

إدارة مخاطر الأعمال النماذج والتحليلات

English Edition Copyrights

حقوق الطبعة الإنجليزية

Business Risk Management - Models and Analysis

WILEY

This edition first published 2014

© 2014 John Wiley & Sons, Ltd

حقوق الطبعة العربية

عنوان الكتاب: إدارة مخاطر الأعمال
النماذج والتحليلات

تأليف: Edward J. Anderson

ترجمة: عاصم سيد عبد الفتاح

الطبعة الأولى

سنة النشر: 2018

الناشر: المجموعة العربية للتدريب والنشر
8 شارع أحمد فخري - مدينة نصر -
القاهرة - مصر



تليفون : 23490242 (00202)

فاكس : 23490419 (00202)

الموقع الإلكتروني www.arabgroup.net.eg

E-mail: info@arabgroup.net.eg

E-mail: elarabgroup@yahoo.com

حقوق النشر:

جميع الحقوق محفوظة للمجموعة العربية
للتدريب والنشر ولا يجوز نشر أي جزء من هذا
الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو
نقله على أي نحو أو بأية طريقة سواء كانت
إلكترونية أو ميكانيكية أو خلاف ذلك إلا
بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدما.

أندرسون، إدوارد ج.

إدارة مخاطر الأعمال: النماذج والتحليلات

/ تأليف: إدوارد ج. أندرسون، ترجمة: عاصم

سيد عبد الفتاح - القاهرة: المجموعة

العربية للتدريب والنشر، 2018 - ط 1

512 ص : 24x17 سم.

الترقيم الدولي : 978-977-722-107-8

1- إدارة الأزمات

2- إدارة المخاطر

أ - عبد الفتاح عاصم سيد (مترجم)

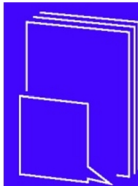
ب - العنوان

ديوي: 658,4056

رقم الإيداع : 2018/2543

تنويه هام:

إن مادة هذا الكتاب والأفكار المطروحة به
تعبّر فقط عن رأي المؤلف - ولا تعبّر بالضرورة
عن رأي الناشر الذي لا يتحمل أي مسؤولية
قانونية فيما يخص محتوى الكتاب أو عدم
وفائه باحتياجات القارئ أو أي نتائج مترتبة
على قراءة أو استخدام هذا الكتاب.



منحة الترجمة

Translation Grant

صندوق منحة الشارقة للترجمة

Sharjah Translation Grant Fund

إدارة مخاطر الأعمال النماذج والتحليلات

تأليف

Edward J. Anderson

جامعة سيدني - كلية إدارة الأعمال - أستراليا

ترجمة

عاصم سيد عبدالفتاح

الناشر

المجموعة العربية للتدريب والنشر



2018

لزوجتي، مارجري وأولادي:

كريستيان، توبي، فيليستي، ماركوس، اموجين، فيريتي وكليمنسي.

المحتويات

13	مقدمة
13	ما الذي يقدمه هذا الكتاب؟
15	ما هو هيكل هذا الكتاب؟
16	كيف يمكن الاستفادة من هذا الكتاب؟
19	الفصل الأول: ما هي إدارة المخاطر؟
21	1-1 مقدمة
25	2-1 تحديد وتوثيق المخاطر
29	3-1 المغالطات والفسخاخ في إدارة المخاطر
32	4-1 لماذا تختلف السلامة
34	5-1 إطار بازل
35	6-1 الحياد أو التحوط؟
37	7-1 التعلم من الكارثة
40	1-7-1 ما الخطأ الذي حدث؟
44	ملاحظات
45	المراجع
45	تمارين

49 الفصل الثاني: هيكل المخاطر

- 1-2 مقدمة للاحتتمالية والمخاطر 50
- 2-2 هيكل المخاطر 53
- 1-2-2 مخاطر تقاطعيه وموحدة 54
- 2-2-2 الحد الأقصى للمتغيرات العشوائية 57
- 3-2 المحافظ والتنوع 59
- 1-3-2 إضافة المتغيرات العشوائية 60
- 2-3-2 المحافظ ذات الحد الأدنى من التباين 65
- 3-3-2 نظرية المحفظة المثلى 69
- 4-3-2 عندما تتبع المخاطرة توزيع طبيعي 72
- 4-2 تأثير الارتباط 73
- 1-4-2 استخدام التباين في الجمع بين المتغيرات العشوائية 75
- 2-4-2 محفظة بحد أدنى من التباين مع التباين 78
- 3-4-2 الحد الأقصى للمتغيرات التي ترتبط ارتباطاً إيجابياً 80
- 4-4-2 متعدد المتغيرات الطبيعية 82
- 5-2 استخدام كوبولا (نظرية الاحتمالات) لنموذج التوزيعات متعدد المتغيرات 86
- 1-5-2 تفاصيل عن نموذج كوبولا 90
- ملاحظات 99
- المراجع 99
- تمارين 100

105 الفصل الثالث: قياس المخاطر

- 1-3 كيف يمكننا قياس المخاطر؟ 107
- 2-3 القيمة المعرضة للخطر 111
- 3-3 الجمع بين المخاطر ومقارنتها 119

123	4-3 القيمة المعرضة للخطر في الممارسة العملية
127	5-3 انتقادات القيمة المعرضة للخطر
132	6-3 ما وراء القيمة المعرضة للخطر
138	1-6-3 مزيد من التفاصيل عن العجز المتوقع
140	ملاحظات
141	مراجع
141	تمارين

145 الفصل الرابع: فهم شروط إحلال التوزيع

147	1-4 التوزيع ذو القيم القصوى (غير المحدود)
147	1-1-4 تعريف مؤشر المنحنى (شروط الإحلال)
150	2-1-4 توقع مؤشر المنحنى (الذيل)
154	3-1-4 المزيد من التفاصيل حول مؤشر الذيل (المنحنى)
156	2-4 تحديد التوزيع للقيم القصوى
165	1-2-4 المزيد من التفاصيل على التوزيعات القصوى ونظرية Fisher-Tippett
170	3-4 توزيعات زائدة
176	1-3-4 مزيد من التفاصيل حول تجاوزات الحدود
178	4-4 التقدير باستخدام نظرية القيمة القصوى
180	1-4-4 الخطوة الأولى اختيار حد لـ U
182	2-4-4 الخطوة الثانية تقدير المعلمات ϵ و B
184	3-4-4 الخطوة الثالثة. تقدير مقاييس المخاطر ذات الأهمية
186	ملاحظات
187	المراجع
188	تمارين

191	الفصل الخامس : اتخاذ القرارات وسط حالة من عدم اليقين
193	1-5 القرارات والحالات والنتائج
193	1-1-5 القرارات
194	2-1-5 الحالات
194	3-1-5 النتائج
196	4-1-5 الاحتمالات
197	5-1-5 القيم
198	2-5 نظرية المنفعة المتوقعة
198	1-2-5 تعظيم الربح المتوقع
201	2-2-5 المنفعة المتوقعة
206	3-2-5 لا بديل لنظرية المنفعة المتوقعة
211	4-2-5 دليل إثبات النظرية
215	2-2-5 ما هو شكل دالة المنفعة ؟
220	6-2-5 المنفعة المتوقعة عندما تكون الاحتمالات غير موضوعية
225	3-5 الهيمنة العشوائية والمخاطر
230	1-3-5 المزيد من التفاصيل حول الهيمنة العشوائية
235	4-5 قرارات المخاطرة للمدراء
236	1-4-5 المدراء والمساهمين
237	2-4-5 وجهة نظر شركة من نطاق واسع حول المخاطرة
239	3-4-5 مخاطر الإفلاس
241	ملاحظات
242	المراجع
243	تمارين

247 الفصل السادس : فهم سلوكيات المخاطر

248	1-6 لماذا تفشل نظرية القرار
249	1-1-6 معنى المنفعة
252	2-1-6 العقلانية المقيدة
253	3-1-6 الخيارات غير المتسقة في ظل عدم اليقين
257	4-1-6 مشاكل توسيع وظائف المنفعة
259	2-6 نظرية الاحتمالات
259	1-2-6 أسس نظرية القرار السلوكي
263	2-2-6 أوزان القرار والقيم الذاتية
269	3-6 نظرية الاحتمالات التراكمية
273	1-3-6 مزيد من التفاصيل حول نظرية الاحتمالات
276	2-3-6 تطبيق نظرية الاحتمالات
279	3-3-6 لماذا لا توفر نظرية الاحتمالات تنبؤات جيدة دائماً
281	4-6 اتخاذ القرارات في الحالات الغامضة
284	5-6 كيف يتعامل المديرون مع المخاطر
288	ملاحظات
289	المراجع
289	تمارين

293 الفصل السابع : تحسين النموذج العشوائي

294	1-7 مقدمة في تحسين النموذج العشوائي
295	1-1-7 مراجعة آلية تعظيم الاستفادة
300	2-1-7 المسائل ذات المرحلتين
307	3-1-7 الطلب في حالة الطلب العشوائي
312	2-7 اختيار السيناريو

314	1-2-7 كيف يمكن تنفيذ نموذج محاكاة مونت كارلو
319	2-2-7 بدائل لنموذج مونت كارلو
320	3-7 التعظيم العشوائي متعدد المراحل
323	1-3-7 الشروط غير قابلة للتوقع
329	4-7 القيمة عند شروط المخاطرة
333	ملاحظات
334	مراجع
334	تمارين

339 الفصل الثامن : التحسين القوي

340	1-8 غموض حقيقي: خلف الاحتمالات
342	2-8 تجنب الكارثة عند وجود الغموض
350	1-2-8 مزيد من التفاصيل حول إعادة صياغة الشرط
353	2-2-8 الميزانية في وجود عناصر غير معلومة
359	3-2-8 مزيد من التفاصيل حول الميزانية ذات العناصر الغامضة
363	3-8 تحسين قوي ومنهج قاعدة الحد الأقصى
368	1-3-8 التعظيم القوي من حيث التوزيع
377	ملاحظات
378	المراجع
378	تمارين

381 الفصل التاسع : الخيارات الحقيقية

382	1-9 مقدمة في الخيارات الحقيقية
384	2-9 حساب القيم مع الخيارات الحقيقية
391	1-2-9 اشتقاق صيغة الفائض باستخدام التوزيع الطبيعي

392	3-9 الجمع بين الخيارات الحقيقية وصافي القيمة الحالية
399	4-9 التعامل مع الخيارات المالية
406	5-9 استخدام محاكاة مونت كارلو لتقييم الخيارات الحقيقية
410	6-9 بعض المشاكل المحتملة عند استخدام الخيارات الحقيقية
412	ملاحظات
412	مراجع
413	تمارين

417 الفصل العاشر: مخاطر الائتمان

419	1-10 مقدمة عن مخاطر الائتمان
421	2-10 استخدام درجات الائتمان لمخاطر الائتمان
425	1-2-10 تحليل سلسلة ماركوف للافتراضات
431	3-10 الائتمان الاستهلاكي
433	1-3-10 الاحتمالية، الاحتمالات وتسجيل الاحتمالات
441	4-10 الانحدار اللوجستي
448	1-4-10 مزيد من التفاصيل عن الانحدار اللوجستي
450	2-4-10 إنشاء وثيقة التقييم
453	3-4-10 تطبيقات الدرجات الأخرى
454	ملاحظات
455	المراجع
456	تمارين

الملاحق

465	الملحق أ: دروس حول نظرية الاحتمالات.....
465	1-A أحداث عشوائية.....
469	2-A قواعد BAYES والاستقلالية.....
470	3-A المتغيرات العشوائية.....
474	4-A المتوسطات والمتغيرات.....
477	5-A مجموعات من المتغيرات العشوائية.....
482	6-A التوزيع الطبيعي ونظرية الحد المركزي.....
488	الملحق ب: إجابات على التمارين ذات الأرقام الزوجية.....

مُقَدِّمَةٌ

ما الذي يقدمه هذا الكتاب؟

يعمل المديرين في عالم مليء بالمخاطر وعدم اليقين، فهم بحاجة إلى إدارة المخاطر التي تواجههم. وفي هذا الكتاب أقدم عدد من المجالات المختلفة التي أعتقد بأنها مهمة في فهم المخاطر واتخاذ القرارات، عندما يحف المستقبل حالة من عدم اليقين، وهذا الكتاب يخاطب جميع الطلاب الراغبين في تعلم أشياء حول إدارة المخاطر في بيئة العمل.

أفضل طريقة لتحقيق أعلى مستوى من الفهم هو استخدام أدوات التحليل الكمي ونماذج الاحتمالات، وينصب اهتمام هذا الكتاب بشكل أساسي على الجانب الكمي، بالرغم من ذلك فإنه لا يعني التطرق إلى أدوات حسابية معقدة، حيث تم اختيار المادة بعناية لكي تناسب الذين يفتقدون خلفية رياضية قوية.

يخاطب هذا الكتاب الطلاب في مراحل ما قبل التخرج أو بعده. وقد يكون مناسب للطلاب الحاصلين على درجة الماجستير في إدارة الأعمال بمقرر اختياري في إدارة الأعمال، حيث تدور النصوص حول الطلاب العاملين في مجال الأعمال أكثر من الطلاب المتخصصين في المجال المالي. من الممكن استخدام هذا الكتاب في الدراسة الذاتية من قبل المديرين الراغبين في اكتساب خبرات في هذا المجال المهم.

إدارة المخاطرة هو مجال قد تتعارض فيه رؤية المدير مع نتائج التحليلات الدقيقة، حيث يستعرض القضايا المهمة بالنسبة للمديرين الذين يحتاجون إلى فهم كلاً من كيفية اتخاذ قرارات حكيمة في بيئة محفوفة بالمخاطر وكيفية استجابة الأشخاص للمخاطر.

هناك أنواع مختلفة من المخاطر، وهناك كتب موجودة بالفعل حول أنواع معينة من

المخاطر؛ على سبيل المثال، المخاطر البيئية، والمخاطر الهندسية (خاصة بالشركات العاملة في بيئة دولية)، أو مخاطر الصحة والسلامة.

هذه الكتب تعطي نصائح حول تقييم أنواع معينة من المخاطر، سواء كانت قضايا متعلقة بالتلوث أو سلامة الأغذية، وتخاطب الطلاب الذين سيعملون في صناعات بعينها، وينصب تركيزهم على فهم جوانب معينة من بيئة العمل، وكيفية ظهور هذه المخاطر؛ ومن ناحية أخرى، ينصب تركيزي على القرارات التي يجب على المديرين اتخاذها.

هذا الكتاب استثنائي في إيضاح المعالجة الشاملة لإدارة المخاطر من منظور كمي، في حين أنه يخاطب طلاب الأعمال العامة أكثر من المتخصصين في المجال المالي.

فهناك العديد من الموضوعات التي يناقشها في هذا الكتاب لا يمكن العثور عليها إلا في الدراسات الأكثر تقدماً أو في الأبحاث.

أردت الجمع بين مجموعة كبيرة من المواد في هذا الكتاب والتي تشمل الأساسيات وبعض النهج الحديثة، لذا فإنني أناقش الأفكار الاحتمالية الأساسية اللازمة لفهم مبدأ التنوع، وفي نفس الوقت أقوم بعرض مقدمة تتناول التوزيعات المحتملة من خلال نظرية القيمة القصوى، أقوم بمناقشة الأفكار الأساسية لنظرية المنفعة، كما أناقش باستفاضة نظرية الاحتمالات والتي توضح كيف يتخذ الناس القرارات بشأن المخاطر، أيضاً أقدم أساليب نظرية مونت كارلو التي توضح كيفية اتخاذ قرارات جيدة في بيئة محفوفة بالمخاطر، وأناقش الأفكار الحديثة حول التحسين الأمثل، والهدف من ذلك هو الجمع بين كل هذه الموضوعات، ولكن أمل أن يثبت هذا الكتاب أنه من الممكن تعلم هذه المواد معاً في وقت واحد، وأعتقد أن بعض الموضوعات المهمة التي اعتدنا أن ننظر إليها على أنها مجال اختصاصي التمويل تحتاج إلى أن تكون في متناول أولئك الذين يركزون بشكل عام على مجال الأعمال. ولهذا سوف نقوم بتغطية بعض مجالات المخاطر المالية الكلاسيكية، مثل إطار "بازل" الخاص بالسوق والائتمان والمخاطر التشغيلية واستخدام القيمة المعرضة للخطر بطريقة عملية وسجل الائتمان والخيارات الحقيقية. وستتطرق إلى كل هذه الموضوعات دون الحاجة إلى استخدام الرياضيات المالية الحديثة.

وقد تم تطوير الكتاب من المواد التعليمية المستخدمة في الدورات التعليمية في المرحلة الجامعية المتقدمة ودرجة الماجستير في جامعة سيدني كلية إدارة الأعمال على حد سواء، وهذه دورات تعليمية كاملة للفصل الدراسي (13 أسبوعاً)، ولكن تصميم الكتاب من شأنه أن يتيح مجموعة مختارة من الفصول ليتم تدريسها في دورة ذات فترة زمنية أقل.

ما هو هيكل هذا الكتاب؟

الفصل الأول هو فصل تمهيدي، يوضح جوهر إدارة المخاطر ويغطي إطار بقية هذا الكتاب. وتتناول الفصول الثلاثة التالية تحليل المخاطر. ويركز الفصل الثاني على بعض الأفكار الأساسية حول المخاطر التي تعتمد على الأحداث، والمخاطر التي تعتمد على القيم، حيث يقدم فكرة تنوع المخاطر ويبحث بالتفصيل كيف يمكن أن يفشل ذلك عندما يقام التنوع على محفظة، حيث تميل عناصر مختلفة إلى التحرك في الوقت نفسه. وهذا يأخذنا إلى مناقشة موجزة حول نظرية "كوبولاس" لعرض الاعتماد، ويتنقل الفصل الثالث من نظرية الفصل الثاني إلى الموضوع الأكثر عملية للقيمة المعرضة للخطر. فأى شخص يعمل في هذا المجال يحتاج إلى معرفته معرفة جيدة وكيف يتم حسابه؛ إلى جانب فهم نقاط القوة والضعف للقيمة المعرضة للخطر كمقياس للمخاطر، كما يناقش هذا الفصل أيضاً العجز المتوقع كبديل للقيمة المعرضة للخطر. وي طرح الفصل الرابع المشاكل الأساسية في إدارة المخاطر التي تنطوي على توزيع الاحتمالات، ويبين كيف يمكن استخدام نظرية القيمة القصوى لمساعدتنا في تقدير المخاطر من البيانات التي لا تحتوي العديد من القيم المتطرفة. وتتعلق الفصول الأربعة التالية باتخاذ القرارات في بيئة محفوفة بالمخاطر. الفكرة الأساسية هنا هي أننا بحاجة إلى التفكير ليس فقط في مقدار الربح أو الخسارة، ولكن في تأثير النتائج المختلفة علينا كأفراد أو كشركة. وهذا يقودنا إلى فكرة وظيفة المنفعة والتي نريد تحقيق أقصى قدر منها. ويتطرق الفصل الخامس لنظرية المنفعة المتوقعة، وهو وصف معياري قوي لكيفية اتخاذ القرارات. ومع ذلك، فقد أتضح أن صانعي القرار الفرديين لا يلتزمون بقواعد نظرية المنفعة المتوقعة. ويصف الفصل السادس الطريقة التي تتخذ بها الخيارات الحقيقية في بيئات محفوفة بالمخاطر من قبل أشخاص حقيقيين. ويمكن أن تكون نظرية التوقعات مؤشراً مفيداً لهذه القرارات، وأنا

سأقوم بوصف هذا بالتفصيل. ويتناول الفصل السابع صعوبات اتخاذ القرار السليم في ظل وجود مشاكل معقدة، لاسيما عندما يتطور الوضع بمرور الوقت. ونوضح كيف يمكن صياغة هذه المشاكل وحلها وشرح كيفية استخدام محاكاة "مونت كارلو" في إيجاد الحلول. واحدة من مشاكل استخدام هذه الأساليب أنها تتطلب وصفا كاملا لتوزيعات الاحتمال المعنية. ومن الناحية العملية، يمكن أن ينطوي ذلك على قدر أكبر من التخمين فضلاً عن المعرفة الفعلية. ويناقش الفصل الثامن نهجا حديثا يسمى "التحسين القوي"، للتغلب على هذه المشكلة عن طريق تحديد مجموعة من القيم الممكنة بدلا من التوزيع الكامل. ويتناول الفصل التاسع الموضوع المهم حول الخيارات الحقيقية، مما يحول التركيز من الأحداث السلبية إلى الأحداث الإيجابية. ومن المهم جدا للمديرين فهم مفهوم قيمة الخيار وكيف أن هذا يدل أن المزيد من التباين سيؤدي إلى قيمة أعلى للمشروع. ويعد هذا مثالا على أن المخاطر يمكن أن تكون جيدة. ويأتي الفصل الأخير لمناقشة إطار بازل وتمييزه بين ثلاثة أنواع مختلفة من المخاطر: مخاطر السوق ومخاطر الائتمان والمخاطر التشغيلية. بعد الفصل الأول ركزنا بشكل رئيسي على مخاطر السوق، ولكن في الفصل الأخير ناقش مخاطر الائتمان، فنحن ننظر إلى نهج سجل الائتمان على مستوى الشركة، مثل وكالات التصنيف الائتماني التي تتربع على رأسها وكالة ستاندرد آند بورز، وأيضا على مستوى المستهلك، حيث يمكن أن يحدد سجل الائتمان شروط القرض.

كيف يمكن الاستفادة من هذا الكتاب؟

من المسائل المهمة في تعلم إدارة المخاطر الكمية هو مقدار النضج الرياضي الذي ينبغي للمرء أن يفترضه، حيث يستهدف هذا الكتاب الطلاب الذين أخذوا دورة إحصائية تمهيدية أو دورة الأساليب الكمية ولكن ليس لديهم خلفية رياضية كبيرة، وقمت بإدراج ملحقاً يعرض نظرية الاحتمالات التي سيتم استخدامها. فكرة الوصول إلى وظيفة المنفعة من خلال توزيعات الاحتمال لحساب احتمال هو أمر أساسي جدا لإدارة المخاطر، وأيضا من المفيد الحصول على بعض من المعرفة عن حساب التفاضل والتكامل الأولي، ولكنني قللت من المواد المستخدمة في حساب التفاضل والتكامل وليست هناك حاجة لمعرفة مصفوفة الجبر. ومع ذلك، لا يتم تناول هذه المواد بطريقة سطحية. فيجب

على الطلاب أن يكونوا على دراية بالمفاهيم المتقدمة والحديثة، وأن هذه المواد كانت بمثابة تحدياً بالنسبة للطلاب الذين درسوا هذه المواد في جامعة سيدني. ولتسهيل استخدام هذا الكتاب الدراسي كدورة ابتدائية، فقد طرحت بعض الأقسام الفرعية التي يمكن حذفها من قبل أولئك الذين يرغبون في فهم الأفكار المهمة دون معرفة الكثير من التفاصيل النظرية. وتستخدم جداول بيانات برنامج إكسل دائماً لشرح المواد وبعض التمارين. ويمكن الاطلاع على جداول بيانات إكسل المذكورة في الموقع المرفق مع الكتاب:

http://www.wiley.com/go/business_risk_management

وفي هذا الكتاب نناقش أمثلة صغيرة وضعت في شركات وهمية، وغالباً ما تستند الأمثلة والتمارين حول مشاكل القرار التي تواجهها الشركات الوهمية. وأعتقد أن أفضل طريقة لتعرف هذا النوع من المواد هي قضاء بعض الوقت في العمل على حل هذه المشاكل (ومقاومة الرغبة في النظر سريعاً على الإجابة المتوفرة).

