ_6$) لكل $أ_6 \in Z_6$. ان وجود هاتين الحدوديتين مضمون لانه يوجد عدد لا نهائي من الحدوديات في Z_6 [س] ولكن ———— اقترانات حدودية مختلفة.

٣ - اعط مثالا لحدودية في Z [س] بالدرجة اثنين ، ذات عاملين صيغتهما أس + ب في Z [س] وليس لها اصفار في Z .

٤ - اثبت انه في الحدودية ق (س) = $س^3$ في Z_8 [س] يكون الاقتران الحدودي ق (ر) = $ر^3$ له الاصفار 0_8 ، 2_8 ، 4_8 ، 6_8 وبعد ذلك اثبت انه يمكن تحليل الحدودية قہ(س) = $س^3$ في Z_8 [س] الى عوامل باربعة اشكال مختلفة .

٥ - كتوضيح للنظريتين ٦ و ٩ جد اصفار الاقترانيين الحدوديين ق ، هـ :

Z_3 [س] ————→ Z_3 المعرفان بالصيغة

قہ (ر) = $ر^2$ + ر + 1_3 و

هـ (ر) = $ر^4$ + 2_3

جد العوامل س - أ للحدوديتين

قہ (س) = $س^2$ + س + 1_3 و

هـ (س) = $س^4$ + 2_3

٦ - لتكن ح حلقة كاملة ، قہ(س) ، هـ (س) $\in$ ح [س]

و قہ(س) = هـ (س) . اثبت انه اذا كانت قہ(س) = $س^ن$ ى (س)

و هـ (س) = $س^ن$ ك (س) حيث ى (س) ، هـ (س) $\in$ ح [س] فان

ى (س) = ك (س) .

٧ - أ. لتكن ح احدى الحلقات Z ، Q أو R ولتكن

قہ (س) ، هـ (س) $\in$ ح [س] . اثبت ان الاقترانين الحدوديين قہ و هـ يكونان متساويين اذا وفقط اذا كانت الحدوديتان قہ(س) و هـ (س) متساويتين . وبعبارة اخرى ق (ر) = هـ (ر) لكل ر $\in$ ح

(ح = Z ، Q ، R) اذا وفقط اذا كانت ق (س) = هـ (س)

ب. لماذا يفشل البرهان في الجزء أ للحدوديات على Z_6 [س] ؟

٨ - **تعريف :** لتكن (ل ، + ، ·) حقلا ولتكن قہ(س) و هـ (س) حدوديتين في ل [س] -

تسم الحدودية د (س) $\in$ ل [س] القاسم المشترك الاعلى للحدوديتين قہ(س) اذا وفقط

اذا كان (١) د (س) تقسم كلا من قہ(س) ، هـ (س) و (٢) اذا كانت ى (س) تقسم كلا من قہ(س) و هـ (س) فان ى (س) تقسم د (س)

أ. جد القاسم المشترك الاعلى لكل زوج من الحدوديات التالية في Q [س] .

ق (س)	هـ (س)
س٣ - س٢ + ٢س - ٢	س٢ + ٢
س٣ - س٢ + ٢س - ٢	س٣ - س٢ - ٤س + ٤
س٤ - ٤	س٣ - ١

ب. هل يمكن ان يكون لحدوديتين اكثر من قاسم مشترك اعظم ؟ وضح .

٩* -برهن النظرية التالية بخصوص وجود قاسم مشترك اعلى لحدوديات على حقل :

نظرية : ليكن (ل ، + ، ٠) حقلا ولتكن قہ(س) و هـ(س) حدوديتين في لہ[س] - {٠}.

فيكون للحدوديتين قہ(س) و هـ (س) قاسم مشترك اعلى د (س) وزيادة على ذلك فيوجد ى (س) ، ك (س)∋ لہ[س] بحيث ان

د (س) = قہ(س) ى (س) + هـ (س) ك (س) .

١٠ . **تعريف :** لتكن ج حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

تكون الحدودية ى (س)∋ ج [س] غير قابلة للاختزال اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي : للحدودية ى (س) درجة موجبة ، واذا كانت

ى (س) = أ (س) ب (س) فان در (أ(س)) = ٠ أو

در (ب (س)) = ٠ (اي اما أ (س) أو ب (س) تكون حدودية ثابتة).

أ. اعط عدة امثلة على حدوديات غير قابلة للاختزال في Z [س]

ب. اعط مثالا على حدودية تكون غير قابلة للاختزال في Q [س] ولكنها قابلة للاختزال في R [س].

١١* برهن انه اذا كان (ل ، + ، ٠) حقلا وكانت ى (س) غير قابلة للاختزال في لہ(س) و ى (س) تقسم قہ(س) حيث هـ (س) ، قہ(س)∋ لہ[س] ، فان ى (س) تقسم قہ(س) أو ى (س) تقسم هـ (س) . ●

١٢* لتكن (ج ، + ، ٠) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و ر ∋ ج . عرف اقتراناً

$\phi_{ر} :$ ج $[س] \longrightarrow$ ج بوضع

$\phi_{ر}(ق(س)) = ق(ر) = \sum_{و=ن}^{ن} ا_{و}\, ر^{و}$

لكل حدودية ق(س) $= \sum_{ر=٠}^{ن} ا_{ر}\, س^{ر} \in$ ج $[س]$

أ. في $Z[س]$ جد $\phi.(ق(س))$ و $\phi_{٢}(ق(س))$
في الحالتين التاليتين : حيث ق(س) = ٣س^{٣} - ٤س - ٥
وحيث ق(س) = س^{٤} - ١٦.

ب. ليكن (ج، + ، ⋅) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و ر $\in$ ج.
برهن ان الاقتران $\phi_{ر}$ المعرف اعلاه يكون اقتراناً محافظاً شاملا من ج [س] الى ج.

حـ. جد نواة ϕ.

١٣ - كتطبيق للنظرية ٩ ، لنبرهن النظرية التالية :

نظرية : لتكن (ج ، + ، ⋅) مجالا منتهياً . فتكون زمرة الضرب ج - $\{٠\}$ زمرة دورية.

أ. برهن انه اذا كانت (سه ، ٥) زمرة منتهية تبديلية ذات عنصر محايد وبحيث انه لكل معادلة س^{ن} = و ، ن $\in Z^{+}$ ، ن من الحلول على الاكثر ، فتكون س زمرة دورية ●

ب. برهن انه اذا كان ج حقلا منتهياً فان (ج - $\{٠\}$ ، ⋅) تكون زمرة دورية.

حـ. بين ان ($Z_{ن}$ - $\{٠_{ن}\}$ ، ⋅) تكون زمرة دورية اذا ______ .

٥,٢ الحلقات الخارجة

لقد لاحظنا ان كل حلقة تكون اولا زمرة تبديلية بالنسبة للجمع . ولهذا فلأي حلقة جزئية للحلقة المعطاة هنالك زمرة خارجة بالنسبة للجمع . وسنناقش في هذا البند شروطاً يمكن اذا توافرت تعريف جداء لهذه الزمرة يجعلها حلقة .

اذا كانت (ح، + ، ·) حلقة و صه حلقة جزئية من ح تكون صه زمرة جزئية طبيعية لزمرة الجمع ح .

ولهذا فان المجموعة ح/صه المكونة من كل المجموعات المرافقة لِ صه تكون زمرة بالنسبة لعملية الجمع المعرفة بالصيغة :

(أ + صه) + (ب + صه) = (أ + ب) + صه لكل أ ، ب ∈ ح .

تذكر الحقائق التالية بالنسبة الى ح .

أ. اذا كانت أ ∈ ح فتكون ———— هي المجموعة المرافقة في ح / صه التي ينتمي اليها العنصر أ.

ب. لكل أ ، ب ∈ ح يكون أ + صه = ب + صه اذا وفقط اذا ———— ∈ صه .

حـ يكون العنصر الصفري في ح/ صه هو المجموعة المرافقة ———— .

د. يكون العنصر ص ∈ صه اذا وفقط اذا كان ص + صه = ———— .

بمثل تعريف جميع المجموعات المرافقة ، نعرف جداء اي عنصرين أ + صه و ب + صه للزمرة الخارجة ح/ صه بوضع:

(أ + صه) . (ب + صه) = (أب) + صه .

وبذا فان «الجداء» لمجموعتين مترافقتين أ + صه و ب + ص هو المجموعة المرافقة التي ينتمي اليها العنصر أب . في المسألة ١٨ نعين تلك الحلقات الجزئية صه من ح التي يكون فيها هذا الجداء معرفاً تعريفاً حسناً (أي اذا كانت أ + صه = أ$_{١}$ + صه و ب + صه = ب$_{١}$ + ص فان (أب) + صه = (أ$_{١}$ ب$_{١}$) + صه) .

مسألة :

تذكر ان الزمرة الخارجة Z / ٤ Z بالنسبة للجمع تساوي الزمرة $Z_{٤}$ وان الجداء عرف على $Z_{٤}$ بوضع أ$_{٤}$. ب$_{٤}$ = ———— لكل أ$_{٤}$، ب$_{٤}$ ∈ $Z_{٤}$ بين ان الجداء المعرف اعلاه للمجموعات المرافقة يكون مشابهاً لهذا الجداء على $Z_{٤}$ اي بين ان (أ + Z٤) . (ب + Z٤)

= (أب) + Z٤ = (أب)$_{٤}$

نظرية :

لتكن

$$\left\{ R \ni حـ ، أ : \begin{pmatrix} ٠ & أ \\ ٠ & حـ \end{pmatrix} \right\} = صه$$

فتكون صه مثالية يمنى وليست مثالية من الجانبين في $م_٢$ (R) .
برهن انه في حين ان :

$$صه + \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = صه + \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$$

ان «الجدائين»

$$و \left[صه + \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix} \right] \cdot \left[صه + \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} \right]$$

$$\left[صه + \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix} \right] \cdot \left[صه + \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} \right]$$

المعرفين اعلاه ليسا متساويين .

مسألة :

لتكن (ح ، + ، ·) حلقة ولتكن صه حلقة جزئية من ح .
لقد عرفنا جداء على ح / صه بوضع (أ + صه) . (ب + صه) = (أب)+صه لكل أ ، ب ∈ ح .
برهن ان هذا الجداء يكون معرفاً تعريفاً حسناً على ح / صه اذا وفقط اذا كانت صه مثالية في ح .

والان وبعد ان وجدنا كل الحلقات الجزئية (وهي المثاليات) التي يكون فيها الجداء عملية ثنائية معرفة تعريفاً حسناً على الزمر الخارجة ، فلنبرهن انه بالنسبة لهذا الجداء تكون ح / صه حلقة اذا كانت صه مثالية .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن ح حلقة و صه مثالية في ح. فتكون (ح / صه ، + ، ·) حلقة .

لتكن (ح ، + ، ·) حلقة و صه مثالية في ح. عرف ٦٦ : ح ⟵ ح/صه بوضع
٦٦ (أ) = أ + صه لكل أ ∈ ح .

سبق ان رأينا ان ٦٦ تكون اقتراناً زمرياً شاملا من زمرة الجمع ح الى زمرة الجمع ح/صه (النظرية ٩٤ في الفصل ٢).

و يسمى هذا الاقتران ٦٦ بالاقتران المحافظ القانوني .

مسألة :

بين ان الاقتران ٦٦ : ح ⟵ ح / صه المعرف بالصيغة ٦٦ (أ) = أ + صه لكل أ ∈ ح يكون اقتراناً محافظاً حلقياً .

لقد لاحظنا انه اذا كانت ح و حَ حلقتين وكان ϕ : ح ⟵ حَ اقتراناً محافظاً (حلقياً) فان

نو (ϕ) = { س : ϕ (س) = ٠َ }

تكون مثالية في ح ولهذا فيمكننا تكوين الحلقة الخارجة ح / نو (ϕ) . ونريد ان نقارن هذه الحلقة مع الحلقة حَ.

مسألة :

في الحلقتين Z و $Z_{ع}$ لتكن ϕ : Z ⟵ $Z_{ع}$ معرفة بوضع ϕ (أ) = $أ_{ع}$ لكل أ ∈ Z. فتكون ϕ اقتراناً محافظاً (لماذا ؟)

و يكون نو (ϕ) = صه = ———— . عرف اقتراناً

$\bar{\phi}$: Z / صه ⟵ $Z_{ع}$ بوضع $\bar{\phi}$ (أ + صه) = ϕ (أ)

لكل أ ∈ ح. بين ان $\bar{\phi}$ تكون تشاكلا بين حلقتين . ابدأ بمقارنة هذا التعريف للاقتران $\bar{\phi}$ مع التعريف المعطى في برهان نظرية التشاكل الاولى للزمر (النظرية ١٠١ في الفصل ٢) .

مسألة :

لتكن (ح ، + ، ·) و (حَ ، + ، ·) حلقتين ولتكن ϕ : ح ⟵ حَ اقتراناً محافظاً شاملا من ح الى حَ ولتكن صه = نو (ϕ) . لقد لاحظنا ان ح/صه تكون حلقة بالنسبة للعملية العادية للجمع والضرب في المجموعات المرافقة . عرف $\bar{\phi}$: ح/صه ⟵ حَ بوضع $\bar{\phi}$ (أ + صه) = ϕ (أ) لكل (أ + صه) ∈ ح / صه .

أ. اثبت فوراً ان $\bar{\phi}$ اقتران محافظ زمري معرف تعريفاً حسناً وهو واحد لواحد وشامل . كن حراً في استخدام النظرية ١٠١ في الفصل ٢ .

ب. برهن ان $\bar{\phi}$ اقتران محافظ حلقي .

و يمكن وضع المسألة ٢٢ على صيغة نظرية كما يلي :

نظرية :

نظرية التشاكل الاولى للحلقات : لتكن (ح ، + ، ٠) و (حَ ، + ، ٠) حلقتين وليكن ϕ اقتراناً محافظاً شاملا من ح الى حَ ، فان ح/ نو (ϕ) تكون متشاكلة مع حَ .

ان الصورة الحافظة للحلقة ح هي حلقة حَ بحيث يوجد اقتران محافظ شامل من ح الى حَ وتؤكد النظرية ٢٣ ان كل صورة محافظة لأي حلقة ح تكون متشاكلة مع حلقة خارجة ح/صه لمثالية ما صه ⊴ ح. ولهذا فان تلك الصورة المحافظة المختلفة (أي غير المتشاكلة) محتواة في حلقات خارجة ح/صه للحلقة ح بواسطة مثالية صه .

ونعين في البندين ٥,٣ و ٥,٤ الشروط التي نضعها على المثالية صه لكي تصبح الحلقة ح/ صه حلقة كاملة او حقلا .

تمارين :

١ - جد كل الحلقات الخارجة للحلقة $Z_{٦}$ بواسطة مثالية صه ⊴ $Z_{٦}$.

٢ - اثبت ان الحلقات الخارجة لأي حقل ل اثنتان هما ل / (٠) و ل / ل .
صف كل الحلقات غير المتشاكلة التي يمكن ان تكون صوراً محافظة للحقل ل . علل اجابتك .

٣* - برهن انه اذا كانت ح حلقة ذات عنصر محايد وكانت صه مثالية فعلا في ح ، فان ح/صه تكون حلقة ذات عنصر محايد .

٤* - برهن انه اذا كانت ح حلقة تبديلية و صه مثالية في ح ، فان ح/ صه تكون حلقة تبديلية.

٥ - جد كل الحلقات الخارجة للحلقة م$_{٢}$ (R) بواسطة مثالية صه ⊴ م (R). ●

٦ - لتكن ح حلقة غير تافهة وليكن ϕ : م$_{٢}$ (R) ⟵ ح اقتراناً محافظاً شاملا من م$_{٢}$ (R) الى ح. برهن ان ح متشاكلة مع م$_{٢}$ (R) .

٧ - اذكر خصائص المجموعة المكونة من الاقترانات المحافظة من (Z ، + ، ٠) الى (Z ، + ، ٠).

٨ - عين كل الحلقات الخارجة المكنة للحلقة Z بواسطة مثالية صه ⊴ Z.

٩* - لتكن (ح ، + ، ٠) حلقة ذات عنصر محايد ، أ∋ ح.

٥,٣ المثاليات الأولية وحلقاتها الخارجية

وجدنا في البند السابق انه اذا كانت ح حلقة و صه حلقة جزئية فان الحلقة الخارجة ح / صه تكون حلقة اذا وفقط اذا كانت صه مثالية في ح . وبهذا امكننا معرفة خواص تلك الحلقات الجزئية التي لزمرها الخارجة عملية ثنائية لضرب المجموعات المرافقة معرفة تعريفاً حسناً.

وفي هذا البند نتابع دراستنا لتعيين المثاليات حيث تكون الحلقة الخارجة لها حلقة كاملة.

تذكر ان الحلقة التبديلية ح ذات عنصر محايد تكون حلقة كاملة اذا وفقط اذا كان لكل أ ، ب ∈ ح : اذا كان أب = ٠ فان أ = ٠ أو ب= ٠

مسألة :

لتكن ح حلقة و صه مثالية في ح بحيث تكون ح / صه حلقة كاملة .

أ. اذا كانت أ ، ب ∈ ح و

(أ + صه) . (ب + صه) = (٠) + صه

فان أ + صه = ______ أو ب + صه = ______ .

ب. بين ، مستعملا خصائص المجموعات المرافقة ، انه اذا كانت ح / صه حلقة كاملة ، أ ، ب ∈ ح و أب ∈ صه

فان أ ∈ صه أو ب ∈ صه . وتعطي كل مثالية بهذه الخاصية اسماً خاصاً :

تعريف :

تكون اي مثالية صه ≠ ح في اي حلقة ح مثالية اولية في ح اذا وفقط اذا كان لكل أ ، ب ∈ ح ، أب ∈ صه يتضمن ان أ ∈ صه أو ب ∈ صه . و يكافئه ان المثالية صه ≠ ح في الحلقة ح تكون مثالية اولية في ح اذا وفقط اذا كان لكل أ ، ب ∈ ح ، أ ∉ صه و ب ∉ صه يتضمن أب ∉ صه.

مسألة :

عين هل كل من المثاليات التالية في Z مثالية اولية ام لا .
علل اجابتك .

أ. صه = ٦ Z = $\{$٦ر : ر ∈ Z$\}$

ب. صه = ٧ Z = $\{$٧ر : ر ∈ Z$\}$

مسالة :

جد كل المثاليات الاولية في Z . علل اجابتك .

لقد رأينا في المسألة ٢٤ انه اذا كانت ح حلقة و صم مثالية في ح بحيث تكون ح/صم حلقة كاملة فتكون صم مثالية اولية . ولندرس الان معكوساً لذلك معدلا ، لتكن ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و صم مثالية اولية . فهل من الضروري ان تكون ح/صم حلقة كاملة ؟ لنعتبر الامثلة التالية :

مسالة :

أ. هل تكون ٧ Z مثالية اولية في Z ؟
هل تكون Z/٧Z حلقة كاملة ؟ (تذكر ان Z/٧Z تساوي Z٧. (أنظر البند ٢,٨).

ب. اختر مثالية اولية اخرى صم في Z . فهل تكون Z/صم حلقة كاملة ؟

مسالة :

اثبت النظرية التالية :

نظرية :

لتكن ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و صم مثالية في ح. فتكون ح/صم حلقة كاملة اذا وفقط اذا كانت صم مثالية اولية في ح. وكتطبيق للنظرية ٢٩ لنأخذ مثالا في Z [س] ، وهي الحلقة المكونة من حدوديات على Z ، فالحلقة Z [س] حلقة تبديلية ذات عنصر محايد فالمجموعة

(س) = {س قه (س) : قه(س) ∈ Z [س]}

مثالية في Z [س] . (لماذا ؟)

مسالة :

أ. عرف اقترانًا ϕ : Z [س] ⟶ Z بوضع
ϕ (قه(س)) = قه(٠) = أ٠.

لكل
ق(س) = $\sum_{\text{ر=٠}}^{\text{ن}}$ أر سر ∈ Z [س]

برهن ان ϕ اقتران محافظ شامل من Z [س] الى Z . جد نو (ϕ).

ب. برهن ان Z [س] / (س) تكون حلقة كاملة ▲

حـ. برهن ان (س) تكون مثالية اولية في Z [س].

تمارين :

١ - برهن ان كل مثالية فعلا في Z تكون محتواة في مثالية اولية واحدة على الاقل . اعط عدة امثلة على ذلك .

٢* - أ. برهن انه اذا كانت (ل، + ، ٠) حقلا ، ك (س) غير قابلة للاختزال فتكون المثالية

(ك (س)) = $\{$ك (س) قـ(س) : قـ(س) $\in$ ل[س]$\}$ مثالية اولية في ل[س] . انظر التمرين ٥,١ - ١٠ لتعريف الحدودية غير القابلة للاختزال .

ب. لتكن ل حقلا . برهن انه اذا كانت هـ (س) $\in$ ل[س] قابلة للاختزال فان المثالية

(هـ (س)) = $\{$هـ (س) قـ(س) : قـ(س) $\in$ ل[س]$\}$

تكون محتواة في مثالية اولية ولا تكون هي نفسها مثالية اولية . ●

٣ - برهن انه اذا كانت (ح ، + ، ٠) حلقة كاملة و أ $\in$ ح فان المثالية

(س - أ) = $\{$(س - أ) قـ(س) : قـ(س) $\in$ ل[س]$\}$

تكون مثالية اولية في ح[س] .

٤* - عين هل المثاليات التالية مثاليات اولية في الحلقة ح المعطاة ام لا :

أ. ح = Q [س] ، ص = $\{$(س^{٢} - ٢) قـ(س) : قـ(س) $\in Q$ [س]$\}$

ب. ح = R [س] ، ص = $\{$(س^{٢} - ٢) قـ(س) : قـ(س) $\in R$ [س]$\}$

حـ. ح = Q [س] ، ص = $\{$(س قـ(س) + ٣هـ(س) : قـ(س) ، هـ(س) $\in Q$ [س]$\}$

٥,٤ المثاليات القصوى وحلقاتها الخارجة

لقد اثبتنا انه لاي حلقة تبديلية ح ذات عنصر محايد ومثالية صہ $\supseteq$ ح تكون الحلقة الخارجة ح/صہ حلقة كاملة اذا وفقط اذا كانت صہ مثالية اولية في ح. ونرغب الآن في تعيين الشرط الضروري لكي تكون ح/صہ حقلا .

اذا كانت ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ، فان الحلقة الخارجة ح/صہ تكون حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ١ + صہ. في هذه الحالة نحتاج لتعيين الشرط الضروري والكافي لكي يكون لكل عنصر ٢ + صہ $\neq$ ٠ + ص نظير ضربي . و يعتمد وجود النظير الضربي في ح/صہ على صہ التي يجب ان تكون نوعاً خاصاً من المثاليات تدعى مثالية «قصوى» .

تعريف :

تكون اي مثالية صہ في اي حلقة ح مثالية قصوى في ح اذا وفقط اذا كان :

أ. صہ $\neq$ ح ،

ب. لا توجد مثالية سہ في ح بحيث ان صہ $\subset$ سہ $\subset$ ح (احتواء فعلي) .

لاحظ ان الشرط ب من التعريف ٣١ يقول انه لا يمكن وضع مثالية سہ بالضبط بين المثالية صہ والحلقة ح . وهناك عدة صيغ مفيدة لهذا الشرط . فلتكن ح حلقة و صہ مثالية في ح بحيث ان صہ $\neq$ ح. فتكون العبارات التالية مكافئة للشرط ب في تعريف المثالية القصوى :

بَ. اذا كانت سہ مثالية في ح و صہ $\supseteq$ سہ ، صہ = سہ ، فان سہ = ح .

بً. اذا كانت سہ مثالية في ح و صہ $\supseteq$ س $\supseteq$ ح ، فان صہ = سہ أو سہ = ح.

(و يمكن ان تساعدنا مخططات فين في ملاحظة تكافوء هذه العبارات).

مسألة :

جد كل المثاليات للحلقة Z_8 . عين هل كل من هذه المثاليات مثالية قصوى ام لا.

مسألة :

أ. هل تكون ٤ Z مثالية قصوى في Z ؟

هل تكون Z / ٤Z حقلا ؟ تذكر ان $Z / Z4 = Z_4$.

ب. هل تكون Z٥ مثالية قصوى في Z ؟ هل تكون Z / Z٥ حقلا ؟

تذكر انه اذا كانت لہ حقلا ، فان لہ ليس لها مثاليات فعلية (اي ، اذا كانت سہ مثالية في لہ ، فان سہ = $\{0\}$ أو سہ = لہ).

(انظر المسألة ٦١ أ في الفصل ٣) .

وبالاضافة لهذه الخاصية للحقول ، نحتاج للتمهيدية التالية :

تمهيدية :

لتكن ح حلقة و صه و سه مثاليتين في ح بحيث ان صه $\subseteq$ سه ، فان المجموعة

$$سه / صه = \{ أ + صه : أ \in سه \}$$

تكون مثالية في ح / صه .

اترك برهان هذه التمهيدية للتمرين ٤ .

والنظرية التالية تعطينا شرطاً ضرورياً لكي تكون اي حلقة خارجة حقلا .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

لتكن ح حلقة و صه مثالية في ح بحيث ان ح/صه تكون حقلا . فان صه تكون مثالية قصوى في ح .

لا يمكننا ان نبرهن عكس النظرية ٣٥ لانه اذا لم تكن ح تبديلية او اذا لم يكن في ح عنصر محايد ، فليس من الضروري ان تكون ح/صه حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

وفي تلك الحالة لا تكون حقلا حتماً . ولكن لدينا للحلقات التبديلية ذات العنصر المحايد النظرية التالية :

نظرية :

لتكن ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و صه $\subseteq$ ح مثالية . فان ح/صه تكون حقلا اذا وفقط اذا كانت صه مثالية قصوى.

لاحظ ان احدى المتضمنات في النظرية ٣٦ محتواة في النظرية ٣٥ .

برهن صحة الشرط في النظرية بحل المسألة التالية :

مسألة :

لتكن ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد . افترض ان صه $\subset$ ح مثالية قصوى في ح ، وفي ح/صه لتكن أ + صه $\neq$ ٠ + صه فيجب ان نجد نظيراً ضربياً للعنصر أ + صه (اي عنصر ر + صه بحيث ان ــــــــ .)

لنأخذ المجموعة

$$\bar{س_ه} = \{ (أ + ص_ه)(ر + ص_ه) : ر \in ح \}$$

$$= \{ أر + ص_ه : ر \in ح \}$$

فتكون $\bar{س_ه}$ محتواة في ح/ص_ه . ونرغب في نبرهن ان ١ + ص_ه $\in$ $\bar{س_ه}$. (لماذا ؟) لاحظ انه اذا كان

ϕ : ح ⟶ ح/ص_ه اقتراناً محافظاً قانونياً معرفاً بوضع

ϕ (أ) = أ + ص_ه لكل أ $\in$ ح فتكون $\bar{س_ه}$ الصورة للمجموعة

$$س_ه = \{ أر + ص : ر \in ح \text{ و } ص \in ص_ه \}$$

$$= أح + ص_ه \qquad (\text{لماذا ؟})$$

أ. برهن ان س_ه تكون مثالية في ح .

ب. برهن ان ص_ه تكون مجموعة جزئية فعلا من س_ه .

حـ. برهن ان س_ه = ح و $\bar{س_ه}$ = ح/ص_ه .

د. اثبت ان أ + ص_ه لها نظير ضربي في ح/ص_ه .

مسألة :

برهن النظرية التالية :

نظرية :

اذا كانت ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و ص_ه مثالية قصوى في ح فتكون ص_ه مثالية اولية في ح .

ان عكس النظرية ٣٨ غير صحيح . وفي التمرين ٧ مثال في Z [س] لمثالية اولية ليست مثالية قصوى .

تمارين :

١ ـ جد كل المثاليات القصوى في Z . تذكر انها يجب ان تكون مثاليات اولية.

٢ ـ أ. جد كل المثاليات الفعلية في $Z_ن$. اذا كانت ن = $د^ر$ حيث د $\geq$ ٢ ، عدداً اولياً . (جرب ن = ٤ ، ٨ أولا) .

ب. جد كل المثاليات الاولية والقصوى في $Z_ن$ اذا كانت ن = $د^ر$ ، حيث د $\geq$ ٢ عدداً اولياً.

٣ ـ أ. بين انه اذا كانت ح = 2Z المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الزوجية و

صه = {٢ر : ر ∈ ٢Z}

فتكون صه مثالية قصوى في جـ ليست مثالية اولية في جـ .

ب. هل النظرية ٣٨ صحيحة لحلقة تبديلية بدون عنصر محايد ؟

٤ - برهن التمهيدية ٣٤ .

٥ - بين انه اذا كانت ل حقلا و أ ∈ ل فان الحقل

(س − أ) = {(س − أ) ق (س) : ق (س) ∈ ل [س]}

يكون مثالية قصوى في ل [س] . ●

٦ - بين انه اذا كانت ل حقلا و هـ (س) ∈ ل[س] تقبل القسمة على ك (س) حيث در (ك (س)) ≥ ١

فان المثالية

(هـ (س)) = {هـ (س) ق (س) : ق (س) ∈ ل [س]}

ليست مثالية قصوى في ل [س] .

٧ - عرف اقتراناً φ : Z [س] ⟵ $Z_٢$ بوضع

φ ($\sum_{ر=٠}^{ن}$ أر سر) = { ٠ اذا كانت أ. ∈ ٢Z ؛ ١ اذا كانت أ. ∈ ٢Z }

لكل حدودية $\sum_{ر=٠}^{ن}$ أر سر ∈ Z [س] .

برهن ان φ اقتران محافظ شامل من Z [س] الى $Z_٢$.

ب. بين ان نو (φ) = {٢ أ + س ق (س) : أ ∈ Z ، ق (س) ∈ Z [س]}

حـ لتكن صه = نو (φ) . بين ان صه تكون مثالية قصوى في Z [س] . ●

د. بين ان المثالية

(س) = {س ق (س) : ق (س) ∈ Z [س]}

مثالية اولية وليست مثالية قصوى في Z [س] . ●

٨ - لتكن ل حقلا . لاحظنا في التمرين ٥,٣ - ٢ انه اذا كانت ك (س)∋ ل [س] غير قابلة للاختزال ، فان المتتالية :

(ك (س)) = {ك (س) قـ (س) : قـ (س) ∋ ل[س]} تكون مثالية اولية في ل [س] .

٩ - عين هل كل من المثاليات التالية مثاليات قصوى في الحلقة المعطاة ام لا ؟

أ. ح = Q [س] ، صه = {(س^{٢} - ٢) قـ (س) قـ (س)∋ Q [س]}

ب. ح = R [س] ، صه = {(س^{٢} - ٢) قـ (س) ∋ R [س]}

حـ ح = Q [س] ، صه = {(سقـ (س) + ٣ هـ (س) : قـ (س) ، هـ (س) ∋ Q [س]}

٥,٥ المثاليات القصوى في حلقات الاقتران

يتعلم الطالب في التفاضل والتكامل ان الاقتران قہ المعرف على الفترة المغلقة [٠ ، ١] يكون متصلا عند أ∈ [٠ ، ١] اذا وفقط اذا كانت $\lim_{س \to أ}$ قہ (س) = قہ (أ) .

و يكون الاقتران قہ متصلا على الفترة [٠ ، ١] اذا وفقط اذا كان متصلا عند كل نقطة في الفترة [٠ ، ١] .

ولقد رأينا امثلة على حلقات من اقترانات في التمرين ٣,١ - ٦ وفي هذا البند نوضح احدى الروابط بين التحليل والجبر المجرد ونبرهن ان مجموعة الاقترانات المتصلة على الفترة [٠ ، ١] تكون حلقة ونرى بعض مثالياتها القصوى .

مسألة :

اي من الاقترانات التالية تكون متصلة عند النقطة أ = $\frac{1}{2}$ ؟ خطط رسماً بيانياً لكل اقتران واحفظها لاستعمالات قادمة .

أ. قہ (س) = س^{2} حيث ٠ ≤ س ≤ ١

ب. قہ (س) = $\begin{cases} ١ - ٢س & \text{اذا كانت } ٠ \leq س \leq \frac{1}{2} \\ -١ & \text{اذا كانت } \frac{1}{2} < س \leq ١ \end{cases}$

حـ قہ (س) = $\begin{cases} ٢س - ١ & \text{اذا كانت } ٠ \leq س \leq \frac{1}{2} \\ ٠ & \text{اذا كانت } \frac{1}{2} < س \leq ١ \end{cases}$

د. قہ (س) = $\begin{cases} ٠ & \text{اذا كانت } ٠ \leq س \leq \frac{1}{2} \\ ٢س - ١ & \text{اذا كانت } \frac{1}{2} < س \leq ١ \end{cases}$

اذا كان قہ: [٠ ، ١] ⟵ R و هـ : [٠ ، ١] ⟵ R
اقترانين مجموعهما ، قہ + هـ ، وحاصل ضربهما ، قہ هـ ، يعرفان على الفترة [٠ ، ١] بوضع (قہ + هـ) (س) = قہ (س) + هـ (س) و (قہ هـ) (س) = قہ (س) هـ (س) حيث س ∈ [٠ ، ١].

ونعلم من التفاضل والتكامل انه اذا كان قہ و هـ اقترانين متصلين على الفترة [٠ ، ١] فيكون

الاقترانات $ق_م + هـ$ و $ق_م هـ$ متصلين ايضاً على [٠ ، ١] . ولهذا فان المجموعة المكونة من كل الاقترانات المتصلة على [٠ ، ١] تكون مغلقة بالنسبة للجمع والضرب المعرفين اعلاه . و يعطينا هذا البداية للحلقة التي سندرسها الآن.

تعريف :

لتكن م [٠ ، ١] المجموعة المكونة من كل الاقترانات المتصلة $ق_م$: [٠ ، ١] ⟵ R . فلكل $ق_م$ ، هـ∋م [٠ ، ١] يعرف حاصل الجمع ، $ق_م$ + هـ ، وحاصل الضرب ، $ق_م$هـ كالآتي :

($ق_م$+ هـ) (س) = $ق_م$(س) + هـ (س) ، ($ق_م$ هـ) (س) = $ق_م$(س) هـ (س) حيث س ∋ [٠ ، ١] .

تعريف

تكون المجموعة م [٠ ، ١] المكونة من كل الاقترانات المتصلة $ق_م$: [٠ ، ١] ⟵ R مع عمليتي الجمع والضرب نقطة نقطة ، حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

ان جزء من برهان النظرية ٤١ محتوى في المسألة التالية :

مسالة :

أ. جد العنصر المحايد (العنصر الصفري للحلقة) الجمعي ، والعنصر المحايد الضربي . تذكر ان هذين يجب ان يكونا اقترانين من [٠ ، ١] الى R.

ب. جد النظير الجمعي للاقتران $ق_م$∋م [٠ ، ١]

حـ. برهن ان الضرب يكون توزيعياً على الجمع في م [٠ ، ١] .

و يترك باقي برهان النظرية ٤١ للتمرين ١.

تذكر انه في الاقترانات $ق_م$، $ق_{م١}$ ، $ق_{م٢}$ المعرفة على الفترة [٠ ، ١] يكون $ق_م$= $ق_{م١}$ اذا وفقط اذا كان $ق_م$(س) = $ق_{م١}$(س) لكل س ∋ [٠ ، ١] . ولهذا فان ق ≠ $ق_{م٢}$ اذا وفقط اذا كان ق (س) ≠ $ق_{م٢}$ (س) لاحدى قيم س ∋ [٠ ، ١] على الاقل .

نقول ان الاقتران $ق_م$: [٠ ، ١] ⟵ R غير صفري اذا وفقط اذا وجدت نقطة أ. ∋ [٠ ، ١] بحيث ان $ق_م$(أ.) ≠ ٠ وتعطينا المسألة ٣٩ أمثلة على اقترانات غير صفرية في م [٠ ، ١] تتضمن على الاقل واحداً قيمته صفر على فترة جزئية ومع ذلك فهو اقتران غير صفري .

مسالة :

برهن ان الحلقة (م [٠ ، ١] ، + ، ٠] لا تكون حلقة كاملة.

ولعمل ذلك جد اقترانين غير صفريين $ق_م$، و ∋م [٠ ، ١] بحيث ان $ق_م$هـ = ٠ و يمكن ان تكون النظريتان التاليتان مفيدتين في المسائل ٤٥ حتى ٥٠ . وقد برهنتا في بنود سابقة.

تعريف :

ثبت حـ ∋ [٠ ، ١] وعرف اقتراناً

$\phi_{حـ}$: م [٠ ، ١] ⟵ R

بوضع

$\phi_{حـ}$ (قہ) = قہ (حـ)

لكل قہ ∋ م [٠ ، ١]

مسألة :

ضع حـ = $\frac{1}{4}$. ولتكن قہ و هـ اقترانين معرفين على [٠ ، ١] بالصيغة قہ (س) = س^{٢} - $\frac{1}{16}$ وهـ (س) = س ، على الترتيب . جد $\phi_{حـ}$ (قہ) ، $\phi_{حـ}$ (هـ) ، $\phi_{حـ}$(ق + هـ) و $\phi_{حـ}$ (ق هـ)

مسألة :

أ. بين ان الاقتران $\phi_{حـ}$: م [٠ ، ١] ⟵ R المعطى في التعريف ٤٤ هو اقتران محافظ حلقي شامل من م [٠ ، ١] الى R.

ب. صف كل العناصر ك ∋ نو ($\phi_{حـ}$) . خطط بيان عدة اقترانات في نو ($\phi_{حـ}$).

ح. برهن ان م [٠ ، ١] / نو ($\phi_{حـ}$) تكون متشاكلة مع R .

د. برهن ان نو ($\phi_{حـ}$) مثالية قصوى في م (٠ ، ١) .

مسألة :

برهن انه اذا كانت حـ ∋ [٠ ، ١] ثابتة . و

سهـحـ = { قہ : قہ ∋ م [٠ ، ١] و قہ (حـ) = ٠ }

فان سهـحـ تكون مثالية قصوى في م [٠ ، ١] .

لقد لاحظنا في المسألتين ٤٦ و ٤٧ انه يوجد عدد كبير من المثاليات القصوى في الحلقة م [٠ ، ١].

ونبين في المسألة ٤٨ ان لكل فترة جزئية [حـ ، د] من [٠ ، ١] توجد مثالية فعلا في م [٠ ، ١] .

مسألة :

ليكن حـ و د ثابتين بحيث ان ٠ < حـ < د < ١ . ضع

صهـ = { قہ : قہ ∋ م [٠ ، ١] ، قہ (س) = ٠ حيث س ∋ [حـ ، د] }

أ. بين ان صهـ تكون مثالية في(م [٠ ، ١] +)جد اقتراناً عير صفري قہ ∋ م [٠ ، ١] بحيث

يكون في صه ، واقتراناً هـ ∋ م [٠ ، ١] بحيث لا يكون في صه .

ب. اذا كانت س ∋ [حـ ، د] جد علاقة بين صه و سهس .

حـ هل تكون صه مثالية اولية في م [٠ ، ١] ؟ علل اجابتك .

د. اذا كانت ϕ اقتران تقييم نقطي محافظ من النوع المعطى في التعريف ٤٤ فان نو (ϕ) تكون مثالية قصوى في م [٠ ، ١] . ولنبرهن الآن ان النواة لاي اقتران محافظ شامل من م [٠ ، ١] الى R ، تكون مثالية قصوى .

مسالة :

برهن انه اذا كان ϕ اقتراناً محافظاً شاملا من م [٠ ، ١] الى R فان نو (ϕ) تكون مثالية قصوى .

من الممكن باستعمال بعض نظريات التحليل (التي تدرس بعد مساق التفاضل والتكامل) ، اثبات انه اذا كانت سه مثالية قصوى في م [٠ ، ١] ، فانه يوجد حـ ∋ [٠ ، ١] بحيث ان

سه = سهح = { قه : قه ∋ م [٠ ، ١] ، قه (حـ) ٠ } ولهذا تتكون المثاليات القصوى في م [٠ ، ١] بالضبط من تلك المثاليات لاقترانات تتلاشى عند نقطة معطاة.

مسألة :

افترض ان كل مثالية قصوى سه في م [٠ ، ١] تأخذ الصيغة سه = سهح لبعض قيم حـ ∋ [٠ ، ١] . ولتكن ϕ اقتراناً شاملا من م [٠ ، ١] الى R ، مع خاصية اضافية هي ان ϕ (أقه) = أ ϕ (قه) لكل أ ∋ R و قه ∋ م [٠ ، ١] ، حيث ان أق اقتران معرف على [٠ ، ١] بالصيغة (أق) (س) = أ (قه(س)). برهن انه لاي اقتران ثابت هـ ذي القيمة أ نحصل على ϕ (قه) = قه(هـ) لكل قه ∋ م [٠ ، ١] . ولهذا فان كل اقتران محافظ شامل له هذه الخاصية من م [٠ ، ١] الى R يعطى بالتقييم عند نقطة في الفترة [٠ ، ١].

تمارين :

١ ـ اكمل برهان النظرية ٤١ .

٢ ـ لتكن مَ [٠ ، ١] المجموعة المكونة من كل الاقترانات المتصلة قه: [٠ ، ١] ⟵ R بحيث ان المشتقة الاولى قهَ للاقتران قه موجودة ومتصلة على الفترة [٠ ، ١] . اثبت ان مَ [٠ ، ١] حلقة جزئية فعلا من [٠ ، ١].

٣ ـ لتكن مَ [٠ ، ١] المجموعة المعرفة في التمرين ٢. ثبت حـ ∋ [٠ ، ١].

وضع سهَح ={قه: ∋ مَ [٠ ، ١] و ق (حـ) =}.

أ. برهن ان سَهٍ تكون مثالية قصوى في مَ [٠ ، ١].

ب. جد اقتراناً غير صفري هـ ∈ م [٠ ، ١] بحيث ان هـ (حـ) = ٠ و هـ ∈ مَ [٠،١]

حـ بين ان المجموعة سَهٍ تختلف عن المثالية القصوى سهٍ في م [٠ ، ١] وان سَهٍ = سهٍ ∩ مَ [٠ ، ١]

٤ - لتكن مَ [٠ ، ١] الحلقة المعرفة في التمرين ٢. ثبت حـ ∈ [٠ ، ١] .

وضع صهٍ = {قہ : قہ ∈ مَ [٠ ، ١] ، قَہ (حـ) = قہ (حـ) = ٠}

أ. برهن ان صهٍ تكون مثالية في مَ [٠ ، ١] .

ب. هل تكون صهٍ مثالية اولية في مَ [٠ ، ١] ؟ مثالية قصوى ؟

٥ - ثبت حـ ∈ [٠ ، ١] ولتكن مَ [٠ ، ١] الحلقة المعرفة في التمرين ٢ .

عرف دهٍ : مَ [٠ ، ١] ⟵ R بوضع دهٍ (قہ) = قَہ (حـ) لكل قہ ∈ مَ [٠ ، ١] .

أ. هل تكون دهٍ اقتراناً محافظاً زمرياً شاملا من (مَ [٠ ، ١] ،+) الى (R ، +) ؟

ب. هل تكون دهٍ اقتراناً محافظاً حلقياً شاملا من مَ [٠ ، ١] الى R ؟

٦ - عرف ψ : م [٠ ، ١] ⟵ R بوضع ψ (قہ) = $\int_0^1$ قہ (س) دس لكل قہ ∈ م [٠،١].

أ. هل تكون ψ اقتراناً محافظاً شاملا زمرياً من (م [٠ ، ١] ، +) الى (R ، +) ؟

ب. هل تكون ψ اقتراناً محافظاً شاملا حلقياً من م [٠ ، ١] الى R ؟

٧ - عرف اقتراناً د : مَ [٠ ، ١] ⟵ م [٠ ، ١] حيث مَ [٠ ، ١] هي الحلقة المعرفة في التمرين ٢ ، بوضع د (قہ) = قَہ لكل قہ ∈ مَ [٠ ، ١] .

أ. بين ان د اقتران محافظ زمري شامل من (مَ [٠ ، ١] ، +) الى (م [٠ ، ١] ، +).

ب. هل د اقتران محافظ حلقي شامل من مَ [٠ ، ١] الى م [٠ ، ١] ؟

مراجعة

عبارات هامة

اقتران حدودي

عامل حدودي

صفر اقتران حدودي

مثالية رئيسية

حلقة مثالية رئيسية

حلقة خارجة

اقتران محافظ قانوني

الصورة المحافظة لحلقة

مثالية اولية

مثالية قصوى

حلقة من اقترانات متصلة

قاسم مشترك أعظم لحدوديات

حدودية غير قابلة للاختزال

رمـوز

(أ)

ح/صه

م [٠ ، ١]

$\phi_{م}$ (قه) = قه (حـ)

سهـم

اسئلة

١ - اذكر نظرية تربط عوامل صيغتها س - أ مع اصفار حدودية على حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

٢ - لتكن ح حلقة كاملة . ما اكبر عدد من الاصفار للحدودية قه(س) ∈ ح [س] ذات الدرجة ن ؟
ما اكبر عدد من للعوامل س - أ (أ ∈ ح) في قه(س) ∈ ح [س] اذا كانت درجة قه(س) هي ن ؟
اذا لم تكن ح حلقة كاملة ، فهل من الممكن ان يكون عدد الاصفار او العوامل في الحدودية ح [س] هو هذا العدد الاكبر المذكور ؟

٣ - ما هي خوارزمية القسمة للحدوديات على حقل ؟

٤ - لاي انواع الحلقات الجزئية صه من الحلقة ح يكون الضرب عملية ثنائية على ح / صه معرفاً تعريفاً حسناً ؟

اذا كانت ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ، فلأي نوع من الحلقات الجزئية من ح تكون ح / صه حلقة كاملة ؟ حقلا ؟

٥ - اعط مثالين على حلقة مثالية رئيسية . اعط مثالا لحلقة من حدوديات بحيث لا تكون حلقة مثالية رئيسية .

٦ - اذكر نظرية التشاكل الاولى للحلقات واوضح كيف تستعملها لايجاد حلقات غير متشاكلة تكون صوراً محافظة للحلقة المعطاة.

٧ - هل كل مثالية قصوى هي مثالية اولية تبديلية ذات عنصر محايد ؟

هل كل مثالية اولية هي مثالية قصوى في حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ؟

٨ - كيف تعرف الجمع والضرب على م [٠ و ١] ؟ هل تكون (م [٠ ، ١] ، + ، ٠) حلقة ؟ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ؟ حلقة كاملة ؟ حقلا ؟

٩ - صف صفاً من الاقترانات المحافظة الشاملة من م [٠ ، ١] الى R . صف صفاً من المثاليات القصوى ترتبط بهذه الاقترانات المحافظة . هل يوجد اي انواع اخرى من الاقترانات المحافظة او المثاليات القصوى في م [٠ ، ١] ؟

ان المسائل التالية اجيب عليها في التمارين .