لقد وضعت عدداً كبيراً من الاختبارات في نهاية الفصل، وترد الإجابات على التمارين ذات الأرقام الزوجية في الملحق ب، وتتوفر الحلول الكاملة للمعلمين (انظر التعليمات الواردة في الموقع المرفق). واستخدمت إصدارات مبكرة من هذه المخطوطة في محاضراتي عن إدارة مخاطر الأعمال في جامعة سيدني في عامي 2011 و2012. وأود أن أشكر كل من تلقى هذه الدروس على تعليقاتهم وأسئلتهم التي ساعدتني في تحسين العرض، وأود أن أشكر هينغ شي بصفة خاصة والذي تمكن من كشف أكبر عدد من الأخطاء.

إدي أندرسون
سيدني

الفصل الأول

ما هي إدارة المخاطر؟

أكبر عملية احتيال على مر العصور

تكبد عدد من المصارف خسارة أموال ضخمة بسبب عمليات تداول خاصة بهم، ولكن بنك سوستيه جنرال كان على رأس تلك القائمة بعدما تعرض إلى أكبر خسارة له بسبب عملية احتيال. كان هذا الحدث في عام 2007 ولكن تم الكشف عنه في يناير 2008. ويعد بنك سوستيه جنرال من أكبر البنوك في أوروبا، وكان حجم عملية الاحتيال مفاجئاً، حيث قدر البنك خسارته بنحو 4.9 مليار يورو بسبب عكس عملية تم تنفيذها. ولكن مثل هذا الحدث أن يؤدي إلى انهيار البنوك الصغرى كما حدث لبارنجس في عام 1995، ولكن كبر حجم بنك سوستيه جنرال جعله صامداً أمام تلك الأزمة.

كان الموظف المسئول يدعى جيرومي "كيرفيل" الذي لم يتربح على الصعيد الشخصي (أو على الأقل من خلال الحافز الذي تم زيادته) يقوم بعمليات مقامرة ضخمة غير مصرح بها بأموال صاحب العمل. كانت تسير تلك العمليات كما هو مخطط لها لفترة قصيرة ولكن في النهاية انقلبت الأمور رأساً على عقب.

انتشرت الأنباء في الولايات المتحدة يوم 24 يناير 2008، عندما أفادت أنباء صحيفة

نيويورك تايمز بما يلي:

"تعرض بنك سوستيه جنرال واحد من أكبر البنوك في أوروبا إلى أزمة يوم الخميس بعد أن تم الكشف عن موظف محتمل قام بتنفيذ سلسلة من التداولات الوهمية كبدت الشركة أكثر من 7 مليار دولار، وصفت بأنها أكبر خسارة في تاريخ النظام المالي سببها متداول واحد.

قبل اكتشاف عملية الاحتيال كان بنك سوستيه جنرال يستعد للإعلان عن أرباح قبل خصم الضرائب لعام 2007 تُقدر بـ 5.5 مليار يورو وهو رقم كان يراه الرئيس التنفيذي لبنك سوستيه جنرال "بوتون" دليل على "قدرة الشركة على مواجهة أزمات خطيرة جدًا" ولكن بدلًا من ذلك وصف "بوتون" الذي قدم مرتبه لشهر يونيو مبادرة منه لتحمل المسؤولية حجم الخسارة بأنها "غير مسبوقة" دفعه إلى تحويل الـ 5.5 مليار يورو إلى رأس مال الشركة لتعزيز مواردها المالية لتأمين البنك ضد الانهيار.

وصرح بنك سوستيه جنرال بأنه لم يكن لديه أي مؤشر على الإطلاق بأن الموظف الذي قام بتلك العمليات - الذي انضم إلى الشركة في عام 2000 وعمل لعدة سنوات في المكتب الفرنسي لإدارة المخاطر قبل نقله إلى مكتب التداول دلتا في باريس - "قد قام بتنفيذ عمليات احتيال في عام 2007 و2008 تتخطى حدود سلطته" وأضاف البنك بأن "معرفته المتعمقة لإجراءات التحكم نتيجة لعمله السابق في المكتب الأوسط، مكنته من إخفاء تلك العمليات من خلال خطط وهمي بشكل مفصل."

وقال "بوتون" أنه عندما تم الكشف عن عملية الاحتيال، قال "انه من الضروري أن يتم إغلاق العملية الهائلة المخفية التي قام بها بأسرع ما يمكن". وكان من الممكن أن يكون التوقيت أسوأ، واضطر بنك سوستيه فيما بعد إلى عكس هذه العملية يوم الاثنين "تحت ظروف تتسم بتقلب عالي في السوق" على حد قول بوتون مشيرًا إلى أن أسواق الأسهم العالمية قد انحسرت وسط مخاوف متزايدة من حدوث ركود اقتصادي في الولايات المتحدة.

قصة مثل هذا حتما تثير التساؤل: كيف يمكن أن يحدث هذا؟ سوف نقدم المزيد من التفاصيل في وقت لاحق من هذا الفصل حول الخطأ الذي تسبب في ذلك.

ووقع سوستيه جنرال ضحية لاحتياال هائل، ولكن محامي الدفاع لدى "كيرفيل" قال: إن الشركة نفسها هي المسؤولة في المقام الأول أثناء محاكمته. ومهما كانت درجة اللوم التي تم توجيهها لبنك سوستيه جنرال إلا أنه دفع الثمن باهظًا.

من السهل أن تكون حكيماً بعد التجربة، ولكن إدارة مخاطر الأعمال الجيدة تدعونا إلى أن نكون حكماء مسبقاً. سوف نناقش الأشياء التي يمكن تعلمها من هذه القصة لاحقاً في هذا الفصل (والتي يجب تطبيقها في مجال أوسع بكثير من مجرد عالم البنوك والتداول).

1-1 مقدمة

تدور إدارة المخاطر في الأساس حول الإدارة الفعالة في عالم محفوف بالمخاطر ويشوبه حالة من عدم اليقين حيث وضعت البنوك وشركات الخدمات المالية بعض من الأفكار الرئيسة في مجال إدارة المخاطر، ولكن من الواضح أنه أمر حيوي لأي مدير. كل واحد منا يعمل في عالم يكون في المستقبل غير مؤكد بشكل يومي.

عندما ننظر إلى المستقبل نلاحظ أن هناك عدد لا يحصى من الاحتمالات: يمكن ألا يكون هناك فهماً حول هذا الملف في مجمله. ولهذا خطوتنا الأولى هي تبسيط ذلك بطريقة تسمح لنا بالاختيار وسط كل عدم اليقين.

تمثل مهمة إيجاد وسيلة لتبسيط وفهم ما قد يحمل المستقبل في جعبته تحدياً من الناحية المفهومية وباختلاف الأفراد ستختلف الطرق. ويتمثل أحد النهج في وضع أو تصور مجموعة من النواحي المستقبلية المختلفة، ولكل منها وصف لما يمكن أن يحدث. وبهذه الطريقة سوف ينتهي بنا المطاف بمجموعة من السيناريوهات المستقبلية المحتملة التي يمكن تصديقها جميعاً، ولكن لها احتمالات مختلفة.

على الرغم من أنه من المستحيل وصف كل احتمال في المستقبل بوضوح، ولكن وجود مجموعة من الاحتمالات على الأقل سوف تساعدنا في التخطيط.

من إحدى الطرق لوضع سيناريو هو التفكير في مجموعة من الأحداث المرتبطة: إذا حدث شيء فقد يتبعه شيء آخر. على سبيل المثال، إذا كان هناك إعصار في هونغ كونغ، فمن المحتمل أن تتأخر شحنة المواد الخام، وإذا حدث ذلك، سنحتاج إلى شراء ما يكفي للتعامل مع احتياجاتنا الفورية من مورد محلي، وهكذا. وهذا يخلق سلسلة سببية.

قد تكون السلسلة السببية، في الواقع، شبكة أكثر تعقيدا من الأحداث المرتبطة. ولكن في أي حال، غالبا ما يكون من المفيد تحديد حدث خطر معين داخل السلسلة وارد الحدوث أو لا. يمكننا النظر في كلاً من احتمالية الخطر الذي قد يطرأ وأيضاً العواقب والتكاليف المترتبة عليه. وفي مثال الإعصار في هونغ كونغ، علينا أن نضع في اعتبارنا احتمال الإعصار والتكاليف المترتبة على إيجاد مصدر مؤقت بديل.

وتتعلق إدارة المخاطر بالسعي إلى الحصول على أفضل النتائج، ولذلك فمن الضروري تحديد أحداث المخاطر المختلفة وفهم أسبابها وعواقبها. عادة ما يشير الخطر في هذا السياق إلى شيء له تأثير سلبي، حتى أن اهتمامنا بأسباب أحداث الخطر السلبي هو الحد من احتمالها، أو من الأفضل تجنبها تماماً. ينصب اهتمامنا حول عواقب الأحداث التي تمثل مخاطر حتى نتمكن من الاستعداد لها مسبقاً بطريقة تقلل من التكاليف إذا حدث خطر سلبي. وطبيعة هذه العملية تجعل من المهم التركيز على أهم المسارات السببية - التي يمكن أن نفكر فيها وذلك كعوامل لتحديد المخاطر.

وفي الوقت الذي ننظر فيه إلى الإجراءات المصممة خصيصاً للحد من المخاطر، قد نحتاج إلى التفكير في عواقب المخاطر المترتبة على القرارات الإدارية التي نتخذها. على سبيل المثال، قد نفكر في التعامل مع مورد في الخارج قادر على تسليم البضائع بسعر أقل ولكنه يستغرق فترة أطول، ولهذا يجب أن يتم إرسال الطلبات مبكراً، حينها نحن بحاجة إلى أن نسأل ما المخاطر الإضافية التي ينطوي عليها هذا التغيير.

في الفصول اللاحقة سنسلط الضوء بشكل أكبر على مشاكل اتخاذ قرارات صحيحة في بيئة محفوفة بالمخاطر.

وتتضمن إدارة المخاطر التخطيط والعمل قبل وقوع المخاطر. هذه طريقة استباقية بدلا من رد الفعل. نحن ليس بحاجة إلى الانتظار ورؤية ما سوف يحدث، على أمل أن نتمكن من إدارة طريقنا خلال العواقب؛ بدلا من ذلك نعمل مسبقا على ما يمكن أن يحدث وما عن العواقب المحتملة، ومن ثم نخطط ما يجب علينا القيام به للحد من احتمال وقوع المخاطر والتعامل معها إذا حدث.

في بعض الأحيان لا يكون خطر الحدث داخل نطاق سيطرتنا. على سبيل المثال، قد نتعامل مع التغيرات في أسعار الصرف أو التنظيم الحكومي - وعادة ما يسمى ذلك بمخاطر خارجية، وفي أحيان أخرى يمكننا السيطرة على أحداث المخاطر، مثل توفر الموظفين والإمدادات ومشاكل سير الأشغال. وتسمى هذه بالمخاطر الداخلية. نفس التمييز بين ما نستطيع وما لا نستطيع السيطرة عليه يترتب عليه عواقب، ففي بعض الأحيان يمكننا اتخاذ إجراءات للحد من العواقب السلبية (مثل تركيب الرشاشات لإطفاء النيران)، ولكن في أوقات أخرى هناك حدود لما يمكننا القيام به واختياراتنا لتأمين أنفسنا ضد الحدث مباشرة (على سبيل المثال اتخاذ إجراءات التأمين ضد الحريق).

سوف نستخدم مصطلح إدارة المخاطر للإشارة إلى العملية برمتها:

- فهم المخاطر: كلاً من العوامل وعواقبها.
- تقليل المخاطر: الحد من احتمالية وقوع المخاطر أو منعها وكذلك الحد من شدة تأثيرها.
- تقاسم المخاطر: استخدام التأمين أو إجراء مماثل بحيث يتم نقل بعض المخاطر إلى طرف آخر، أو مشاركتها بين طرفين في بعض الترتيبات التعاقدية.

إن إطار المخاطر الذي نناقشه يجعله يبدو كما لو أن كل المخاطر سيئة، ولكن هذا أمر مضلل من ناحيتين. أولا يمكننا استخدام نفس النهج للنظر في النتائج الجيدة وكذلك

السيئة منها. وهذا من شأنه أن يقودنا إلى محاولة فهم أهم السلاسل السببية، بهدف تعظيم احتمال وقوع حدث إيجابي، وتحقيق أقصى قدر من الفوائد إذا وقع هذا الحدث. ثانياً، علينا أن ندرك أن سلك مسار العمل الأكثر خطورة يكون هو الأكثر حكمة في نهاية المطاف. وتنقسم آراء المديرين حول المخاطر فمعظمهم يرون المخاطر كجزء من دور المدير، ولكن هناك ميل إلى الحكم على ما إذا كان القرار بشأن المخاطر جيداً أو سيئاً بمجرد النظر إلى النتائج. على الرغم من ندرة وضع هذه المصطلحات، يبدو أن الفكرة هي أنه من الجيد أن تحمل المخاطر شريطة ألا يحدث خطأ ما! وفي بعض الأحيان، قد يتحدث المديرين عن "المخاطر الخاضعة للمراقبة"، ويعنون بذلك مسار عمل قد تكون له عواقب سلبية، ولكن تكون هذه الاحتمالات ضئيلة، ويمكن تحمل حجم التكلفة.

يقول رايس وفرانكس (2010) في نقاشهما حول المشروع الذكي: "عندما يكون عدم اليقين يؤثر على المخاطر، فإنه لا يجعل الأعمال محفوفة بالمخاطر بالضرورة. ففي حقيقة الأمر، الخطر هو أمر حاسم في أي عمل - لا شيء يمكن أن يتحسن دون تغيير - والتغيير يتطلب المخاطر". نفس المعنى تحدث عنه أيضاً البروسي مارشال هيلموت فون مولتك في منتصف الثمانينات: "أولاً زن الاعتبارات، ثم خاطر."

وقد تتضمن مناقشتنا حتى الآن القدرة على إدراج جميع المخاطر ومناقشة احتمال وقوع حدث خطر فردي. ولكن في كثير من الأحيان لا توجد وسيلة لتحديد جميع النتائج المحتملة، هذا إلى جانب الدخول في حساب احتمالية حدوثها، فبعض الناس يستخدمون مصطلح عدم اليقين (بدلاً من المخاطر) للإشارة إلى هذه الفكرة. كان فرانك نايت اقتصادياً من بين أول من يميز بوضوح بين هذين المفهومين واستخدم كلمة "مخاطرة" للإشارة إلى الحالات التي تكون فيها الاحتمالات المعنية قابلة للحساب. في العديد من البيئات الحقيقية قد يكون هناك غياب تام للمعلومات حول بعض الأحداث المهمة المحتملة أو إدراكها. وقال وزير الدفاع الأميركي السابق دونالد رامسفيلد في كلمة ألقاها في مؤتمر صحفي في 12 فبراير 2002:

"هناك معرفة معروفة. وهذا يعني أن هذه أشياء نعرف بأننا نعرفها. وهناك معرفة غير معروفة. وهذا يعني أن هناك أشياء نعرفها الآن كنا لا نعرفها. ولكن هناك أيضاً مجهولات مجهولة. هذه أشياء لا نعرف أننا لا نعرفها".

سوف نتطرق في الفصل الثامن إلى كيفية التصرف في حالات عدم اليقين، عندما نحتاج إلى اتخاذ قرارات دون أن نكون قادرين على تعيين الاحتمالات لمختلف الأحداث.

2-1 تحديد وتوثيق المخاطر

أنشأت العديد من الشركات سجل رسمي للمخاطر لتوثيق المخاطر، ليكون لديهم سجلاً يتم تجميع المعلومات فيه، ودعم التقييم الدقيق لاحتمالات المخاطر والاستجابات المحتملة للمخاطر.

إن خطة إدارة المخاطر الموثقة جيداً لها عدد من المزايا. هناك أولاً فائدة في زيادة احتمالات إدارة المخاطر بشكل مناسب، مع تحديد المخاطر الرئيسة واتخاذ التدابير المناسبة. ثانياً، هناك ميزة في تحديد مسؤولية إدارة فئات معينة من المخاطر والاستجابة لها. فمن السهل جداً أن تجد نفسك في شركة يتهرب فيها شخص أو قسم ما من تحمل المسؤولية عند حدوث خطأ ما.

علاوة على ذلك، تسمح خطة إدارة المخاطر لأصحاب المصلحة تقبل نهج إدارة المخاطر، ويساعد على إثبات أن الشركة قد استعدت بالشكل المناسب في حال ساءت الأمور.

ويتم إنشاء سجل المخاطر من خلال ثلاث خطوات:

- 1- تحديد المخاطر المهمة. أي إنشاء قائمة للمخاطر المختلفة واردة الحدوث، كخطوة أولى ويمكن أن يكون اتباع عملية منهجية في تحديد المخاطر مفيداً في ذلك. ويعد التفكير في سياق النشاط نقطة بداية جيدة من حيث: الأهداف؛ التأثيرات الخارجية؛ المراحل التي تم المرور بها. أما الخطوة التالية هي فحص كل عنصر من من خلال لنشاط بالتساؤل ما الذي قد يحدث ومن شأنه تغيير العوامل الخارجية، أو التي يمكن أن تؤثر على تحقيق أي هدف منشود.

2- فهم أسباب أحداث المخاطر. المخاطر لا تحدث من فراغ. بعد أن تم تحديد مجموعة من المخاطر، فإن الخطوة التالية هي التوصل إلى كيفية السيطرة على العوامل التي تسببت في أحداث المخاطر. من أجل فهم ما يمكن القيام به لتجنب هذه المخاطر، يجب أولاً أن نطرح الأسئلة التالية، لكل خطر:

- كيف يمكن أن تقع هذه الأحداث؟
- ما مدى احتمال وقوع هذه الأحداث؟
- ما الضوابط الحالية لجعل هذا الخطر أقل احتمالاً؟
- ما الذي قد يبطل فعالية هذه الضوابط؟

3- تقييم عواقب أحداث المخاطر. الخطوة الأخيرة هي أن نفهم عواقب أحداث المخاطر. والهدف من ذلك هو إيجاد سبل للحد من الآثار السلبية. ويتطلب ذلك معرفة التفاصيل التالية لكل خطر:

- ما الأطراف التي قد تشارك أو تتأثر بتلك المخاطر؟ على سبيل المثال، هل يؤثر ذلك على العائد على رأس المال للمساهمين؟ هل يؤثر ذلك على ضمان الدفع للموردين؟ هل يؤثر ذلك على الضمان المقدم للدائنين؟ هل يؤثر ذلك على تأمين مستقبل التوظيف لموظفينا؟
- ما مدى ضرر هذه المخاطر؟
- ما الضوابط الحالية لجعل هذا الخطر أقل ضرراً؟
- ما الذي قد يبطل فعالية هذه الضوابط؟

في نهاية هذه العملية سيكون إنشاء سجل مخاطر أفضل. وسيشير ذلك، لكل خطر محدد كالتالي:

- أسبابه وآثاره.
- احتمالية حدوث هذا الخطر.
- الضوابط القائمة للتعامل مع هذا الخطر.
- تقييم العواقب.

ولأن سجل المخاطر سيتضمن عددا كبيرا من المخاطر المختلفة، فمن المهم التركيز على أهمها، فتحديد المستوى العام للخطر. سيوفر ذلك أداة تمكن الإدارة من التركيز على أهم أحداث المخاطر ومن ثم وضع خطة معالجة المخاطر للحد من مستوى المخاطر، والهدف من ذلك هو بناء نوع من تصنيف الأولوية.

وأهم المخاطر هي التي ينتج عنها عواقب وخيمة مرجح حدوثها. إذا نحن بحاجة إلى الجمع بين الاحتمالات والتأثير، ويبين الشكل 1-1 نوع الرسم البياني الشائع في التطبيق، ويتم تسمية مستويات المخاطر كالتالي (L) = منخفض، (M) = متوسط (H) = عالي (E) = مستوى قياسي.

ويسمى هذا النوع من الرسم البياني لمستويات الخطر أحيانا بالخريطة الحرارية، وغالبا يستخدم اللون الأحمر لمربعات المخاطر ذات المستويات القياسية، واللون البرتقالي للمخاطر العالية، واللون الأصفر للمخاطر المتوسطة، فهذا الرسم البياني يعد أداة شائعة ويوصى بها عند وضع معظم معايير إدارة المخاطر. وينبغي اعتباره على أنه خطوة أولى مهمة عند وضع خطة لإدارة المخاطر، قبل البدء في فحص المخاطر الأكثر شمولاً ولكن هناك بعض التحديات المهمة المتعلقة باستخدام هذا النهج.

الاحتمالية	محتمل جداً	H	H	E	E	E
	محتمل	M	H	H	E	E
	متوسط	L	M	H	E	E
	غير محتمل	L	L	M	H	E
	نادر	L	L	M	H	H
		كارثي عالي متوسط ضعيف ضئيل				
		حجم التأثير				

الشكل 1-1: حساب مستوى المخاطر من حيث الاحتمالية والتأثير

ترتبط مشكلة واحدة باستخدام مقياس يعتمد على كلمات مثل "محمتم" أو "نادر" في اختلاف تفسير هذه المصطلحات من شخص لآخر. بعض الناس سوف يستخدم مصطلح مثل "المحمتم" لاحتفالية وقوع الحدث بأكثر من 60٪ (وهذا هو المعنى المحدد الوارد في تقرير تغير المناخ للفريق الحكومي الدولي المعني بتغير المناخ). ولكن في سياق إدارة المخاطر، يبدو أن الاحتمالات الصغيرة جدا على مدار السنة تحمل المصطلح "محمتم".

إن استخدام مصطلحات غامضة في مقياس من هذا النوع سيجعل سوء الفهم مرجح. فنجد "دوغلاس هوبارد" يصف هذا الموقف عندما سأل مدير "ماذا يعني عندما تقول إن هذا الخطر" محتمل جدًا؟" وقيل أنه يعني أن نسبة حدوث ذلك تبلغ 20٪. تفاجأ شخص آخر في الغرفة بضعف الاحتمالية، ولكن المدير الأول رد قائلاً، "هذا حدث ذو تأثير عالي وأن النسبة 20٪ تعني احتمالية عالية لمثل هذا النوع من التأثير". ويصف هوبارد الوضع بأن الأمر كان أشبه "بغرفة مليئة بالأشخاص الذي ينظرون إلى بعضهم البعض كما لو أنهم أدركوا بعد عدة ورش عمل شاقة لتقييم المخاطر، أنهم كانوا يتحدثون لغات مختلفة طوال الوقت". توضح هذه القصة مدى أهمية أن يكون قصدك واضحًا تمامًا عند مناقشة الاحتمالات أو الاحتمالات في إدارة المخاطر.

ومن الواضح أن طريقة الخريطة الحرارية هي أداة تقريبية ومتاحة لتحديد أهم المخاطر، ولكن قيمتها العظمى تكمن في أنها توفر إطاراً مشتركاً يمكن مجموعة من الناس تجميع معارفهم في مكان واحد. يلاحظ أن نسبة نجاح أو فشل هذه المنهجية متساوية، وذلك لأنه لم يكن هناك أي اتفاق مسبق على ما تعنيه هذه المصطلحات. وتتمثل النقطة الحاسمة في وجود رؤية مشتركة للإطار الزمني أو الأفق الذي يتم من خلاله تقييم المخاطر. افترض أن هناك احتمال بنسبة 20٪ وقوع حدث خطر خلال العام المقبل، ولكن قامت مجموعة مكلفة بإدارة المخاطر باستخدام إطار زمني عشر سنوات. وهذا من شأنه بالتأكيد أن يسمح لهم لتقييم المخاطر بأنها محتملة جدًا، لأنه إذا كان كل عام مستقل عن الآخر ولا يوجد اختلاف في نسبة الاحتمالية، فإن احتمالية عدم وقوع الحدث خلال العشر سنوات القادمة هي $0.107 = 0.810$. لذلك احتمالية وقوع الحدث هي 90٪ على مدار العشر

سنوات.

وينطبق نفس المفهوم تقريباً على المصطلحات المستخدمة لتحديد حجم التأثير. من غير الممكن عملياً إعطاء الرقم الدقيق بالدولار المرتبط بالخسائر، كما أن هناك القليل من النقاط في محاولة نسب الاحتمالات إلى المخاطر ولكن من المفيد إجراء دراسة حول ما يعنيه مصطلح "ضئيل" أو "متوسط". على سبيل المثال، قد نبدأ بمحادثة حول تقييمنا لتأثير الحدث الذي أدى إلى انخفاض سعر سهم الشركة بنسبة 5٪ فجأة.

3-1 المغالطات والفخاخ في إدارة المخاطر

في هذا الفصل التمهيدي إعطاء بعض "التحذيرات" حول ممارسة إدارة المخاطر قد يكون مناسباً. فيما يلي الأفكار التي قد تكون مضللة أو خطيرة حول إدارة المخاطر.

بداية يجب أن نلاحظ أن المجتمع لا يتقبل المخاطر التي ليس لها سبب واضح بوجه عام - فعادة لا يوجد أحد مسؤول يمكن محاسبته في حالة وقوع خطأ ما. ولم يعد مقبولا القول أن "الأشياء السيئة تحدث" ونميل إلى نسب الأمور السيئة إلى شخص ما. ويرتبط ذلك بالكثير من أنشطة الإدارة التي يمكن وصفها بأنها "تغطي أفعال شخص ما". ولم يعد الخطر نفسه هو الشيء المهم، وإنما إظهار أن الإجراءات المناسبة قد اتخذت بهدف محو خطر المسؤولية القانونية.

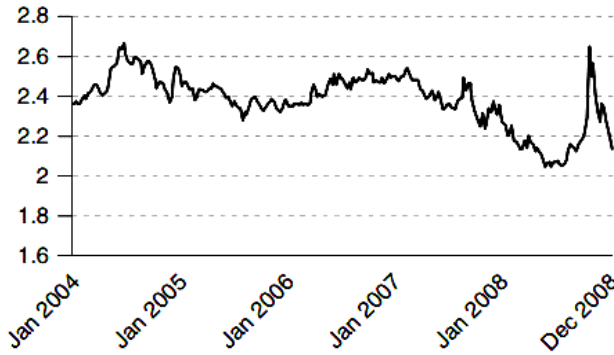
إن مناقشة سجلات المخاطر في القسم السابق توضح هذا الاختلاف بين ما تم اتخاذه للاستفادة حقاً، وبين ما تم اتخاذه لأسباب قانونية. أشار "مايكل باور" إلى هذه المشكلة بإيلاء اهتمام أكبر وأكبر على ما يمكن أن يسمى إدارة المخاطر الثانوية، بهدف تحريف المخاطر بعيداً عن منظمة أو أفرادها. قضاء الكثير من الوقت لضمان عدم التمكن من رفع دعوى قضائية ضد ما نفعله في محاولة للحد من المخاطر في أعمالنا يعد خطأ فادح. ولكن بالإضافة إلى الجانب الأخلاقي، فإن التركيز على إدارة المخاطر الثانوية يعني أننا لا نتساءل أبداً حول ما هو المستوى الملائم للمخاطر وقد ينتهي بنا المطاف بفقدان القدرة على اتخاذ القرارات الصحيحة بشأن المخاطر المناسبة: وهو الشرط الأساسي للمتخصصين في إدارة المخاطر.

وهناك فح آخر قد نفع فيه وهو الشعور بأن إدارة المخاطر الجيدة تتطلب فهماً قائماً على سيناريوهات جميع المخاطر التي قد تحدث. ففي كثير من الأحيان يكون هذا أمراً مستحيلاً، ومحاولة القيام بذلك سوف يصرف الانتباه عن الإدارة الفعالة للمخاطر الأساسية. وكما يقول "ستولز" (2009)، هناك طريقتان لتجنب هذا الفخ. أولاً، هناك استخدام أدوات إحصائية (ستتناولها بمزيد من التفصيل في الفصول اللاحقة).

"على عكس اعتقاد الكثير من الناس، من الممكن إدارة المخاطر دون تحديد نوع المخاطر بعينها وهذا يعني أن معظم ما تراه مخاطر غير معروفة يمكن في الواقع أن يتم تحديدها في نماذج إدارة المخاطر الإحصائية. فكر في كيفية قياس مخاطر سعر السهم... وطالما كان القلب والمتوسط التاريخي هما بديل جيد للسلوك السعري في المستقبل لعائدات الأسهم، فإنه يمكن تحديد خصائص المخاطر المرتبطة الأسهم من خلال تقدير التوزيع الإحصائي لعوائدها. إذاً لا تحتاج إلى معرفة أسباب نسبة العائد على السهم + 10٪ في فترة معينة و- 15٪ في وقت آخر.

والطريقة الثانية لتجنب الوقوع في مجموعة لا تنتهي من المخاطر غير المعروفة، هي الاعتراف بأن المخاطر المهمة هي تلك التي تحدث فرقا في قرارات الإدارة. فضعف احتمالات بعض المخاطر قد لا يجبر المدير أن يغير سلوكه حتى لو تم لفت انتباهه إلى هذا الخطر. مثل خطر التعرض إلى الاصطدام بنيزك - فإن احتمال وقوع هذا الخطر ضعيف جداً ولكنه لا يغير من قراراتنا.

ولا يمكننا إغفال استخدام المعلومات الإحصائية التاريخية لتوقع المستقبل. قد نجد شيئاً يتغير وفقاً لتوزيع احتمالي محدد لفترة طويلة من الوقت وقد نشهد تغير مفاجئ. هناك مثال على أهمية هذا الصدد الذي يقصده الكاتب يتضح في سعر صرف الدولار الاسترالي والجنيه الإسترليني، ويظهر الرسم البياني المبين في الشكل 1-2 ما حدث لسعر الصرف على مدار خمس سنوات من 2004 إلى 2008.



الشكل 2-1: سعر صرف الدولار الأسترالي أمام الجنيه الإسترليني 2004-2008

تظهر البيانات على الإطار الزمني الأسبوعي أن متوسط سعر صرف الدولار الأسترالي أمام الجنيه الإسترليني يبلغ 2.38 دولار أسترالي لكل جنيه إسترليني والانحراف المعياري هو 0.133. وبعد خمسة عشر شهراً، في مارس 2010 تحديداً، انخفض المعدل إلى 1.65 (واستمر في الانخفاض بعد ذلك). الآن، إذا اتبعت البيانات الأسبوعية معدل توزيعي طبيعي فإن فرصة وصول السعر إلى 1.65 (أكثر من خمسة انحرافات قياسية أقل من المتوسط) ستكون ضعيفة. ومن الواضح أن أسواق الصرف الأجنبي لا تسير بالطريقة التي يوضحها هذا التحليل الإحصائي السطحي. فبالنظر إلى فترة أطول والنظر أيضاً في أسعار صرف العملات الأجنبية الأخرى، يشير ذلك إلى أن التباين المنخفض نسبياً على مدى فترة السنوات الخمس التي اتخذت كقاعدة كان غير عادياً. في هذه الحالة انعكست تداعيات الأزمة المالية العالمية بسرعة على أسعار الصرف التي عكست مستويات تاريخية عالية للدولار الأسترالي ومستوى منخفض للجنيه الإسترليني.

قد نواجه مهمة تقدير مخاطر أحداث معينة على أساس البيانات الإحصائية، ولكن دون الاستفادة من نظرة بعيدة المدى ودون أي فرصة لمقارنة أي بيانات ذات صلة. في هذه الحالة كل ما قد يكون لدينا لتحديد اتجاهها هو مجموعة من البيانات مثل الشكل 2-1. إن فهم مدى صعوبة ذلك في سياق الصرف الأجنبي لتحديد الاحتمالات من نتائج معينة ينبغي أن يساعدنا على توخي الحذر عند مواجهة نفس النوع من المهمة في سياق مختلف.

4-1 لماذا تختلف السلامة

يدور هذا الكتاب حول إدارة مخاطر الأعمال ويستهدف أولئك الذين سيكون لديهم مسؤولية الإدارة. هناك فروق ذات دلالة إحصائية بين كيفية تصرفنا كمديرين وكيفية تصرفنا في أمور سلامتنا الشخصية. كل يوم يمر علينا بمراحل تقدمنا في العمر، وطوال حياة البالغين، نتخذ قرارات تنطوي على مخاطر الشخصية. مثل الطفل الذي يقرر محاولة القفز قبالة أرجوحة الملعب، يزن خطر التعرض لإصابة مقابل الإثارة المعنية. والسائق الذي يتخطى مركبة أبطأ على الطريق يزن مخاطر ظروف هذا الطريق مقابل الوقت أو الفشل. في هذا الصدد نكون جميعاً خبراء المخاطر؛ وهذا ما نفعله كل يوم.

ومن الواجب التفكير في السلامة ضمن الإطار الذي وضعناه من أحداث المخاطر المختلفة، لكل منها احتمال وتأثير. وبتابع هذا النهج يمكننا القول بأن رحلة سيارة ما إلى المحلات التجارية تنطوي على احتمال ضئيل وهو تصادم السيارة مع سائق ثمل، ولكن فوائد الرحلة تفوق بكثير المستوى العام للمخاطر. ولكن هناك سببان يثبتان أن التفكير بهذه الطريقة يمكن أن يكون مضللاً.

أولاً: نحن لسنا بحاجة إلى النظر إلى احتمال وقوع أمر سيء فقط، ولكن إلى عواقبه أيضاً. وإذا كنت قلقاً من اتجاه سائق للارتطام بي ستكون النتيجة هي فقدان حياتي. كيف يمكن موازنة ذلك مع عدم ملائمة استخدام سيارة؟ معظمنا سيكون غير قادر على تحديد قيمة فعلية لحياتنا، وبغض النظر عن ضعف احتمالية أن نلقي حتفنا في حادث سيارة، فإن التوازن يميل ضد قيادة السيارة إذا جعلنا قيمة حياتنا عالية بما فيه الكفاية. ولكننا ما زلنا نقود سيارتنا ونقوم بكل الأشياء الأخرى التي تحمل عنصراً من المخاطر الشخصية.

ثانياً: تتعلق بمعالجة قضايا السلامة بنفس الطريقة التي نتعامل بها مع المخاطر الأخرى، وهي أن احتمال وقوع حادث يتوقف بشكل كبير على درجة الحذر التي يتخذها الفرد المعني. يتم تحديد احتمالية الموت في حادث سيارة أثناء الذهاب إلى المحلات التجارية في الغالب على طريقة قيادتي للسيارة. هذا يجعل قرارتي لقيادة سيارة مختلف عن قرار السفر جواً، فبمجرد الصعود على متن الطائرة لن يكون لدي أي سيطرة على مستوى

المخاطر. ومع ذلك، هناك العديد من الحالات يقلل فيها الحذر من المخاطر على سلامتنا الشخصية. ومن المفارقات، كلما لاحظنا زيادة المخاطر، كلما كنا أكثر حذرًا. فمخاطر تسلق سلم قد تكون أكبر من مخاطر استخدام منشار إذا كنا نعتقد أن السلم آمن في الأساس، بينما هناك خطورة شديدة من استخدام المنشار.

وهناك طريقة أفضل للنظر في السلامة الشخصية هي التفكير في كل واحد منا على أن لديه "مقياس للمخاطر" يقيس مستوى الراحة الخاصة بنا مع مستويات مختلفة من المخاطر. في حياتنا اليومية نشعر أحيانًا مع بعض الأنشطة بعدم الارتياح للمخاطر التي نواجهها. يحدث هذا عندما يبدأ مقدار المخاطر في تجاوز إعدادات مقياس المخاطر الخاصة بنا، فالخطر الذي نتقبله يختلف وفقًا لشخصياتنا الخاصة، ولكن إذا كان مستوى الخطر أقل من مقياس الخطر الخاص بنا، فإن فرص اتجاهنا إلى زيادة المخاطر ضعيفة. لذلك، إذا كانت القيادة تبدو آمنة نسبيًا فإننا لن نضع حدودًا لقيادتنا إلى المناسبات عندما تكون الفوائد كبيرة بما فيه الكفاية. يشير "جون آدمز" إلى أن بعض الناس سوف تسعى إلى زيادة المخاطر حتى يعودوا إلى الإعدادات التي يفضلونها بمقياس المخاطر. لذلك، في مناقشته لموضوع كم حياة يمكن إنقاذها إذا تم حظر الدراجات النارية أشار "جون" إلى أنه "إذا اقترضنا أن جميع سائقي الدراجات النارية المحظورة سيجلسون في المنزل لاحتماء الشاي، فإنه من الممكن ببساطة طرح حوادث الدراجات النارية من إجمالي عدد حوادث الطرق السنوية. ولكن على الأقل سيقوم بعض سائقي الدراجات النارية المحبطين بشراء سيارات قديمة وقيادتها بطريقة تضخ الكثير من الأدرينالين في دمائهم مثل قيادتهم للدراجات النارية.

هذه قضايا مهمة وتحتاج إلى مواجهة من قبل الشركات التي تمثل فيها الصحة والسلامة مخاوف كبيرة، مثل شركات التأمين. إذا كان الهدف هو النظر من كثب لتقليل الحوادث في مكان العمل، فمن المهم إيلاء اهتمامًا لثقافة مكان العمل، والتي يمكن أن يكون لها دور في إعادة ضبط مقياس المخاطر للموظفين إلى مستويات منخفضة.

5-1 إطار بازل

تشير اتفاقيات بازل إلى التوصيات الصادرة عن لجنة بازل بشأن الإشراف المصرفي حول اللوائح المصرفية. أما النوع الثاني من هذه الاتفاقات أو ما تُعرف بـ (بازل 2) فقد تم نشرها لأول مرة في عام 2004، ويحدد ثلاثة أنواع مختلفة من المخاطر بالنسبة للبنوك، ولكن الإطار عام جداً ويمكن أن ينطبق على أي عمل.

مخاطر السوق: حيث تركز مخاطر السوق على أوجه عدم اليقين المتأصلة في أسعار السوق التي يمكن أن ترتفع أو تنخفض. وتنطبق مخاطر السوق على أي حالة من عدم اليقين عندما تعتمد القيمة على أسعار لا يمكن التنبؤ بها مسبقاً بشكل كامل. على سبيل المثال، قد نبني مصنع لاستخراج الذهب من مورد منخفض العائد، ولكن هناك خطر من أن سعر الذهب قد ينخفض، وعليه لن يدر المشروع ربحاً. وهذا مثال على مخاطر السلع. الأنواع الأخرى من مخاطر السوق هي مخاطر الأسهم (المتعلقة بأسعار الأسهم وتقلبها). مخاطر معدل الفائدة؛ ومخاطر العملات الأجنبية (المتعلقة بأسعار صرف العملات الأجنبية وتقلبها).

مخاطر الائتمان: يتعرض أي عمل في العديد من الترتيبات التعاقدية المختلفة. وإذا لم يفي الطرف المقابل ببنود العقد، يمكن استخدام الوسائل القانونية حينها لأخذ الحق. ولكن هذا بافتراض أن الطرف المقابل لا يزال لديه الأموال المتاحة. مخاطر الائتمان هي مخاطر قيام طرف مقابل بترك العمل. على سبيل المثال، قد يقدم نشاط تجاري منتجات إلى عملائه ولديهم شروط دفع مدتها 30 يوماً. إذا أخل العميل بالشروط المتفق عليها فقد لا يكون هناك طريقة للحصول على مجرد نسبة مئوية صغيرة مما هو مستحق. بطريقة أخرى، فإن العقد هو قرض مقدم إلى طرف آخر، ومخاطر الائتمان تتمثل في عدم السداد بسبب الإفلاس.

المخاطر التشغيلية: المخاطر التشغيلية تتمثل في حدوث خطأ ما، وتشمل هذه الفئة من المخاطر العديد من الأمثلة التي ناقشناها حتى الآن والتي ترتبط

بأحداث مخاطر سلبية. وتعرف المخاطر التشغيلية بأنها ناشئة عن الفشل في العمليات الداخلية أو الأشخاص أو الأنظمة أو بسبب أحداث خارجية.

وبما أننا مهتمون بمخاوف إدارة المخاطر بشكل عام، وليس فقط المخاطر بالنسبة للبنوك، فمن المفيد إضافة فئة رابعة للفئات الثلاثة التي ناقشناها بازل 2.

مخاطر الأعمال. مخاطر الأعمال تتعلق بتلك النقاط المتعلقة بالأعمال المقترحة المنطوية على قدر كبير من عدم اليقين. على سبيل المثال، قد تكون هناك مخاطر مرتبطة بالتغيرات في التكاليف، أو تغيرات في طلب العملاء، أو تغيرات في أمن توريد المواد الخام. مخاطر الأعمال هي مثل مخاطر السوق ولكنها لا تتعلق بالأسعار بشكل مباشر.

ظهرت مخاطر السوق ومخاطر الائتمان عمدا نتيجة للعمليات الحسابية. ولكن يمكننا توقع مخاطر السوق، وجعل الحسابات على أساس احتمال نتائج السوق المختلفة. وكثيرا ما تنطوي مخاطر الأعمال على هذه الخاصية: فعلى سبيل المثال، سيكون لدى معظم الشركات فكرة واضحة عما سيحدث في إطار سيناريوهات مختلفة لطلب العملاء. أما مخاطر الائتمان فهي شائعة الحدوث، وفي كثير من الحالات نقوم بتقييم مخاطر الائتمان بشكل واضح من خلال التصنيفات الائتمانية. وتختلف المخاطر التشغيلية: حيث لا يتم النظر إليها من ناحية العائد، فهي مخاطر متأصلة أو بمعنى آخر هي مخاطر غير متوقعة في أعمالنا.

قد يناسب وصفها تماما بـ "مجهول المجهول" هذا الوصف المقتبس من "رامسفيلد" الذي ذكرناه في وقت سابق. وعادة ما تنطوي المخاطر التشغيلية على احتمالية منخفضة وأحداث قوية، وهذا يجعل من الصعب التعامل معها.

6-1 الحياد أو التحوط؟

عند التعامل مع مخاطر السوق أو الأعمال التجارية غالبا ما يواجه المدير مخاطر بشكل مستمر، بحيث تتكرر بشكل يومي أو شهري. في هذه الحالة هناك حاجة لاتخاذ قرارات استراتيجية للتعامل مع هذه المخاطر.

مثال على المخاطر المتكررة؛ ما يحدث مع شركات الطيران التي تواجه عدم اليقين المستمر بشأن سعر الوقود (والتي يمكن أن يقابله جزئياً فرض رسوم إضافية للوقود فقط). والسؤال الذي يواجهه المديرون هو: متى نتجنب التعامل مع هذه المخاطر ومتى نلجأ للتأمين أو التحوط، ومتى يتم التعامل مع المخاطر لتقليلها؟

يكون التحوط المالي ممكناً عندما يمكننا شراء بعض الأدوات المالية للحد من مخاطر تحركات السوق. على سبيل المثال، شركة خدمات الطاقة قد تتداول في العقود الآجلة لأسعار الغاز. إذا كانت الشركة تشتري الغاز وتبيع الكهرباء، وتنجم مخاطر السوق إذا ارتفع سعر الغاز، وعدم قدرة الشركة على رفع سعر الكهرباء بنفس القدر، ومن خلال شراء والاحتفاظ بالعقود الآجلة للغاز، تستطيع الشركة الاستفادة من ارتفاع سعر الغاز: إذا كانت الشركة تستطيع معرفة مقدار الغاز الذي سيتم شرائه، وسيكون التأثير الحقيقي عند تثبيت سعر الغاز لفترة العقد، وبهذا يتم القضاء على مخاطر السوق. حتى إذا كانت الشركة لا يمكنها التنبؤ بالضبط بكمية الغاز المستخدم، سوف تكون فرصة التحوط قائمة ضد الخسائر المحتملة من ارتفاع أسعار الغاز.

في بعض الأحيان يكون لدينا تحوط متعلق بالعملية التشغيلية تحقق نفس أهداف التحوط المالي من خلال الطريقة التي يتم بها تنظيم عملياتنا. على سبيل المثال، قد نشعر بالقلق إزاء مخاطر العملة إذا كانت تكاليفنا بالدولار الأمريكي في الأساس ولكن مبيعاتنا في منطقة اليورو، وبالتالي، إذا انخفضت قيمة اليورو بشكل حاد مقارنة بالدولار الأمريكي، فقد نجد أن دخلنا غير كاف لتغطية نفقات التصنيع لدينا على الرغم من أن مبيعاتنا لا تزال مرتفعة. ويكون من ضمن الخيارات هو شراء عقد مستقبلي بناء على سعر الصرف. ومع ذلك، يمكن تحقيق "تحوط تشغيلي" آخر عن طريق نقل بعض نشاطنا التصنيعي إلى دولة في منطقة اليورو، بحيث يتم تحويل جزء من تكاليفنا بنفس العملة التي نبيع بها.

وفي حالة الاحتفاظ بالمخاطر، تقرر الشركة عمداً قبول التغير في الربح الذي ينتج عن تلك المخاطر. وقد يكون هذا الخيار الأفضل عندما تكون لدى الشركة موارد مالية كافية، وعندما يكون لها جوانب من عملياتها من شأنها أن تحد من عواقب المخاطر. على

سبيل المثال، قد تقرر شركة خدمات الطاقة القابضة التي تحدد سعر الكهرباء لعملائها عدم التحوط الكامل للمخاطر المرتبطة بالارتفاع في تكلفة الغاز إذا كانت هناك فرص لتعديل سعر الكهرباء التي تبيعها بشكل كبير لتغطية تكاليف زيادة التوليد.

7-1 التعلم من الكارثة

بدأنا هذا الفصل مع قصة احتيال جري أومي "كيرفيل" في بنك سوستيه جنرال، والتي تندرج تحت فئة المخاطر التشغيلية. نلقي الضوء مرة أخرى على هذه القصة بهدف التعلم منها، لفهم ما حدث سنوضح بعض المعلومات الأساسية عن عالم تداول البنوك.

أي بنك أو شركة تتداول في الأسواق المالية، عادة ما تقسم أنشطتها إلى ثلاثة فئات. أولاً المتداولون أنفسهم: هؤلاء هم الناس الذين يقررون نوعية وتوقيت الصفقة (المكتب الأمامي). ثانياً، منطقة إدارة المخاطر المسؤولة عن رصد مستوى نشاط المتداولين وقياس نموذج المخاطر الخ (المكتب الأوسط)، وأخيراً منطقة مسؤولة عن تنفيذ الصفقات، والتعامل مع عمليات السداد والتعامل مع أوراق العمل (المكتب الخلفي). ويتم تنظيم أنشطة التداول في مكاتب: مجموعات من المتداولين يعملون مع نوع معين من الأصول. وحدثت قصة "كيرفيل" مكتب دلتا وان في باريس لدى بنك سوستيه جنرال. "دلتا واحد" تشير في عملية التداول إلى الشراء والبيع المباشر للمشتقات المالية الخالية من أي عقود خيار. وعقود الخيار تعني المشتقات التي تعطي "الحق ولكن ليس الفرصة" لإجراء عملية شراء أو بيع. تداول عقود الخيار يعطي العائد الذي يعتمد على قيمة الأوراق المالية الأساسية (المزيد من التوضيح في الفصل التاسع)، ولكن طريقة تداول "دلتا واحد" أبسط من هذا - فهي عوائد تعتمد مباشرة على ما يحدث للأوراق المالية محل العقد فقط. في الواقع، الدلتا كمصطلح تشير إلى المشتقة الأولى من العائد على الأوراق المالية الأساسية، و"دلتا واحد" هو الاختزال لمصطلح "دلتا يساوي واحد"، مما يعني أن هذه العلاقة المباشرة.