١٠ - لتكن ق (س) ، هـ (س) ∈ ح [س] ، حيث ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ، وافترض ان

ق (ر) = هـ (ر) لكل ر ∈ ح فهل من الضروري ان يكون صحيحاً ان ق (س) = هـ (س) ؟ لاي الحلقات يكون صحيحاً ان ق (ر) = هـ (ر) لكل ر ∈ ح يقتضي ان ق (س) = هـ (س) ؟

١١ - ماذا يعني القاسم المشترك الاعظم لحدوديتين غير صفريتين على حقل قاسم مشترك أعظم

غير صفريتين على حقل قاسم مشترك أعظم هل من الضروري أن يكون لحدوديتين

١٢ ما هي الحدودية غير القابلة للاختزال في ح [س] ؟ اذا كانت ل حقلا و ك (س) ∈ ل [س] غير قابلة للاختزال ، فهل تكون المثالية (ك (س)) مثالية اولية ؟ مثالية قصوى ؟

١٣ - ما هي بعض المثاليات في م [٠ ، ١] ؟ هل تكون ايضاً مثاليات في م [٠ ، ١]

الملحق ١

المجموعات

الرموز المألوفة التالية من نظرية المجموعات مستعملة خلال هذا الكتاب

الرمز	معناه
س ∈ سه	س عنصر في المجموعة سه
س ∉ س	س ليست عنصر في سه
{أ١ ، أ٢ ، ... ، أن}	المجموعة التي عناصرها أ١ ، أ٢ ، ... ، أن
{س : ع (س)}	المجموعة المكونة من كل عناصر س التي تكون فيها العبارة (ع (س) صحيحة
ϕ	المجموعة الخالية ، المجموعة الخالية من العناصر
سه ∪ صه (اتحاد)	المجموعة المكونة من كل العناصر التي تنتمي الى سه أو صه أو كليهما
سه ∩ صه (تقاطع)	المجموعة المكونة من كل العناصر التي تنتمي الى سه او صه معاً وكليهما
س — ص (فرق)	المجموعة المكونة من كل العناصر التي تنتمي الى سه ولكن ليست في صه
سه ⊇ صه (احتواء)	سه مجموعة جزئية من صه : كل عنصر في سه هو ايضاً عنصر في صه
سه = صه	سه ⊇ صه و صه ⊇ سه المجموعتان سه و صه لهما نفس العناصر
سه ≠ صه	سه - صه ≠ ϕ أو صه - سه ≠ ϕ أو كلاهما
سه ⊃ صه (متضمنة فعلا)	سه مجموعة جزئية من صه و سه ≠ صه
سه × صه (الجداء الديكارتي)	المجموعة المكونة من كل الازواج المرتبة (أ ، ب) حيث ان أ ∈ سه و ب ∈ صه
سه ∩ صه = ϕ	المجموعتان سه و صه منفصلتان

الملحق ٢

المنطق وطرق البرهان

أ. المنطق

تكتب معظم الرياضيات على صيغة فرضيات ، وهي عبارات تكون اما صائبة او خطأ ولا تكون كليهما . و يمكن ان تضم عبارات بسيطة معاً بطرق عدة لتكو ين عبارات مركبة ، وهذه تكون صائبة او خطأ على حسب صواب او خطأ العبارات البسيطة التي تتكون منها .
فالعبارة المركبة «ف و ن» تكون صائبة اذاً وفقط اذا كانت ف و ن صائبتين معاً . وتكون خطأ اذا كانت ف خطأ أو ن خطأ أو كلا ف و ن خطأ.
و يمكن بيان هذه العلاقات بالتحديد كما في الجدول أ١ ، و يسمى (جدول الصواب) للعبارة «ف و ن»

الجدول أ١

ف	ن	ف و ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

والعبارة المركبة « ف أو ن » تكون صائبة اذا كانت ف صائبة او كانت ن صائبة أو كانت كلاهما صائبتين وتكون خطأ اذا كانت كلا ف و ن خطأ . و يعطينا الجدول أ٢ جدول الصواب للعبارة (ف أو ن)

الجدول ب

ف	ن	ف أو ن
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

وتكون العبارة البسيطة « نفي ف » صائبة اذا كانت ف خطأ وتكون خطأ عندما تكون ف صائبة (انظر الجدول أ$_{٣}$).

الجدول ا

ف	نفي
خ	ص

يقال لعبارتين لهما نفس جدولي الصواب انهما متكافئتان منطقياً . واذا كانت قيم الصواب لعبارة ليست نفس قيم الصواب لعبارة اخرى تكون العبارتان غير متكافئتين منطقياً . وتؤكد قوانين دي مورجان ان النفي للعبارة «ف و ن» يكون مكافئاً منطقياً للعبارة « نفي ف أو نفي ن » . و يكون النفي للعبارة « ف أو ن » مكافئاً منطقياً للعبارة « نفي ف و نفي ن » .
(انظر التمرين ١) .
التضمين « اذا كانت ف ، فأن ن » يرمز لها بالرمز ف ⇐ ن وتقرأ ايضاً « ف تتضمن ن » وتكون هذه العبارة صائبة غندما تكون ف صائبة و ن صائبة ، وتكون خطأ عندما تكون ف صائبة و ن خطأ . وبما انه لا يمكن فعلا معاملة العبارة ف ⇐ ن عندما تكون ف خطأ ، فتقول انها تكون صائبة في هذه الحالة . (والجملة التالية هي مثال على هذه الحالة : اذا كان العشب احمر ، فالسماء تثلج.) وجدول الصواب للتضمين ف ⇐ ن مبين في الجدول أ$_{٤}$.

ف	ن	ف ⇐ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

الجدول أ٤

في التضمين ف ⇐ ن تدعى العبارة ف بالفرضية وتدعى ن بالنتيجة. والعبارة ف ⇐ ن تكافئ منطقياً العبارة «نفي ف أو ن» و يبين ذلك بجدول الصواب . (انظر التمرين ٢ .)
و يكون النفي للعبارة « اذا كانت ف ، فان نْ » مكافئاً للعبارة « ف و نفي ن» وبهذا فان « نفي (ف ⇐ ن) يعني « ف ونفي ن » . ونفي التضمين ف ⇐ ن يكون بالقول ان الفرضية ف تتحقق ولكن النتيجة ن خطأ .

عكس الايجاب للتضمين ف ⇐ ن هو التضمين « نفي ن ⇐ نفي ف » . و يكون عكس الايجاب مكافئاً منطقياً للتضمين الاصلي . و يمكن احياناً تحقيق ف ⇐ ن ببرهنة عكس الايجاب « نفي ن ⇐ نفي ف » عكس العبارة ف ⇐ ن هو التضمين ن ⇐ ف ولا يكون العكس مكافئاً منطقياً للتضمين الاصلي . ولا يستطيع احد ان يبرهن تضميناً ببرهنة عكسه ، كما لا يستطيع افتراض ان العكس ن ⇐ ف يكون صائباً لمجرد انه قد تم برهان ف ⇐ ن صائبة

وهناك عدة طرق لذكر التضمين ف ⇐ ن . منها هذه العبارات التالية :

اذا كانت ف ، فان ن

تكون ف كافية للعبارة ن

ف فقط اذا ن

ن ضرورية للعبارة ف

وتكون العبارة « ف اذا وفقط اذا ن » صائبة اذا كانت ف و ن كلاهما صائبتين او كلاهما خطأ . و يرمز لها بالرمز ف ⇔ ن . وجدول الصواب للعبارة ف ⇔ ن مبين في الجدول أ٥

ف	ن	ف ⇔ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

الجدول ١

ويمكن كتابة العبارة « ف اذا وفقط اذا ن » في اي من الصيغ التالية:

ف ⇔ ن

ف ⇐ ن و ن ⇐ ف

ف مكافئة للعبارة ن

ف ضرورية وكافية للعبارة ن

وبما ان عكس الايجاب للعبارة ن ⇐ ف يكون مكافئاً للعبارة نفي ف ⇐ نفي ن ، فالعبارة « ف اذا وفقط اذا ن » تكون مكافئة منطقياً للعبارة

(ف ⇔ ن) و (نفي ف ⇐ نفي ن)

ولتكن ف (س) و ن (س) عبارتين تشملان متغيراً ، فمثلا ، لتكن ف (س) العبارة س + ١ > س . فان ف (س) تكون صائبة لكل عدد حقيقي س . وكمثال آخر لتكن ن (س) العبارة $س^٢$ = ١. فان ن (س) تكون صائبة للعددين الحقيقيين س = ١ و س = -١ وخطأ كل الاعداد الحقيقية الاخرى.

والرمز

∀ س∈سه ف (س)

يقرأ « لكل س ∈ سه ف (س) » . تكون العبارة ∀ س∈ سه ف (س) صائبة اذا وفقط اذا كانت ف (س) صائبة لكل عنصر س للمجموعة سه التي قيد المناقشة . وتكون العبارة ∀ س ∈ سه ف (س) خطأ اذاً وفقط اذا كانت (س) خطأ ولو لعنصر واحد على الاقل س ∈ سه . ويكتب احياناً ببساطة ∀ س ف (س) اذا كان واضحاً من سياق الكلام ما هي سه المقصودة ، ويقرأ الرمز

E س ∈ سه ف (س)

«توجد س ∈ سه بحيث ان ف (س) » . وتكون هذه العبارة E س ∈ ف (س) صائبة اذا وفقط

اذا وجد على الاقل عنصر في المجموعة سہ بحيث ان ف (س) تكون صائبة . وتكون العبارة خطأ اذا وفقط اذا كانت ف (س) خطأ لكل س ∋ سہ . و يكتب احياناً E س ف (س)
و يكون مفهوماً ان س ∋ سہ ، حيث س هي المجموعة التي تناقشها.
وبربط هذين الزمرين ، نرى ان النفي للعبارة ∀ س ∋ س ف (س) هو العبارة

E س ∋ سہ نفي ف (س)

والنفي للعبارة E س ∋ ف (س) هو العبارة ∀ س ∋ س نفي ف(س) »
وبما ان نفي العبارة ف (س) ⇐ ن (س) هو «ف (س) ونفي ن (س)»
فان نفي العبارة

∀ س (ف (س) ⇐ ن (س))

هو العبارة

E س (ق (س) ونفي ن (س))

ونحصل على النفي للعبارة

∀ ص E س ف (س ، ص) بخطوتين

اولهما ايجاد

نفي [∀ ص E س ف (س ، ص)] ⟺ E ص نفي (E س ، (س ، ص)

وبما ان العبارة

نفي (E س ف (س ، ص))

تكافيء العبارة

∀ س نفي (س ، ص)

نجد اخيراً ان النفي للعبارة ∀ ص E س ف (س ، ص) هو العبارة

E ص ∀ س نفي ف (س ، ص)

وعلى سبيل المثال ، لتكن $س_1$ ، $س_2$ ، ... متتالية مكونة من اعداد حقيقية.
ففي التفاضل والتكامل او التفاضل والتكامل المتقدم يتعلم الطالب ان نهاية المتتالية تكون العدد ل اذا وفقط اذا كان لكل ∋> . يوجد عدد صحيح م بحيث ان لكل ر ≤ م ، | $س_ر$ - ل | <∋.
ونكتب بصيغة الزمر :

نهـا $س_ر$ = ل اذا وفقط اذا كان
ر ← ∞

∀ ∋ > . E م (∀ر ≤ م | $س_ر$ - ل | <∋)

و يكون النفي لهذه العبارة الرمزية

E ∋> . ∀ م (E ر ≤ م | $س_ر$ - ل | ≤ ∋)

وبالكلمات لا تكون النهاية للمتتالية $س_1$ ، $س_2$ ، ... تساوي ل اذا وفقط اذا اوجد $\in >$. بحيث انه لكل عدد صحيح م. $|س_ر - ل| \leq \in$ لبعض ر = م .

تمارين :

١ - اكتب جداول الصواب لكل زوج من العبارات التالية واستخدامها لبرهنة قوانين دي مورجان

أ. نفي (ف و ن) ، نفي ف أو نفي ن

ب. نفي (ف أو ن) ، نفي ف و نفي ن

٢ - اكتب جداول الصواب لكل من العبارات التالية وقارن كل جدول مع جدول العبارة ف $\Leftarrow$ ن لتعيين هل العبارة مكافئة الى ف $\Leftarrow$ ن ام لا .

أ. ن $\Leftarrow$ ف (العكس)

ب. نفي ف $\Leftarrow$ نفي ن (المعكوس)

حـ. نفي ن $\Leftarrow$ نفي ف (عكس الايجاب)

د. نفي ف أو ن

٣ - اثبت ان العبارتين ف $\Leftrightarrow$ ن و [(ف $\Leftarrow$ ن) و (نفي $\Leftarrow$ نفي ن)] تكونان متكافئتين منطقياً .

٤ - عين هل كل من العبارات ادناه صائبة ام خطأ . اكتب النفي لكل عبارة . و يمثل الرمزان R و Z المجموعتين المكونتين من الاعداد الحقيقية والاعداد الصحيحة على الترتيب .

أ. يوجد عددان حقيقيان س ، ص بحيث ان س + ص = ٢ و س ص = ٢.

ب. $\forall$ س $\in$ R (اذا كانت س $>$ ٣ س ، فان س $>$ ٠)

حـ. توجد س $\in$ R بحيث ان $س^٢ >$ ٠

د. $\forall$ س $\in$ Z س $<$ ٠

هـ. $\forall$ س $\in$ Z E ص $\in$ Z س $>$ ص

و. E س $\in$ Z $\forall$ ص $\in$ Z س $>$ ص

ب. طرق البرهان

يتعامل الطالب في الرياضيات مع قضايا (اي عبارات يفترض او يبرهن صوابها او خطأها وتصنف هذه القضايا كاوليات وتمهيدات ، نظريات ، أو عرضيات. والأولية هي عبارة يفترض ان تكون صائبة ، وغالباً ما تكون بديهية واضحة بذاتها ، وكل فروع الرياضيات تبدأ بعبارات غير معرفة واوليات . وكل الانواع المتبقية من العبارات يجب ان يبرهن صوابها .

والتمهيدية عبارة تستعمل في برهنة عبارة اخرى (فرضية او نظرية) ولكن يرى ان اهميتها قليلة بنفسها. والنظرية فرضية رئيسية . وغالباً ما يكون التمييز بين النظرية والفرضية مسألة رأي شخصي . والواقع انه حتى التمهيديات يمكن ان تصبح نظريات بمعنى انها تستعمل على مدى واسع .

ومن الغايات الرئيسية للرياضي ان يبرهن او ينفي اي حدس ونعني بهذا انه يرغب في تحقيق صحة العبارة . ويتم ذلك بمناقشة تؤكد ان نصاً ما يسمى النتيجة ينتج فعلا من عبارات تسمى المقدمات او المقولات .

ويمكن ان تشتمل هذه المقدمات على اوليات ، وتعاريف ، ونظريات مبرهنة سابقاً . ولكي تقيم برهاناً على عبارة ، يجب ان تكون المناقشة صحيحة. ونعني بهذا انه اذا كانت $ف_1$ ، $ف_2$ ، ... ، $ف_ن$ مقدمات و ن هي النتيجة فيجب ان تكون البارة المركبة ($ف_1$ و $ف_2$ و ... و $ف_ن$) $\Leftarrow$ ن دائماً صائبة (اي يجب ان تكون متكررة الصواب).

والمقولات التالية كلها صحيحة :

القاعدة الرئيسية للاستدلال

ف $\Leftarrow$ ن

ف

$\therefore$ ن

قاعدة السلسلة للاستدلال

ف $\Leftarrow$ ن

ن $\Leftarrow$ ر

$\therefore$ ف $\Leftarrow$ ر

النقاش بعكس الايجاب

ف $\Leftarrow$ ن

نفي ن

المقدمات

$\therefore$ نفي ف النتيجة

قاعدة الفصل

ف أو ن

نفي ف

$\therefore$ ن

يمكن بيان انه باستخدام هذه المقولات الصحيحة الاساسية يمكن تكوين مقولات اخرى صحيحة فعلى سبيل المثال افرض اننا نرغب بتعيين هل المقولة التالية صحيحة ام لا .

$ف_1$ $\Leftarrow$ $ف_2$

ف$_{٢}$ ⇐ ف$_{٣}$	اذا استيقظ احمد في الساعة السابعة ، فانه يكون عصفوراً يقظاً. اذا كان احمد عصفوراً يقظاً ، فانه يحصل على قوته
ف$_{١}$	يستيقظ احمد في الساعة السابعة.
∴ ف$_{٣}$	لذا يحصل احمد على قوته

وحسب قاعدة السلسلة للاستدلال نعلم ن المقولة

ف ⇐ ف$_{٢}$

ف$_{٢}$ ⇐ ف$_{٣}$

ف$_{١}$ ⇐ ف$_{٣}$.

صحيحة . وبما ان

ف$_{١}$ ⇐ ف$_{٣}$

ف$_{١}$

∴ ف$_{٣}$

تكون ايضاً صحيحة ، ونلاحظ انه بتجميع المقولتين نحصل على المقولة الابتدائية المعطاة ولكن مضافاً اليها ، في الوسط ، المقدمة (ف$_{١}$ ⇐ ف$_{٣}$) . وبهذا فان المقولة الاصلية تكون صحيحة وغالباً وغالباً ما تكون العبارة التي نرغب في برهنتها تضمينياً مثل ف ⇐ ن.

وهناك طريقتان لبرهان عبارة كهذه ـــــ مباشرة او غير مباشرة.

في البرهان المباشر نفترض ان المقولة ف ، في التضمين ف ⇐ ن صائبة ونحاول برهنة ان العبارة ن من الضروري ان تكون صائبة نتيجة لذلك . ولعمل ذلك نستبعد الحالة التي يكون فيها التضمين ف ⇐ ن خطأ اي عندما تكون ف صائبة و ن خطأ . فمثلا عندما نفترض ف صائبة نحاول انشاء سلسلة من العبارات ذات الصيغ ف ⇐ ف$_{١}$ ، ف$_{١}$ ⇐ ف$_{ر}$ ، ... ،ف ⇐ ن وكل من هذه اولية او تعريف ، او نظرية مبرهنة سابقاً . وتكون العبارة المركبة.

[ف و (ف ⇐ ف$_{١}$) و (ف$_{١}$ ⇐ ف$_{٢}$) و ... و (ف$_{ر}$ ⇐ ن)] ⇐ ن

عبارة صائبة اذا وفقط اذا كانت ن صائبة .

ولهذا يجب ان تكون ن صائبة .
وكمثال فلنبرهن العرضية التالية :

عرضية :

ليكن س و ص عددين صحيحين . فاذا كانت س زوجياً و ص فردياً فان س‌ص يكون زوجياً .

البرهان :

لنفرض ان س زوجي و ص فردي . بما ان س زوجي فيوجد عدد صحيح م بحيث ان س = ٢ م. وبما ان ص فردي فيوجد عدد صحيح ب بحيث ان ص = ٢ب + ١ وباستخدام صيغة الرموز نحصل على النقاش التالي :

(س = ٢ م) و (ص = ٢ب + ١)

⇐ (س‌ص = ٢ م (٢ب + ١))
⇐ (س‌ص = ٢ (٢ م‌ب + م))
⇐ (س‌ص = ٢حـ ، حيث حـ = ٢ م‌ب + م ∈ Z)
⇐ (س‌ص زوجي)

ولذا فان س‌ص تكون زوجية .

وعندما لا تعرف كيف تبدأ برهاناً مباشراً ، فيمكن ان تحاول دراسة امثلة (طريقة «اعملْ شيئاً» او بالسير خلفاً بدءاً بالنتيجة او ان تفتش عن نظريات واوليات تظهر فيها ف كفرض او تظهر ن كنتيجة . وفي البرهنة بدءاً بالنتيجة ، عند محاولة البرهنة ان ف ⇐ ن ، يبدأ الطالب من ن ويحاول ان يستنتج ف او بعض العبارات المعروف صوابها ، مكوناً سلسلة يأمل ان يستطيع عكسها . فاذا امكن عكس السلسلة (كما يحدث مراراً في المعادلات او المتباينات) ، نحصل على برهان للعبارة ف ⇐ ن . (انظر برهان العرضية ٥ كمثال على هذه الطريقة) . ولكن اذا لم تتمكن من عكس السلسلة (كما هي الحالة غالباً) . فان برهان هذه العبارة لم يتم بعد . رأينا ان التضمين ف ⇐ ن وعكس الايجاب لها. نفي ن ⇐ نفي ف متكافئان منطقياً ، فيجب ان تكون هاتان العبارتان اما صائبتين او خطأ معاً .

ولذا اذا صادفنا صعوبات في برهنة العبارة ف ⇐ ن مباشرة ، فيمكننا ان نحاول بدلا من ذلك صواب عكس الايجاب نفي ن ⇐ نفي ف . فمثلا ، قد يكون من الصعب ان تبرهن مباشرة انه اذا كان س عدداً صحيحاً وكان $س^{٢}$ زوجياً ، فان س تكون زوجية . فلنبرهن هذه العبارة لتكون مثالا على البرهان بعكس الايجاب .

عرضية ٢ :

ليكن س عدداً صحيحاً فاذا كان س ^{٢} زوجياً ، فان س يكون زوجياً .

البرهان :

تأخذ العرضية الصيغة ف ⇐ ن ، حيث ف هي العبارة « س^{٢} زوجية » و ن هي العبارة «س زوجي» ولهذا يكون عكس الايجاب نفي ن ⇐ نفي ف هو العرضية : « اذا كانت س فردية (ليست زوجية) ، فان س^{٢} تكون فردية (ليست زوجية) » .
لنفرض ان س فردية . فيوجد عدد صحيح أ بحيث ان س = ٢ أ + ١.

س = ٢ أ + ١) ⇐ (س^{٢} = (٢ أ + ١)^{٢})

⇐ (س^{٢} = ٤ أ^{٢} + ٤ أ + ١)

⇐ (س^{٢} = ٢ (٢ أ^{٢} + ٢ أ) + ١)

⇐ (س^{٢} = ٢ب + ١ حيث ب = ٢ أ^{٢} + ٢ أ $\in$ Z)

فتكون س^{٢} فردية . وبما ان عكس الايجاب يكون صائباً ، فالعبارة الاصلية ف ⇐ ن تكون ايضاً صائبة.
و يدعى البرهان بعكس الايجاب برهاناً غير مباشر لاننا نبرهن العبارة المعطاة مباشرة . وهناك نوع ثاني من البرهان غير المباشر وهو البرهان بالتناقض و يستعمل هذا النوع على الغالب عندما نعلم ان هنالك احتمالين او ثلاثة احتمالات ، ونريد ان نحذفها كلها ما عدا واحداً . فمثلا ، نعلم ان كل عدد حقيقي يكون موجباً او سالباً او صفراً ، ولكن لا يمكن ان يكون غير ذلك (قانون التثليث) . ولهذا اذا اردنا ان نبرهن ان كمية ما أ موجبة فنفترض ان أ = ٠ ونحاول ان نصل الى عبارة نعلم انها خطأ.
والطريقة العامة لبرهان ف بالتناقض تبدأ بافتراض ان نفي ف صائباً ونستنتج من الافتراض عبارة ن نعلم من نظريات سابقة أو أوليات انها خطأ . وبما اننا نعلم ان العبارة نفي ف ⇐ ن تكون صائبة عندما تكون ن خطأ فيتبع من جداول الصواب ان نفي ف يكون خطأ . ومن ثم فيجب ان تكون ف صائبة.

وبرهان ان العدد $\sqrt{٢}$ غير نسبي هو مثال على استخدام التناقض .