على سبيل المثال، قد يتم التداول بشراء عقد آجل في مؤشر داكس، وهو المؤشر الرئيسي لسوق الأوراق المالية الألمانية، ويضم أكبر 30 شركة ألمانية وأكثرها تداولاً.

العقود الآجلة يمكن شراؤها وفقاً لتواريخ مختلفة (نهاية كل ربع سنة)، وهي في الأساس توقع لمستوى المؤشر في ذلك التاريخ. يمكن للمتداول أيضاً شراء العقود الآجلة لسهم بمفرده والتي يتكون منها المؤشر، وإنشاء محفظة من هذه العقود الآجلة وفقاً لأوزانها في مؤشر داكس، قد يقوم أحدهم بتوقع السلوك السعري المستقبلي للمؤشر ككل. ومع ذلك، مع مرور الوقت يتم تحديث الأوزان بمؤشر داكس (بطريقة تلقائية استناداً إلى القيمة السوقية)، والاحتفاظ بمحفظة من العقود الآجلة على الأسهم الفردية من شأنه أن يؤدي إلى اختلاف ضئيل عن العقود الآجلة لداكس خلال فترة معينة من الوقت.

وكان الهدف الأساسي من مكتب دلتا وإن للتداول هو تنفيذ الصفقات لعملاء البنك، ولكن حول هذا الغرض نمت كمية كبيرة من عمليات التداول التابعة له، حيث اتجه البنك للكسب لحسابه الخاص. يتبع المتداول نهج واحد وهو المراهنة على تقارب السعيرين (من وجهة نظر المتداول) ويجب أن تكون الأسعار أقرب مما هي عليه، فإذا كان السعر الحالي للمحفظة A أكبر من المحفظة B وسوف يتقارب السعيرين معاً قبل مرور فترة طويلة، سيكون هناك فرصة للربح من خلال شراء B وبيع A، ثم عكس هذه الصفقة عندما تقترب الأسعار معاً. وبما أن كلا المحفظتين يتكونان من المشتقات، فإن "الشراء" و"البيع" هنا لا يحتاج إلى إشراك ملكية الأوراق المالية الأساسية، والعقود المالية هنا تعتمد فقط على أسعارها. هذا النوع من التداول، الذي يعتزم الاستفادة من سوء التسعير للسوق، يسمى بتجارة المراجعة، وبما أن الصفقات يقابلها صفقات أخرى في الاتجاه المعاكس فإن المخاطرة تكون منخفضة جداً.

يتم الاستفادة من هذه التداولات من خلال بعض الفرص الصغيرة جداً (من حيث النسبة المئوية) وبالتالي، من أجل جعلها جذيرة بالاهتمام، فإنها تتطلب مبالغ كبيرة من المال للمشاركة. كان من المفترض أن يقوم "كيرفيل" بعمليات تشبه المراجعة، بالبحث عن الاختلافات الضئيلة في سعر العقود الآجلة للأسهم. من الناحية النظرية هذا يعني أن جانب واحد من الصفقات يقابلها صفقات أخرى معاكسة. لكن "كيرفيل" كان يقوم بوضع صفقات وهمية: ويبلغ عن صفقات غير موجودة في الحقيقة. مما مكّنه من الاحتفاظ بنصف

الصفقات المجمعة وليس الأخرى. وكان هدف الصفقات الوهمية هو تغيير فرصة المراجعة بقيمة اسمية كبيرة بمخاطرة قليلة نسبيا في رهان (كبير جدا) على حركة سعر العقود الآجلة.

عندما بدأ "كيرفيل" في مثل هذا النوع من العمليات في عام 2006 سارت الأمور على ما يرام وكانت الرهانات على صواب واستفاد البنك منها، حيث يُسمح للمتداولين بإجراء بعض المضاربات من هذا النوع، إلا أن هناك حدودا صارمة لمقدار المخاطر التي يتعرضون لها: خرق "كيرفيل" هذه الحدود مرارا وتكرارا (وبشكل مذهل). مع مرور الوقت أصبحت المبالغ التي تنطوي عليها هذه المضاربات أكبر وأكبر، وما زالت الأمور تسير على ما يرام. خلال عام 2007 كانت هناك بعض الصعود والهبوط بطريقة أظهرت هذه الرهانات، ولكن بحلول نهاية العام كان "كيرفيل" متقدما بكثير. وقد ادعى أن تكهناته حققت 1.5 مليار يورو أرباحا لشركة سوستيه جنرال خلال عام 2007. ولم يتربح من هذه الأموال بطريقة شخصية، وقال انه كان قد استفاد فقط من خلال حصوله على مكافأة كبيرة في ذلك العام.

في يناير 2008، تعثر حظه الجيد عندما أخطأت الرهانات الكبيرة بشكل فادح. واكتشف كبار المديرين في البنك أخيرا ما حدث في 18 يناير 2008. وكانت هناك صفقات كبيرة مفتوحة ولم يكن أمام شركة سوستيه جنرال خيار سوى إغلاق تلك الصفقات وتحمل الخسائر، أيا كانت. كان التوقيت سيئا وهبط السوق بأي حال من الأحوال. وكانت النتيجة النهائية أن شركة سوستيه جنرال خسرت 4.9 مليار يورو. تم بث الأخبار في 24 يناير. كان من المؤكد أن مصرفا أصغر حجما لكان أعلن إفلاسه بسبب هذه الخسائر الضخمة بالنظر إلى حجم تلك الأموال، ولكن شركة سوستيه جنرال كبيرة جدا وسارت بعض من عملياتها على ما يرام.

ومع ذلك، اضطر البنك إلى إضافة 5.5 مليار يورو لرأس المال الجديد نتيجة للخسائر.

الجدير بالذكر أن بنك مثل سوستيه جنرال لديه آليات متطورة لضمان عدم وقوعه في مثل هذا المأزق. حيث يتم فحص المواقف المعلقة بشكل يومي، ولكن كان كيرفيل يعمل

إلى وقت متأخر من الليل، وكان يضع صفقات وهمية دون مشاركة أطراف مقابلة، وبهذه الطريقة ضمن أن صفقاته المفتوحة تبدو كما لو كانت متحولة. وكشفت التحقيقات بعد الحدث وجود أكثر من ألف صفقة وهمية. ليس هناك شك في أنه كان ينبغي الانتباه إليها.

وكان "كيرفيل" يبلغ من العمر 31 عاما عندما اندلعت الفضيحة، قد تم محاكمته في يونيو 2010. واعترف بما فعله في وضع الصفقات وهمية، لكنه قال إن رؤسائه كانوا على دراية بما كان يفعل، وتعمدوا صرف انتباههم عنها. وقال: "لم اخترع هذه التقنيات - آخرون فعلوا ذلك أيضا." وأخيرا، في أكتوبر 2010، ثبت أن "كيرفيل" مذنب بانتهاك الثقة، وتزوير الوثائق وإدخال بيانات مضللة في أجهزة الكمبيوتر. وحكم عليه بالسجن لمدة ثلاث سنوات وأمر بسداد خسائر شركة سوستيه جنرال كاملة والتي تقدر بـ 4.9 مليار يورو. وحمل القاضي "كيرفيل" مسؤولية الخسارة بمفرده وقال إن أخطائه هددت كيان البنك. وتم استئناف في أكتوبر 2012 وتم تأييد الحكم الأصلي. بالطبع، لا يستطيع "كيرفيل" سداد هذا المبلغ الهائل، ولكن محامين سوستيه جنرال قالوا أنهم يقاضوه في حال حقق أرباح من خلال بيع قصته.

1-7-1 ما الخطأ الذي حدث؟

ليس هناك شك في أن ما حدث في سوستيه جنرال سببه مجموعة من العوامل. أولها "كيرفيل" نفسه، الذي كان على دراية بممارسات إدارة المخاطر في المكتب الأوسط من خلال العمل سابقا في هذا المجال. ويبدو أنه احتفظ ببعض آليات الوصول إلى هذا، حتى عندما أصبح متداول. هذا هو بالضبط ما حدث مع "نيك ليسون" في بارينغز - مثال آخر مشهور لمتداول تسبب في خسائر هائلة في أحد البنوك. كان عالم "كيرفيل" يتمثل في غرفة التداول، وعلى مدى عام أو ما يقرب من ذلك، انخرط في رهانات أكبر وأكبر مع أموال الشركة. لا يزال هناك غموض حول ما قد يكون الدافع له. ولم يقدم في ندائه تفسيراً حقيقياً، ووصف ببساطة تصرفاته بأنها "غبية"، لكنه أكد أنه كان شخصا يحاول "القيام بعمله قدر الإمكان، لكسب المال للبنك".

وكان العامل الثاني هو الإشراف المباشر على مكتب دلتا وان. وسواء وافق أحدهم

على ادعاءات "كيرفيل" أم لا، فإن زعماءه كانوا يعرفون ما يجري، فهم بالتأكيد يجب أن يكونوا قد عرفوا شيئاً وفعلوا شيئاً حياله. ومن الصعب عند هذه النقطة تحديد ما هو الإهمال وما هو التأييد ضمنى. "إريك كوردل"، وهو المسؤول المباشر لكرفيل، تم تعيينه رئيس مكتب دلتا وان في أبريل 2007، وليس لديه أي خبرة تجارية. وقد أقيـل بسبب عدم الكفاءة فور اكتشافه. ويدعي أن فريقه كان في هذه الفترة يعاني من نقص شديد في الموظفين ولم يكن لديه الوقت الكافي للنظر عن كثب في أنشطة أفراد المتداولين.

ويتمثل العامل الثالث المهم في النهج العام لإدارة المخاطر الذي يتم اتخاذه في شركة سوستيه جنرال في هذه الفترة. فمن السهل أن تتخذ موقفاً حيادي لخطر الخسائر عندما يبدو أن كل شيء يسير على ما يرام. خلال عام 2007 كانت هناك زيادة هائلة في نشاط التداول على مكتب دلتا وان، وتم تحقيق أرباح كبيرة. وكانت التقارير الداخلية التي أعدتها الشركة بعد الفضيحة واضحة أن هناك أوجه قصور رئيسة في رصد المخاطر من جانب المكتب. وقال تقرير "رايسواتر هوسكوبيرز" عن الاحتيال أن: "الزيادة في حجم تداول دلتا وان والأرباح كان مصحوباً بظهور ممارسات غير مصرح بها، مع تجاوز الحدود ونتج عنها انتقال سلس بين المتداولين". وعلاوة على ذلك، كان هناك نقص وعي بخطر الغش.

في الواقع كانت هناك العديد من الأشياء التي ينبغي أن تكون لفتت نظر الشركة إلى المشكلة:

- تم تحقيق أرباح هائلة من مكتب "كيرفيل" في عام 2007.
- كان هناك أسئلة طرحت حول صفقات "كيرفيل" من قبل يوركس وهي منصة تبادل المشتقات الألمانية، الذين كانوا قلقين حول الصفقات الكبيرة التي وضعها "كيرفيل".
- كان هناك سيولة نقدية عالية مرتبطة بصفقات كرفيل.
- لم يأخذ "كيرفيل" أجازة لأكثر من بضعة أيام في كل مرة - على الرغم من سياسة إنفاذ الإجازة السنوية.
- كان هناك خرق لحد مخاطر السوق من خلال صفقة واحدة وضعها "كيرفيل".

ويمكننا أن نستخلص بعض الدروس العامة المهمة من هذه الحالة. أعددت قائمة بخمسة دروس كالتالي:

1- ثقافة الشركة أكثر أهمية من الإجراءات. وقد أعطت الثقافة التنظيمية في سوستيه جنرال الأسبقية لجانب جني الأموال (التداول) على جانب إدارة المخاطر (المكتب الأوسط)، وهذا أمر شائع جدا. وسواء كانت الإجراءات المتبعة أم لا ستتبع بعناية ستعتمد دائما على العوامل الثقافية، وأن ثقافة المخاطر الخاطئة هي أحد أكبر العوامل المؤدية إلى اتخاذ الشركات قرارات كارثية حقا.

2- الأوقات الجيدة تولد السلوك الخطير. في قضية سوستيه جنرال، دور "كيرفيل" في تلك العملية وسيره على ما يرام جعل التراخ سهلا تجاه العمليات التي تم تنفيذها. قد يكون صحيحا أن عكس هذا البيان صحيح أيضا: في الأوقات السيئة تحمّل المخاطر قد يبدو الطريق الوحيد، ولكن سواء كان ذلك حكيمًا أو لا فهو على الأقل خيار واعٍ، ويبدو أن المخاطر التي يدخلها المديرون دون وعي تولد أكبر الكوارث.

3- غالبا ما تفشل الشركات في التعلم من التجربة. مثال واحد يحدث عندما يتجاهل المديرون المخاطر في شركات مماثلة، مثلما نرى في التشابه الغريب بين سوستيه جنرال وبارينغز. ولكن يمكن أيضا أن يكون من الغريب أن نتعلم من الأخطاء الخاصة بنا من أوضاع الشركة. وكثيرا ما يتم العثور على كبش الفداء للمضي قدما، دون إلقاء نظرة فاحصة على ما حدث، ولماذا التغاضي عن الأخطاء هو شيء صعب القيام به، وسوف يكون من الصعب النظر إليها على أنها تمثل تهديد، وربما هذا هو السبب في تحليل دقيق للنتائج السيئة وغالبا ما يتم التغاضي عنها.

4- يتعين اتخاذ إجراءات رقابية. وفي العديد من المناسبات تم النظر في المخاطر ووضع ضوابط لتجنبها. تحدث المشكلة عندما يتم تجاهل عناصر التحكم الموجودة في المكان العملي. كان لدى سوستيه جنرال سياسة واضحة بشأن أخذ الإجازة (كما هو الحال في الصناعة) ولكنها فشلت في تطبيقها.

يجب أن يكون هناك إشراف إداري كاف. ويشكل عدم كفاية الإشراف عنصراً رئيسياً في سوء إدارة المخاطر التشغيلية. في قضية سوستيه جنرال، كان مشرف "كيرفيل" لا يتمتع بالخبرة وفشل في القيام بعمله. وبشكل عام، سوف تتصاعد المخاطر عندما يستطيع شخص واحد أو مجموعة صغيرة اتخاذ القرارات التي تنتهي بخسائر كبيرة، إما عن طريق الاحتيال أو الخطأ البسيط. ويتعين على الشركات أن تكون لديها أنظمة تتجنب ذلك من خلال الإشراف الفعال على الأفراد من قبل المديرين الذين يحتاجون إلى الإشراف على موظفيهم بشكل وثيق بما فيه الكفاية لضمان قيام الأفراد بما يفترض القيام به.

يهتم هذا الكتاب في الغالب بالأدوات الكمية التي يمكن للمديرين استخدامها للتعامل مع المخاطر وعدم اليقين. فمن المستحيل أن تضع في كتاب واحد كل شيء يحتاج المدير معرفته عن المخاطر. في الواقع، فإن أهم جوانب إدارة المخاطر في الممارسة العملية هي الأشياء التي يتعلمها المديرين التعلم من خلال المرور بتجربة أفضل مما تعلموه في درجة الماجستير في إدارة الأعمال. ولكن الانتباه إلى الملاحظات الرئيسة الخمسة المذكورة سابقاً سيكون مفيداً لكل من يتعامل مع إدارة المخاطر، وقد ينتهي الأمر بأهمية أكثر من جميع الطرق الكمية التي سنعرضها لاحقاً في هذا الكتاب.

ومن الصعب المبالغة في تقدير أهمية الثقافة داخل المنظمة: وهذا سيحدد كيفية النظر في المخاطر بدقة؛ وكيف يفكر المديرين في المخاطر؛ وما إذا كانت سياسات المخاطر تتبع الممارسة العملية أم لا. فالثقافة التي لا تخيفها المخاطر (حيث يكون الموظفون مستعدون لمناقشة المخاطر بشكل علني والنظر في المستوى المناسب من المخاطر). من المرجح أن يتجنبوا الكوارث أكثر من ثقافة جنون العظمة حول المخاطر (حيث يشعر الموظفون بعدم الارتياح في الاعتراف بأن المخاطر لم يتم القضاء عليها تماماً). ويبدو أننا عندما نخشى المخاطرة، من المرجح أن نتجاهلها، أو نخفيها، بدلاً من اتخاذ خطوات لتقليلها.

ملاحظات

هذا الفصل مختلف نوعا ما عن بقية الكتاب: إلى جانب تحديد المشهد لما يلي، فإنه يتجنب الكثير حول طرق القياس الكمي. لقد حاولت انتقاء بعض الدروس المهمة بدلا من إعطاء مجموعة من النماذج لاستخدامها. لقد وجدت كتاب "دوغلاس هوبارد" واحد من أفضل المراجع لفهم أساسيات إدارة المخاطر وتطبيقها في سياق الأعمال التجارية على نطاق واسع، ويغطي كتابه ليس فقط بعض المواد الواردة في هذا الفصل، ولكن أيضا لديه أشياء مفيدة حول عدد من الموضوعات التي نغطيها في الفصول اللاحقة (مثل مسألة كيفية اتخاذ قرارات محفوفة بالمخاطر، والتي نغطيها في الفصل السادس).

ويمكن العثور على ملخص جيد للنهج التي يمكن استخدامها لتوليد السيناريوهات والتفكير في السلاسل السببية، وكذلك استجابات الأعمال في ميلر وال والر (2003). يدور النقاش حول أسباب حاجتنا إلى التفكير بشكل مختلف حول قضايا السلامة مأخوذة من الكتاب المؤثر "لجون أدامز"، وهو خبير خاص في سلامة الطرق.

وقد تم استنباط المواد المتعلقة بالاحتيايل على سوستيه جنرال من عدد من المقالات صحفية: يفقد "سوستيه جنرال سبعة مليارات دولار في غش تجاري"، نيويورك تايمز 24 يناير 2008؛ عناوين البنوك، كيف أخفى متداول صفقاته، نيويورك تايمز 28 يناير 2008؛ غموض متداول سوستيه جنرال بانتهاء محاكمته الجنائية، نيويورك تايمز 25 يونيو 2010؛ المتداول المحتال جيروم "كيرفيل" "كنت مجرد ترس صغير في الآلة" دير شبيغل "صحيفة ألمانية" على الإنترنت 16 نوفمبر 2010.

لقد تحدثنا قليلا عن ثقافة الشركة وتحملها المخاطر، ولكن هذا ليس بأي حال من الأحوال تعليق على أهمية هذا الجانب من المخاطر، التي ربما تستحق كتابا كاملا (بعض المراجع حول هذا الموضوع: بوزمان وكينغسلي، 1998 فلين وآخرون، 2000؛ جيفكوت وآخرون، 2006 وكذلك بعض أوراق الكتاب التي حررها هوترو وبارو، 2005).

المراجع

- Adams, J. (1995) *Risk*. UCL Press.
- Bozeman, B. and Kingsley, G. (1998) Risk Culture in Public and Private Organizations. *Public Administration Review*, 58, 109-118.
- Flin, R., Mearns, K., O'Connor, P. and Bryden, R. (2000) Measuring safety climate: identifying the common features. *Safety Science*, 34, 177-192.
- Hubbard, D. (2009) *The Failure of Risk Management*. John Wiley & Sons.
- Hutter, B. and Power, M. (2005) *Organizational Encounters with Risk*. Cambridge University Press.
- Jeffcott, S., Pidgeon, N., Weyman, A. and Walls, J. (2006) Risk, trust, and safety culture in UK train operating companies. *Risk Analysis*, 26, 1105-1121.
- Miller, K. and Waller, G. (2003) Scenarios, real options and integrated risk management. *Long Range Planning*, 36, 93-107.
- Power, M. (2004) The risk management of everything. *Journal of Risk Finance*, 5, 58-65.
- Rice, J. and Franks, S. (2010) Risk Management: The agile enterprise. *Analytics Magazine*, INFORMS.
- Ritchie, B. and Brindley, C. (2007) Supply chain risk management and performance. *International Journal of Operations & Production Management*, 27, 303-322.
- Stulz, R. (2009) Six ways companies mismanage risk. *Harvard Business Review*, 87 (3), 86-94.

تمارين

1-1 مخاطر الإمداد بالصمامات

"دينورام" يصنع مكابس الهيدروليكية لقطاع التعدين في أستراليا. ويحصل على مكونات الصمام من مورد يسمى "سيتوك" في سنغافورة. وتبلغ قيمة الصمامات 250 دولار سنغافوري، وتستخدم الشركة ما بين 450 و500 صمام سنوياً. هناك اختلافات طفيفة بين الصمامات، هناك مجموعه تتكون من 25 نوع مختلف يستخدمها "دينورام"، "سيتوك" تسلم الصمامات عن طريق الشحن الجوي، عادة تستغرق حوالي 48 ساعة بعد إرسال الطلب. يتم تسليم ما يصل إلى 10 مرات في الشهر اعتماداً على جدول الإنتاج في "دينورام". بسبب حجم الطلب، وافقت "سيتوك" على سعر منخفض بشرط أن يتم

إنتاج ما لا يقل عن 30 صهما كل شهر. في اليوم العاشر من كل شهر (أو في يوم العمل التالي) يدفع "دينورام" مقدما لما لا يقل عن 30 صهام لاستخدامها خلال ذلك الشهر، وأيضا يدفع عن أي صهمات إضافية (فوق 30) المستخدمة خلال الشهر السابق.

(أ) إعطاء مثال واحد لمخاطر السوق ومخاطر الائتمان والمخاطر التشغيلية ومخاطر الأعمال التي يمكن أن تنطبق على "دينورام" فيما يتعلق بترتيب "سيتوك".

(ب) بالنسبة لكل من المخاطر المحددة في النقطة (أ) اقترح إجراء إداري من شأنه أن يؤدي إما إلى تقليل احتمال وقوع خطر أو التقليل من العواقب السلبية المترتبة عليه.

2-1 "كونوت"

فيما يلي مقتطفات من تقرير صحيفة 21 يوليو 2010 بالديلي ميل البريطانية.

"وقعت مجموعة الإسكان "كونوت" المتعثرة في الأزمة بعد أن اكتشفت أن واحد من كبار المسؤولين التنفيذيين باع أسهم تقدر بمئات الآلاف من الجنيهات قبل تحذير أرباح الشهر الأسبق.

الشركة التي فقدت أكثر من 60٪ من قيمتها في ثلاثة أيام تداول فقط في يونيو، واستقالة رئيسها التنفيذي والمدير المالي، قد بدأت تحقيقا داخليا في خرق القواعد... بيع أسهم بناء على معلومات من الداخل.

عندما تكون الشركة على وشك الكشف عن بيان الدخل أمر سري للغاية ويعد ما حدث خرق واضح لقواعد هيئة الخدمات المالية.

وقد انخفضت قيمة "كونوت"، المتخصصة في إصلاح وصيانة السكن منخفض التكلفة (المملوك للحكومة)، بنحو 68٪ منذ أن حذرت من أن عددا من عملاء القطاع العام قد أجلوا النفقات الرأسمالية، مما سيؤدي إلى تراجع الإيرادات المتوقعة خلال العام بقيمة 80 مليون جنيه.

وقالت المجموعة إنها تأثرت بعقود السلطة المحلية المؤجلة التي من شأنها أن تربح 13 مليون جنيه من أرباح هذا العام و16 مليون جنيه عن العام المقبل. كما

خففت حجم دفتر الأوامر من 2.9 مليار جنيه وقال انه كان يستحق 2.5 مليار في شهر أبريل.