عرضية ٣ :

العدد $\sqrt{٢}$ غير نسبي

البرهان :

افرض ان $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي . فيوجد عددان صحيحان : أ و ب حيث ان $\sqrt{2} = \frac{أ}{ب}$ وليس للعددين أ و ب عوامل مشتركة (الكسر في اصغر صوره)

$\sqrt{2} = \frac{أ}{ب}$) ⟸ ($2 = \frac{أ^2}{ب^2}$)

⟸ ($أ^2 = 2ب^2$)

⟸ ($أ^2$ عدد صحيح زوجي)

⟸ (أ زوجية) (انظر العرضية ٢)

⟸ (أ = ٢حـ حيث حـ عدد صحيح)

⟸ ($2ب^2 = أ^2 = 4حـ^2$)

⟸ ($ب^2 = 2حـ^2$)

⟸ (ب عدد صحيح زوجي)

⟸ (ب = ٢ د حيث د عدد صحيح)

⟸ (أ و ب بينهما العامل ٢ مشترك)

فالعبارة الاخيرة في المناقشة تناقض افتراضنا ان العددين أ و ب ليس لهما عوامل مشتركة . وبهذا فان الافتراض ان $\sqrt{2}$ عدد نسبي خطأ وبذا نعلم ان $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي :

وعندما نفشل في برهنة حدس ما باي من هاتين الطريقتين ، المباشرة وغير المباشرة ، فيمكن ان يكون الحدس غير صحيح . وهناك طريقتان قياسيتان لنقض اي حدس او اثبات بطلانه . أولهما ايجاد مثال واحد لا يحقق الحدس . ويسمى هذا المثال بالمثال العكسي . فمثلا يمكننا استخدام مثل عكسي لنقض الحدس بانه اذا كانت س $\in Z$ و س $>>$ ٢ ، فان $س^2 - 4س = 0$ بالاشارة الى ان ٣ ٢ وان $3^2 - 4(3) = -3$ ٠ ، وبذا فان الحدس كما هو خطأ . والطريقة الثانية لمحاولة نفي اي حدس هي بافتراض ان الحدس صحيح ثم اشتقاق علاقات اضافية منه . فاذا وجدنا علاقة تناقض اولية ما أو تعريفاً او نظرية مبرهنة سابقاً فان الحدس يكون خطأ . وقد استخدمت هذه الطريقة الخاصة في فحص احداس أدت اخيراً الى تطوير مواضيع جديدة في الرياضيات . ويصح هذا بوجه خاص في الهندسة ، حيث ان المحاولات لاختبار مقولة اقليدس في التوازي بافتراض ان هذه المقولة غير صحيحة قد قاد بدلا من ذلك الى الهندسات اللااقليدية . في تطوير هذه الهندسات افتراض ان نفي فرضية التوازي كان صحيحاً واشتقت النظريات من هذا الافتراض (بالاضافة الى اوليات اخرى) مما لم يتعارض مع الاوليات والنظريات المعروفة.

وقد تحتاج الى ان تبرهن عرضية صيغتها ف $\Leftrightarrow$ ن . فبما ان ف $\Leftrightarrow$ ن تعني (ف $\Leftarrow$ ن) و (ن $\Leftarrow$ ف) :

نستطيع ان نمضي في برهنة العبارتين ف $\Leftarrow$ ن و ن $\Leftarrow$ ف كلا على حدة بواسطة احدى الطرق اعلاه . ولكن ، قد رأينا ان ف $\Leftrightarrow$ ن تكافيء (ف $\Leftarrow$ ن) و (نفي ف $\Leftarrow$ نفي ن) .

وغالباً ما يزودنا هذا بطريقة ملائمة لبرهان عبارة تكافوء :

برهن ف $\Leftarrow$ ن وبعد ذلك برهن نفي ف $\Leftarrow$ نفي ن . وكمثال على ذلك لنبرهن العرضية التالية :

عرضية ٤

ليكن س عدداً صحيحاً . يكون س فردياً اذا وفقط اذا كان س^{٢} فردياً

البرهان

لتكن ف العبارة « س فردية » ولتكن ن العبارة « س^{٢} فردية » . فان عرضيتنا تصبح بالصيغة ف $\Leftrightarrow$ ن . ولكي نبرهن ف $\Leftrightarrow$ ن فنريد ان نبرهن ان ف $\Leftarrow$ ن وان نفي ف $\Leftarrow$ نفي ن .

فلنفترض اولا ان س فردية . فيوجد عدد صحيح أ بحيث ان س = ٢ أ + ١ .

(س = ٢ أ + ١) $\Leftarrow$ (س^{٢} = (٢ أ + ١)^{٢})

$\Leftarrow$ (س^{٢} = ٢ (٢ أ^{٢} + ٢ أ) + ١)

$\Leftarrow$ (س^{٢} = ٢ب + ١ حيث ب = ٢ أ^{٢} + ٢ أ $\in Z$)

$\Leftarrow$ (س^{٢} فردية)

ولذلك فان س^{٢} تكون فردية اذا كانت س فردية . ولنبرهن الآن نفي ف $\Leftarrow$ نفي ن .

افترض ان س ليست فردية . فيوجد عدد صحيح أ بحيث ان س = ٢ أ .

(س = ٢ أ) $\Leftarrow$ (س^{٢} = (٢ أ)^{٢})

$\Leftarrow$ (س^{٢} = ٢ (٢ أ^{٢})

$\Leftarrow$ (س^{٢} = ٢ ب حيث ب = ٢ أ^{٢} $\in Z$)

$\Leftarrow$ (س^{٢} تكون زوجية)

وبذا فان عكس الايجاب نفي ف $\Leftarrow$ نفي ن صحيح . ويجب ان نحصل على صحة التضمين ن $\Leftarrow$ ف .

وطريقة ثالثة لبرهنة التكافؤ ف $\Leftrightarrow$ ن هي تكوين سلسلة من عبارات متكافئة تنطلق

من ف الى ن كما يلي :

$$ف \Leftrightarrow ف_{١} ، ف_{١} \Leftrightarrow ف_{٢} ، ف_{٢} \Leftrightarrow ف_{٣} ، . . . ف_{ن} \Leftrightarrow ن$$

وعلى سبيل المثال ، نستطيع استخدام هذه الطريقة لبرهنة العبارة التالية :

يكون العدد الصحيح س فردياً اذا وفقط اذا كان $س^{١٦}$ فردياً . نعلم من الفرضية ٤ ان العدد الصحيح س يكون فردياً اذا وفقط اذا كان $س^{٢}$ فردياً . ولهذا نحصل على السلسلة التالية :

(س فردية) $\Leftrightarrow$ ($س^{٢}$ فردية)

$\Leftrightarrow$ ($(س^{٢})^{٢} = س^{٤}$ فردية)

$\Leftrightarrow$ ($(س^{٤})^{٢} = س^{٨}$ فردية)

$\Leftrightarrow$ ($(س^{٨})^{٢} = س^{١٦}$ فردية)

وهناك صيغ اخرى معروفة للاحداس تكتب بالرموز ، مثل $\exists$ س $\in$ ف (س) ، $\forall$ س $\in$ سه ف (س) $\exists$ س وحيدة بحيث ان ف (س).

ولنبرهن العبارة $\exists$ س $\in$ سه ف (س) ، نحتاج فقط لبيان او انشاء عنصر واحد س $\in$ سه بطريقة ما بحيث ان العبارة ف (س) تكون صائبة . وقد يكون الانشاء الفعلي لهذا العنصر صعباً جداً (فمثلا ايجاد حل للمعادلة الحدودية الرابعة

$$س^{٤} + أ_{١} س^{٣} + أ_{٢} س^{٢} + أ_{٣} س + أ_{٤} = ٠$$

امر معقد جداً) . ونقابل على الدوام هذا النوع من البرهان عندما نريد حل المعادلة او متباينة لان ايجاد الحل اثبات للوجودية .

وعلى سبيل المثال فلنبرهن العرضية التالية :

عرضية ٥

ليكن أ و ب عددين حقيقين حيث أ $\neq$ ٠ . فهناك عدد حقيقي س بحيث ان أس + ب = ٠

البرهان

هناك نجد العمل بخطى عكسية مفيداً جداً . فلنفرض انه العدد س موجود

$$(أ س + ب = ٠) \Rightarrow (أس = - ب)$$

$$\Rightarrow (س = - \frac{ب}{أ})$$

و يجب ان نبين الان انه يمكننا عكس خطواتنا . بما ان أ $\neq$ ٠ ، فيكون العدد - ($\frac{ب}{أ}$)

موجوداً . لتكن س = - (ب / أ) :

(س = - ب / أ) ⇐ (أس + ب = أ (- ب / أ) + ب = - ب + ب = ٠)

ولهذا فللعدد - (ب / أ) الخاصية المطلوبة ، وقد عرضنا الحل الضروري . ولنبرهن العبارة ∀ س ∋ سه ف (س) ، فلنفرض س تمثل عنصراً ثابتاً ولكنه اختياري من المجموعة سه ونبرهن انه في هذه المجموعة تكون العبارة ف (س) صائبة « وبما ان س عنصراً اختياري في المجموعة سه ، فنكون قد بينا ان ف (س) تكون صائبة لكل س ∋ سه . فعلى سبيل المثال لنبرهن العرضية التالية :

عرضية ٦

لكل س ∋ R ، س^{٢} ≥ ٠ .

البرهان

نحتاج الى الحقيقة القائلة ان حاصل ضرب اعداد موجبة يكون موجباً والى قانون التثليث . لتكن س ∋ R . فتكون س موجبة او س سالبة أو س = ٠

(س موجبة) ⇐ (س . س = س^{٢} وهي موجبة)

⇐ (س^{٢} > ٠)

(س سالبة) ⇐ (- س موجبة)

⇐ (س^{٢} = (- س) . (- س) فهي موجبة)

⇐ (س^{٢} > ٠)

(س = ٠) ⇐ (س.س = (٠) . (٠) = ٠) ولهذا فان س^{٢} ≥ ٠ لكل س ∋ R.

وبرهان العرضية ٦ يصلح ايضاً مثالا على البرهان بالتجزئة الى حالات أو أوضاع . ولنبرهن العبارة E عنصر وحيد س ∋ سه بحيث ان ف (س) ، يجب ان نبرهن اولا العبارة E س ∋ سه ف (س) . وبعدها يجب ان نبرهن انه توجد س واحدة فقط في سه بهذه الخاصية ف (س) . واحدى الطرق لبرهان هذه العبارة الاخيرة تكون بافتراض انه يوجد عنصران س$_{١}$ و س$_{٢}$ في سه بحيث تكون ف (س$_{١}$) و ف (س$_{٢}$) صائبتين نبرهن ان س$_{١}$ = س$_{٢}$ ويسمى هذا الجزء الاخير للبرهان برهان الوحدانية وتسمى الخطوة الاولى برهان الوجودية .

وعلى سبيل المثال على برهان الوحدانية لنعتبر العرضية التالية :

عرضية ٧

ليكن $أ$ و $ب$ عددين حقيقين حيث $أ \neq ٠$ فهناك عدد حقيقي وحيد $س$ بحيث ان $أس + ب = ٠$

البرهان

تبين لنا العرضية ٥ وجودية العدد $س$. ولنفرض الآن انه يوجد عددان حقيقيان $س_١$ و $س_٢$

بحيث ان $أس_١ + ب = ٠$ و $أس_٢ + ب = ٠$

[($أس_١ + ب$) = ٠) و ($أس_٢ + ب = ٠$)]

$\Leftarrow$ ($أس_١ + ب = أس_٢ + ب$)

$\Leftarrow$ ($أس_١ = أس_٢$) (الاختزال للجمع)

$\Leftarrow$ ($س_١ = س_٢$) (الاختزال للضرب)

وهناك برهان ثان على وحدانية الحل باستخدام الجزء الأول من برهان العرضية ٥ ، حيث بينا انه اذا كانت $س$ حلا للمعادلة فان $س = - (\frac{ب}{أ})$.

وهذا يبرهن انه يوجد حل واحد بالضبط ، وهو $- (\frac{ب}{أ})$.

الملحق ٣ الخصائص الجبرية والترتيبية للاعداد

لترمز Z للمجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة ، Q للمجموعة المكونة من كل الاعداد النسبية ، و R المجموعة المكونة من كل الاعداد الحقيقية . فالخصائص التالية صحيحة لكل من هذه المجموعات الثلاث ، Z ، Q ، R ، بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب . وفيما يلي يرمز الحرف سه لأي من هذه المجموعات الثلاث .

١ - انغلاق المجموعة سه بالنسبة للجمع : لكل أ ، ب ∈ سه
(اي ان حاصل جمع اي عنصرين من سه يكون عنصراً في سه) .

٢ - التجميعية للجمع : لكل أ ، ب ، حـ ∈ سه ، أ + (ب + حـ) = (أ + ب) + حـ

٣ - وجود عنصر محايد للجمع : هنالك عنصر (٠) ∈ سه بحيث ان
أ + ٠ = ٠ + أ = أ لكل أ ∈ سه

٤ - وجود نظير جمع : لكل أ ∈ سه يوجد عنصر - أ ∈ سه بحيث ان
أ + (- أ) = ٠

٥ - التبديلية للجمع : لكل أ ، ب ∈ سه
أ + ب = ب + أ

٦ - انغلاق المجموعة سه بالنسبة للضرب : لكل أ ، ب ∈ سه ، أب ∈ سه (اي يكون حاصل الضرب اي عنصرين من س عنصراً في سه).

٧ - التجميعية للضرب : لكل أ ، ب ، حـ ∈ سه ،
أ (ب حـ) = (أ ب) حـ

٨ - وجود عنصر محايد للضرب : يوجد عنصر ١ ∈ سه بحيث ان
أ . (١) = (١) . أ لكل أ ∈ سه .

٩ - التبديلية للضرب : لكل أ ، ب ∈ سه ،
أ ب = ب أ

١٠ - التوزيعية للضرب على الجمع : لكل أ ، ب ، حـ ∈ سه ،
أ (ب + حـ) = أ ب + أ حـ

١١ - الاختزال للضرب : اذا كانت أ ، ب ، حـ ∈ سه ، حـ ≠ ٠
و أ حـ = ب حـ ، فان أ = ب .

١٢ - وجود نظير ضربي في Q و R : اذا كانت سه احدى المجموعات Q أو R (وليس Z) ، فان لكل أ ∈ سه - {٠} يوجد عنصر $أ^{-١}$ ∈ سه بحيث ان أ $أ^{-١}$ = ١

و يعرف الطرح لعنصرين أ ، ب $\in$ R بدلالة نظائر للجمع بوضع

أ - ب = أ + (- ب) .

وتعرف القسمة لعنصر أ ، ب $\in$ R حيث ب $\neq$ ٠ بدلالة نظائر الضرب بوضع

$\frac{أ}{ب}$ = أ ب$^{-1}$

وبالاضافة الى الخصائص الاثني عشر المذكورة اعلاه للجمع والضرب فلكل من المجموعات العددية الثلاث Z ، Q ، R خاصية الترتيب . وبما ان العبارة التالية تكون صحيحة لكل من المجموعات الثلاث ، فنرمز لاي منها بالرمز سہ .

١٣ ـ هنالك مجموعة جزئية فعلا ، غير خالية م في سہ بحيث ان

أ. ٠ $\notin$ م

ب. لكل س $\in$ سہ ، يتحقق واحد بالضبط من الشروط التالية :

س = ٠ ، س $\in$ م ، أو - س $\in$ م (قانون التثليث)

حـ اذا كانت أ ، ب $\in$ م ، فان أ + ب $\in$ م و أ ب $\in$ م .

و يقال لعناصر المجموعة م بالعناصر الموجبة في سہ ، ونكتب س $>$ ٠ اذا وفقط اذا كان س $\in$ م وباستخدام هذا الرمز يمكننا اعادة كتابة الخاصية ١٣ ب كما يلي :

بَ اذا كانت س $\in$ م ، فان س تحقق واحدة بالضبط مما يلي :

س = ٠ أو س $>$ ٠ ، أو - س $>$ ٠ (قانون التثليث).

اذا كانت أ ، ب $\in$ سہ ، نقول ان أ اقل من ب ونكتب أ $<$ ب اذا وفقط اذا كان ب - أ $\in$ م (او ب - أ $>$ ٠) . ونقول ان ب أكبر من أ ، ونكتب ب $>$ أ ، اذا وفقط اذا كان أ $<$ ب . ولعلاقة الترتيب $>$ الخصائص التالية :

١٤ ـ أ. يحقق كل زوج من العناصر أ ، ب $\in$ سہ واحدة بالضبط مما يلي :

أ = ب ، أ $<$ ب ، أو ب $<$ أ (قانون التثليث) .

ب. اذا كانت أ $<$ ب و ب $<$ حـ ، فان أ $<$ حـ (خاصية التعدي) .

حـ اذا كانت أ ، ب $\in$ سہ ، أ $<$ ب فان - ب $<$ - أ

د. اذا كانت أ ، ب ، حـ ، د $\in$ سہ ، أ $<$ ب ، و حـ $<$ د ، فان

أ + حـ $<$ ب + د .

هـ اذا كانت أ ، ب ، حـ $\in$ سہ ، أ $<$ ب ، و حـ $>$ ٠ ، فان

أ حـ $<$ ب حـ . واذا كانت - حـ $>$ ٠ فان ب حـ $<$ أ حـ .

ونعني بالرمز أ ≦ ب أن أ > ب أو أ = ب .

وللمجموعة Z^+ المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة الخصائص التالية :

أ. ١ ∋ Z^+ و يكون ١ العنصر الاصغر في Z^+

(اي ١ ≦ ر لكل ر ∋ Z^+) .

ب. لكل عنصر في Z^+ تالٍ . ولهذا ، اذا كانت ر ∋ Z^+ ،

فان ر + ١ ∋ Z^+ و ر + ١ > ر

وهاتان هما اثنتان من اوليات بيانو التي تعرف المجموعة Z^+. ومن هذه الأوليات مبدأ الاستقراء المنتهي (انظر الملحق ٥) . ونبين في الملحق ٥ أن هذه الأولية هي نتيجة لأولية اخرى .

الملحق ٤ علاقات التكافؤ

غالباً ما يواجه دارس الرياضيات عبارة مقارنة او علاقة بين ازواج من العناصر في مجموعة معطاه والعلاقة ، او العلاقة الثنائية ، على اي مجموعة سه تعيين لكل زوج من العناصر ، أ ، ب ∋ سه عبارة واحدة بالضبط بخصوص أ و ب . وهذه العبارة المعينة للزوج أ ، ب ∋ سه تكتب غالباً برمز مثل أ ~ ب . ويجب ان يكون للعبارة معنى لكل زوج أ ، ب ∋ سه . فاذا كانت العبارة صائبة ، نكتب أ ~ ب ، واذا كانت خطأ نكتب أ ≁ ب.ومن الامثلة على العلاقات في مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة العلاقات « أ = ب » ، « أ < ب » ، « أ احد عوامل ب » .

واي علاة ثنائية ع على اي مجموعة سه هي شكلياً اي مجموعة جزئية من سه × سه . ففي اي زوج مرتب (أ ، ب) ∋ سه × سه . اما ان (أ ، ب) تنتمي الى ع أو أن (أ ، ب) لا تنتمي الى ع (ولكن لا كلاهما) وبالنسبة للعلاقة ع فيمكننا استخدام رمز علاقة مثل « ~ » فاذا كانت (أ ، ب) ∋ ع نكتب أ ~ب . واذا كانت (أ ، ب) ∌ ع نكتب أ ≁ ب .

فمثلا ، افرض ان

$$ع = \{ (س ، ص) : س ، ص \ni Z^+ ، ص - س \text{ موجب} \}$$

هي العلاقة « اقل من » على المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة ولتكن « < » رمز هذه العلاقة . فان (١ ، ٢) تكون في ع لان ١ < ٢ ، في حين ان (٢ ، ١) لا تكون في ع لان ٢ ≮ ١ .

١ تعريف

علاقة التكافؤ أ ~ ب على سه هي علاقة تحقق الشروط الثلاثة التالية :

أ. الانعكاسية : أ ~ أ لكل أ ∋ سه .

ب. التماثل : اذا كانت أ ~ ب فان ب ~ أ لكل أ ، ب ∋ سه .

حـ. التعدي : اذا كانت أ ~ ب و ب ~ حـ فان أ ~ حـ لكل أ ، ب ، حـ ∋ سه

لاحظ ان العلاقة الوحيدة أ = ب من بين العلاقات الثلاث المذكورة اعلاه هي علاقة تكافؤ والعلاقة « (أ < ب) » علاقة تعد ولكنها ليست تماثلا ولا انعكاسية ، والعلاقة « تكون عاملا في » (أ تكون عاملا في ب) انعكاسية وتعد ولكنها ليست تماثلا .

٢ مثال

كل من العلاقات التالية علاقة تكافؤ :

أ. في المجموعة المكونة من كل المستقيمات في اي مستوى معطى ، $ل_١ \sim ل_٢$ (عادة $ل_١ \parallel ل_٢$) اذا وفقط اذا كان المستقيم $ل_١$ موازياً للمستقيم $ل_٢$. (يفترض ان يكون اي مستقيم موازياً لنفسه .)

ب. في المجموعة المكونة من كل المثلثات في اي مستوى معين ، $\triangle_١ \simeq \triangle_٢$ اذا وفقط اذا كان المثلث $\triangle_١$ مطابقاً للمثلث $\triangle_٢$ (تذكر بعض هندسة المدرسة الثانوية).

حـ في المجموعة المكونة من كل المثلثات في أي مستوى معطى ، $\triangle_١ \sim \triangle_٢$ اذا وفقط اذا كان $\triangle_١$ مشابهاً للمثلث $\triangle_٢$.

د. في المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية المنتهية في اي مجموعة معطاه ، سہ $\sim$ صہ اذا وفقط اذا كان للمجموعتين سہ و صہ نفس العدد من العناصر .

هـ في اي مجموعة غير خالية ، أ $\sim$ ب اذا وفقط اذا كان أ = ب هذه هي علاقة التكافؤ للمساواة .

و. في المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة ، أ $\sim$ ب اذا وفقط اذا كان أ - ب عدداً صحيحاً زوجياً (اي أ - ب = ٢ ر حيث ر عدد صحيح) .

ونتيجة للخصائص التي عرفنا بها علاقة التكافؤ على المجموعة سہ نستطيع تجزئة (أو « تفسيخ ») المجموعة سہ الى مجموعات جزئية منفصلة ، وكثيراً ما يفيد هذا رياضياً . وسنصوغ هذا شكلياً في التعريفين ٣ و ٥ والنظرية ٦ .

٣ تعريف

لترمز $\sim$ الى علاقة تكافؤ على سہ . فلكل أ $\in$ سہ ليكن

[أ] = { س : س $\in$ سہ و س $\sim$ أ }

تسمى المجموعة [أ] بصف التكافؤ للعنصر أ . وتتكون من كل العناصر س $\in$ سہ التي تكافيء أ بالنسبة للعلاقة $\sim$.

٤ مثال

في المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة ضع أ $\sim$ ب اذا وفقط اذا كان أ - ب زوجياً :
تكون صفوف التكافؤ لعلاقة التكافوء هذه .

[٠] = { س : س $\in Z$ و س - (٠) زوجية }

[١] = { س : س $\in Z$ و س - (١) زوجية }

الصف [٠] هو المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الزوجية و [١] هي المجموعة المكونة من كل الاعداد الفردية . لاحظ ان
[- ٤] = [- ٢] = [٠] = [٢] وهكذا في حين ان

[- ٣] = [- ١] = [١] = [٣] ، وهكذا ...

٥ تعريف

تجزئة المجموعة س هي مجموعة المكونة س مجموعات جزئية من س منفصلة مثنى (كل عن الاخرى) واتحادها يساوي س ، وكل عنصر من س ينتمي الى واحدة وواحدة فقط من هذه المجموعات الجزئية المكونة للتجزئة .

في المثال ٤ يكون صفأ التكافؤ [٠] و [١] تجزئة للمجموعة Z لان كل عدد صحيح ينتمي الى المجموعة [٠] أو الى المجموعة [١] و [٠] $\cap$ [١] = $\emptyset$.

وكمثال آخر على صفوف تكافؤ والتجزئات ، خذ المجموعة ع المكونة من كل المجموعات الجزئية المنتهية من Z^+ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . } . ففي هذه المجموعة نعرف ... وفقط اذا احتوت المجموعتان س و ص على نفس العدد من العناصر . وصف ... هو المجموعة .