كما أثار تحذيرات الربح مخاوف جديدة حول كيفية "كونوت" لحساب عقود الإصلاح والصيانة على المدى الطويل. وظهرت المخاوف لأول مرة في أواخر العام الماضي مع محلي المدينة تساءلوا عما إذا كانت الشركة حذرة عند الاعتراف بإيرادات عقودها وتكاليفها على المدى الطويل.

ودافعت الشركة بشدة عن ممارساتها المحاسبية في ذلك الوقت وما زالت تفعل ذلك. حاول رئيس مجلس الإدارة "السير روي غاردنر" دعم استقرار الشركة منذ وصوله في وقت سابق من هذا العام.

(أ) كيف تصف مخاطر "تحذير الأرباح": هل هي ناجمة عن مخاطر السوق أو مخاطر الائتمان أو المخاطر التشغيلية أو مخاطر الأعمال؟

(ب) من تقرير الصحيفة يمكنك إجراء أي استقطاعات حول استراتيجيات إدارة المخاطر التي كان من الممكن أن تتخذها إدارة الشركة قبل ذلك من أجل تقليل الخسائر على المساهمين؟

3-1 قصص الأخبار السيئة

افحص قسم الأعمال بأي صحيفة واعثر على قصة "أخبار سيئة"، التي تدور حول خسارة الشركات.

(أ) هل يمكنك تحديد نوع المخاطر التي تنطوي عليها: مخاطر السوق، مخاطر الائتمان، مخاطر التشغيل أو مخاطر الأعمال؟

(ب) النظر في التقرير بهدف فهم مسائل إدارة المخاطر فيما يتعلق بما حدث. هل كان هناك فشل في توقع حدوث المخاطر؟ أو فشل في التعامل معها؟

4-1 شكل المنتج للخريطة الحرارية

لنفترض أن مستوى الخطر يحسب على أنه الخسارة المتوقعة وأن الاحتمالات يتم تحويلها إلى احتمالات على مدى فترة 20 سنة على النحو التالي: 'من المحتمل جداً' = 0.9؛ 'محتمل' = 0.7؛ 'معتدل' = 0.4؛ 'غير محتمل' = 0.2؛ و"نادر" = 0.1. العثور على مجموعة من الخسائر بالدولار المرتبطة بالمقادير الخمسة المختلفة للتأثير بحيث يتم ترتيب الخسائر المتوقعة بالطريقة الصحيحة للشكل 1-1: وبعبارة أخرى، بحيث تكون الخسائر المتوقعة لمستوى خطر منخفض أدنى من الخسائر المتوقعة على مستوى مخاطر المتوسطة، وأقل من الخسائر المتوقعة لمستوى المخاطر العالية، والتي بدورها أقل من الخسائر المتوقعة لمستوى خطر عالي جداً. يجب عليك تعيين أدنى مستوى للخسارة ("غير هام") بمبلغ 10000 دولار.

5-1 نشر سجل مخاطر إصلاح الخدمة الصحية الوطنية

قد تتخذ سجلات المخاطر أشكالاً مختلفة، ولكن المعلومات التي تحتوي عليها يمكن أن تكون أحياناً حساسة للغاية. في عام 2012، ناقشت حكومة المملكة المتحدة ما إذا كان سيتم الإفصاح عن سجل المخاطر الكامل الذي تم إنشاؤه للإصلاح المثير للجدل في دائرة الصحة الوطنية أم لا. وأبلغ وزير الصحة "أندرو لانسلي" البرلمان في مايو 2012 أنه لن يتم توفير سوى نسخة معدلة من هذه الوثيقة، على أساس أن الموظفين المدنيين ينبغي أن يكونوا قادرين على استخدام "اللغة المباشرة والتقييمات الصريحة" عند تقديم المشورة للوزراء. وقال "لانسلي" إنه إذا تم الإعلان عن هذه المقترحات بشكل روتيني فإن "سجلات المخاطر المستقبلية ستصبح أقل فائدة". وستكون النتيجة النهائية هي أن "المخاطر المحتملة ستكون أكثر عرضة للتطور دون تقليلها بشكل مناسب" ومن شأن ذلك أن يضر بالحكومة الجيدة ويضر بالمصلحة العامة". وباستخدام هذا المثال كمثال توضيحي، ناقش ما إذا كان هناك انقسام بين التقييم الواقعي للمخاطر والانفتاح الذي قد يكون ضمناً في سجل المخاطر.

الفصل الثاني

هيكل المخاطر

هل أشارت الأزمة المالية العالمية إلى فشل في التنويع؟

فكرة التنويع بسيطة ولكنها مهمة في إدارة الاستثمارات. قد تستثمر كافة أموالك في سهم واحد ويتعثر حظك في النهاية، أو تستثمر في 50 سهم ولا يمكن أن يضرك حدث سيء واحد بشكل قوي. هذه هي ميزة شراء أسهم في صندوق استثمار مشترك (أو الثقة الاستثمارية) - ينوع المستثمر تلقائياً استثماراته من خلال الاحتفاظ بمجموعة من الأسهم المختلفة. ولكن في بعض الأحيان يفشل مبدأ التوزيع: فإذا استثمرت 100,000 دولار في صندوق استثمار أمريكي في بداية عام 2008، لكنت خسرت 39,500 دولار خلال تلك السنة. فقد هبطت كافة الأسهم بقوة خلال هذا العام، حيث بدأت الأسواق الأمريكية في الهبوط في أكتوبر 2007 حتى مارس 2009، وفي تلك الفترة انخفضت أسواق الأسهم الأمريكية بنسبة 57٪.

لم يفلح تنويع الأسهم الأمريكية في عام 2008. في الواقع، فإن الطريقة الوحيدة لتجنب الخسائر لم يكن من خلال التنويع، ولكن الاستثمار في عدد قليل من الأسهم التي

فاقت أداؤها أداء السوق (93٪ من جميع الأسهم الأمريكية خسرت في عام 2008 ولكن ليس جميعها: فعلى سبيل المثال، لم تخسر أسهم ماكдонаلدز و وول مارت). لذلك، إذا كان التنوع هو الحل، فإن الاستراتيجية الصحيحة في تلك السنة ستشمل الاستثمار في مجالات غير الأسهم. إذا كنت مستثمرا تعزف عن المخاطرة، سيكون من المنطقي التنوع في العديد من فئات الأصول المختلفة بهدف تجنب الخسائر الكبيرة. ولسوء الحظ، لم تهوي الأسهم فحسب، بل انخفضت أيضا أسعار السلع والعقارات والأسواق الناشئة. والواقع أن كل فئة من فئات الأصول كانت سيئة للغاية، ونتيجة لذلك، تكبدت محافظ متنوعة تنوعا كبيرا وخسائر كبيرة. وهذا ما يفترض أن يقوم به التنوع وهو تجنب الخسارة. لذا فإن السؤال الصعب الذي يجب مواجهته هو: في حال هبوط كافة الأسواق في الأوقات السيئة، فما الهدف من التنوع في المقام الأول؟

من أجل فهم فوائد التنوع وتجنب التضليل من قبل النماذج التي تهمل أجزاء مهمة من الصورة الكاملة، نحن بحاجة إلى العودة إلى المبادئ الأولى.

1-2 مقدمة للاحتتمالية والمخاطر

تنبع الأفكار المتعلقة بالاحتمالية إلى ألعاب الفرص. عادة ما يكون هناك مقامرين يضعون رهانات عالية، وكلما كان هناك كمية كبيرة من الأموال كان هناك حافزا قويا لتطوير أدوات للتنبؤ بفرص الفوز أو الخسارة. التاريخ الفكري لأفكار الاحتمالات والمخاطر عريق، ولكن أحد المراجع المبكرة تناو لها كتاب لوكا باتشيولي الذي ظهر في عام 1494 بعنوان *Summa de Arithmetica, Geometria et Proportionalita* وهو كتاب عن الرياضيات ولكنه يتضمن وصفا مؤثرا للإدخال المزدوج للاحتفاظ بالسجلات، فضلا عن المشكلة التالية:

A' و B يلعبون لعبة بالا بشكل عادل. ويوافقون على الاستمرار حتى يفوز أحدهم بست جولات. تتوقف اللعبة عند فوز A بخمسة جولات و B بثلاثة. كيف ينبغي تقسيم الرهانات؟

كيف يمكننا الإجابة على هذه المشكلة ؟ فوز الأول A (آدم) فوزه بجولة إضافية يؤكد فوزه، لكن B (بن) لا يزال لديه فرصة: إذا كان بإمكانه الفوز في الجولات الثلاث المقبلة فسيكون الفائز. التقسيم العادل من الرهانات يحتاج إلى عكس الاحتمال النسبي لفوز لاعب واحد أو لاعب آخر. ولكن في الوقت الذي طرح فيه السؤال لم يكن هناك آلية لوضع إطار لتلك الاحتمالات. ربما ليس من الغريب أن تظل هذه المشكلة ('مشكلة النقاط') دون حل لسنوات عديدة.

في الواقع تمت مناقشة المشكلة في رسائل اثنين من علماء الرياضيات المشهورين في 1650 وفيما بعد، وهما "بليز" باسكال و"بيير دي" فيرمات. وكانوا أذكىء للغاية: "باسكال" كان معجزة الأطفال الذين عملوا على كل شيء من حساب الآلات والهيدروليكية وحتى البارومتر، ولكنه ترك عمله العلمي في سن 31 بعد دخوله في تجربة صوفيه. في حين كان "فيرمات" عبقرى رياضي فعل أشياء أكثر بكثير من ترك لغز "نظرية فيرمات" الأخيرة. يصف "باسكال" الشكل الصحيح لتقسيم الرهانات الأولية في مشكلة نقاط بقوله: "القاعدة التي تحدد ما ينتمي إليهم سوف تكون متناسبة مع من لديهم الحق للتوقع من الحظ".

بدلاً من ترك مشكلة النقاط معلقة في الهواء، يمكننا أن نوضح بسرعة كيف توصل "باسكال" و"فيرمات" من هذه المسألة. المفتاح هو التفكير فيما قد يحدث خلال الجولات الثلاث المقبلة. اللعبة سوف تنتهي بالتأكيد (بعد 11 جولة) إذا لم تكن قد انتهت بالفعل. ولكن لا ضرر أن نفترض أن جميع الجولات الثلاث تم لعبها، مع ثمان نتائج محتملة، على سبيل المثال. واحدة من النتائج المحتملة هي فوز بن، ثم فوزه مرة أخرى، ثم فوز آدم أخيراً. يمكننا كتابة التسلسل ممكن AAA, AAB, ABA, ABB, AAB, BAB, ABB, BBB. ثم مسألة كيفية تحديد توزيع عادل يمكن من خلال الطعن في الافتراض بعدالة اللعبة الأساسية. في كل مرة يلاعب فيها "آدم" "بن" هناك فرصة متساوية بفوز أحدهما (مما يجعل كل من هذه النتائج المحتملة الثمانية متساوية). ولكن واحدة من الثمانية هي، BBB ب، بفوز بن بالحصّة كاملة، ويكون التقسيم العادل للحصّة 8/1 لصالح بن و 8/7

لآدم. "باسكال" و"فيرمات" ناقشوا كيف يمكن إجراء هذه العملية الحسابية على نحو فعال لأي بداية وأي عدد من جولات اللعب. ولوحظ أنه حتى من دون معرفة القواعد الدقيقة للعبة المسماة بالا، قد نعارض أن أداء آدم المتفوق حتى الآن يوفر دليلاً على أنه هو اللاعب الأقوى، وإذا كان الأمر كذلك، فحينئذ إعطاء بن حصة 8/1 كثير جداً.

جاكوب برنولي وضع هذه المشكلة في الاعتبار عند كتاباته لـ آرس كونجيكتاندي (فن التخمين) الذي نشر بعد وفاته في 1713 (بعد ثماني سنوات من وفاته). في هذه المرحلة بدأت بعض الأفكار الحديثة للاحتتمالية في الظهور. وكان "برنولي" واعياً بضرورة استخدام الماضي كمؤشر لاحتمالية وقوع أحداث مستقبلية ولفت الانتباه بشكل خاص إلى الطريقة (إذا لم يتغير شيء في الظروف) التي تتزايد بها عدد الملاحظات المؤدية إلى زيادة اليقين بشأن الاحتمال الفعلي لشيء محتمل الحدوث. وكتب:

لأنه ينبغي افتراض أن كل ظاهرة يمكن أن تحدث أو لا تحدث في نفس العدد من الحالات التي تكون تحت ظروف مماثلة، لوحظ سابقاً أنها قد تحدث أو لا تحدث. في الواقع، فعلى سبيل المثال، لوحظ سابقاً أنه من بين ثلاثمائة رجل من الملاحظين من نفس العمر والبشرة كمان تيتيوس، توفي مائتي رجل بعد عشر سنوات وظل الآخرين على قيد الحياة، وقد نستنتج بكل ثقة بأن تيتيوس لديها أيضاً ضعف عدد الحالات لرد جميل الطبيعة خلال السنوات العشر القادمة بدلاً من عبور هذه الحدود. ومن جديد، إذا كان شخص ما... كان موجود في لعبة يشارك فيها اثنين من اللاعبين ومراقبة عدد مرات فوز أحد اللاعبين، وبالتالي سوف يكتشف نسبة عدد الحالات التي قد تحدث أو لا تحدث في المستقبل في ظل ظروف مماثلة لتلك الموجودة سابقاً.

ومن الواضح أن هناك قيوداً في هذا النهج. هناك اختلافات حتمية بين الظروف في المستقبل وتلك التي حدثت في الماضي - فكيف نعرف أن تيتيوس يواجه بالفعل نفس احتمال الوفاة المبكرة لـ 300 رجل من نفس العمر ونفس البشرة؟ لقد كان هناك دائماً نزاع حول مدى إمكانية الاعتماد على الحسابات استناداً إلى ما حدث في الماضي لتوجيه أعمالنا

المستقبلية. وعند التعامل مع القرارات اليومية، من المرجح أن نسترشد بفهم ما يحمله بيتير "بيرنشتاين" يتحدث عن "التوتر بين أولئك الذين يؤكدون أن أفضل القرارات مبنية على القياس الكمي والأرقام، التي تحددها أنماط الماضي، وأولئك الذين يتخذون قراراتهم على صعيد شخصي وغير موضوعي حول مستقبل غير مؤكد".

في هذا الكتاب سوف نركز على الأدوات الكمية لنمذجة وإدارة المخاطر. ولكن الطالب الذي يريد تطبيق هذه الأدوات يجب أن يكون على علم بحدودها. لقد وصلنا الآن إلى النقطة في القصة التاريخية التي تنطلق فيها نظرية الاحتمالات الرياضية، ولكن بدلا من الحديث عن مشاركات مختلفة من دي مويفر، بايس، لابلاس، غاوس، دي أليمبرت، بواسون وغيرهم سوف ننتقل إلى تفاصيل المخاطر. ويرد في الملحق (أ) مناقشة قصيرة لكل نظرية احتمالات نحتاج إليها في هذا الكتاب: دروس حول نظرية الاحتمالات.

2-2 هيكل المخاطر

لدينا اعتقاد بأن الاحتمالات واحتمالات التوزيعات هي الأدوات المناسبة المستخدمة في فهم المخاطر. سوف نبدأ بالتفكير في هيكل المخاطر التي نواجهها ونرى كيف ينعكس ذلك في الاحتمالات المعنية.

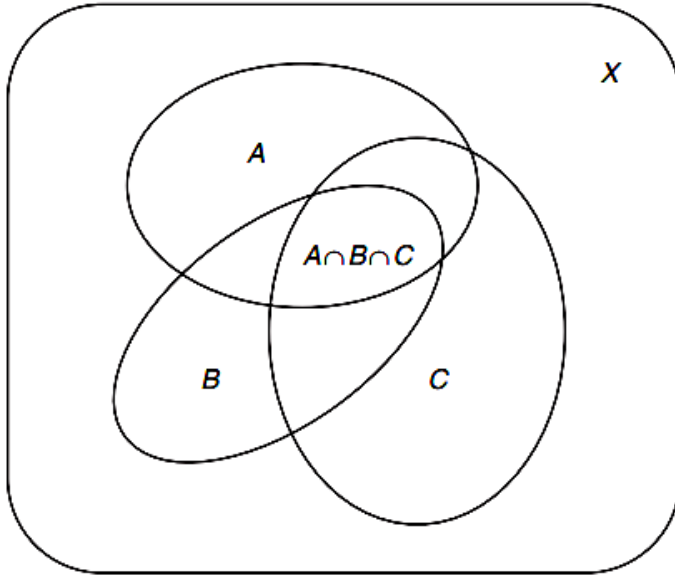
ويتمثل التمييز الأول بين أحداث المخاطر والمخاطر الكمية. حدث المخاطر لديه نموذج بسيط يتكون من نعم أو لا: ما هو خطر إفلاس شركة ما؟ ما هو خطر فشل دواء جديد في اجتياز اختبارات السلامة؟ وتعلق المخاطر الكمية بتغير القيمة (متغير عشوائي في لغة نظرية الاحتمالات). وفي معظم الأحيان تقاس القيمة من الناحية النقدية. هذا هو نوع من المخاطر لا يمكن أن يكون نموذجه نعم أو لا: هل هي مخاطر تكبد خسائر هائلة في مشروع استثماري؟ ما هو خطر ارتفاع تكلفة مشروع بناء؟ ويمكن دائما تحويل المخاطر الكمية إلى أحداث المخاطر عن طريق إضافة نوع من العقوبات: على سبيل المثال، بدلا من السؤال عن الخسائر بشكل عام، قد نسأل عن خطر خسارة أكثر من 500000 دولار.

1-2-2 مخاطر تقاطعية وموحدة

في بعض الأحيان ينطوي حدث المخاطر على عدد من الأشياء المنفصلة تفشل في آن واحد. على سبيل المثال، قد نأخذ في الاعتبار خطر الفشل في إمدادات الطاقة إلى المستشفى كخطر انقطاع التيار الكهربائي وتعطل مولد الطوارئ. ونحن نسمي هذا خطر تقاطعي، لأنه يتعلق بتقاطع الحدثين: "انقطاع التيار الكهربائي الرئيسي" و "تعطل مولد الطوارئ".

من ناحية أخرى، قد نحتاج إلى تحليل المخاطر حيث يوجد عدد من مسارات الفشل المختلفة، كل منها يؤدي إلى نفس النتيجة. إذا نظرنا إلى خطر فشل إطلاق صاروخ سنجد أن عامل من العوامل يمكن أن يحدث به خطأ ما قبل الإطلاق، وكلاً منهما سيؤدي إلى النتيجة النهائية. ونحن نسمي هذا خطر موحد، لأن احتمال الفشل هو احتمال وقوع واحد أو أكثر من الأحداث.

يمكننا القول إن الحدثين مستقلان إذا كان أحدهما لا يحدث فرقاً لاحتمالية حدوث الآخر.



الشكل 1-2: مخطط فين Venn يبين ثلاثة مخاطر مختلفة

وهذا يعني أن احتمال حدوث كلاً من A و B ينبع من الاحتمالين الفرديين (انظر الملحق أ: دروس حول نظرية الاحتمالات للمزيد من التفاصيل). وهذا يسمح لنا بحساب الأخطار التقاطعية للأحداث المستقلة.

بالعودة إلى مثال إمدادات الطاقة في المستشفى، لنفترض أننا نعلم أن احتمال انقطاع التيار الكهربائي في أي يوم معين هو 0.0005 واحتمال تعديل مولد الطوارئ في المستشفى وفشل أي محاولة لبدء تشغيل المولد هي 0.002. إذا كان الحدثان مستقلان (كما هو مرجح في هذا المثال)، فإن احتمال حدوث فشل في إمدادات الطاقة في المستشفى في أي يوم هو $0.000001 = 0.002 \times 0.0005$.

الآن ننظر في خطر موحد، وكمثال على هذا هو احتمال فشل كارثي لإطلاق صاروخ. لنفترض أن الأسباب الرئيسة الثلاثة للفشل هي كما يلي: A = الفشل في نظام اشتعال الوقود. B = فشل فصل المرحلة الأولى عن الصاروخ الرئيسي؛ و C = الفشل في أنظمة التوجيه والمراقبة. افترض أن الاحتمالات هي على النحو التالي $Pr(A) = 0.001$ ، $Pr(B) = 0.002$ ، و $Pr(C) = 0.003$. ما هو الاحتمال العام للفشل إذا كانت الأحداث A و B و C كلها مستقلة؟

الاحتمال الذي نريده هو احتمال أن واحد أو أيًا من A، B و C يحدث. نريد أن تغطي المجموعات A، B و C هذه المنطقة في مخطط فين Venn. فتكون الصيغة:

$$Pr(A) + Pr(B) + Pr(C) - Pr(A \cap B) - Pr(B \cap C) - Pr(A \cap C) + Pr(A \cap B \cap C)$$

تسمى هذه الصيغة بصيغة الإدراج والإقصاء - تدور الفكرة حول ما إذا أضفنا الاحتمالات A و B و C فإننا سوف نضاعف عدد التقاطعات، وبالتالي فإن المصطلحات الثلاث الثانية صحيحة، ولكن بعد ذلك أي شيء في التقاطع للثلاث مجموعات سيتم حسابها ثلاث مرات في البداية ثم استثنائها ثلاث مرات، وبالتالي فإن المصطلح النهائي يعيد التوازن لجعل جميع مكونات مخطط فين Venn في نهاية المطاف يتم عددها مرة واحدة فقط. في ضوء الاحتمالات المعطاة واستخدام النموذج المنتج لاحتمال تقاطع الأحداث

المستقلة، نتوصل إلى احتمال الفشل من خلال:

$$10^{-3} + 2 \times 10^{-4} + 3 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-7} - 6 \times 10^{-7} - 3 \times 10^{-6} + 6 \times 10^{-10} = 0.004196.$$

يوضح هذا المثال كيفية وتوقيت وجود احتمالات مخاطر ضعيفة وأحداث مستقلة، يمكننا تجاهل المصطلحات الإضافية بعد المجموع $\Pr(C) + \Pr(B) + \Pr(A)$. في هذا المثال، ببساطة إضافة الاحتمالات الثلاثة يعطي قيمة 0.0042.

ومن الواضح أن هناك فرقا كبيرا بين النتيجة النهائية للمخاطر الموحدة حيث تضاف (تقريبا) الاحتمالات، والخطر المتقاطع حيث تتضاعف الاحتمالات.

هناك حيلة مهمة سنقدمها هنا والتي غالبا ما تكون مفيدة في حساب احتمالات المخاطر. سنكتب A^C لتكملة A؛ هذا هو الحدث الذي لا يحدث فيه A. على النحو التالي:

$$\Pr(A^C) = 1 - \Pr(A)$$

ومن المفيد أن ننظر إلى مخطط فين Venn في الشكل 1-2 حيث يتوافق الحدث AC مع مجموعة X مع حذف A. لاحظ أن $AC \cap BC = B \cap C$. هذا واضح من خلال النظر في الرسم البياني، ويمكننا أن نضع هذا في كلمات بقولنا أن "تقاطع المكملات هو مكمل للاتحاد". من وجهة نظر حساب احتمالات المخاطر، الاستفادة من إعادة الترتيب تنشأ من الطريقة التي يمكن أن نضاعف بها احتمالات الأحداث المستقلة للحصول على احتمال تقاطعها. إذا كانت A و B مستقلة إذا AC و BC كذلك، وبالتالي سيكون لدينا سلسلة من الآثار المترتبة على الأحداث المستقلة A و B:

$$\begin{aligned} \Pr(A \cup B) &= 1 - \Pr((A \cup B)^C) \\ &= 1 - \Pr(AC \cap BC) \\ &= 1 - \Pr(AC) \Pr(BC) \\ &= 1 - (1 - \Pr(A))(1 - \Pr(B)). \end{aligned}$$

قد لا يبدو تقدم ملحوظ، ولكن نفس الحيلة يمكن استخدامها في أي عدد من الأحداث المستقلة وهذا أمر مفيد في تجنب تعقيدات صيغة الإدراج والإقصاء. على سبيل المثال، إذا أخذنا مثال احتمال الفشل لعملية إطلاق صاروخ سيكون لدينا:

$$\begin{aligned} \Pr(A \cup B \cup C) &= 1 - (1 - \Pr(A))(1 - \Pr(B))(1 - \Pr(C)) \\ &= 1 - 0.999 \times 0.9998 \times 0.997 = 0.004196. \end{aligned}$$

سنصل إلى نفس الإجابة التي حصلنا عليها قبل استخدام صيغة الإدراج والإقصاء.