{ل : ل ∋ ع و ل ~ {١} }

وبهذا فان صف التكافؤ [{١}] هو المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية التي فيها عنصر واحد :

[{١}] = { {١} ، {٢} ، {٣} ، . . . }

وبالمثل ، تتكون [{١ ، ٢}] من كل المجموعات الجزئية ... عنصران بالضبط . والمجموعات {٣ ، ١١} ، {٧ ، ١١٠}

كلها عناصر في صف التكافؤ [{١ ، ٢}] .

ان التجزئة ع المناظرة لعلاقة التكافؤ هذه تتكون من صفوف التكافؤ الأخرى : [{١}] ، ... لاحظ ان الصف [{١ ، ٢ ، ... ن}] ... المجموعات الجزئية من Z التي فيها من العناصر فقط .

٦ نظرية

لتكن ~ ترمز لعلاقة تكافؤ على مجموعة ما س . فلصفوف التكافؤ في س الخصائص التالية

التي تحقق لكل أ ، ب $\in$ سه :

أ. أ $\in$ [أ] : كل عنصر من س ينتمي لصف تكافؤ .

ب. اذا كانت [أ] $\cap$ [ب] $\neq \emptyset$ فان [أ] = [ب] .

حـ اذا كانت [أ] $\neq$ [ب] ، [أ] $\cap$ [ب] = $\emptyset$ ، ليس لصفين مختلفين عناصر مشتركة

د. [أ] = [ب] اذا وفقط اذا كان أ $\sim$ ب

هـ [أ] $\cap$ [ب] = $\emptyset$ اذا وفقط اذا كان أ $\nsim$ ب .

برهان الخاصية أ

بما ان أ $\sim$ أ لكل أ $\in$ سه (انعكاسية) فيجب ان نحصل على أ $\in$ [أ]

برهان الخاصية ب

خذ س $\in$ [أ] $\cap$ [ب] . فمن تعريف صف التكافؤ س $\sim$ أ و س $\sim$ ب ينتج ان أ $\sim$ ب .
(لماذا ؟) لبرهنة [أ] = [ب] لنبدأ بأخذ حـ $\in$ [أ] وهكذا فان حـ $\sim$ أ ، وبما ان أ $\sim$ ب فان حـ $\sim$ ب . لهذا فان حـ $\in$ [ب] و [أ] $\subseteq$ [ب] .
وبنفس الطريقة نثبت ان [ب] $\subseteq$ [أ] ومن ثم يتبع ان [أ] = [ب].
وتترك براهين الخصائص الثلاث الباقية (حـ ، د ، هـ) كتمارين . والخاصية د مفيدة بوجه خاص عندما نتعامل مع صفوف تكافؤ .
والنظرية التالية تنتج عن الخاصيتين ٦ أ و ٦ حـ لعلاقة التكافؤ .

٧ نظرية

اذا كانت $\sim$ علاقة تكافؤ على المجموعة سه ، فان المجموعة المكونة من كل صفوف التكافؤ [أ] حيث أ $\in$ سه تجزئة للمجموعة سه .

وبعكس النظرية ٧ نحصل على النظرية التالية :

٨ نظرية

اي تجزئة معطاه لاي مجموعة سه تعطي علاقة تكافؤ $\sim$ على سه . وتتكون التجزئة المعطاة من صفوف التكافؤ [أ] للعلاقة $\sim$.

مجمل البرهان

عرف العلاقة على سه بقولك ان أ $\sim$ ب اذا وفقط اذا كان أ و ب ينتميان الى نفس العنصر في التجزئة . برهن ان $\sim$ علاقة تكافؤ . وبرهن بعد ذلك انه لكل أ $\in$ سه تكون [أ] مساوية لعنصر التجزئة الذي يحتوي على أ .

تمارين

١ ـ صف صفوف التكافؤ لكل من علاقات التكافؤ المعطاة في التمرين ٢ .

٢ ـ برهن الخصائص حـ ، ى ، و ، هـ للنظرية ٦ .

٣ ـ اكمل برهان النظرية ٨ .

٤ ـ لترمز ~ لعلاقة على مجموعة سہ .

اكمل العبارات التالية مستخدماً نتائج في المنطق .

أ. لا تكون ~ انعكاسية اذا وفقط اذا ....

ب. لا تكون ~ تماثلية اذا وفقط اذا ....

حـ لا تكون ~ متعدية اذا وفقط اذا ....

٥ ـ لأول وهلة يبدو ان خاصتي التماثل والتعدي في علاقة التكافؤ تعطيان مجتمعتين خاصية الانعكاسية في العلاقة (و يمكن ان نقول جدلا انه اذا كانت أ ~ ب ، فان ب ~ أ ومن ثم باستخدام التعدي ، أ ~ أ) لماذا لا يكون هذا صحيحاً ؟

الملحق ٥ الترتيب الحسن والاستقراء

أ. الترتيب الحسن

بالبداهة نقول ان اي مجموعة جزئية من الاعداد الصحيحة الموجبة Z^+ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...}، لها عنصر اول او اصغر ، مع ان المجموعة نفسها قد لا يكون لها عنصر اكبر . ونستعمل هذه الفكرة عن اصغر عنصر ، عندما نكتب مثلا المجموعة الجزئية مثل :

{٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ ، ...}

حتى ان مجموعة مثل

{س : س ∈ Z ، س > ١٢}

لها عنصر اصغر ، هو ١٣ . فلنضع الآن صيغة شكلية تعبر عن افكارنا البديهية.

١ تعريف

أ. لتكن سه مجموعة جزئية من R . يكون العنصر
أ ∈ R اصغر او اقل عنصر في سه اذا وفقط اذا كان أ ∈ سه ، أ ≦ س لكل س ∈ سه .

ب. تسمى المجموعة صه من الاعداد الحقيقية حسنة الترتيب اذا وفقط اذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية من صه تحتوي على عنصر اصغر .
ولنفرض الأولية التالية :

٢ أولية

مبدأ الترتيب الحسن . المجموعة Z^+ المكونة من الاعداد الصحيحة الموجبة مجموعة حسنة الترتيب.

٣ مثال

أ. المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الفردية الموجبة حسنة الترتيب . لاثبات هذا لا يكفي ان نلاحظ ان ١ هو اصغر عنصر في صه . بل يجب ان نثبت ان لكل مجموعة جزئية غير خالية من صه عنصراً اصغر . فلتكن سه مجموعة جزئية غير خالية اختيارية من صه . فان سه ⊆ Z^+ وباستخدام مبدأ الترتيب الحسن يكون للمجموعة سه عنصر اصغر ولهذا تكون صه حسنة الترتيب .

ب. ليست المجموعة R حسنة الترتيب لأنه ليس للمجموعة الجزئية .

{س : س ∈ R و س > ٠}

عنصر ـعر .

حـ. ليكن

$$ص = \{س : س \in R \text{ و } س \geq ١\}$$

فللمجموعة ص نفسها عنصر اصغر ، هو ١ . بينما لا تحتوى المجموعة الجزئية $\{$س : س ، س $>٢\}$ على عنصر اصغر . ولهذا فان ص ليست حسنة الترتيب .

ويكون مبدأ الترتيب الحسن مفيداً في برهنة عبارات على الاعداد الصحيحة . وكمثال على ذلك لنبرهن العرضية التالية التي تفيد في البند ب .

٤ عرضية

مبدأ الاستقراء المنتهي . لتكن ص مجموعة من الاعداد الموجبة بحيث ان

أ. ١ $\in$ ص

ب. لكل ر اذا كانت ر $\in$ ص ، فان ر + ١ $\in$ ص .

فتكون ص المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة .

البرهان : لنفرض ان ص $\neq Z^+$

وليكن س = $\{$ن : ن $\in Z^+$ و ن $\notin$ ص$\}$ = Z^+ − ص

فتكون س مجموعة جزئية غير خالية من Z^+ . وحسب مبدأ الترتيب الحسن تحتوي س على عنصر اصغر س. وس. $>$ ١ حسب الفرضية أ . ولهذا فان العدد الصحيح س. − ١ عدد صحيح موجب ليس في س . ومن ثم فان س. − ١ $\in$ ص . ولكن فرضيته ب تقول ان س. = (س. − ١) + ١ $\in$ ص ، وهذا يناقض الحقيقة ان س. $\in Z^+$ − ص . فيجب ان نحصل على س = $\emptyset$ و ص = Z^+ .

تمارين :

١ - اي من المجموعات التالية حسنة الترتيب ؟ علل اجابتك .

أ. كل الاعداد الصحيحة الزوجية .

ب. كل الاعداد الصحيحة الاكبر من (− ١٠٠)

حـ.

$$\left\{\frac{1}{ن} : ن \in Z^+\right\}$$

د.

$$\{٠\} \cup \left\{\frac{1}{ن} : ن \in Z^+\right\}$$

(اذا كانت اجابتك عن الجزائين حـ و ى مختلفة ، اقرأ بانتباه تعريف المجموعة حسنة الترتيب .)

٢ ـ اي من المجموعات التالية حسنة الترتيب ؟ علل اجابتك .

أ. الاعداد الزوجية الصحيحة الموجبة .

ب. $\{$س : س $\in Z$ و س $\leq$ أ$\}$ حيث أ عدد صحيح ثابت .

حـ. Q المجموعة المكونة من كل الاعداد النسبية .

د. $Q^+ = \{$س : س $\in Q$ و س $> \cdot\}$

هـ. $\{$س : س $\in Q$ و س $\geq \cdot\}$

(اذا اختلفت الاجابات عن الجزائين د و هـ ، فاقرأ باهتمام تعريف المجموعة حسنة الترتيب)

و. $\{١ - \frac{١}{ن}$: ن $\in Z^+\}$

٣ ـ برهن ان كل مجموعة جزئية من مجموعة حسنة الترتيب تكون حسنة الترتيب .

٤ ـ برهن ان اي مجموعة منتهية من الاعداد الحقيقية تكون حسنة الترتيب .

ب. الاستقراء

في الرياضيات ، كثيراً ما يبدي شخص ما ملاحظة تقود الى حدس وقد تكون الملاحظة مثلا ان مجموع اول ثلاثة او اربعة اعداد صحيحة فردية موجبة مربع كامل .

١ + ٣ + ٥ = ٩ و ١ + ٣ + ٥ + ٧ = ١٦

وبعدها يمكن ان يسأل شخص لأي عدد من حواصل الجمع المشابهة للاعداد الصحيحة الفردية يمكن ان يحصل هذا . هل صحيح لكل قيم ن ان

١ + ٣ + ٥ + . . . + (٢ن - ١) = ن^{٢} ؟

ان هذه العبارة البسيطة ظاهرياً تشتمل على عدد لانهائي من العبارات التي يكون من الواجب فحصها او برهنتها : ١ = ١^{٢} ، ١ + ٣ = ٢^{٢} ، ١ + ٣ + ٥ = ٣^{٢} ، وهكذا . كيف يمكن عمل هذا ؟ هنا يلعب الاستقراء دوراً في الرياضيات . انها تتيح للشخص ان يبرهن عدداً لا نهائياً من العبارات بسرعة فائقة (وتقود احياناً الى اكتشاف تلك العبارات) .

وبصورة عامة ، نستعمل الرموز ف$_{١}$ ، ف$_{٢}$ ، ف$_{٣}$ ، وهكذا لتعني العبارات التي نريد برهنتها .

نظرية :

مبدأ الاستقراء الرياضي . لتكن $\{$ف$_{ن}$: ن $\in Z^+\}$ مجموعة من عرضيات معرفة لكل ن

≥ ١ بحيث ان

أ. $ف_١$ تكون صائبة و

ب. لكل عدد صحيح ر ≥ ١ اذا كانت $ف_ر$ صحيحة ، فان $ف_{ر+١}$ تكون صحيحة فتكون ف صحيحة لكل عدد صحيح ن ≥ ١ .

في مبدأ الاستقراء الرياضي تتكون الفرضية من العبارتين أ و ب . وتؤكد النتيجة ان $ف_ن$ تكون صحيحة لكل ن ≥ ١ .

برهان الاستقراء الرياضي

افرض ان $ف_١$ ، $ف_٢$ ، $ف_٣$ ، . . . تحقق فرضيات مبدأ الاستقراء . نريد ان نبرهن النتيجة : $ف_ن$ صحيحة لكل ن ≥ ١ . لقد برهنا في بند أ انه اذا كانت ص مجموعة من الاعداد الصحيحة الموجبة بحيث ان (أ) ١ ∈ ص و (ب) ر ∈ ص يتضمن ان ر + ١ ∈ ص ، فتكون ص المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة وتتيح لنا فرضيات الاستقراء الرياضي (النظرية ٥) تعريف اي مجموعة ص تحقق هذه الشروط .

لتكن ص = {ن : $ف_ن$ تكون صائبة} . فمن فرضية الاستقراء نرى (أ) ان ١ ∈ ص و (ب) ر ∈ ص ينتج ان ر + ١ ∈ ص . ولهذا فان الفرضية ٤ (البند أ) تخبرنا ان ص = Z^+ . ومن ثم فان $ف_ن$ تكون صائبة لكل عدد صحيح موجب ن . والاستقراء الرياضي هو مبدأ تفاعل متسلسل . ولاستخدام هذا المبدأ نحتاج الى معرفة ان التفاعل المتسلسل يمكن ان يبدأ (اي ان تكون $ف_١$ صائبة) وانه مستمر عند كل مرحلة (اي ان صواب $ف_ر$ ينتج عنه صواب $ف_{ر+١}$) . وببدء السلسلة من $ف_١$ نجد ان $ف_١$ تتضمن $ف_٢$ ، $ف_٢$ تتضمن $ف_٣$ ، $ف_٣$ ، تتضمن $ف_٤$ وهكذا .

تذكر انه لكي نبرهن مجموعة من العبارات {$ف_ن$: ن ∈ Z^+} مستخدما مبدأ الاستقراء الرياضي فعليك ان تقوم بعمل شيئين :

أ. اثبت ان $ف_١$ تكون صائبة .

ب. برهن انه لكل ر ≥١، $ف_ر$ تتضمن $ف_{ر+١}$

لعمل ذلك افرض ان $ف_ر$ تكون صائبة حيث ر اختيارية ولكنها ثابتة وبرهن بعد ذلك $ف_{ر+١}$ فمثلا لنبرهن العبارة

$$١ + ٣ + ٥ + . . . + (٢ ن - ١) = ن^٢$$

لكل ن ∈ Z^+ .

لترمز $ف_م$ الى العبارة اعلاه ، لكل عدد صحيح موجب ن . ولذا فبالكلمات تقول $ف_ن$ ١ ن مجموع أول ن من الاعداد الصحيحة الفردية الموجبة هو $ن^٢$. وبما ان $١ = ١^٢$ فتكون $ف_١$ صائبة . فلنفرض ان $ف_ر$ تكون صائبة ، اي ان

$$١ + ٣ + ٥ + . . . + (٢ ر - ١) = ر^٢$$

ونريد ان نبرهن ان $ف_{ر+١}$ صائبة ، اي ان :

$$١ + ٣ + . . . + (٢ (ر+١) - ١) = (ر + ١)^٢ .$$

من العبارة $ف_ر$ نحصل على

$$١ + ٣ + ... + (٢ ر - ١) + (٢ر + ١) = ر^٢ + (٢ ر + ١) = (ر + ١)^٢$$

ولهذا فالعبارة $ف_{ر+١}$ متضمنة في العبارة $ف_ر$. وبعدها فان مبدأ الاستقراء الرياضي يذكر انه لكل عدد صحيح موجب ن ، تكون $ف_ن$ صائبة .

في المثال السابق نجعل $ف_ن$ اسماً لكل المقولة

$$١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ن - ١) = ن^٢$$

لاحظ ان $ف_ن$ ليست فقط

$$١ + ٣ + ... + (٢ن - ١)$$

وليس صحيحاً ان تكتب

$$ف_ن = ١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ن - ١)$$

والعبارة $ف_ن$: ن = ن + ١ تبين لماذا يكون ضرورياً اثبات انه يجب التحقق من كلا الشرطين في الفرضية الاستقراء . فهنا بالتأكيد ان $ف_١$ خطأ ، ولكن لو فرضنا ان $ف_ر$: ر = ر + ١ صائبة فبأضافة ١ الى كل طرف نحصل على

$$ف_{ر+١} : ر + ١ = (ر + ١) + ١$$

تمارين :

لنأخذ المجاميع التالية :

$$٢ + ٤ + ٦ + ... + ٢ن$$

$$١ + ٢ + ٣ + ... + ن$$

$$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ... + ن^٣$$

ولنفتش على صيغة بسيطة بدلالة ن لكل من هذه المجاميع . لايجاد هذ الصيغ احسب حاصل الجمع المشار إليه واملأ الاجابات في الجدول ٦أ

الجدول ٦أ

ن	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
$\sum_{ر=1}^{ن} ٢ر$					٤٢			
$\sum_{ر=1}^{ن} ر$					٢١			
$\sum_{ر=1}^{ن} ر^{٣}$					٤٤١		xxx	

اذكر صيغ نتائج بدلالة ن

$\sum_{ر=1}^{ن} ٢ر$ = ______________________

$\sum_{ر=1}^{ن} ر$ = ______________________

$\sum_{ر=1}^{ن} ر^{٣}$ = ______________________

ب. برهن بالاستقراء الصيغة $\sum_{ر=1}^{ن} ٢ر$ = ______________

حـ برهن الصيغة $\sum_{ر=1}^{ن} ر$ = ______________

د. برهن الصيغة $\sum_{ر=1}^{ن} ر^{٣}$ = ______________

٢ - برهن بالاستقراء العبارة

فن : $١^{٢} + ٢^{٢} + ... + ن^{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

٣ - خذ أ ∈ R . ضع $أ^{١}$ = أ وعرف بالتواتر ان $أ^{ن+١} = أ^{ن}$. أ لكل عدد صحيح ن ≥ ١ .
والآن لتكن م اي عدد صحيح موجب ثابت . استعمل الاستقراء على ن لبرهان ان

$أ^{م} . أ^{ن} = أ^{م+ن}$ لكل عدد صحيح ن ≥ ١

ب. $(أ^{٢})^{ن} = أ^{٢ن}$ لكل عدد صحيح ن ≥ ١

٤ - ليكن أ ، ب ، ∋ R . اثبت ان $(أب)^{ن}$ = ــــــــــ لكل عدد صحيح ن ≥ ١ .

٥ - يبين هذا التمرين ان من الضروري فحص كلا الجزئين من فرضيات الاستقراء حاول . ان تبرهن بالاستقراء العبارات التالية غير الصحيحة .
بين في كل عبارة ان احدي فرضيات مبدأ الاستقراء تتحقق ولكن الاخرى لا تتحقق .
أ. ٢ + ٤ + ... + ٢ن = ن (ن + ١) + ٢
ب. ١ + ٣ + ... + (٢ن - ١) = $ن^{٢}$

٦ - يدعي الطلبة احياناً ان مبدأ الاستقراء باطل ويقولون ان المبدأ يستلزم ان نسلم بصحة النتيجة لكي نبرهنها ولبيان ان هذا الاعتراض غير قائم ، قارن الجزء ب من فرضيات الاستقراء مع نتيجة للمبدأ واستخدام النقطتين أ ، ب في تعريف الاستقراء .

٧ - اكمل العبارة التالية وبرهن انها تكون صائبة لكل ن ∋ Z^{+} :
المجموعة المكونة من ن من العناصر عدد من المجموعات الجزئية قدرها ــــــــــــ .
تذكر ان المجموعة الخالية تعد مجموعة جزئية .●

٨ - برهن العبارة التالية : لكل أ ، ر ∋ Z^{+} حيث ان أ > ١ يوجد عدد صحيح ن ∋ Z^{+} بحيث ان $أ^{ن}$ > ر.

٩ - برهن انه لكل أ ، ر ∋ Z^{+} يوجد ن ∋ Z^{+} بحيث ان ن . أ > ر

حـ . صيغ اخرى لمبدأ الاستقراء

في البراهين بالاستقراء كثيراً ما يكون مفيداً او ضرورياً بدء العملية بعدد صحيح مخالف للعدد ١ . فمثلا ، لنفرض اننا نريد اثبات المتباينة $ن^{٢}$ ≥ ٢ن + ١ .
بما ان $١^{٢}$ = ١ ≥ ٢ (١) + ١ ، فالمتباينة ليست صائبة للعدد ن = ١ .
وزيادة على ذلك ، فهي ليست صائبة للعدد ن=٢ الا انها صائبة للعدد ن = ٣ . ولهذا فلا نستطيع تطبيق مبدأ الاستقراء المذكور في النظرية ٥ (البند ب) بدون تعديل . ولكن نستطيع تدبير هذه المسألة اذا جعلنا عباراتنا بالصيغة

فـن : $(ن + ٢)^{٢}$ ≥ ٢ (ن + ٢) + ١ (ن ∋ Z^{+})

أو اذا بـــر هنا صيغة جديدة لمبدأ الاستقراء الذي يسمح لنا بالبدء بأي عدد صحيح . لنأخذ المسار الثاني للعمل لانه يتيح لنا معالجة عدة مسائل حسب النص ، لا مجرد خطوات معادة مكررة . والنظرية التالية صيغة اخرى لمبدأ الاستقراء .

٦ نظرية :

ليكن ن$_{٠}$ اي عدد صحيح ولتكن ف$_{ن}$ القضية المعرفة لكل عدد صحيح ن $\geq$ ن$_{٠}$ بحيث ان

أ. ف$_{ن_{٠}}$ تكون صائبة و

ب. لكل عدد صحيح ر $\geq$ ن$_{٠}$ فصواب ف$_{ر}$ يقتضي صواب ف$_{ر+١}$

فان ف$_{ن}$ تكون صائبة لكل عدد صحيح ن $\geq$ ن$_{٠}$.

البرهان :

لتكن ص المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة ن بحيث ان القضية ف$_{ن+ن_{٠}-١}$ تكون صائبة وكنتيجة للفرضية أ ينتج ان ١ $\in$ ص . و يتبع من فرضية ب انه اذا كان ر $\in$ ص ، فان ر + ١ $\in$ ص ، لان الصواب ف$_{ن_{٠}+ر-١}$ يتضمن صواب

ف$_{(ن_{٠}+ر-١)+١}$ = ف$_{ن_{٠}+(ر+١)-١}$

ولكن العرضية ٤ (البند أ) تذكر ان ص تكون المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة . ومن ثم فان ف$_{ن_{٠}+ن-١}$ تكون صائبة لكل عدد صحيح موجب ن ، وبهذا فان ف$_{ن}$ تكون صحيحة لكل الاعداد الصحيحة ن $\geq$ن$_{٠}$. وكمثال على استعمال هذه الصيغة لمبدأ الاستقراء لنبرهن المتباينة ن^{٢} $>$ ٢ن + ١ لكل ن $>$ ٣ . وكما لاحظنا فان المتباينة لا تتحقق للعددين ن = ١ ، ٢ . ولكن ٣^{٢} = ٩ $>$ ٢ (٣) + ١ = ٧ ، ولهذا فان العبارة

ف$_{ن}$: ن^{٢} $>$ ٢ن + ١ تكون صائبة للعدد ن$_{٠}$ = ٣ . لنفرض ان ف$_{ر}$ صائبة لعدد ما ر $\geq$ ٣ . فيكون ر^{٢} $>$ ٢ ر + ١ ومن ثم فان

(ر + ١)^{٢} = ر^{٢} + ٢ ر + ١ $>$ (٢ ر + ١) + (٢ر + ١)

= ٢ (ر + ١) + ٢ ر

$\geq$ ٢ (ر + ١) + ٦

$>$ ٢ (ر + ١) + ١

ولهذا فاذا كانت ف$_{ر}$ صائبة فان ف$_{ر+١}$ تكون صائبة وان النظرية ٦ تذكر ان ف$_{ن}$: ن^{٢} $>$ ٢ن + ١ تكون صائبة لكل ن $\geq$ ٣ .

بالاضافة للتوزيع المذكور في النظرية ٦ هناك صيغة ثانية لمبدأ الاستقراء .وهذه الصيغة الثانية تفيد بشكل خاص في برهان النظرية الرئيسية في الحساب ، المذكورة والمبرهنة في البند ٦ هـ .

٧ نظرية

المبدأ الثاني للاسقراء الرياضي . لتكن ف$_{ن}$ قضية معرفة لكل عدد صحيح ن $\geq$ ١ بحيث ان

أ. ف تكون صائبة و

ب. لكل عدد صحيح ر $\geq$ ١ اذا كانت ف$_{١}$ ، ف$_{٢}$ ، . . . ف$_{ر}$ كلها صائبة فان ف$_{ر+١}$ تكون صائبة .

فتكون $ف_ن$ صائبة لكل عدد صحيح ن ≥ 1

البرهان :

لتكن ص المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة ن بحيث ان $ف_ن$ تكون صائبة افرض ان ص $\neq Z^+$. فللمجموعة Z^+ - ص عنصر اصغر و (اي ان أصغر عنصر بحيث ان $ف_ن$ تكون خطأ)، و > 1 لان $1 \in$ ص حسب الفرضية أ . ولهذا فان $ف_1$ ، $ف_2$ ، ... ، $ف_{و-1}$ تكون كلها صائبة لان و يكون اصغر عنصر لا ينتمي الى ص . وكنتيجة الفرضية ب ، يجب ان تكون $ف_و$ صائبة و يعطينا هذا التناقض المطلوب . وهكذا فان ص = Z^+، $ف_ن$ صائبة لكل الاعداد الصحيحة الموجبة .

تمارين :

١ - لاحظ ان الفرضية ب لمبدأ الاستقرار الثاني (النظرية ٧) هي طريقة قصيرة لكتابة قائمة غير منتهية من التضمينات . اكتب هذه التضمينات للاعداد ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ . ولجعل المبدأ يظهر معقولا ، افترض ان القضايا $ف_1$ ، $ف_2$ ، $ف_3$ ، ... تحقق فرض المبدأ الثاني للاستقراء .

اثبت مباشرة (دون استخدام النتيجة) ان $ف_5$ صائبة بتكرار استخدام الفرض .

٢ - لتكن $ف_ن$ هي القضية $2^ن > ن^2$. اثبت ان $ف_ن$ تكون صائبة لكل عدد صحيح ن $\geq$ ———— .

٣ - برهن ان العبارة $ف_ن$: $2^ن <$ ن ! (ن $\in Z^+$) تكون صائبة لكل عدد صحيح ن $\geq$ ———— (العدد ن ! يكون حاصل الضرب المكون من كل الاعداد الصحيحة الموجبة من ١ الى ن . لهذا فان ن ! = (١) (٢) (٣) ... (ن - ١) (ن) .

٤ - اعط برهاناً بديلا للنظرية ٦ مستخدماً المبدأ الأول للاستقراء الرياضي (النظرية ٥) .●

الملحق ٦ بعض الخصائص الحسابية للاعداد الصحيحة

يبحث هذا الملحق ف خصائص حسابية للاعداد الصحيحة لها علاقة بالقسمة . فيبحث البند أ برموز قسمة الاعداد الصحيحة ، و يمضي البند ب لخوارزمية القسمة . وفي البند حـ نبين ان اي عددين صحيحين لهما قاسم مشترك أعظم ، وفي البند د نعطي خوارزمية لايجاد هذا القاسم المشترك الاعظم . والبند النهائي لهذا الملحق يذكر النظرية الرئيسية في الحساب و يعطي اطاراً لبرهان لها .

تتطلب البراهين لبعض النظريات الرئيسية في هذا الملحق معرفة الاستقراء والترتيب الحسن ، اللذين درسا في الملحق ٥ . وان تكن نصوص النظريات لا تتطلب ذلك فتستطيع اذا شئت ان تحذف البراهين في اول قراءة لك للملحق .

أ . القسمة :

نبدأ بالتعريف و بعض الرموز المفيدة .

١ تعريف :

يكون العدد الصحيح ب عاملا ، او قاسماً للعدد الصحيح أ اذا وفقط اذا كان أ = ب ك حيث ك عدد صحيح . واذا كان ب عاملاً او قاسماً للعدد أ ، نقول ايضاً ان أ تكون من مضاعفات ب أو ان أ تقبل القسمة على ب . و يعني الرمز ب | أ أن ب تقسم العدد أ.ونكتب أ ∤ ب أذا وفقط اذا كان ب لا يقسم العدد أ .

تحذير

يجب ان لا يكون هناك التباس بين الرمز ب | أ والكسر ب / أ .

بما ان ٦ = ٢ (٣) ، ينتج ان ٢ | ٦ . وبالطريقة نفسها نرى ان (- ٥) | ٣٠ و ٧ | (- ٢١) ولكن ٤ ∤ ٩ . واي عدد صحيح أ ≠ ٠ يقبل القسمة على ١ ، - ١ ، أ ، - أ .

٢ تعريف :

يسمى العدد الصحيح د > ١ عدداً اولياً اذا وفقط اذا كان للعدد د القواسم ١ ، - ١ ، د ، - د فقط .

من الامثلة على الاعداد الاولية : ٢ ، ٣ ، ٥ و ٧ .

تمارين :

كل المسائل التالية ضمن المجموعة Z المكونة من الاعداد الصحيحة .

١ - برهن ان العلاقة « هو قاسم لـ » في Z هي علاقة انعكاس وتعد وليس تماثلا .

٢ - برهن انه اذا كان أ و ب عددين صحيحين موجبين بحيث ان ب | أ فان ب ≤ أ .

٣ - برهن انه اذا كان أ | ١ ، فان أ = ± ١

٤ - برهن انه اذا كان أ | ب و ب | أ فان أ = ± ب .

٥ - لكل من العبارات التالية أعط برهاناً او مثالا عكسياً .

أ. اذا كان أ | ب و أ | حـ ، فان أ | (ب + حـ) .

ب. اذا كان أ | (ب + حـ) ، فان أ | ب أو أ | حـ

حـ اذا كان أ | حـ و ب | د ، فان (أ + ب) | (حـ + د)

د . اذا كان أ | حـ و ب | د ، فان أ ب | حـ د .

هـ . اذا كان أ | ب ، فان أ | ب حـ لكل حـ .

و - اذا كان أ | ب حـ فان أ | ب أو أ | حـ .

٦ - جد كل الاعداد الاولية الاقل من ١٠٠ . ان احدى الطرق لعمل ذلك هي ان تعمل جدولا او قائمة بالاعداد من ٢ الى ١٠٠ ثم ضع دائرة عند ٢ وتحذف كل مضاعفات ٢ . وكرر هذه العملية مع ٣ . واستمر بالعملية . متى يمكنك التوقف ؟ وتعرف هذه الطريقة لايجاد الاعداد الاولية بمنخل إراتستينس

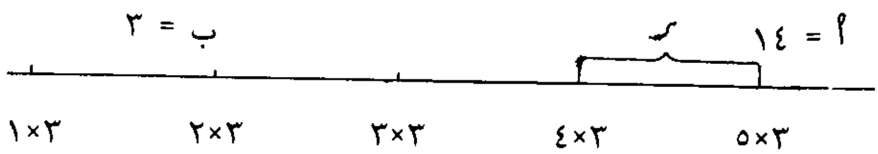
ب. خوارزمية القسمة :

اذا كان أ ، ب عددين صحيحين ، ب > ٠ نستطيع التعبير عن أ كحاصل جمع أحد مضاعفات ب الى عدد آخر يسمى الباقي . تسمى هذه العملية خوارزمية القسمة وهي معرفة كما يلي :

٣ نظرية :

اذا كان أ ، ب ∈ Z ، ب > صفر فيوجد عددان صحيحان ك ، ر وحيدان بحيث ان

أ = ب ك + ر ، ٠ ≤ ر < ب . يسمى العدد الصحيح ك بخارج القسمة ويسمى العدد الصحيح ر بالباقي . فمثلا ، اذا كان أ = ١٤ و ب = ٣ ، فان ١٤ = ٣ × ٤ + ٢ . ويمكن تمثيل هذه النتيجة على خط الاعداد بتعيين موضع العدد الصحيح أ بين مضاعفات متتالية للعدد ب . ويصور الباقي بالمسافة بين أ واكبر مضاعفات ب على يسار أ (انظر الشكل أ)



الشكل أ ١

لاحظ انه عند قسمة - ٢٥ على العدد ٧ بهذه الخوارزمية ليس صحيحاً ان نكتب الاجابة بالشكل

- ٢٥ = ٧ (- ٣) + (- ٤)

يجب ان يحقق الباقي ر المتباينة : ٠ ≥ ر < ٧ . وبهذا تكون الاجابة السليمة

- ٢٥ = ٧ (- ٤) + ٣

تمرين :

كامثلة اخرى جد خارج القسمة والباقي في خوارزمية القسمة لكل زوج من القيم المعطاة للعددين أ و ب وضح النتيجة على خط الاعداد

أ :	٢٥	- ٢٥	٣	- ٣	٢٤	- ٢٤	٠
ب:	٧	٧	٤	٤	٨	٨	٥

لتكن أ ، ب ∋ Z حيث ب < ٠ . في برهان خوارزمية القسمة نجد اولا العددين الصحيحين ك و ر بحيث ان أ = ب ك + ر و . ≥ ر < ب . وعند اتمام ذلك نبرهن الوحدانية لهذين العددين الصحيحين .

الحالة ١

افرض ان أ ≤ ٠ ، وفي الحقيقة ، خذ أ =ن فنبرهن وجود العددين ك ، ر بالاستقراء على ن مع اعتبار ب ثابتاً .

لتكن فن القضية فللعدد الصحيح الثابت ب يوجد عددان صحيحان ك ، ر بحيث ان ن = ب ك + ر ، ٠ ≥ ر < ب .

وبما ان ٠= ب ٠ (٠) + ٠ ، فتكون ف. صائبة (اذا كنت تفضل البدء بالعدد ن = ١ ، فبرهن ان ف١ تكون صائبة) . افرض ان فو تكون صائبة لعدد صحيح و ≤ ٠ (اي افرض انه يوجد عددان صحيحان ك ، ر بحيث ان و = ب ك + ر ≥ ر < ب) . فيجب ان نبرهن الان ان فر+١ تكون صائبة . لاحظ ان

و + ١ = ب ك + ر + ١

فاذا كانت ر + ١ < ب فان فو+١ تكون صائبة . واذا كانت ر + ١ = ب . فان

و + ١ = ب (ك + ١) + ٠

وهنا ايضاً تكون فو+١ صائبة . فبالاستقراء الرياضي ثبت ان فن صائبة لكل عدد صحيح ن ≤ ٠.

الحالة ٢

افرض ان أ < ٠ ، ضع أ = $-\alpha$ ، حيث α > ٠ . وكنتيجة من الحالة ١ هنالك عددان صحيحان ك و ر حيث ان α = ب ك + ر ، ٠ ≤ ر < ب .

ولكن هنا

أ = $-\alpha$ = ب (- ك) + (- ر)

فاذا كانت ر = ٠ ، تكون أ = ب (- ك) + ٠ وينتهي الامر . واذا كانت ٠ < ر < ب ، فان

أ = ب (- ك - ١) + (ب - ر)

و يحقق الباقي الجديد : ب - ر المتباينة ٠ < ب - ر < ب .

ويمكن برهنة وجودية العددين ك و ر باستخدام مبدأ الترتيب الحسن أو مبدأ الاستقراء الثاني .

لنبرهن الان وحدانية العددين ك و ر في خوارزمية القسمة : افرض ان أ ، ب ، ك ، $ك_1$ ، ر ، $ر_1$ ∈ Z حيث ب > ٠

فان أ = ب ك + ر (٠ ≤ ر < ب)

أ = ب $ك_1$ + $ر_1$ (٠ ≤ $ر_1$ < ب)

فيجب ان نبرهن ان ك = $ك_1$ ، ر = $ر_1$.

نفرض ان ر ≥ $ر_1$ (وهذه مجرد مسألة هامشية) . وكنتيجة لفرضنا نحصل على ان

ب ك + ر = ب $ك_1$ + $ر_1$

و يتبع منه ان

ب (ك - $ك_1$) = ر - $ر_1$ ≥ .

وبما ان $ر_1$ < ب فان $ر_1$ - ر < ب فلذا يكون

٠ ≤ $ر_1$ - ر = ب (ك - $ك_1$) < ب

ومن ثم ك - $ك_1$ ≤ ٠ (تذكر ان ب > ٠) وفي الواقع يجب ان يكون العدد الصحيح ك $ك_1$ صفراً (اذا كان ك - $ك_1$ ≥ ١ فان ب > ب (ك - $ك_1$) ≥ ب) . ومن هنا $ر_1$ - ر = ونكون قد انتهينا من البرهان

تمارين :

١ - خذ أ ، ب ∈ Z حيث ب > ٠ . بين انه اذا ازلنا التقييد ٠ ≤ ر < ب في خوارزمية القسمة فيمكن ان يوجد عدد لا نهائي من القيم للعددين ك و ر حيث أ = ب ك + ر .

٢ ـ استخدم النظرية ٣ لبرهنة الصيغة الأعم من خوارزمية القسمة التالية :
اذا كان أ و ب $\in Z$ حيث ب $\neq$ ٠ فيوجد عددان صحيحان وحيدان ك و ر بحيث ان أ = ب ك + ر ، ٠ $\leqq$ ر $<$ | ب | .

جـ . القواسم المشتركة العظمى

نبرهن في هذا البند انه لاي عددين صحيحين مخالفين للصفر قاسم مشترك اعظم وانه يمكن التعبير عن هذا القاسم كتوفيق خطي للعددين الصحيحين وفي البند د تعطي خوارزمية لايجاد هذا القاسم المشترك الاعظم والتوفيق الخطي المحدد . ولكن نعالج اولا برهان الوجودية . وخلال البنود ح ، د و هـ سترمز الاحرف مثل أ ، ب ، ع ، د ، ف ، ك ، ر الى اعداد صحيحة (سواء وضعت لها ارقام سفلية او لم توضع) .

٤ تعريف

ليكن أ و ب عددين صحيحين غير الصفر . يسمى العدد الصحيح د قاسماً مشتركاً اعظم (للاختصار ق.م أ) للعدددين أ و ب اذا وفقط اذا :

أ . كان د موجباً .
ب . كام د قاسماً للعددين أ و ب .
حـ . كان كل قاسم لكل من العددين أ ، ب قاسماً للعدد د .

و يمكن كتابة الشروط التي تعرف القاسم المشترك الاعظم لعددين أ و ب بالرموز كما يلي :

أ . د $>$ ٠
ب . د | أ و د | ب .
جـ . اذا كانت حـ | أ و حـ | ب ، فان حـ | د

وغالباً ما يرمز للقاسم المشترك الاعظم د للعددين الصحيحين أ و ب بالرمز
د = ق.م.أ (أ ، ب) .

٥ تعريف

نقول ان العددين أ و ب يكونان اوليين نسبياً اذا وفقط اذا كان ق.م أ (أ ، ب) = ١

٦ مثال

القواسم المشتركة للعددين ٢٠ و ٣٠ هي ± ١ ، ± ٢ ، ± ٥ ،و ± ١٠ .

نلاحظ من هذه القائمة انه اذا كان حـ | ٢٠ و حـ | ٣٠ فان حـ | ١٠ .
ولهذا فا ١٠ تكون ق. م. أ. للعددين ٢٠ و ٣٠ .

تمرين

جد كل القواسم المشتركة لكل من ازواج الاعداد التالية وجد القاسم المشترك الاعظم واشر الى اي زوج من عددين اوليين نسبياً .

أ : ٢٠ ‎ -٣٠ ‎ -٦٠ ‎ -٢٠ ‎ ١٥

ب : ٢٤ ‎ -٣٦ ‎ ٩٠ ‎ -٢٩ ‎ ٣٤

استعمل التعريف لاثبات ان ٢ ليس قاسماً مشتركاً أعظم للعددين ٢٠ و ٢٤ .

قبل برهان الوجود للقاسم المشترك الاعظم للعددين أ و ب نثبت نظرية مساعدة مهمة

٧ نظرية

لتكن ص مجموعة جزئية غير خالية من الاعداد الصحيحة بحيث ان ص تكون معلقة بالنسبة للطرح . فان ص = {٠} أو ص تحوي عنصراًاصغر موجباً د وهي المجموعة المكونة من كل المضاعفات الصحيحة للعددان د ، اي ان :

ص = {ن د : ن ∈ Z}

البرهان

نلاحظ من الفرض انه يوجد عدد ما أ ∈ ص وان ٠ = أ - أ ∈ ص
فلكل أ ∈ ص نحصل على ٠ - أ = - أ ∈ ص ولهذا فلكل أ ، ب ∈ ص ،
أ - (- ب) = أ + ب ∈ ص .
و يبين هذا ان ص تكون زمرة بالنسبة للجمع (الجمع التجميعي على ص لان عناصر ص اعداد صحيحة) .
افرض ان ص ≠ {٠} . فتحتوي ص على عنصر موجب . (لماذا ؟)
وكنتيجة لمبدأ الترتيب الحسن (الملحق ٥ أ) فان للمجموعة غير الخالية
{س : س ∈ ص ، س > ٠}
عنصراً اصغر د ∈ ص . وبما ان ص تكون زمرة بالنسبة للجمع ، فالمجموعة
{ن د : ن ∈ Z}
محتواة في ص . ونريد ان نثبت ان ص ⊆ {ن د : ن ∈ Z} . خذ س ∈ ص .
سنثبت ان س ∈ {ن د : ن ∈ Z} س ∈ Z فان فبما ان خوارزمية القسمة تتضمن وجود عددين ن و ر بحيث ان س = ن د + ر ، ٠ ≤ ر < د . وبما ان ن د ∈ ص و س ∈ ص فان ر = س - ن د ∈ ص ايضاً . ولكن د العنصر الاصغر الموجب في ص ، ٠ ≤ ر < د ولذا فان ر = ٠ و س

= ن د حيث ن أحد الاعداد الصحيحة . ومن ثم فان صه ⊇ {ن د : ن ∈ Z} . وهكذا يكمل برهان ان صه = {ن د : ن ∈ Z} . وهكذا يكمل برهان ان صه = {ن د : ن ∈ Z} . ان وجودية القاسم المشترك الاعظم للعددين الصحيحين المخالفين للصف ووحدانيته تضمنها النظرية التالية :

٨ نظرية

لاي عددين صحيحين ٲ و ب مخالفين للصفر قاسم مشترك اعظم وحيد . اضف الى ذلك ان هناك عددين صحيحين حـ و ك بحيث ان قم م. ٲ. (ٲ ، ب) = حـ ٲ + ك ب (اي يمكن التعبير عن القاسم المشترك الاعظم للعددين ٲ و ب كتوفيق خطي للعددين ٲ و ب) .

٩ مثال

يكون قم م. ٲ. للعددين ٦ و ٢٧ هو ٣ . ولأن ٣ = (- ٤) ٦ + ١ × ٢٧
ويمكننا ان نكتب
قم م. ٲ. (٦ ، ٢٧) = حـ × ٦ + ك × ٢٧ حيث حـ = - ٤ و ك = ١ .
لاحظ ايضاً ان ٣ = ٥ × ٦ + (- ١) ٢٧
ولهذا فلا يكون حـ و ك وحيدين .
برهان النظرية ٨ .
ليكن
صه = {حـ ٲ + ك ب : حـ ، ك ∈ Z}
ان المجموعة صه مغلقة بالنسبة للطرح لان في الاعداد الصحيحة حـ ، ك ، حـ١ ، و ك١
(حـ ٲ + ك ب) - (حـ١ ٲ + ك١ ب) = (حـ - حـ١) ٲ + (ك - ك١) ب
والصيغة الاخيرة عنصر في صه . ومن النظرية ٧ يوجد عدد صحيح موجب د ∈ صه بحيث ان
صه = {ن د : ن ∈ Z}
وبما ان د ∈ صه فيضمن تعريف صه انه يوجد عددان صحيحان حـ و ك بحيث ان د = حـ ٲ + ك ب ، ٲ و ب عنصران في صه . (لماذا ؟) . ولكن بما ان صه = {ن د : ن ∈ Z} ، فان ٲ = م د ، ب = ن د حيث م و ن عددان صحيحان . ويثبت هذا ان د | ٲ ، د | ب . ولاثبات ان د = قم م. ٲ. (ٲ ، ب) ، لنفرض ان ع | ٲ ، ع | ب . فيوجد عددان صحيحان ، هـ و هـ١ ، بحيث ان ٲ = ع هـ ، ب = ع هـ١ ومن ثم فان
د = حـ ٲ + ك ب = حـ (ع هـ) + ك (ع هـ١) = (حـ هـ + ك هـ١) ع
اي ان حـ | د . وهذا يكمل برهان الوجودية لِ قم م ٲ (ٲ ، ب) .

واخيراً افرض ان $د$ ، $د_١$ هما قاسمان مشتركان أعظمان للعددين أ و ب . فبما ان $د$ قاسم للعددين أ و ب ، $د$ قاسم مشترك اعظم للعددين أ و ب فيجب ان نحصل على $د_١ | د$. وبالمثل ، $د | د_١$. ومن هنا فان $د = \pm د$ (انظر التمرين ٤ في البند أ) . وبما ان $د > ٠$ ، $د_١ > ٠$. فيجب ان يكون $د = د_١$

تمارين

١ - لكل زوج من الاعداد أ و ب في التمرين الذي يتبع المثال ٦ ، عبر عن ق. م. أ. (أ ، ب) كتوفيق خطي للعددين أ و ب .

٢ - ليكن $د$ القاسم المشترك الاعظم للعددين الصحيحين أ و ب . برهن انه يوجد عدد لا نهائي من الاعداد الصحيحة حـ و ك بحيث ان $د$ = حـ أ + ك ب .

٣ - لتكن ص مجموعة مكونة من اعداد صحيحة بحيث تكون مغلقة بالنسبة للجمع . هل من الضروري ان تتكون ص من كل المضاعفات العددية الصحيحة لعدد صحيح ثابت ؟

٤ - ليكن $ن \in Z^+$. برهن ان ق. م. أ. (ن أ ، ن ب) = ن (ق. م. أ (أ ، ب)) .●

٥ - برهن ان القاسم المشترك الاعظم لعددين صحيحين أ و ب مخالفين للصفر هو اكبر عدد صحيح يقسم كلا من أ و ب .

*٦ ليكن أ ، ب $\in Z$ ، $د$ = ق. م. أ. (أ ، ب) . اثبت انه اذا كان أ = حـ $د$ و ب = ك $د$ فام ق. م. أ. (حـ ، ك) = ١

د. خوارزمية اقليدس

لقد برهنا ان لأي زوج من الاعداد الصحيحة قاسماً مشتركاً أعظم . ولم يعط البرهان اي اشارة الى طريقة ايجاد هذا القاسم او التعبيلا عنه كتوفيق خطي للعددين الصحيحين المعطيين . لكن هناك طريقة ، على كل حال ، تعطي كلا القاسم القاسم المشترك الاعظم للعددين الصحيحن والتعبير عنه كتوفيق خطي . وتعرف هذه الطريقة بخوارزمية اقليدس .