2-2-2 الحد الأقصى للمتغيرات العشوائية

الآن نحن نأخذ في الاعتبار المخاطر الكمية، التي تنطوي على متغيرات عشوائية بدلا من الأحداث. من جديد نحن بحاجة للبدء مع فهم هيكل المخاطر والطريقة التي يتم الجمع بين المتغيرات العشوائية المختلفة. نحن ننظر أولا إلى الحالة التي يتم فيها تحديد المخاطر التي نريد قياسها من خلال أكبر مجموعة من المتغيرات العشوائية.

مثال 1-2 خسائر أسهم شركة IBM على مدار عشرون يوماً

لنفترض أننا نريد أن نجد احتمال انخفاض سعر أسهم شركة IBM بنسبة تزيد عن 10٪ في يوم واحد في مرحلة ما على مدى الأسابيع الأربعة المقبلة، نظرا لاحتمالية خسارة أكثر من 10٪ في يوم واحد هي 0.01 (لذلك نتوقع أن يحدث ذلك في يوم تداول واحد في 100)، والسلوك السعري في الأيام المتتالية مستقل بذاته.

هناك 20 يوم تداول، والسؤال حول احتمالية أقوى تراجع للقيمة في يوم واحد على مدار عشرون يوماً أكثر من 10٪. لحساب الإجابة التي نريدها، نبدأ بتحديد الحدث:

$$A = \text{الخسارة اليومية في سعر سهم IBM أقل من 10\%}$$

لاحظ أن A تشمل جميع الأيام مع ارتفاع الأسعار أيضا. احتمال خسارة أكثر من 10٪ تعني ببساطة $1 - \Pr(A)$ ، وهذا هو الرقم الموضح لنا وهو 0.01. وبالتالي، نستنتج أن $\Pr(A) = 0.99$. ومع استقلالية كل حدث، فإن احتمالية أن كلاً من الأيام الأول والثاني والخسارة أقل من 10٪ هو احتمال التقاطع:

$$\Pr(A) \times \Pr(A) = 0.99^2 = 0.9801$$

احتمال أن الخسارة اليومية أقل من 10٪ على مدار عشرون يوماً

$$\Pr(A)^{20} = 0.99^{20} = 0.8179.$$

ولكن إن لم يحدث ذلك فهناك على الأقل يوم واحد قد تزيد الخسارة عن 10٪ وهو بالضبط الاحتمالية التي نريد إيجادها. وستكون الإجابة هي $1 - \Pr(A)^{20} = 0.1821$.

إن مهمة تحديد الخطر المتمثل في أن أكبر مجموعة من المتغيرات العشوائية أعلى من قيمة معينة هي تماماً مثل تحليل المخاطر الموحدة: هو احتمال أن واحد أو أكثر من هذه المتغيرات العشوائية أكبر من قيمة معينة.

التحليل الذي قدمناه هنا هو مثال على استخدام حيلة مكتملة لتحويل هذه المشكلة إلى مشكلة تقييم خطر تقاطعي. يمكننا إعادة كتابة تحليل الفقرة أعلاه بطريقة رسمية أكثر على النحو التالي. نحدد الحدث:

$$B_i = \text{تراجع سهم IBM بأكثر من 10\% في اليوم } i.$$

ولهذا B_i مكمل $A_i = \text{تراجع سهم IBM بأقل من 10\% في اليوم } i$. A_i هو نفس الحدث A ، ولكننا نريد أن نضيف مخطوطة لنشير إلى اليوم الذي نريد معرفته. لدينا إذاً $\Pr(B_i) = 1 - \Pr(A_i)$. ثم نستنتج من حيلتنا المكتملة أن

$$B_2) = 1 - \Pr(A_1 \cap A_2), \cup \Pr(B_1$$

ويظهر تعبير مماثل عند النظر في ثلاثة أيام أو أكثر. وبالتالي فإن الرقم الذي نريد أن نجده هو

$$B_{20}) = 1 - \Pr(A \cap A_2 \cap \dots \cap A_{20}). \cup \dots \cup B_2 \cup \Pr(B_1$$

الآن إذا كانت كافة الأحداث A_i لها نفس الاحتمالات وكانت مستقلة (كما نفترض هنا) إذا هذا يصبح $1 - \Pr(A)^{20}$.

يمكننا تحول المناقشات حول الاحتمالات إلى مناقشات حول وظائف التوزيع التراكمي ويرمز إليها بـ $CFDs$. تذكروا أننا نعرف الـ CFD لمتغير عشوائي X بـ $F_X(z) = \Pr(X \leq z)$. الآن ننظر في متغير عشوائي U ويُعرف بأنه أقصى عدد لمتغيرين عشوائيين X و Y . ولهذا $U = \text{أقصى } (Y, X)$. ولإيجاد وظائف التوزيع التراكمي (CFD) لـ U نحن بحاجة إلى إيجاد احتمالية أن الحد الأقصى لـ X و Y أقل من القيمة المعطاة z . هذه فقط

احتمالية أن كلاً من X و Y أقل من z ، ولهذا

$$F_U(z) = \Pr(X \leq z \text{ and } Y \leq z).$$

وعليه عندما يكون كلاً من X و Y مستقلين،

$$F_U(z) = \Pr(X \leq z) \times \Pr(Y \leq z) = F_X(z) \times F_Y(z).$$

ويمكن استخدام نفس الفكرة مع أكثر من متغيرين عشوائيين. عندما نتعامل مع المتغيرات العشوائية التي لها نفس التوزيع، تصبح الصيغة أبسط. افترض أن $X_1, X_2, \dots$ ، يتم توزيعهم بشكل مماثل وبمتغيرات عشوائية مستقلة، وجميعهم بنفس وظائف التوزيع التراكمي CFD في ضوء $F_X(\cdot)$. إذا وظائف التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي $U = \text{الحد الأقصى}(X_N, \dots, X_1, X_2, \dots)$ يعبر عنه

$$F_U(z) = F_X(z)^N.$$

من ضمن أحد الأسئلة الأكثر شيوعاً التي نحتاج إلى الإجابة عليه لا تتعلق بأكبر (أو أصغر) متغيرات عشوائية مختلفة، ولكن بدلاً من ذلك تتعلق بالمخاطر الناشئة عند إضافة متغيرات عشوائية. وبالتالي نهتم بـ $X+Y$ ، بدلاً من الحد الأقصى لـ (Y, X) . في المثال أعلاه، سألنا عن احتمال انخفاض سعر سهم شركة IBM بنسبة تزيد عن 10٪ في يوم واحد خلال فترة عشرة يومين. لكننا من المرجح أن نهتم بالتغير الكلي في السعر على مدى فترة عشرة يومين، ولحساب ذلك نحن بحاجة إلى إضافة تحركات الأسعار المتعاقبة خلال فترة العشرين يوماً. النظرة الأساسية هنا هي أن الأحداث القوية في حركة يوم واحد من المرجح جداً أن يتم إلغاؤها من قبل الحركات في أيام أخرى. ونتيجة لذلك، يمكننا القول أنها ما لم ترتبط حركات الأسعار بشكل إيجابي قوي، فإن الخطر المستند على مجموع العوامل المستقلة مجتمعة هو أقل من مجموع المخاطر الفردية. في القسم التالي نوضح هذه الفكرة بمزيد من التفصيل.

3-2 المحافظ والتنويع

بدأنا هذا الفصل بالحديث عن التنويع في محافظ الأسهم والآن نعود للحديث عن هذا الموضوع مرة أخرى. الفكرة الأساسية المتعلقة بهذا النوع من المخاطر يمكن وصفها

من خلال النصيحة التالية: "لا تضع كل البيض في سلة واحدة". إذا كان هناك خيار للقيام بذلك، فمن الأفضل توزيع المخاطر بحيث يكون تأثير المخاطر المختلفة على أجزاء مختلفة من المحفظة. وفي سوق الأسهم، فإن الاستثمار في سهم واحد سيحمل مخاطر فقدان الأموال كافة إذا أفلسَت تلك الشركة. تقسيم الاستثمار بمحفظة بها العديد من الأسهم المختلفة يقلل تلقائياً من احتمال هذه النتيجة المتطرفة للغاية. والنتيجة النهائية للمستثمر هي مجموع النتائج التي تم الحصول عليها لكل سهم في المحفظة (المرجحة وفقاً للمبلغ المستثمر). وتضمن إضافة هذه النتائج معاً أن النتيجة السيئة في جزء واحد من المحفظة من المرجح أن تكون متوازنة بنتيجة جيدة (أو أقل سوءاً) في جزء آخر من المحفظة.

1-3-2 إضافة المتغيرات العشوائية

وسوف نبدأ من خلال النظر في مزيد من التفاصيل في ما يحدث عندما تضاف المتغيرات العشوائية معاً. إذا نظرنا إلى مجموع متغيرين عشوائيين X و Y ، كل منهما يمثل خسارة، ثم نسأل: ما هو احتمال أن مجموع الاثنين أكبر من قيمة معطاة؟ للإجابة على هذا السؤال، نأخذ $U = X + Y$ وننظر في المعادلة $Pr(U \geq z) = 1 - F_U(z)$. هذا ليس حساباً سهلاً للقيام به بشكل عام، لأننا بحاجة إلى تحقيق توازن بين قيمة X مع قيمة Y .

مثال 2-2 الجمع بين متغيرين عشوائيين منفصلين.

ولتوضيح ذلك ننظر إلى مثال حيث يمكن لكل من X و Y أن يأخذوا القيم بين 1 و 5 مع الاحتمالات الواردة في الجدول 1-2.

الجدول 1-2: احتمالية قيم مختلفة بالنسبة إلى X و Y .

القيمة	الاحتمالية لـ X	الاحتمالية لـ Y
1	0.1	0.2
2	0.3	0.3
3	0.2	0.3
4	0.2	0.1
5	0.2	0.1

يمكننا حساب احتمال $U = X + Y$ كونهم 8 أو أكثر من خلال النظر في الاحتمالات الثلاثة: $X = 3$ و $Y = 5$ ؛ $X = 4$ و $Y \geq 4$ ؛ و $X = 5$ و $Y \geq 3$. عندما يكون X و Y مستقلين، فإن هذا يدل على أن احتمال $U \geq 8$ من خلال

$$0.2 \times 0.1 + 0.2 \times (0.1 + 0.1) + 0.2 \times (0.3 + 0.1 + 0.1) = 0.16.$$

من النظرة الأولى نلاحظ أن الاحتمالية هنا أقل مما قد نتوقعه. هناك احتمالية 0.4 أن $X \geq 4$ واحتمال 0.2 أن $Y \geq 4$. ومع ذلك احتمال أن $X + Y \geq 8$ أصغر من كل من هذه الأرقام. هذا هو مثال بسيط على طريقة إضافة متغيرات عشوائية مستقلة تميل إلى الحد من مستويات المخاطر الإجمالية.

ويمكن إجراء نفس النوع من الحسابات للمتغيرات العشوائية الأكثر عمومية مع أخذ القيم الصحيحة 1، 2، ...، M ، حيث نكتب $q_k = \Pr(Y = k)$ and $p_k = \Pr(X = k)$ ثم

$$\Pr(X + Y \geq z) = p_{z-M}(q_M) + p_{z-M+1}(q_{M-1} + q_M) + \dots + p_M(q_{z-M} + \dots + q_M)$$

نحن بحاجة إلى $M \geq z > M-2$ لهذه الصيغة (بحيث يكون $z - M$ في المدى 1، 2، ...، M).

يمكننا ترجمة هذه الصيغة إلى شكل متكامل للمتغيرات العشوائية المستمرة. لنفرض أن X و Y مستقلان والمتغير العشوائي X له دالة الكثافة f_X و CDF F_X ، في حين أن المتغير العشوائي Y له دالة الكثافة f_Y و CDF F_Y . لنبدأ مع افتراض أن كلا المتغيرات العشوائية تأخذ القيم في النطاق $[0, M]$. كالسابق، ونأخذ $U = X + Y$. ثم

(2.1)

$$1 - F_U(z) = \Pr(X + Y \geq z) = \int_{z-M}^M f_X(x)(1 - F_Y(z - x))dx.$$

وبما أن f_X هو كثافة الاحتمالية والاندماج لـ 1، فإن لدينا

$$\int_{z-M}^M f_X(x)dx = 1 - \int_0^{z-M} f_X(x)dx = 1 - F_X(z - M).$$

إذا يمكن كتابة المعادلة (2-1) كالتالي

$$1 - F_U(z) = 1 - F_X(z - M) - \int_{z-M}^M f_X(x)F_Y(z - x)dx,$$

وعليه

$$F_U(z) = F_X(z - M) + \int_{z-M}^M f_X(x)F_Y(z - x)dx.$$

هذا يعد أمر منطقيًا من الناحية الحدسية: المصطلح الأول هو احتمال أن X يأخذ قيمة منخفضة بحيث نضمن أن تكون قيمة $X + Y$ أقل من Z .

هناك صيغة مكافئة يمكن تطبيقها عندما لا يكون للمتغيرات نطاقات محددة. مثل أخذ M بلا حدود ونحصل على

$$F_U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)F_Y(z - x)dx$$

ويسمى التكامل هنا تلازما بين الوظائف f_X و F_Y .

مثال عملي 2-3 مزيج بين الفشل والإصلاح

لنفترض أن الوقت المتبقي لتعطل جزء من آلة موزع كتوزيع أسّي بمتوسط 10 أيام. عند تعطل هذا الجزء سيتطلب إصلاح، وقد يستغرق وقتًا ما بين 0 و 20 يوما، ومن المرجح أن يأخذ وقت الإصلاح أي قيمة في هذا النطاق. لنفترض أن وقت الإصلاح مستقل عن وقت التعطل. ما احتمال تعطل هذا الجزء وتم إصلاحه بالفعل خلال ثلاثين يومًا (ستحتاج إلى استخدام التوزيع الأسّي بمتوسط λ له $F(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$)

الحل

رمزنا لوقت الفشل بـ Y = وقت الفشل. ووظائف التوزيع التراكمي CDF لـ Y تعبر عنها $F_Y(x) = 1 - e^{-x/10}$. رمزنا لوقت الإصلاح بـ X = وقت الإصلاح. ثم تكون كثافة X ثابتة وتعطى بواسطة $1/20$ لـ x في المدى من 0 إلى 20. وهكذا، إذا كان U الوقت المستغرق لدينا لإصلاح الفشل الأول، لدينا $U = X + Y$ ونحن نريد أن نجد احتمال أن $U \leq 30$. لذلك نحن بحاجة إلى تقييم:

$$F_U(30) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)F_Y(30 - x)dx.$$

لأن $f_X(x)$ تساوي صفر إلا إذا كان x في النطاق 0 إلى 20، يمكننا أن نأخذ التكامل على هذا النطاق ونحصل على

$$\begin{aligned} F_U(30) &= \int_0^{20} f_X(x) F_Y(30-x) dx \\ &= \frac{1}{20} \int_0^{20} (1 - e^{-(30-x)/10}) dx. \end{aligned}$$

so $10e^{x/10}$, يندمج مع $e^{x/10}$ & $e^{-3}e^{x/10} = e^{-(30-x)/10}$

$$\begin{aligned} F_U(30) &= \frac{1}{20} [x - 10e^{-3}e^{x/10}]_0^{20} \\ &= \frac{1}{20} (20 - 10e^{-3}e^2 + 10e^{-3}) \\ &= 1 - \frac{e^{-1}}{2} + \frac{e^{-3}}{2} = 0.84095. \end{aligned}$$

هذه الاحتمالية التي نريدها: فرصة عدم تعطل هذا الجزء أو بقاءه قيد الإصلاح بعد ثلاثين يومًا هي 16%.

وغالبًا ما يكون من الصعب العثور على تعبيرات رياضية للتكاملات المعقدة التي تظهر عند إضافة التوزيعات معًا. الصيغة المعادلة إذا أردنا النظر في مجموع أكثر من متغيرين أكثر صعوبة. الطريقة المعتادة للتعامل مع هذه الصعوبات هي العمل مع لحظة توليد دالة التوزيع بدلا من التوزيع نفسه. ولكن للبدء في مناقشة لحظة توليد وظائف سيأخذنا ذلك بعيدا جدا عن هدفنا الرئيسي من هذا الكتاب. وبدلا من ذلك سنقدم نهجا مختلفا لتقييم المخاطر في المحفظة؛ سنتخلى عن شيء من حيث الاحتمالات الدقيقة، ولكننا سنحزّر تقدماً كبيراً في تسهيل التقييم.

وبدلاً من النظر إلى احتمالات محددة ننظر بدلاً من ذلك في توزيع القيم، ويقاس الانحراف المعياري (أو التباين). مرة أخرى على اعتبار متغيرين عشوائيين مستقلين. تذكر أنه عندما يكون X و Y مستقلين يمكننا إضافة فروقهما، أي بالنسبة إلى X و Y المستقلين،

فإن الفرق بين $X + Y$ هو مجموع الفروق بين X و Y ، والتي يمكننا كتابتها كالتالي:

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y).$$

التغير: Var

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X ، الذي نكتبه على أنه σ_X ، هو مجرد الجذر التربيعي للتباين، $\text{var}(X)$ ، لذلك عندما يكون X و Y مستقلين،

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\text{var}(X) + \text{var}(Y)} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$

يمكننا تمديد هذه الصيغة إلى أي عدد من المتغيرات العشوائية. أبسط حالة للجميع المستقلة وأيضا $X_1, X_2, \dots, X_N$ هي حينما يكون لدينا مجموعة من المتغيرات العشوائية جميعها لها نفس الانحراف المعياري، حتى نتمكن من كتابة

$$\sigma_X = \sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = \dots = \sigma_{X_N}.$$

ثم

$$\sigma_{X_1+X_2+\dots+X_N} = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_N}^2} = \sqrt{N\sigma_X^2} = (\sqrt{N})\sigma_X.$$

ومن الواضح أن هذه الصيغة تنطبق عندما يكون لكل المتغيرات نفس التوزيع (مما يجعل انحرافات المعيارية متساوية). على سبيل المثال، قد تكون المتغيرات العشوائية الفردية هي الطلب على بعض المنتجات في الأسابيع المتعاقبة، عندما لا يكون لدينا سبب لتوقع حدوث تغيرات في متوسط الطلب على مر الزمن. إذاً ينتهي الانحراف المعياري للطلب الإجمالي مثلاً 10 أسابيع من خلال $\sqrt{10}\sigma$ حيث σ هو الانحراف المعياري على مدى أسبوع واحد، شريطة أن يكون الطلب في الأسابيع المتعاقبة مستقل.

النقطة المهمة التي يجب تذكرها هي:

الانحراف المعياري لمجموع N المتغيرات العشوائية المستقلة المتطابقة هو الجذر التربيعي لـ N للانحراف المعياري لواحد من المتغيرات العشوائية.

2-3-2 المحافظ ذات الحد الأدنى من التباين

الآن ننظر في حالة حيث يتم إنشاء محفظة من استثمار مبلغ w_i في فرصة استثمارية معينة i ، حيث $i = 1, 2, \dots, N$. نجعل X_i يكون المتغير العشوائي الذي يعطي قيمة الاستثمار i في نهاية السنة. وبالتالي فإن قيمة المحفظة هي

$$Z = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \dots + w_N X_N.$$

نريد أن نجد التباين لـ Z ، وكنوع من التبسيط سوف نفترض أنه ليس فقط أن X_i مستقلة، ولكن أيضا أن لديهم جميعا نفس التباين، σ_X^2 (لذلك σ_X هو الانحراف المعياري لـ X_i).

عند ضرب متغير عشوائي في w ، يتم ضرب الانحراف المعياري في w ويتم ضرب التباين في w^2 . وبالتالي فإن الفرق بين قيمة المحفظة بأكملها هو

$$\begin{aligned} \text{var}(Z) &= \text{var}(w_1 X_1) + \text{var}(w_2 X_2) + \dots + \text{var}(w_N X_N) \\ &= w_1^2 \sigma_{X_1}^2 + w_2^2 \sigma_{X_2}^2 + \dots + w_N^2 \sigma_{X_N}^2 = \sigma_X^2 (w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_N^2). \end{aligned}$$

إذا كان لدينا مبلغ إجمالي W للاستثمار، وقمنا بتقسيم استثمارنا بالتساوي (بعد كل شيء، كل فرصة استثمارية لديها نفس التباين)، ثم كل $W/N = w_i$

$$\text{var}(Z) = \sigma_X^2 N (W/N)^2 = (1/N) \sigma_X^2 W^2.$$

وقد نرغب في الحد من الانحراف المعياري لقيمة المحفظة عندما يكون لدى الاستثمارات الفردية انحرافات معيارية مختلفة. وستكون هذه فكرة جيدة إذا لم يكن هناك فرق بين الاستثمارات من حيث متوسط أدائها. ولعل الفكر الأول لدينا هو وضع كل أموالنا في أفضل الفرص الاستثمارية؛ وبعبارة أخرى، وضع كل شيء في استثمار واحد

صاحب الانحراف المعياري الأقل. ومن المؤكد أنه سيكون من المنطقي استثمار المزيد من ثروتنا الإجمالية في الاستثمارات مع انحرافات معيارية صغيرة، ولكن مبدأ التنوع يعني أننا يمكن أن نفعل ما هو أفضل من خلال توزيع استثماراتنا في أكثر من فرصة استثمارية واحدة.

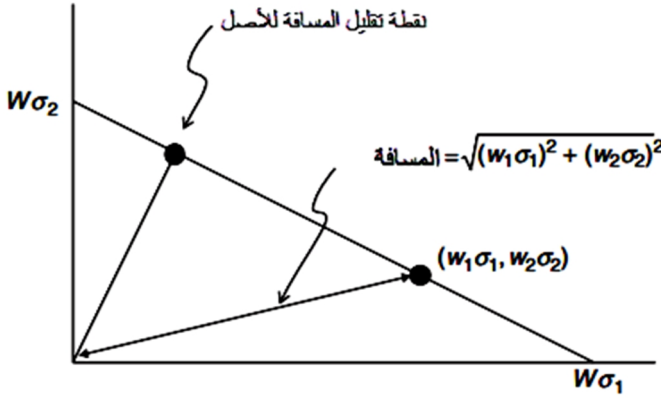
لتوضيح هذا المبدأ يمكن أن ننظر في استثمار مبلغ إجمالي W في الأسهم المستقلة عن بعضها البعض. سوف نفترض أن استثمار دولار واحد في السهم الأول يعطي قيمة نهائية وهو متغير عشوائي مع متوسط μ والانحراف المعياري هو σ_1 . من ناحية أخرى، فإن استثمار دولار واحد في السهم الثاني يعطي نفس القيمة النهائية المتوسطة μ ، ولكن مع انحراف معياري σ_2 . لذلك، أيا كان اختيار الاستثمار، القيمة النهائية المتوقعة هي μW . ثم يمكن كتابة مشكلة التقليل من الانحراف المعياري كمشكلة للتحسين؟

$$\begin{aligned} & \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2} \\ & w_1 + w_2 = W, \\ & w_1 \geq 0, w_2 \geq 0. \end{aligned} \quad \text{التقليل مرتبط بـ}$$

في هذه الحالة، مع اثنين فقط من الاستثمارات، المشكلة لها تفسير هندسي بسيط، بما أن التعبير $\sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2}$ يعطي نفس المسافة من نقطة تتسق مع $(w_1 \sigma_1, w_2 \sigma_2)$ للأصل. يعني أن هذه النقطة تقع في مكان ما على الخط المستقيم بين $(0, W \sigma_1)$ و $(0, W \sigma_2)$. تتوافق هاتان النقطتان مع ما قد يحدث إذا استثمرنا فقط في واحد أو إحدى الخيارين. ويوضح الشكل 2-2 هذه الحالة مع $\sigma_1 = 2\sigma_2$.