ليكن أ و ب عددين صحيحين موجبين . (ستعالج حالة العددين السالبين في التمارين) . فطريقة خوارزمية اقليدس تقتضي قسمة متتالية كما يلي:

اقسم أ على ب لتحصل على باق اول $ر_١$. اقسم ب على $ر_١$ وليبق $ر_٢$

استمر بهذه الطريقة حتى يكون الباقي صفراً . فاذا كانت لا تقبل القسمة على ب

أ. أ = ب ك$_{١}$ + ر$_{١}$ (٠ ≤ ر$_{١}$ < ب)

ب = ر$_{١}$ ك$_{٢}$ + ر$_{٢}$ (٠ ≤ ر$_{٢}$ < ر$_{١}$)

ر$_{١}$ = ر$_{٢}$ ك$_{٣}$ + ر$_{٣}$ (٠ ≤ ر$_{٣}$ < ر$_{٢}$)

ر$_{ن-٢}$ = ر$_{ن-١}$ ك$_{ن}$ + ر$_{ن}$ (٠ ≤ ر$_{٣}$ < ر$_{ن-١}$)

ر$_{ن-١}$ = ر$_{ن}$ ك$_{ن+١}$ + ر$_{ن+١}$ (ر$_{ن+١}$ = ٠)

ويكون القاسم المشترك الاعظم للعددين أ و ب آخر باق غير الصفر ، اي العدد ر$_{ن}$ في متتالية القسمة الموجزة اعلاه . (لماذا يجب ان تنتهي العملية ؟) . وبرهان خوارزمية اقليدس يتبع التمهيدية ١١ .

١٠ مثال

جد ق. م. أ. للعددين ١٠٥ و ٢٨ .

باجراء القسمة المتتابعة ، نحصل على

١٠٥ = ٢٨ × ٣ + ٢١ (قسمة ١٠٥ على ٢٨)

٢٨ = ٢١ × ١ + ٧ (قسمة ٢٨ على ٢١)

٢١ = ٧ × ٣ + ٠ (قسمة ٢١ على ٧)

وبذا يون ق. م. أ. للعددين ١٠٥ و ٢٨ هو ٧ .

لاحظ انه عند كل مرحلة حسابية في الخوارزمية يجب ان يقسم القاسم السابق على الباقي السابق . وخوارج القسمة لا شأن لها بالامر .

وفي الخطوة الاولى لبرهان الخوارزمية نبرهن التمهيدية التالية :

١١ تمهيدية

ليكن أ ، ب ∠.، فاذا كانت أ = ب ك + ر حيث . ≤ ر ≤ ب ، فيكون القاسم المشترك الاعظم للعددين أ و ب هو نفس القاسم المشترك الاعظم للعددين ب و ر .

ق. م. أ. (أ ، ب) = ق. م. أ. (ب ، ر) .

البرهان

سنبين ان للزوج أ و ب نفس القواسم المشتركة للزوج ب و ر . افرض ان ع | ب و ع | ر فان

ب = ع م ، ر = ع ن حيث م و ن عددان صحيحان والنتيجة أن :

أ = ب ك + ر = ع م ك + ع ن = ع (م ك + ن)

وهكذا ع | أ . بالمثل ، اذا كانت ع | أ ، ع | ب ، فان ع | ر . وهكذا تكون المجموعة المكونة من قواسم مشتركة للعددين أ و ب هي نفسها المجموعة المكونة من القواسم المشتركة للعدين ب و ر . و يتبع فوراً ان للزوجين أ ، ب و ب ، ر نفس القاسم المشترك الاعظم .

نبرهن الان خوارزمية اقليدس (اي انه اذا كانت $ر_ن$ آخر باق صفري في المتتابعة المكونة من قواسم أ ، فان $ر_ن$ هو القاسم المشترك الاعظم للعددين أ و ب) .

البرهان

في المتتابعة المكونة من البواقي غير السالبة $ر_١ > ر_٢ > ر_٣ > ....$ يجب ان يوجد باق $ر_{ن+١}$ هو الصفر ، لانه يوجد فقط عدد منته من الاعداد الصحيحة م بحيث ان $٠ \le م \le ر_١$. و يبين تطبيق التمهيدية ١١ مرة بعد مرة أن :

ق. م. أ. (أ ، ب) = ق. م. أ. (ب ، $ر_١$) = ق. م. أ. ($ر_١$ ، $ر_٢$)

= ق. م. أ. ($ر_{ن-١}$ ، $ر_ن$) = $ر_ن$

و يمكن ايضاً استعمال خوارزمية اقليدس للتعبير عن القاسم المشترك الاعظم للعددين أ و ب كتوفيق خطي من أ و ب . ولعمل ذلك ابدأ باعلى متتابعة عمليات القسمة وعبر بالدور عن كل باق كتوفيق خطي بين أ و ب . وهكذا نحصل على

$ر_١$ = أ - $ك_١$ ب

$ر_٢$ = ب - $ك_٢ ر_١$ = ب - $ك_٢$ (ا - $ك_١$ ب)

= (- $ك_٢$) أ + (١ + $ك_٢ ك_١$) ب

$ر_٣$ = $ر_١$ - $ر_٢ ك_٣$ = ...

وعلى سبيل المثال لنجد التوفيق الخطي للعددين ٢٨ و ١٠٥ الذي يمثل ق. م. أ. للعددين ٢٨ و ١٠٥ . تعطينا القواسم ما يلي حسب المثال ١٠ :

٢١ = ١٠٥ - ٢٨ (٣)

٧ = ٢٨ - (٢١) (١) = ٢٨ - (١٠٥ - (٢٨) (٣))

فيكون

٧ = (٤) (٢٨) - (١) (١٠٥) .

تمارين

١ ـ استعمل خوارزمية اقليدس لايجاد القواسم المشتركة العظمى :

أ . ق. م. أ. (٣٧٤ ، ٥١)　　　　حـ . ق. م. أ. (٨٧٦٦ ، ٣٤٥)

ب . ق. م. أ. (٩٨٤٣ ، ٣٣٤)　　　　د . ق. م. أ. (٤٦٧٣ ، ٨٩٣)

٢ ـ لكل من الازواج في التمرين ١ استعمل خوارزمية اقليدس لتمثل القاسم المشترك الاعظم للعددين أ و ب .

٣ ـ ليكن أ أو ب عدداً سالباً اثبت ان الخوارزمية الاقليدية ، عند تطبيقها على زوج ملائم من الاعداد الصحيحة ، يمكن استعمالها لايجاد القاسم المشترك الاعظم للعددين أ و ب .
اعط مثالا خاصاً لطريقتك .

هـ . النظرية الأساسية في الحساب

عند العمل بخوارزمية القسمة وخوارزمية اقليدس نلاحظ فوراً ان الاعداد الصحيحة الموجبة تبدو انها تقع في ثلاث مجموعات : العدد الصحيح ١ ، والاعداد الاولية ، والاعداد الصحيحة الموجبة التي تكون حاصل ضرب اعداد أولية ، قد تكون رغبت باستعمال العوامل الاولية للعددين الصحيحين ، أ و ب لكي تجد القاسم المشترك الاعظم لهما والحقيقة ان كل عدد صحيح موجب غير (هو أولي أو حاصل ضرب (وحيد) لاعداد اولية ناتجة عن النظرية الاساسية في الحساب . نلاحظ في التمرين ٧ انه كنتيجة لهذه النظرية من الممكن أستعمال عوامل اولية مشتركة للعددين الصحيحين ، أ و ب ، لايجاد قاسمهما المشترك الاعظم . ونلاحظ ايضاً في التمرين ٨ كيف تستعمل كل العوامل الاولية للعددين أ و ب لايجاد المضاعف المشترك الاصغر (اي اصغر عدد يقبل القسمة على أ و ب) نبرهن اولا نتيجتين مفيدتين بنفسيهما وايضاً في البرهان للنظرية الاساسية في الحساب .

١٢ نظرية

اذا كان د عدداً اولياً و د | أ ب ، فان د | أ أو د | ب .

البرهان

ليكن د | أ ب ، حيث د عدداً اولي ، وافرض ان د ∤ أ . فان ق. م. أ (أ ، د) = ١ لأن د عدد اولي ، ويوجد عددان صحيحان حـ و ك حيث ان ١ = حـ أ + ك د .

واذ ن فان ب = ب × ١ = حـ أ ب + ك د ب . وبما ان د | أب فيوجد عدد صحيح م بحيث

ان أ ب = د م. فيتبع ان ب = حـ أ ب + ك د م + ك د ب = د (حـ م + ك ب) وهكذا فان د | ب .

١٣ نظرية

اذا كان د عدداً اولياً و د | (أ$_{١}$ أ$_{٢}$ ... أ$_{ن}$) ، فان د | أ$_{و}$ حيث و عدد ما ، ١ ≤ و ≤ ن

و يترك برهان النظرية ١٣ للتمرين ١ .

١٤ نظرية

النظرية الاساسية في الحساب ـ الصيغة الاولى . اي عدد صحيح اكبر من ١ اما ان يكون اولياً او يمكن التعبير عنه كحاصل ضرب أعداد أولية . والتعبير عن اي عدد صحيح موجب غير اولي كحاصل ضرب اعداد اولية تعبير وحيد اذا تجاهلنا ترتيب العوامل .

البرهان

نبرهن العبارة الاولى للنظرية باستخدام الصيغة الثانية لبمدأ الاستقراء . فلكل عدد صحيح ن ≥ ٢ لتكن ف$_{ن}$ القضية : ن أولية أو يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب اعداد أولية .

فبما ان ٢ أولي ، تكون ف$_{٢}$ صائبة . لعدد صحيح ر ≥ ٢ . فلنفترض ان العبارات ف$_{٢}$ ، ف$_{٣}$ ، ... ، ف$_{ر}$ كلها صائبة . فيجب ان نبرهن ان العبارة ف$_{ر+١}$: ر + ١ تكون اولية او يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب اعداد اولية .

اذا كان ر + ١ عدداً اولياً ، فان ف$_{ر+١}$ تكون صائبة . واذا لم يكن ر + ١ اولياً ، فيوجد عددان صحيحان و ، حـ بحيث ان ر + ١ = و حـ ، ١ < و < ر + ١ و ١ < حـ < ر + ١ . وكنتيجة لفرضية الاستقراء تكون ف$_{و}$ و ف$_{حـ}$ صائبتين . ولهذا فتوجد اعداد أولية د$_{١}$ ، د$_{٢}$ ، ... ، د$_{ى}$ و س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، ... ، س$_{ط}$ بحيث ان

و = د$_{١}$ د$_{٢}$ ... د$_{ى}$ و حـ = س$_{١}$ س$_{٢}$ ... س$_{ى}$ و ينتج ان

ر + ١ = و حـ = د$_{١}$ د$_{٢}$ ... د$_{ى}$ س$_{١}$ س$_{٢}$ ... س$_{ط}$

ومن ثم فان ف$_{ر+١}$ تكون صائبة . وهكذا باستخدام المبدأ الثاني للاستقراء تكون ف$_{ن}$ صائبة لكل عدد صحيح ن ≥ ٢ .

ولبرهنة وحدانية التحليل للعوامل الاولية لأي عدد صحيح ن ≥ ٢ ، لتكن ف$_{ن}$ العبارة : ن أولية او يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب اعداد اولية بطريقة واحدة : د$_{١}$ ، د$_{٢}$ ، ... ، د$_{ى}$ بحيث ان د$_{١}$ ≤ د$_{٢}$ ≤ ... ≤ د$_{ى}$.

العدد الصحيح ٢ أولي ، وبذا فان $ف_٢$ صائبة . ليكن $ر \geq ٢$ عدداً صحيحاً وافرض ان $ف_٢$ ، $ف_٣$ ، ... ، $ف_ر$ كلها صائبة . فيجب ان نبرهن $ف_{ر+١}$.

فاذا كان ر + ١ أولياً فانْ $ف_{ر+١}$ تكون صائبة . واذا لم يكن ر + ١ أولياً فيوجد عددان اوليان او اكثر $ك_١$ ، $ك_٢$ - - - - - - - $ك_ى$ بحيث ان

$$ر + ١ = ك_١ \; ك_٢ \; ... \; د_ى \quad و \; د_١ \leqq د_٢ \leqq ... \leqq د_ى \; .$$

افرض ان ر + ١ له ايضاً العوامل الاولية التالية :

$$ر + ١ = س_١ \; س_٢ \; ... س_ط \quad حيث \quad س_١ \leqq س_٢ \leqq ... \leqq س_ط \; .$$

فدون فقدان التعميم يمكننا ان نفرض ان $ك_١ \leqq س_١$ فانه ، بما ان $ك_١ | ر + ١$ ، $ك_١ | (س_١ \; س_٢ \; ... \; س_ط)$ ومن ثم ، باستخدام النظرية ١٣ ، $ك_١ | س_و$ ، $١ \leqq و \leqq ط$.

ولكن يكون $س_و$ ايضاً اولياً ، وبذا فان $ك_١ = س_و$. وهكذا كنتيجة للترتيب

$$د_١ \leqq س_١ \leqq س \quad يجب \; ان \; تحصل \; أيضاً \; على \; د_١ = س_١$$

فليكن $م = ك_٢ \; ك_٣ \; ... \; د_ى = س_٢ \; س_٣ \; ... \; س_ط$

فيكون $٢ \leqq م < ر + ١$ ومن ثم فتكون $ف_م$ صائبة حسب فرضية الاستقراء . و يقتضي هذا ان تكون م أولية ، وفي هذه الحالة ى = ط = ٢ و $ك_١ = س_١$ ، $ك_٢ = س_٢$ أو تحليل العدد م للعوامل يكون وحيداً . ومن ثم ففي الحالة الثانية يجب ان نحصل ايضاً على ى = ط و $ك_و = س_و$ والكل و = ١ ، ٢ ، ... ، ى .

١٥ نظرية

النظرية الاساسية في الحساب ــ الصيغة العامة . اي عدد صحيح مختلف عن ٠ ، ١ ، أو - ١ يكون اولياً أو يمكن التعبير عنه كحاصل ضرب اعداد أولية (أو عدد أولي) مضروبة في ± ١ . و يكون التعبير عن اي عدد غير اولي كحاصل ضرب اعداد اولية بطريقة وحيدة الا بالنسبة لترتيب العوامل . و يترك البرهان النظرية ١٥ للتمرين ٢ .

وكثيراً ما يكون مفيداً كتابة التحليل الاولي للاعداد الصحيحة في الصيغة

$$\pm \; ك_١^{ن_١} \; ك_٢^{ن_٢} \; ... \; ك_ر^{ن_ر} \; .$$

حيث $ك_١$ ، $ك_٢$ ، ... ، $ك_ر$ تكون اولية ، $ك_١ < ك_٢ < ... \; ك_ر$ و $ن_١$ ، $ن_٢$ ، ... ، $ن_ر \in Z^+$.

تمارين

١ ـ برهن النظرية ١٣

٢ ـ برهن النظرية ١٥

٣ - باستخدام الرموز التالية للنظرية ١٥ ، اكتب التحليل الاولي لعوامل الاعداد الصحيحة ٥٦٠ ، - ٦٩٣ ، ٩٥٠ ، و - ١٢٧٨ .

٤* -برهن انه اذا كان ر و د عددين صحيحين اوليين نسبياً (اي يكون ق. م. أ. (ر ، د) = ١) ، ر | د ن ، فان ر | ن .

٥ - أ. اذا كانت ر | ن و د | ن ، فهل من الضروري ان يتبع ان ر د | ن ؟ أعط امثلة .

ب. اكمل العبارة التالية وبرهنها : لتكن ر ، د ، ن اعداداً صحيحة مخالفة للصفر . فاذا كانت ر | ن ، د | ن ، و ———— ، فان ر د | ن .

٦ - أ. لتكن د١ ، د٢ ، ... ، دن اعداداً اولية . برهن بالتناقض ان اياً من هذه الاعداد يكون عاملا للعدد الصحيح (د١ د٢ ... دن) + ١

ب. باستخدام نتيجة الجزء أ ،برهن انه يوجد عدد لا نهائي من الاعداد الاولية (لقد قدم اقليدس هذه المقولة) .●

٧ - اذكر طريقة لاستعمال النظرية الاساسية في الحساب لايجاد القاسم المشترك الاعظم لعددين صحيحين. وضح ببعض الامثلة .

٨ - **تعريف** يكون العدد الصحيح م المضاعف المشترك الاصغر للعددين الصحيحين أ و ب اذا وفقط اذا كان (١) كل من أ و ب يقسم م ، (٢) يقسم م اي عدد صحيح آخر يكون مضاعفاً لكل من أ ، ب . نرمز للمضاعف المشترك الاصغر م للعددين أ و ب بالرمز م = م. م. أ. (أ ، ب) . وبالرموز نكتب م = م. م. أ. (أ ، ب) اذا وفقط اذا كان (١) أ | م ، ب | م و (٢) اذا كان أ | حـ و ب | حـ ، فان م | حـ .

ا. جد المضاعف المشترك الاصغر لكل مما يلي :

م. م. أ. (٢٠ ، ٢٤)   م. م. أ. (- ٢٠ ، - ٢٩)

م. م. أ. (- ٣٠ ، - ٣٦)   م. م. أ. (١٥ ، ٣٤)

م. م. أ. (- ٦٠ ، ٩٠)

ب . برهن انه لاي عددين صحيحين موجبين مضاعف مشترك اصغر .●

حـ هل يكون المضاعف المشترك الاصغر للعددين الصحيحين الموجبين أ و ب وحيداً ؟ علل اجابتك .

د . ليكن أ و عددين صحيحين وضع د = ق. م. أ. (أ ، ب) .

اثبت انه اذا كانت أ = د م و ب = و ن فان ق. م. أ. (م ، ن) = ١ والمضاعف

المشترك الاصغر للعددين أ و ب هو العدد الصحيح ك. م. ن.

هـ ليكن أ و ب عددين صحيحين . فبرهن ان ق. م. أ. (أ ، ب) م. م. أ (أ ، ب)=أ ب .

و . اذكر طريقة لاستخدام النظرية الاساسية في الحساب لايجاد المضاعف المشترك الاصغر لعددين صحيحين موجبين . وضح ببعض الامثلة .

ملاحظات مساعدة لحل المسائل

بند ١,٢ ١٨ ب ضع الجداء

$$\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{pmatrix} \begin{pmatrix} و & س \\ ص & ع \end{pmatrix}$$

مساوياً لمصفوفة العنصر المحايد وحل بعض المعادلات الخطية للاعداد و و س و ص و ع .

بند ١,٣ ٢٥ حـ افرض انه يوجد عنصرين محايدين و و $و_١$ وبرهن انهما يجب ان يكونا متساويان .

٢٥ ز اعرض اولا حلا وبرهن انه الحل الوحيد .

بند ١,٤ ٤٦ اثبت ان [ك ٥ (هـ ٥ $ق_م$) (س)] = [(ك ٥ هـ) ٥ $ق_م$] (س) لكل س ∋ سه .

بند ١,٥ ٥٩ لتعيين النظير لتبديلة $ق_م$ ∋ $S_٣$ بسرعة ، لاحظ ان $ق_م^{-١}$ (ص) = س اذا وفقط اذا $ق_م$ (س) = ص . فمثلا ، اذا كانت $ق_م$ (١) = ٣ ، فان $ق_م^{-١}$ (٣) = ______

٦١ ليكن ن ≤ ٣ عدد صحيح ثابت . اختر تبديلتين لا تتبادلان في $S_٣$ بين كيف توسع هذه الى تبديلتين لا تتبادلان في $S_ن$.

بند ١,٦ ٦٣ يمكن لرأس معطى ان ينتقل الى ______ مواضيع محتملة . وبتثبيت هذا الرأس في احدى هذه المواضيع ، كم من التماثلات تحصل ؟

بند ١,٨ ٨٣ يجب ان تبرهن ان (أ + ب $)_ن$ = ($\bar{أ}$ + $\bar{ب}$ $)_ن$.
لعمل ذلك ترجم التمهيدية الى عبارات تشمل تطابقات
(مثلا $أ_ن$ = $\bar{أ}_ن$ لهذا أ ≡ $\bar{أ}$ (مضـ ن))
استعمل نتائج سابقة على التطابقات .

بند ٢,١ ١٢ تؤكد الفرضية انه لكل أ ، ب ∋ صه نحصل على أ ٥ $\bar{ب}$ ∋ صه وينتج لنا هذا الفرض عمل اختبارات معينة للعنصرين أ ، ب .
برهن (١) و ∋ صه (٢) اذا كانت ب ∋ صه فان $\bar{ب}$ ∋ صه و (٣) تكون صه مغلقة بالنسبة الى ٥ .

بند ٢,٣ ٣١ حـ اثبت ان أ ٥ صه ⊇ ب ٥ صه وبالعكس

٣١ ء خذ حـ ∋ أ ٥ ص ∩ ب ٥ ص .
٣٥ لاحظ مسألة ٢٤

بند ٢,٤ ٤٩ استعمل العبارة ان Ø تكون واحد لواحد اذا وفقط اذا كان أ ، ب ∋ س ، Ø (أ) = Ø (ب) يتضمن ان أ = ب . افرض اولا ان Ø تكون واحد لواحد . لبرهنة ان نو (Ø) = {و} خذ س ∋ نو (Ø)واثبت ان س = و .

لبرهنة العكس للعبارة افرض ان نو (Ø) = {و} وبرهن ان نو Ø تكون واحد لواحد . اثبت اولا ان Ø (أ ٥ بَ) = و اذا كانت Ø (أ) = Ø (ب)

بند ٢,٦ ٧١ اكتب قائمة اولا بالعناصر المختلفة في س .

بند ٢,٧ ٧٩ تعريف الزمرة الجزئية الطبيعية مكافئاً للعبارة ص ٥ أ = أ ٥ ص و أ ٥ ص = ص أ لكل أ ∋ س .

٨١ استعمل نظرية ٨٠ ب .

٨٣ أ لاحظ اولا بعض المجموعات المرافقة في مسألة ٧٧ افرض ان ر ٥ أ ∋ ص .

٨٤ جد دليل ص . استخدم هذا الدليل وربما نتيجة المسألة ٨٣ لوصف المجموعات المرافقة في ص .

بند ٢,٨ ٨٩ اثبت انه اذا كان ر١ ∋ ص فان أ١ ٥ب٥ ر١ = أ١ ٥ ب٢ ٥ ر٢ لبعض ر٢ ∋ ص . استعمل طبيعة ص والمساواة أ١ ٥ ص = أ٢ ٥ ص لتحصل على أ١ ٥ ب١ ٥ ر١ = أ٢ ٥ ب٢ ٥ ـــــ .

٩٤ حـ لايجاد نو (Ø) تذكر ان عنصر الوحدة في س / ص يكون المجموعة المرافقة

بند ٣,٢ ٧ أ اعتبر الجمع (أ. (٠) + (أ. (٠)) واستعمل الخاصية ب في عرضية ٦ .

بند ٣,٦ ٤٣ لاثبات التضمين أ ⇐ ب لتكن العبارة أ معطاه وبرهن العبارة ب. بما ان العبارة ب هي نفسها عبارة شرطية اعتبر الفرضية للعبارة ب وبرهن نتيجتها .

٥١ برهن التضمينات اذا لم تكن ن ـــــ فلا تكون Z ن حلقة كاملة . اذا كانت ن ـــــ فان Z تكون حلقة كاملة .

بند ٣,٧ ٦٣ ب لاحظ نظرية ٣٥ في فصل ٢ .

٦٤ ب اثبت ان (أ و)$^{-1}$ = (أ$^{-1}$)و .

بند ٤,٢ ٢٥ اذا كانت Θ = (ى ، ت) ما هو العامل في ق$_{ى}^{(ن)}$ الذي يقابل العامل سى سن في ق$_{ى}^{(ن)}$ ؟ اذا كانت ء ≥ ى ≥ ت فان كلا من سى - سى و سى

- سن تظهر كعوامل للحدودية ق(ن) ما هي العوامل المقابلة لهذه الحدودية ق(ن) ؟

اعتبر ازواج اخرى من العوامل في ق(ن) و ق(ن) للحالتين .

ى ≤ ك ≤ ت و ى ≤ ت ≤ ك .

٢٩ استخدم النظرية ٢٦ أو نظرية ٢٨ .