في الحالة الموضحة في الشكل (مع $\sigma_1 = 2\sigma_2$) يمكننا أن نجد أفضل خيار من الأوزان ببساطة عن طريق استبدال $w_2 = W - w_1$ ، مما يعني أن الهدف هو التقليل

$$\sqrt{w_1^2 4\sigma_2^2 + (W - w_1)^2 \sigma_2^2}.$$



الشكل 2-2: اختيار حجم الاستثمار لتقليل الانحراف المعياري للعائد

يمكننا استخدام حساب التفاضل والتكامل لإيجاد الحد الأدنى من هذه المسألة، والذي يحدث عندما نقوم بالعملية $w_1 = W/5$ و $w_2 = 4W/5$. ويكون الانحراف المعياري الناتج هو

$$\sqrt{\frac{4}{25} W^2 \sigma_2^2 + \frac{16}{25} W^2 \sigma_2^2} = \frac{\sqrt{20}}{5} W \sigma_2.$$

مثال عملي 4-2 تقليل التباين مع اثنين من الاستثمارات

أندي لديه 100,000 دولار أمريكي للاستثمار لمدة ثلاث سنوات، ويعتقد أن الاستثمار في الأسهم الأمريكية سيحقق نفس متوسط العائد للاستثمار في صندوق بالأسواق الناشئة. ويريد تقسيم استثماره بين صندوق استثماري في الأسهم الأمريكية بمتوسط عائد يبلغ 120000 دولار بعد ثلاث سنوات مع انحراف معياري 4000 دولار أمريكي وصندوق استثماري في سوق ناشئ يعتقد بأنه سيحقق متوسط عائد 120000 دولار أيضًا بعد ثلاث سنوات بانحراف معياري 12000 دولار. وإذا افترضنا أن العائد من الصندوقين مستقلين، كيف يمكن له أن يقسم استثماراته لتقليل مخاطره؟

الحل

سنعمل على 1000 دولار ونفترض أن أندي سيستثمر مبلغ X في صندوق الاستثمار في الأسهم الأمريكي و $100 - X$ في صندوق السوق الناشئ. وسيكون العائد المحقق بعد ثلاث سنوات $xU + (100 - x)V$ ، بحيث U هو العائد المحقق من صندوق الاستثمار في الأسهم الأمريكية و V العائد المحقق من صندوق الاستثمار في السوق الناشئ. ولهذا فإن العائد المتوقع هو

$$xE(U) + (100 - x)E(V) = 120$$

التغير في هذا العائد هو

$$x^2 \text{var}(U) + (100 - x)^2 \text{var}(V) = 16x^2 + 144(100 - x)^2$$

نريد هنا اختيار x للحد من الجذر التربيع لهذه المسألة، ولكن الاختيار الصحيح لـ x سوف يقلل أيضاً من التباين. لإيجاد الحد الأدنى أخذنا المشتق وجعلناه يساوي الصفر. ولهذا فإن الـ x المثالية يتم من خلال حل

$$32x - 288(100 - x) = 0.$$

ولهذا فإن $x = 320/28800 = 0.90$. يجب على أندي استثمار 90000 في الصندوق الاستثماري في الأسهم الأمريكية والـ 10000 المتبقية في الصندوق الاستثماري في السوق الناشئ.

يمكننا أيضاً أن نسأل ماذا يحدث عندما يكون هناك فرص كثيرة للاستثمار، ولهذا الرقم N يكون إلى ما لا نهاية. نبدأ بالتفكير في حالة أن يكون عدد الأسهم N لها نفس الانحراف المعياري. وقد أوضحنا بالفعل الانحراف المعياري لكل العائدات حينها تكون كل الأسهم الفردية لها الانحراف المعياري σ_x من خلال

$$\sigma_x \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_N^2}.$$

هذه المسألة تم اختزالها من خلال تقسيم الاستثمار W بالتساوي، ولهذا $W/N = w_i$

لـ $i = 1, 2, \dots, N$ في ضوء الانحراف المعياري لـ

$$\sigma_X \sqrt{(W/N)^2 + (W/N)^2 + \dots + (W/N)^2} = \sigma_X \frac{W}{N} \sqrt{N} = \frac{\sigma_X W}{\sqrt{N}}.$$

وبالتالي، في حالة الاستثمارات المستقلة، حيث أن عدد الاستثمارات المختلفة يكون بلا نهاية والمبلغ المستثمر في كل منها يصبح أصغر، فإن الانحراف المعياري يصبح صفر. ويتم خفض المخاطرة أيضًا لتصبح صفر.

يمكننا استنتاج أن نفس السلوك يحدث في عدد أكثر من المسائل العامة حينها يكون للأسهم انحراف معياري مختلف (انظر التدريب 2-6). إذا كان لا يوجد أيًا من الانحرافات المعيارية أكثر من $\sigma_{\max}$ إذا يمكننا إنشاء محفظة أقل من $W \sigma_{\max} / \sqrt{N}$. كلما أصبحت N أكبر وأكبر. ولهذا استنتجنا أنه لا يوجد حد أقصى لفوائد التنويع. وبالنظر إلى المعطيات يمكننا أن نجد فرص استثمارية جديدة والتي هي مستقلة عن المحفظة الحالية ولا يوجد تكلفة زائدة للاستثمار فيها، وعليه يمكن أن نخفض المخاطر دائمًا بإضافة هذه الاستثمارات الإضافية لمحفظتنا وإعادة التوازن وفقًا للمعطيات.

3-3-2 نظرية المحفظة المثلى

الآن سننظر إلى حالة يكون فيها عدد من الاستثمارات المختلفة لها نسبة أرباح متوقعة مختلفة بالإضافة إلى تغيرات مختلفة. ويعد هذا التعبير هو أساس ما يسمى بنظرية المحفظة. عندما يكون هناك اختلافات في الربح المتوقع لاستثمار فردي سيكون هناك اختلاف في الربح المتوقع للمحفظة ولهذا لم يعد بإمكاننا أن نجد محفظة تحقق أقل انحراف معياري. يجب علينا أيضًا أن نضع في اعتبارنا الربح المتوقع من المحفظة. وهذا يعني المعاوضة: كلما زاد التنويع كلما قلت المخاطرة وحتماً سيؤدي إشراك المزيد من استثمارات ذات عوائد أقل إلى تراجع العائد المتوقع العام.

لشرح هذه الفكرة سنفترض أن لدينا ثلاثة استثمارات محتملة: A و B و C. يمكننا النظر في النتائج بعد تحديد أوزان مختلفة في مكونات مختلفة بالمحفظة والتوصل في النهاية

إلى مجموعة من المعاولات بين المخاطرة والعائد. سنفترض أن العائد المتوقع من استثمار بقيمة 10000 دولار وانحراف معياري لـ A و B و C كالتالي:

	الربح المتوقع	الانحراف المعياري
A	$R_A = \$1000$	$\sigma_A = 100$
B	$R_B = \$950$	$\sigma_B = 80$
C	$R_C = \$900$	$\sigma_C = 85$

من النظرة الأولى قد يبدو أن الاستثمار C لن يستخدم، حيث يهيمن عليه الاستثمار B: حيث لديه ربح متوقع أعلى وفي الوقت نفسه ذو مخاطرة أقل (في ضوء عائد متغير أقل)، ولكننا سوف نرى مميزات أن يكون لدينا استثمار أو أكثر في المحفظة بحيث تتفوق على حقيقية كونها استثمار غير جذاب.

انظر في مشكلة إيجاد أقل مخاطرة لتحقيق الربح الموضح، يمكن كتابة ذلك على هيئة مشكلة التحسين:

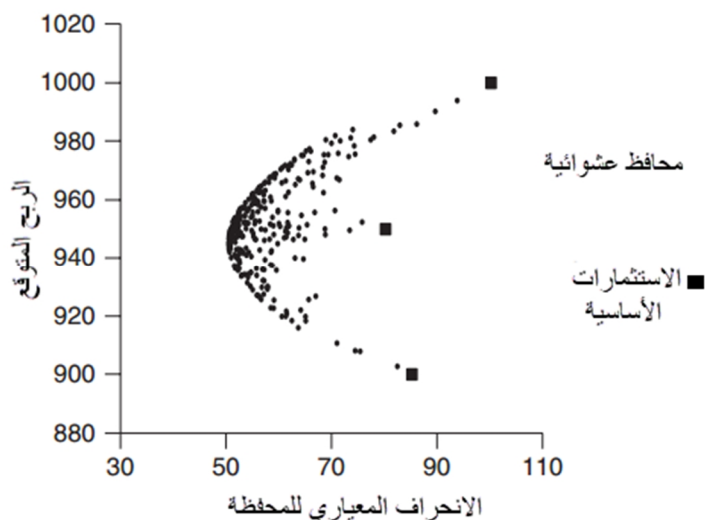
$$w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + w_C^2 \sigma_C^2 \quad \text{التقليل}$$

$$\begin{aligned} w_A + w_B + w_C &= W, \\ w_A R_A + w_B R_B + w_C R_C &= R, \\ w_A \geq 0, w_B \geq 0, w_C &\geq 0. \end{aligned} \quad \text{تخضع لـ}$$

لدينا w_A, w_B, w_C وهم مجموع ما تم استثماره ولهذا W هو إجمالي المبلغ وتم تحديده لـ 10000، R_A, R_B, R_C وهو الربح المتوقع الذي تم تحقيقه من 10000 في استثمارات مختلفة: $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ الانحرافات المعيارية لتلك الأرباح. لاحظ أن الهدف الذي اخترناه هو لتقليل التغير من إجمالي الربح بأكثر من الانحراف المعياري. ولكن الانحراف المعياري هو مجرد الجذر التربيعي للمتغير مهما كان اختيار الأوزان فإن تقليل أحدهما سيقليل الآخر.

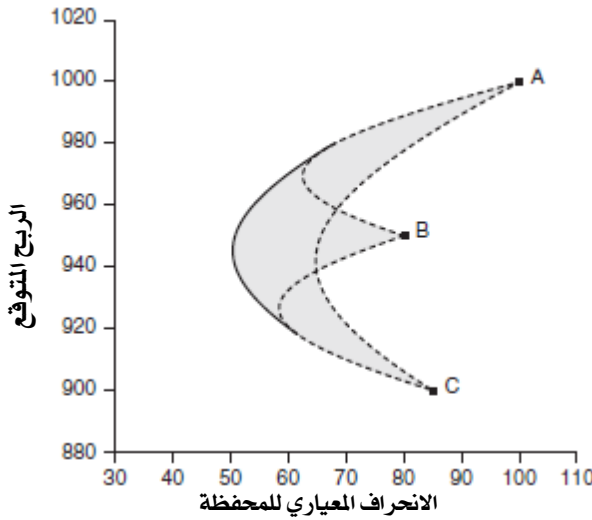
من الممكن كتابة معادلة معقدة للحل للأمثلة هذه المشكلة، ولكن بدلاً من القيام

بذلك سننظر في حل رقمي لهذه المشكلة بناء على البيانات المعطاة أعلاه. يظهر الشكل 3-2 ما يحدث لمجموعة كاملة من الاختيارات العشوائية مع استثمارات مقسمة. يظهر هذا الشكل المعاوضات المختلفة بوضوح والتي يمكن إنشاؤها: يمكننا اختيار نطاق من الانحرافات المعيارية المختلفة للمحفظة بحد أدنى 50 مع ربح متوقع بنحو 945 دولار.



الشكل 3-2: الربح مقابل الانحراف المعياري لمحاظ عشوائية

يمكننا النظر في الحدود بشكل أكثر تفصيلاً لمجموعة من الحلول المحتملة. إذا كنا سنضع أحد الاستثمارين في اعتبارنا إذا يمكننا تحديد الربح المتوقع مقابل الانحراف المعياري، لدينا منحنى يصل بين النقطتين. في هذا المثال يوجد ثلاث منحنيات بناء على ما هو زوج الاستثمارات الأساسية المختارة. هذه هي الخطوط المتقطعة في الشكل 2-4 والمنطقة المظلمة بشكل طفيف تعبر عن مجموعة من النتائج المحتملة من محافظ مختلفة. الخط المتصل هو الحد في ضوء الانحراف المعياري الأدنى الذي يمكن تحقيقه من خلال أي قيمة معطاه للربح المتوقع العام. على سبيل المثال، النقطة عند الربح المتوقع 960 وانحراف معياري عند 3.95 هو أفضل احتمال لهذا الربح ويمكن تحقيقه من خلال $W_A = 0.3924$ و $W_B = 0.1924 = W_C$ و 0.4152 .



الشكل 4-2: حدود المنطقة التي يمكن تحقيقها من خلال محفظة من ثلاثة استثمارات

4-3-2 عندما تتبع المخاطرة توزيع طبيعي

مناقشنا في مخاطر المحافظ حتى الآن تناولت الانحرافات المعيارية للربح الإجمالي (تم الحصول عليه من خلال متغيرات عشوائية). هناك افتراض مهم حول استقلالية الاستثمارات المختلفة ولكن لا يوجد افتراض حول التوزيعات. حينما يكون التوزيع معروف، وحينما يمكننا القول المزيد حول المخاطر المنطوية وبالأخص يمكننا حساب احتمالية الحصول على نتائج أسوأ من المستوى القياسي.

التوزيع الأكثر أهمية وهو النظر في التوزيع الطبيعي. وتنبع أهميته من الطريقة التي يقارب بها نتيجة متغيرات عشوائية مختلفة مهما كان توزيعهم الأصلي. هذه هي نظرية الحد المركزي التي تم مناقشتها في الملحق (A): دروس حول نظرية الاحتمالات. وفي الوقت نفسه، فإن التوزيع الطبيعي سهل العمل لأن مجموع متغيرين عشوائيين أو أكثر لكل منهما مع توزيع طبيعي له أيضا توزيع طبيعي. إذا كان توزيع الأرباح يتبع توزيع عادي، يمكننا استخدام الجداول أو جدول بيانات لحساب أي من الاحتمالات التي قد نحتاج إليها.

مثال 2-5 حساب الاحتمال مع توزيعات عادية

انظر في مثال يكون في استثمارين مختلفين، لهم توزيع عادي للربح بعد عام واحد. الأول لديه ربح متوقع قدره 1000 دولار مع انحراف معياري قدره 400 دولار والثاني لديه ربح متوقع 600 دولار مع انحراف معياري قدره 200 دولار. إذا احتفظنا بهذين الاستثمارين، ما هو احتمال خسارتنا الأموال؟ بدون معلومات عن توزيع الربح، لا يتم تحديد هذا الاحتمال، ولكن مع العلم بأن الأرباح تتبع التوزيع الطبيعي يصبح من السهل الإجابة على السؤال. مجموع العائدين هو أيضا توزيع طبيعي بمتوسط قدره 1000 دولار + 600 دولار = 1600 دولار، ونظرًا لأنهم مستقلين فإن الانحراف المعياري هو:

$$\sqrt{400^2 + 200^2} = \sqrt{200000} = 447.21$$

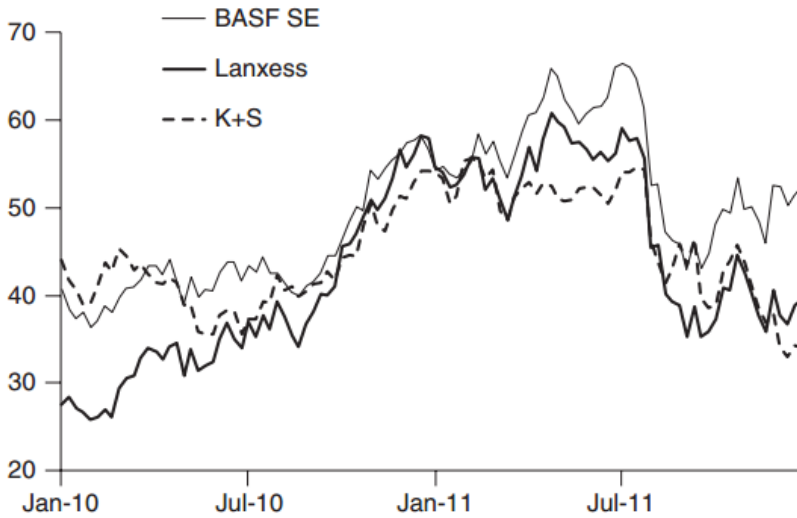
احتمالية الحصول على قيمة أقل من 0 دولار يمكن الحصول عليها من خلال الجدول (هو احتمال أن يكون أكثر من الانحرافات المعيارية z عن المتوسط، حيث $z = 1600 / 3.5777 = 447.21$) أو، ببساطة أكثر، باستخدام الدالة نورمديست NORMDIST في جدول بيانات. على وجه التحديد لدينا نورمديست (0، 1600، 447.21، 1) = 0.00017329.

4-2 تأثير الارتباط

ناقشنا الطريقة التي يمكن من خلالها تقليل المخاطرة من خلال التنويع ولكن يجب أن يكون هذا التنويع دقيق. يمكن أن تسوء الأمور في حال كان هناك علاقة قوية بين الاستثمارات المختلفة. لإيضاح تلك النقطة، تخيل وجود مستثمر يرغب في الاستثمار في أسهم قطاع كيمياويات في ألمانيا. وهناك ثلاثة أمثلة بهذا الصدد K+S AG، التي تعد موردا رئيسيا للبوتاس للأسمدة وأيضاً أكبر منتج للملح في العالم؛ لانكسيس AG، هي شركة ألمانية متخصصة في المواد الكيميائية وكانت في الأصل جزءاً من شركة باير. وأخيراً BASF SE، وهي أكبر شركة للمواد الكيميائية في العالم. كل هذه الشركات هي جزء من مؤشر داكس الألماني.

يظهر الرسم 2-5 سعر السهم على الإطار الزمني الأسبوعي (المصدر Yahoo) للثلاث

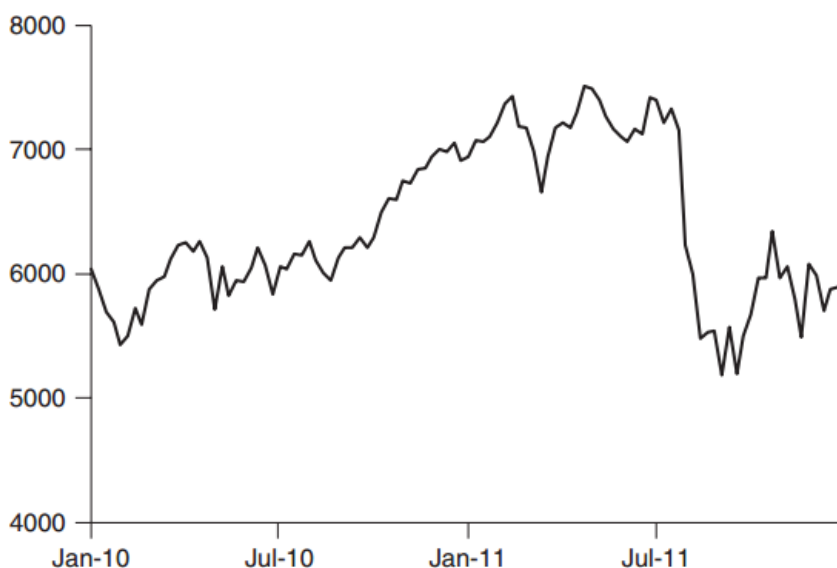
أسهم لفترة عامين بداية من 2010. وجود علاقة قوية بين أسعار الأسهم ليس مفاجئًا. بالنظر إلى الرسم البياني، يمكن أن نلاحظ ارتفاعهم خلال النصف الثاني من عام 2011 وتراجعهم فيما بعد بشكل ملحوظ خلال يوليو 2012. ولهذا فإن الاستثمار في محفظة تتكون من تلك الأسهم بالتساوي لن يختلف كثيرًا عن الاستثمار في سهم واحد منهم بسبب تشابه سلوكهم السعري بشكل كبير خلال تلك الفترة، ولهذا فإن تنويع الاستثمار بهذا الشكل لن ذو فائدة كبيرة.



الشكل 5-2: أسعار الأسهم الثلاثة بقطاع الكيماويات الألماني: أسعار الأسهم على الإطار الزمني الأسبوعي باليورو.

ففي حقيقة الأمر، العلاقة الأساسية هنا لا ترتبط بصناعة الكيماويات ولكن بتحريك سوق الأسهم الألماني بوجه عام، كما واضح في الشكل 2-6 الذي يبين السلوك السعري لمؤشر داكس الألماني خلال نفس الفترة.

في هذا الجزء ننظر في الطريقة التي تؤثر بها طريقة ارتباط المتغيرات العشوائية على السلوك العام. ويحظى هذا الموضوع بأهمية كبرى حينما يتم تقييم المخاطر بشكل عملي، ولكن أيضا من الأفضل التعامل معها من خلال بعض الأدوات الرياضية أكثر تعقيدا من المستخدمة في بقية هذا الكتاب (وخاصة المصفوفة الجبرية). ولذا فإننا سوف نعالج الأمر بشكل أكثر شمولاً هنا.



الشكل 6-2: مؤشر الداكس الألماني خلال الفترة ما بين 2010 و2011.

1-4-2 استخدام التباين في الجمع بين المتغيرات العشوائية

يظهر الشكل 7-2 المتوسط الشهري للأسعار على مدار 20 عام، بداية من عام 1980 الرصاص والنحاس في بورصة لندن للمعادن. لوحظ أن أسعار هاتين السلعتين بنهاية هذه الفترة في ديسمبر 1999 لم تختلف كثيراً عن يناير 1980. على افتراض أننا نعرف أنه يجب علينا شراء كمية معينة من الرصاص والفضة في سنة ما. تكمن المخاطرة في السعر الإجمالي لعملية الشراء. بناء على نقاشنا السابق، في حال كانت أسعار كلاً منهما مستقلة عن

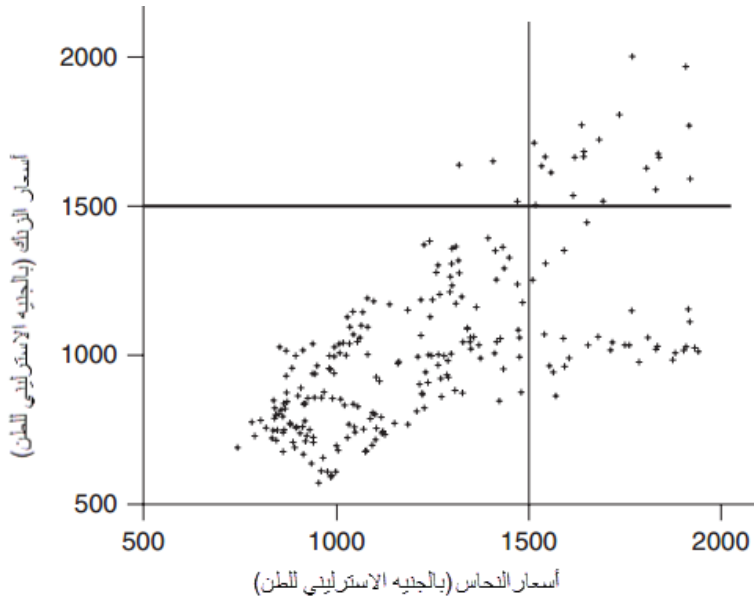
الأخرى فالمخاطرة المرتبطة بعملية الشراء الإجمالية ستكون أقل مقارنة بشراء واحدة فقط منهما حيث أن ارتفاع أسعار أحدهما يمكن أن يوازنه تراجع أسعار الأخرى. لكن الشكل 2-7 يظهر أن هناك علاقة قوية بين المتغيرين ولهذا الاستفادة من التنوع سيكون ضعيفاً.