٣٠ حل المعادلة $\alpha = \beta \circ \varnothing$ حيث $\varnothing \in S_n$ واثبت ان $\varnothing \in A_n$

بند ٤,٣ ٤١ تذكر ان الاقتران المحافظ الذاتي للزمرة سه هو اقتران محافظ من سه الى سه بحيث يكون واحداً لواحد وشاملا . كل هذه الشروط يجب ان تؤخذ في الحسبان في برهانك .

بند ٤,٤ ١٥٨ لاحظ انه اذا كانت (س ، ص) ∈ سه × صه ، فتزيد ∅ (س ، ص) ان تكون عنصراً في سه .

بند ٤,٥ ٦٠ استعمل تمهيدية ٧٩ في فصل ٢ لتبديل عناصر التركيب (س ∘ ص) ∘ (س١ ∘ ص١)َ .

استعمل نظرية ٨٠ ب في فصل ٢ لاثبات ان سه ∘ صه طبيعية .

٦٣ اثبت ان سَ ∘ صَ ∘ س ∘ صه ∈ سه ∩ صه .

٦٦ لا حد الاتجاهات افرض ان سه جداء مباشر داخلي للزمرتين الجزئيتين الطبيعيتين صه و ع . عرف اقتران من صه × ع الى صه ∘ ع وبرهن انه تشاكل . كن طليقاً لاستخدام نظريتي ٦٤ و ٥٦ .

بند ٥,١ ٩ استخدم نظرية ٦ عدة مرات .

١٣ أ اختر حدوديتين خاصتين قہ (س) و هـ (س) لاثبات ان ٢ في هذه المثالية

١٥ قد ترغب ان تشير لبعض المثاليات في نظرية ٧ من ملحق ٦. اعمل اولا البرهان اذا كانت صه = {٠} أو صه = لہ . وافرض ان صه ≠ {٠} و صه ≠ لہ . اختر حدودية غير صفرية د (س) ذات اقل رتبة في صه . (لماذا يمكن عمل هذا ؟)

اثبت ان در (د (س)) ≤ ١ . لعمل ذلك افرض ان در (د (س)) = ٠ ، وهذا يتضمن ان ١ ∈ ص (لماذا ؟) خذ قہ (س) ∈ صه . نرغب في برهان ان قہ (س) = د (س) هـ (س) ، هـ (س) ∈ لہ [س] فاذا فرضنا ان هذا غير ممكن فان قہ (س) = د (س) ك (س) + ر (س) ، ك (س) ، ر (س) ∈ لہ [س] حيث در (ر (س)) < در (د (س)) ولكن ر (س) ≠ ٠ . هل ر (س) في صه ؟ ما هي در (ر (س)) ؟

بند ٥,٢ ١٨ افرض ان الضرب معرف . لاثبات ان صه مثالية ، خذ ر ∈ ح و ص ∈ صه .
فان ر + ص = صه + صه و س + صه = ٠ + صه ، وبذلك (س ر) = ________

بند ٥,٣ ٢٦ اختر اولا بعض القيم الصغيرة للعددين أ ، ب ∈ Z .
وافحص التضمين التالي : اذا كان أ ، ب ∈ صه فان أ ∈ صه أو ب ∈ صه .
قد يساعدك استعمال رمز القسمة من ملحق ٦ أ أو نظرية ١٢ في ملحق ٦ .

٣٠ ب استخدم نظرية ٢٣ .

بند ٥,٤ ٣٥ اثبت صه ≠ ح . وافرض ان ع مثالية تحقق صه ⊆ ع ⊆ ح .
استعمل تمهيدية ٣٤ .

بند ١,٢ ٤ لاثبات ان الضرب عملية ثنائية على ع فيجب ان تبرهن انه اذا كانت أ ، ب ∈ ع ، فان أ ب ∈ ع . لعمل ذلك برهن انه اذا كانت محد أ ≠ ٠ محد س ≠ ٠ فان محد أب ≠ ٠ لاثبات ان عنصر المصفوفة المحايدة يكون في ع ، فيجب اولا ان تعرفها وتثبت انها تكون غير منفردة وتبرهن بعد ذلك انها عنصر محايد . وتكون عملية مماثلة ضرورية للنظائر .

بند ١,٣ ٦ استخدم تمرين ٥ .

بند ١,٦ ٥ أ لوصف العناصر في $D_ن$ ، ابدأ بعمل مخططات لكثيرات الاضلاع في $D_٣$ و $D_٥$ وكثيرات اضلاع في $D_٤$ و $D_٦$.

٥ حـ لاظهار ان التركيب (٥) يكون عملية ثنائية على $D_ن$ ، فربما يساعد استخدام مناظرة عدية مشابهة لتلك الموجودة في مسألة ٦٣ .

٥ د ثبت ن وصف صراحة عنصرين من $D_ن$ لا يتبادلان مع بعضهما البعض .

بند ١,٧ ٣ د لاحظ نظرية ١٢ في ملحق ٦ .

٤ افرض انه يوجد س ∈ أن بحيث ان ٠ < س < ر .
لاحظ ان ٠ < ر - س < ن (لماذا ؟) وان
أ = ن ك١ + س ك١ ∈ Z (لماذا ؟)

بند ١,٨ ٢ أ جرب عدة قيم للعدد د .

٤ د لاحظ اولا ان ق. م. أ. (ح ، ك١) = ١ . استخدم تمرين ٤ في الملحق ٦ هـ .

بند ٢,١ ١١ استخدم نظرية ٧ في الملحق ٦ .

١٥ ب لاحظ تمرين ٨ في ملحق ٦ هـ .

١٨ حـ لاحظ نظرية ٨ في ملحق ٦ .

بند ٢,٢ ٣ قد يكون العددين م و ن سالبين . برهن العرضية اولا لقيمة ن = - ١ ، م ∋ Z . ثم اعتبر الحالة التي تكون فيها ن > ٠ و م ∋ Z وبرهن العرضية بالاستقراء على متغير واحد مع تثبيت المتغير الاخر .

٤ هل من الممكن ان تكون جميع العناصر أ ، أ٢ ، أ٣ ، ... مختلفة ؟ اثبت انه يوجد عددين صحيحين حـ و ر بحيث ان أ^حـ = أ^ر و ١ ≤ حـ < ر برهن ان و ∋ صه واخيراً برهن ان أ′ ∋ صه .

١١ أ اذا كان ق.م.أ. (م ، ن) = ، فيوجد عددين صحيحين حـ و ر بحيث ان ١ = حـ ن + ر م . اعتبر ب١ = ب^حـن و ب٢ = ب^رم .

١١ حـ اعمل هذا البرهان بالاستقراء على ر ، عدد الاعداد الاولية .

١٢ ب لاحظ تمرين ٧

١٣ أ برهن ان ب^ن = و وانه اذا كانت ر هي رتبة ب ، فان ر | ن وبذلك ر = ن/س حيث س ∋ Z^+ ولايجاد س فيمكن ان ترغب اعتبار عدة قيم من ن و ى وتفتش على نموذج .

١٣ ب استعمل النتيجة في جزء أ .

بند ٢,٣ ٨ استعمل نظرية ٣٥ لتبين انه اذا كانت (أ ٥ ب)^ر = و ، فان رتبة بَ تقسم كلا من م و ن . اعمل ذلك باخذ الزمرتين حـ أ > و د ب > ذات الرتبتين ——— و ——— على الترتيب .

١٣ أ لاحظ تمرين ١,٣ - ٦ .

١٤ هـ افرض ان A_4 لها زمرة جزئية سه رتبتها ستة . استعمل تمرين ١٣ لتعيين اي العناصر في A_4 يجب ان يكون في الزمرة الجزئية المفروضة .

بند ٢,٤ ٨ ب لاحد الاتجاهين افرض ر ∤ ن فان ن = ر ك + د لاحد الاعداد ك ∋ Z^+ و د < ر . اعتبر Ø ((٠)ن) و Ø (ن ن) مستخدماً تعريف Ø .

وللاتجاه الاخر افرض ان ر | ن و أن = بن . فان ن | (ب - أ) و ر | (ب - أ) . (لماذا ؟) ثم اثبت ان Ø (أن) = Ø (ب ن) .

بند ٢,٥ ٦ افرض ان Ø تشاكل من Z الى Q . لملاحظة كيف « تعمل » Ø خذ Ø (١) = ك ∋ Q فان Ø (ن) = ——— حيث ن ∋ Z .

بند ٢,٦ ٣ لتكن صه زمرة جزئية ، أ ∋ سه مولداً للزمرة سه ، و س اصغر عدد صحيح بحيث ان أ^س ∋ صه . خذ أ^ر ∋ صه . بما ان ر ∋ Z ، ر = س ك + د حيث

. $\leq$ د $<$ س . اثبت ان أ^د ∈ ص .

بند ٢,٧ ٢ استخدم نظرية ٨٤ لايجاد بعض الزمر الجزئية الطبيعية وبعدها استعمل عرضية ٨٢ لأجد واحدة اخرى على الاقل .

١٢ ب ضع س ∈ ص و أ ∈ س . اثبت ان أَ ٥ س ٥ أ ∈ ص .

١٤ برهن ان صَ ٥ عَ ٥ ص ٥ ع = و .

١٦ أ استعمل تمهيدية ٧٩ لاثبات ان (ص ٥ ع) ٥ (ص١ ٥ ع١)َ عنصر في ص ٥ ع اذا كان ص ، ص١ ∈ ص و ع ، ع١ ∈ ع .

بند ٢,٨ ٥ افحص تبادلياً في س / ص .

٨ افرض ان (أ ٥ ص ، ب ٥ ص) ——— (أ ٥ ب) ٥ ص يعرف عملية ثنائية تعريفاً حسناً . اختر أ ∈ س و ص ∈ ص واثبت ان أَ ٥ ص ٥ أ ∈ ص . لعمل ذلك اعتبر الزوجين (ص ٥ ص ، أ ٥ ص) و (و ٥ ص ، أ ٥ ص) .

٩ ب لاحظ النظريتين ٧١ و ٧٢ وتمرين ٤ أعلاه .

١١ برهن النظرية مستخدماً مبدأ الاستقراء الثاني . لتكن فن العبارة : لكل زمرة تبديلية س رتبتها ن ، اذا كان د عدد اولي يقسم ن ، فيوجد أ ∈ س − {و} بحيث ان أ^د = و . لبرهنة العبارة عندما تكون رتبة س ، ن + ١ ، افرض انها تكون صائبة لكل زمرة رتبتها ر $\leq$ ن . اعتبر اولا الحالة التي تكون فيها س زمرة دورية (اي س = < أ > لاحد العناصر أ ∈ س) واعتبر الحالة لزمرة غير دورية واختر زمرة فعلية ص . (لماذا تكون ص موجودة ؟) اثبت انه اذا كانت د لا تقسم رتبة ص ، فان د تقسم رتبة س / ص .

استخدم تمرين ١٠ .

بند ٣,١ ٣ استخدم مخططات ڤن والخصائص المألوفة للتقاطع والاتحاد .

٥ من الممكن ان يكون أ ب نفس العنصر في س لكل أ ∈ س .

٦ هـ لاثبات ان ح تبديلية اذا كانت ف (س ، ح) تبديلية فعليك ان تثبت انه لكل أ ، ب ∈ ح تحصل على أ ب = ب أ . جد اقترانين ق ، هـ ∈ ح بحيث ان ق (س.) = أ و هـ (س) = ب لاحد العناصر س. ∈ س .

٦ و لاثبات ان ق (س ، ح) لها عنصر محايد للضرب ، فعليك ان تعرف اقتران ع : س ——→ ح . لاثبات انه اذا كانت ق (س ، ح) لها عنصر محايد للضرب ع ، فان ح لها عنصر محايد للضرب ، فيجب ان تجد اولا مرشحاً للعنصر المحايد وان تبرهن بعد ذلك انها تتحقق . انظر الملاحظة المساعدة

لتمرين ٦ هـ

بند ٣,٤ ٥ لاحظ تمرين ١,٤ ــ ٥ ب .

٦ استخدم تمرين ٣,٣ - ٩ .

بند ٣,٧ ٦ ب حلل $٢^٨ - ٢^٢$ الى قوى ذات اعداد اولية مختلفة . استخدم النظرية ٦٤ لاثبات ان احدى هذه الاعداد الاولية تقسم $س^٦ - ١$.

١١ ب افرض ن = در (ر (س)) و م = در (د (س)) حيث ن $\geq$ م .

$$ر (س) = \sum_{ى=٠}^{ن} ر_ى \, س^ى \quad و \quad د (س) = \sum_{ر=٠}^{م} ب_ر \, س^ر ،$$

ضع ما سبق.

اعتبر الحدودية

$$رَ (س) = ر (س) - (ر_ن \, ب_م^{-١} \, س^{ن-م}) \, د (س)$$

اثبت ان رَ (س) $\in$ صه .

١٢ استعمل نظرية ٨ في ملحق ٦ .

بند ٣,٨ ٥ اذا كانت ب $\neq$ ٠ في ك ، فان $ب^{-١}$ تكون موجودة في ق (ولكن ليس من الضروري في ك) . ضع $قَ = \{ أ ب^{-١} : أ ، ب \in ك ، ب \neq ٠ \}$ فان $قَ \supseteq ق$.

بند ٤,١ ١٠ ضع $ق = (أ_١ \, أ_٢ \, ... \, أ_ر)$. احسب $ق^٢ (أ_١)$ ، $ق^٣ (أ_١)$ وهكذا

١٤ لاحظ اولا امثلة .

بند ٤,٢ ١٣ الزمرة $A_٤$ تحتوي على ـــــ عناصر . هل الدورات (أ ب جـ) في $S_٤$ عناصر في $A_٤$ ؟

بند ٤,٣ ٥ اذا كانت $\varnothing$ اقتران محافظ ذاتي في Z و $\varnothing (١) = ر$ ، فان $\varnothing (ن) =$ ـــــــ حيث ن $\in$ Z . جد القيم الممكنة للاعداد ر :

٦ استعمل طريقة سؤال ٥

١١ عرف اقتران شامل من سه الى ع بحيث ان تقرن أ بالعنصر $\varnothing_أ$ لكل أ $\in$ سه .

بند ٤,٥ ١١ لاثبات وحدانية التمثيل اعتبر $أ_١ + أ_٢ + ... + أ_م = ب_١ + ب_٢ + ... + ب_م$ حيث $أ_ى ، ب_ى \in صه_ى$. ما هي رتبة العنصرين .

$أ_١ - ب_١$ و $(ب_٢ - أ_٢) + ... + (ب_م - أ_م)$ ؟

(لاحظ تمرين ٢,٣ - ٨) .

بند ٥,١ ٧ ﺃ افرض ان

$ق_ر(س) = \sum_{و=٠}^{ن} ﺃ_و س^و$ و ه (س) $= \sum_{ى=٠}^{م} ب_ى س^ى$ عنصرين في ح [س] بحيث ان $ق_ر(ر) = هـ(ر)$ لكل ر ∋ ج . اثبت ان $ق_ر(ر) - ﺃ. = هـ(ر) - ب.$ لكل ر ∋ ج .

وبعد ذلك ان

$$\sum_{و=١}^{ن} ﺃ_و ر^{و-١} = \sum_{ى=١}^{م} ب_ى ر^{ى-١}$$

لكل ر ∋ ج − {٠} . استعمل النظرية ٩ .

٩ لتكن $ق_ر$(س) ، هـ (س) ثابتتين . ضع

صه = {$ق_ر$(س) ى (س) + هـ (س) ك (س) : ى (س) ، ك (س) ∋ ل [س]}

برهن ان صه تكون مثالية في ل [س] . واستخدم نظرية ١٥ .

١١ ما هو القاسم المشترك الاعظم للعنصرين ى (س) و $ق_ر$(س) اذا كانت ى (س) لا تقسم $ق_ر$(س) ؟ استعمل تمرين ٩ .

١٣ ﺃ برهن النظرية اولا للزمرة الجزئية

$صه_ى$ = {س : س ∋ سه ، رتبة س احدى قوى د}

حيث د عدد اولي يقسم رتبة سه . (لاحظ تمرين ٢,٢ - ١٢ للتعريف بهذه الزمرة وامثلة) . يمكنك البدء باختيار ﺃ ∋ $صه_ى$ بحيث يكون للعنصر ﺃ رتبة قصوى . وبعدها ضع مولد محتمل للزمرة س مستخدماً مولدات الزمر الجزئية ص واستعمل التمرينين ٢,٢ ــ ١١ و ٢,٣ ــ ٨ ومناظرة عدية لاكمال البرهان .

بند ٥,٢ ٥ لاحظ تمرين ٣,٣ ــ ٩

٩ ﺃ استخدم نظرية ٢٣ . لاحظ تمرين ٥,١ ــ ١٢

بند ٥,٣ ٢ ب برهن بالاستقراء على الدرجة للحدودية هـ (س) ان هـ (س) لها عامل غير قابل للاختزال .

بند ٥,٤ ٥ لاحظ تمرين ٥,٢ ــ ٩ .

٧ حـ استخدم نظرية ٢٣

٧ د لاحظ تمرين ٥,٣ ــ ٢ أو تمرين ٥,١ ــ ١١

٨ لتكن ع مثالية بحيث ان

(ك (س)) ⊇ ع ⊇ ل [س] استعمل نظرية ١٥ .

ملحق ٥ ب ٧ لاحظ اولا الحالات ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

فاذا كانت المجموعة النونية {س١ ، س٢ ، س٣ مع ، --- ، سن}

طور عملية مماثلة لايجاد جميع المجموعات الجزئية من

[س١ ، س٢ ، ... ، س ر+١]

باستخدام المجموعات الجزئية من [س١ ، س٢ ، ... ، سر

ملحق ٥حـ ٤ لكل عدد صحيح ن ≥ ١ لتكن قن العبارة فن+ن-١

اثبت ان العبارات قن ، ن ∈ Z^+ تحقق كلا الجزئين من الفرض لمبدأ الاستقراء الاول .

ملحق ٦ب ١ لاحظ اولا بعض الامثلة .

ملحق ٦حـ ٤ ابدأ بالعدد د = ق. م. أ. (أ ، ب).

ملحق ٦و ٦ب اعمل برهاناً بالتناقض .

٨ب استخدم النظرية الاساسية في الحساب .

جدول بالمصطلحات والمفردات الرياضية وترجمتها

A	
Abelian group	زمرة تبديلية (ابيلية)
Alternating group	زمرة متناوبة
Associative Law	قانون التجميع
Associative operation	عملية تجميعية
Automorphism	اقتران محافظ ذاتي
Axiom	اولية ، مسلمة
B	
Binary operation	عملية ثنائية
C	
Cancellation	اختزال
Canonical homomorphism	اقتران محافظ قانوني
Cartesian Product	الضرب الديكارتي ، الجداء الديكارتي
Center of a group	مركز زمرة
Chain rule of inference	قاعدة السلسلة للاستدلال
Closure property	خاصية الانغلاق
Commutative	تبديلي

Commutator	متبادل
Commutator subgroup	زمرة المتبادلات الجزئية
Complex numbers	اعداد مركبة (معقدة)
Composite	تركيب
Congruence modulo n	تطابق في مضاعفات ن
Conjugate	مرافق
Containment	احتواء
Continuous function	اقتران متصل
Contrapositive	عكس الايجاب
Converse	عكس
Coset	مجموعة مرافقة
Counterexample	مثال عكسي
Cycle	دوره
Cyclic group	زمرة دورية
Cyclic subgroup generated by a	زمرة دورية جزئية متولدة من أ
D	
Degree of polynomial	درجة حدودية
Determinant	محـــدد
Dihedral group	زمرة زوجية
Direct product	جداء مباشر
Direct sum , external	جمع مباشر ، خارجي
Disjoint sets	مجموعات منفصلة
Distributive property	خاصية التوزيع
Divisibility	قابلية القسمة
Division algorithm	خوارزمية القسمة
Divisor	قاسم (عامل)
Domain	مجال
E	
Empty set	مجموعة خالية
Equivalence	تكافؤ

Euclidean algorithm	خوارزمية اقليدس
Even permutation	تبديلية زوجية
Factor	عامل
Factor group	زمرة خارجية
Field	حقل
Field of quotients	حقل الخوارج
Fully symmetric group	زمرة تماثل تامة
Function	اقتران
Fundamental rule of inference	قاعدة الاستدلال الاساسية
G	
General of cyclic subgroup	مولد زمرة دورية جزئية
Greatest common divisor	قاسم مشترك اعظم
Group	زمــرة
H	
Homomorphic image	صورة محافظة
Homomorphism	اقتران محافظ
I	
Ideal	مثالية
Idempotent element	عنصر الجمود
Identity	عنصر محايد
Image set	مجموعة الصورة
Implication	تضمين
Indeterminate	قيمة غير معينة
Index of a subgroup	دليل زمرة جزئية
Indirect proof	برهان غير مباشر
Induction	استقراء
Inequality	متباينة
Inner automorphism	اقتران محافظ ذاتي داخلي
Integer modulo n.	اعداد صحيحة في مضاعفات ن

Intergral domain	حلقة كاملة
Intersection	تقاطـع
Inverse of a function	عكس الاقتران
Inverse of group element	نظير لعنصر زمرة
Irreducible polynomial	حدودية غير قابلة للاختزال
Isomorphism	تشاكـل
K	
Kernel of a homomorphism	نواة اقتران محانظ
L	
Lattice diagram	مخطط سهمي
Leading coefficient of polynomial	المعامل الرئيسي للحدودية
Least common nultiple	المضاعف المشترك الاصغر
Least element of a set	العنصر الاصغر لمجموعة
Lemma	تمهيدية
Linear function	اقتران خطي
Logic	منطـق
Logic equivalence	تكافؤ منطقي
M	
Matrix	مصفوفـة
N	
Nontrivial ring	حلقة غير تافهة
Normalizer	مطيـع
Normal subgroup	زمرة جزئية طبيعية
O	
Odd permutation	تبديلة فردية
One - to - one function	اقتران واحد لواحد
Onto function	اقتران شامل
Operation table	جدول عملية
Order	رتبـــة
Order pair	زوج مرتب

Outer automorphism	اقتران محافظ ذاتي خارجي
P	
Partition	تجزئـة
Permutation	تبديلة
Permutation group	زمرة تبديلات
Polynomial	حدودية
Power of element	القوة لعنصر
Prime ideal	مثالية اولية
Prime integer	عدد اولي
Principle idea	مثالية رئيسية
Principle ideal ring	الحلقة المثالية الرئيسية
Principle of finite induction	مبدأ الاستقراء المنتهي
Proper subgroup	حلقة جزئية فعلا
Property defined binary operation	خاصية تعرف عملية ثنائية
Proposition	عرضية (عبارة ، قضية)
Q	
Qunadratic formula	معادلة (صيغة) تربيعية
Quaternions	الرباعيات
Quotient group	زمرة خارجة
Quotient ring	حلقة خارجة
R	
Range	مـدى
Rational number	عدد نسبي
Real number	عدد حقيقي
Reflexivity of arelation	انعكاسية لعلاقة
Remainder	البـاقي
Ring	حلقـة
Ring with identity	حلقة ذات عنصر محايد
Rule of seperation	قاعدة الفصل
S	
Singular matrix	مصفوفة منفردة

Subfield	حقل جزئي
Subgroub	زمرة جزئية
Subring	حلقة جزئية
Subset	مجموعة جزئية
Symmetries of square	تماثلات المربع
T	
Tautology	متكررة الصواب ، تحصيل حاصل
Theorem	نظرية
Trace of a matrix	اثر مصفوفة
Transitive	تعدي
Transpose	نقلـة
Trichotomy law	قانون التثليث
U	
Unequal	غير مساو
Union	اتحـاد
W	
Well - ordering principle	مبدأ الترتيب الحسن
Z	
Zero divisor	القاسم الصفري
Zero of a polynomial function	صفر اقتران حدودي
Zero polynomial	حدودية صفرية