لكي نكون أكثر تحديداً، نفترض أننا نرغب في شراء طن من الفضة وطنين من الرصاص (أرخص ثمناً). النهج الجيد للتفكير في هذا هو تعرّف النقاط التي لها نفس القيمة لـ $X+2Y$ وكلها تقع على خط مستقيم على (X, Y) . ولهذا إذا نظرنا إلى السعر الشهري لشراء طن واحد من الفضة وطنين من الرصاص ستكون التكلفة 1900 جنيه إسترليني سواء كان سعر الفضة (A) 1500 جنيه إسترليني وسعر الرصاص 200 جنيه إسترليني أو كان سعر الفضة (B) 500 جنيه إسترليني وسعر الرصاص 700 جنيه إسترليني. ويعد نفس السيناريو صحيحاً لأي نقطة تقع على خط مستقيم بين هاتين النقطتين. يوضح الشكل 2-8 الأسعار مجمعة التي تؤدي إلى نفس السعر العام لعملية الشراء. التأثير سيكون إسقاط المجمعات الشهرية على الخط المتصل. اختيار الخط المتصل هنا لا يهم: عادة يعني الإسقاط رسم تفصيلي على الخط والذي هو زاوية صحيحة للخط المتقطع للأسعار المساوية ككل، ولكن في هذه الحالة هناك اختيارات أخرى للخط المستقيم ويؤدي فقط إلى التحجيم الخطي للنتائج.

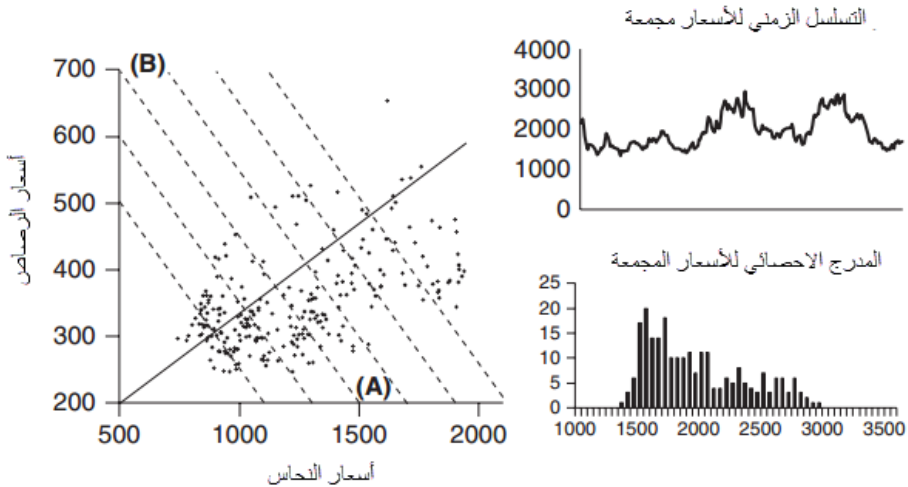
الجزء الأيمن من الشكل 2-8 يظهر كيف يتغير سعر طن واحد من الفضة وطنين من الرصاص على مر الزمن معاً مع المدرج الإحصائي للأسعار. لاحظ كيف كيفية انتشار هذا التوزيع: التغير كبير والتوزيع نفسه لا يظهر شكل جيد للتوزيع العادي.

هذا هو التباين الذي يقيس مدى ارتباط هاتين السلسلتين من البيانات. القيم الإيجابية للتغاير تتوافق مع ارتباط إيجابي، وسوف يكون التباين صفراً إذا كان المتغيران مستقلان. تذكر أن التباين بين المتغيرين العشوائيين X و Y هو

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$



الشكل 7-2: أسعار الرصاص والفضة من 1980 إلى 2000



الشكل 8-2: توزيع الأسعار لطن واحد من الفضة وطنين من الرصاص

إذا كنا مهتمين في فهم خصائص محفظة من الأوزان w_X و w_Y إذا يمكننا استخدام التباين بين X و Y لإيجاد تباين المحفظة (لمزيد من التفاصيل حول الصيغة هنا، انظر الملحق أ: دروس حول نظرية الاحتمالية).

$$\text{var}(w_X X + w_Y Y) = w_X^2 \text{var}(X) + w_Y^2 \text{var}(Y) + 2w_X w_Y \text{cov}(X, Y).$$

يمكننا أن نرى كيف يعمل هذا على مثال الرصاص والنحاس. متوسط سعر النحاس يساوي 1231.16 دولار والانحراف المعياري هو 31240 دولار (مما يعني تباين قدره 97 590.80). متوسط سعر الرصاص يعني 35099 دولار والانحراف المعياري هو 69،65 دولار (مما يعني تباين قدره 4851.55). ترتبط مجموعتا الأسعار بشكل إيجابي مع التباين 11 281.00. وعليه، فإن الصيغة تعني أن الفرق بين 1 طن واحد من النحاس و 2 طن من الرصاص هو

$$97\ 590.80 + 4 \times 4\ 851.55 + 4 \times 11\ 281.00 = 162\ 121.00,$$

مما يعطي انحرافا معياريا قدره 402.64 دولار. وإذا كان السعران مستقلان، فإن المصطلح الثالث لن يظهر ولكان الانحراف المعياري الإجمالي يساوي 342.05 دولارا.

2-4-2 محفظة بحد أدنى من التباين مع التغيرات

يمكننا تغيير تركيزنا من التفكير في توزيع القيم لشراء مجموعة معينة إلى تحديد كيف يمكننا أن نستثمر إذا كان بإمكاننا اختيار المحافظ بدلاً من الأصول المرتبطة ببعض. لنفترض أن الأسعار الأولية هي X_0 و Y_0 وسوف نبيع بعد سنة واحدة بالأسعار X و Y . كيف يمكننا تقسيم المبلغ الاستثماري المتاح W ؟ سيعتمد القرار هنا على العلاقة بين أسعار الشراء X_0 و Y_0 والقيم المتوقعة لـ X و Y . للقضاء على مسألة العائدات النسبية المختلفة، دعونا نفترض أن μ_X ، القيمة المتوسطة لـ X ، هي مضاعفات معينة من X_0 ، و μ_Y ، القيمة المتوسطة لـ Y ، هي نفس مضاعفات Y_0 ، لذلك $\mu_X = kX_0$ و $\mu_Y = kY_0$. وبالتالي، فإن النتيجة المتوقعة من هذا الاستثمار بعد سنة واحدة هي أن الاستثمار الأولي مضروباً في k بغض النظر عن كيفية تقسيم الاستثمار بين X و Y . في هذه الحالة من المنطقي للاستثمار

بطريقة تقلل من التباين في العائد. نظرا لشراء وحدات من w_X من الأصول X سيكون المتبقي لدينا $W - w_X X_0$ للاستثمار. وهذا يعني أننا يمكن شراء وحدات w_X من الأصول Y حيث

$$w_Y = (W - w_X X_0) / Y_0$$

إذا تبيان المحفظة سيكون

$$w_X^2 \text{var}(X) + (W - w_X X_0)^2 \text{var}(Y) / Y_0^2 + 2w_X (W - w_X X_0) \text{cov}(X, Y) / Y_0,$$

والتي (باستخدام حساب التفاضل والتكامل) يمكن أن نظهرها بالحد الأدنى

$$2w_X \text{var}(X) - 2X_0(W - w_X X_0) \text{var}(Y) / Y_0^2 + (-2X_0 w_X + 2(W - w_X X_0)) \text{cov}(X, Y) / Y_0 = 0.$$

وبعد تبسيطها نحصل على

$$w_X \text{var}(X) - X_0(W - w_X X_0) \text{var}(Y) / Y_0^2 + (W - 2w_X X_0) \text{cov}(X, Y) / Y_0 = 0,$$

ويمكن أن نحل ذلك لإيجاد w_X التي تقلل التباين:

$$w_X = \left(\frac{W}{Y_0} \right) \frac{(X_0 / Y_0) \text{var}(Y) - \text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X) + (X_0^2 / Y_0^2) \text{var}(Y) - 2(X_0 / Y_0) \text{cov}(X, Y)}.$$

المثال 2-6 أوزان الحافظة المثلى مع التباين

ننظر مرة أخرى في مثال أسعار الرصاص والنحاس. افترض أن نرغب في استثمار 1000 دولار، والأسعار الحالية للرصاص والنحاس هي في المتوسط لفترة 20 عاما المبينة في الشكل 2-7، لذلك X_0 (للنحاس) هو 1231.16 دولار و Y_0 (للرصاص) هو 350.90 دولار. $\alpha = X_0 / Y_0 = 3.51$. ثم نحصل على أن الوزن الأمثل للمحفظة في النحاس نحصل عليه من خلال

$$\begin{aligned}
 w_{\text{النحاس}} &= \left(\frac{W}{Y_0} \right) \frac{\alpha \text{var}(\text{الرمصاص}) - \text{cov}(\text{النحاس الرصاص})}{\text{var}(\text{النحاس}) + \alpha^2 \text{var}(\text{الرمصاص}) - 2\alpha \text{cov}(\text{النحاس الرصاص})} \\
 &= \left(\frac{1000}{350.99} \right) \frac{3.51 \times 4851.55 - 11281.00}{97590.80 + (3.51)^2 \times 4851.55 - 2 \times 3.51 \times 11281.00} \\
 &= 0.2095, \\
 w_{\text{الرمصاص}} &= \frac{W - w_{\text{النحاس}} \mu_{\text{النحاس}}}{\mu_{\text{الرمصاص}}} = \frac{1000 - 0.2095 \times 1231.16}{350.99} = 2.1142,
 \end{aligned}$$

مع إنفاق $1231.16 \times 0.2095 = 257.93$ دولار على النحاس و $350.99 \times 2.1142 = 742.06$ دولار على الرصاص (أقل من 1000 دولار بسنت واحد الذي اختفى في تقريب هذه الحسابات).

وقد تعطي نتيجة هذه الحسابات قيمة سالبة لأحد الأوزان w_X أو w_Y . وهذا يعني ضمناً فائدة من بيع سلعة واحدة لشراء المزيد من السلع الأخرى. وقد تكون عملية القيام بذلك متاحة في السوق: فبالنسبة إلى مفهوم التمويل، يكون هذا المبلغ لبيع سلعة واحدة وشراء الأخرى. ولكننا لن نتناول هذه الفكرة هنا.

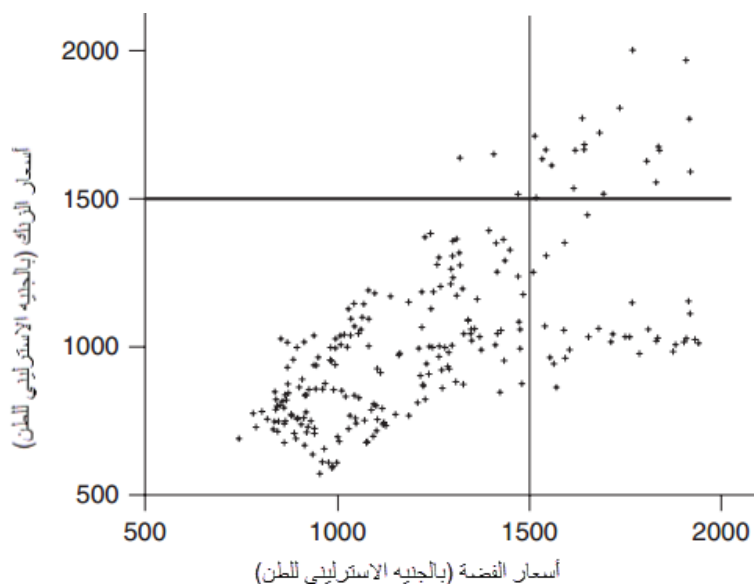
لقد رأينا كيف أن الارتباط الإيجابي بين استثمارين يقلل من منافع التنوع على المخاطر إذا تم الاحتفاظ بالاستثمارات. بالضبط نفس الشيء يحدث مع أكثر من استثمارين.

3-4-2 الحد الأقصى للمتغيرات التي ترتبط ارتباطاً إيجابياً

ننظر الآن في السيناريو الآخر الذي تكون فيه القيمة القصوى لمتغيرين عشوائيين محل اهتمام (بدلاً من مجموعهما)، ونرى كيف يؤثر الارتباط الإيجابي على هذا المقياس.

احتمالية أن يكون X و Y أقل من z تعطى بواسطة $F_X \times F_Y(z)$ إذا كان المتغيران مستقلان. سيكون الاحتمال أكثر من ذلك إذا كانت مترابطة بشكل إيجابي، حيث أن انخفاض قيمة أحدهما مرجح أن تكون بالتزامن مع انخفاض قيمة الأخرى. وبالتالي، إذا حددنا $U = \text{الحد الأقصى}(Y, X)$ إذاً

$$\begin{aligned}
 F_U(z) &= \Pr(\max(X, Y) < z) \\
 &> F_X(z) \times F_Y(z).
 \end{aligned}$$



الشكل 9-2: كيف يؤثر الارتباط على المخاطر للحد الأقصى لأسعار الزنك والفضة؟

يمكننا أن ننظر إلى هذا بطريقة أخرى ونقول أن احتمال أن تكون قيمة U أعلى من قيمة ما تقل عندما ترتبط X و Y ارتباطاً إيجابياً.

لرؤية كيف يمكن أن يكون هذا المثال، ننظر في السلوك السعري لأسعار الزنك والفضة في الشكل 9-2. نؤكد مرة أخرى على أن تلك الأسعار على الإطار الزمني الشهري على مدار 20 عامًا بداية من عام 1980. ارتفعت أسعار الفضة أعلى 1500 دولار للطن في 51 مناسبة من أصل 240 بينما ارتفعت أسعار الزنك أعلى من ذلك في 24 مرة. ولهذا (بالتقريب) $F_{\text{الفضة}}(1500) = 240/189 = 0.7875$ $F_{\text{الزنك}}(1500) = 240/216 = 0.9$. إذا كانوا مستقلين فإن $F_U(1500) = 0.7875 \times 0.9 = 0.709$. ونتوقع $170 = 240 \times 0.709$ مرة يكون فيها أعلى سعرين دون 1500 و 70 عندما تكون أعلى من 1500. في الواقع هناك ثلاث مناسبات فقط كان فيها سعر الزنك أعلى من 1500 والنحاس أقل من ذلك، مما يعني أن المجموع $51 + 3 = 54$ مناسبة عندما الحد الأقصى

للاثنين أعلى من 1500 (أقل بكثير مما قد نتوقعه عند 70 في حال كانوا مستقلين). وهكذا، في هذه الحالة، أدى الترابط بين السعرين إلى الحد من مخاطر ارتفاع الحد الأقصى بشكل قوي، وهو عكس ما يحدث عند النظر إلى مجموع (أو متوسط) الأسعار.

4-4-2 متعدد المتغيرات الطبيعية

وإذا لم تكن الكميات المختلفة مستقلة، فإن الحساب المفصل لاحتمالية القيمة المرتفعة، إما للمجموع أو الحد الأقصى، لن يكون ممكناً ما لم نعرف أكثر من مجرد التغير بينهما. نموذج واحد يمكننا أن ننظر فيه وهو متعدد المتغيرات الطبيعية. كما يمكننا حساب الاحتمالات الدقيقة من المتوسط والانحرافات المعيارية وحدها عندما يكون التوزيع الأساسي للمخاطر عادياً، يمكننا أن نفعل الشيء نفسه عندما يكون التوزيع المشترك هو متعدد المتغيرات الطبيعية بشرط أن نعرف الوسائل والانحرافات المعيارية والتغايرات.

$$f(x, y) = K \exp \left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \right) \right),$$

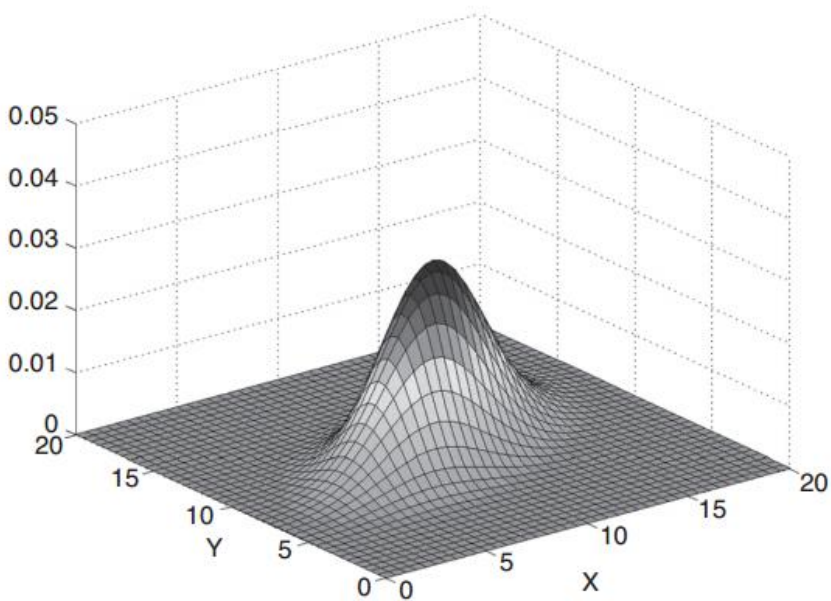
حين يكون

$$K = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \text{ and } \rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

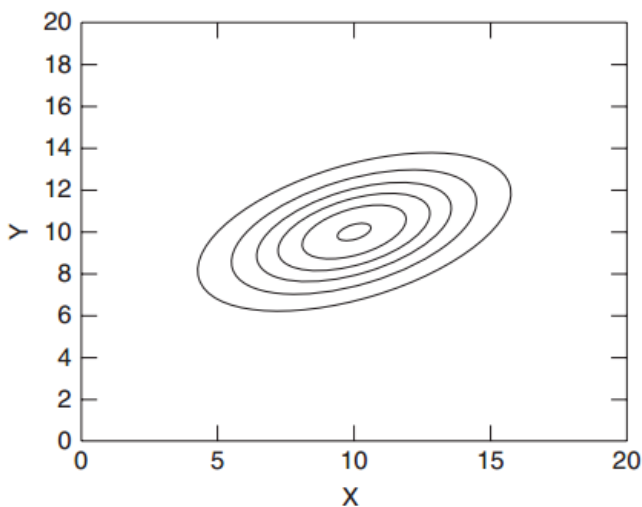
(K ثابت التطبيع و ρ هو الارتباط بين X و Y). وتظهر الأرقام مثلاً مع $\mu_X = \mu_Y =$

10 و $\sigma_X = 3$ و $\sigma_Y = 2$ و $\rho = 0.5$. المخططات كلها محذوفة في الشكل 2-11.

واحدة من أهم خصائص متعددة المتغيرات الطبيعية هو أن أي تركيبة خطية من المتغيرات لديها أيضاً التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات. فمن السهل أن نتصور أن أي شريحة عمودية مستقيمة من خلال دالة الكثافة في الشكل 2-10 من شأنه أن يعطي منحني التوزيع العادي على شكل جرس. ولكن هذا الشكل يظهر شيئاً مختلفاً، لأنه ينطوي على نوع من الإسقاط وصولاً إلى خط مستقيم الذي وصفناه في الشكل 2-8.



الشكل 10-2: دالة الكثافة للتوزيع العادي ثنائي التغير.



الشكل 11-2: مخطط كثافة التوزيع العادي ثنائي التغير.

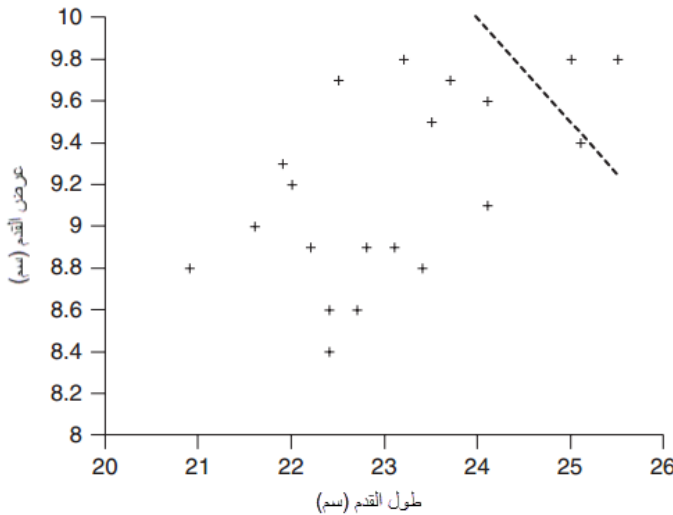
مثال 2-7 أحذية الأطفال ومجموعات خطية من القيم

ننظر في الشركة المصنعة لأحذية الأطفال المهتمة في توزيع أحجام قدم الأطفال (العرض والأطوال). ويوفر الجدول 2-2 البيانات التي تم جمعها لـ 20 صبيا من الصف الرابع.

ويبين الشكل 2-2 حقل توزيعي للبيانات الواردة في الجدول 2-2. نجد أن متوسط الطول هو 23.105 (عينة الانحراف المعياري = 1.217) ومتوسط العرض هو 9.19 (نموذج الانحراف المعياري = 0.452). التباير هو 0.299. إذا كنا نتناسب مع متعدد المتغيرات العادية، فإننا نتوقع أن توزيع أي مزيج من الارتفاع والعرض أمر طبيعي أيضا.

الجدول 2-2 بيانات أحجام أقدام الأطفال

العرض	الطول	العرض	الطول	العرض	الطول	العرض	الطول
9.6	24.1	8.9	23.1	8.4	22.4	8.8	20.9
9.1	24.1	9.8	23.2	8.6	22.4	9.0	21.6
9.8	25.0	8.8	23.4	9.7	22.5	9.3	21.9
9.4	25.1	9.5	23.5	8.6	22.7	9.2	22.0
9.8	25.5	9.7	23.7	8.9	22.8	8.9	22.2



الشكل 2-12: بيانات أحجام الأقدام لعشرين ولد بالصف الرابع

على سبيل المثال، (الطول) + 2 × (العرض) يجب أن يكون توزيع عادي مع متوسط $41.485 = 9.19 \times 2 + 23.105$. بكتابة L و W لمتغيرين عشوائيين، التباين $L + 2W$ هو

$$\text{var}(L) + 4 \text{var}(W) + 4 \text{cov}(L, W) = 1.2172 + 4 \times 0.4522 + 4 \times 0.299 = 3.494,$$

بانحراف معياري $\sigma = \sqrt{3.494} = 1.869$. يمكننا من خلال ذلك حساب احتمالية الحصول على نطاقات مختلفة من القيم لهذا الجمع الخطي. على سبيل المثال، نفترض أننا نرغب في توقع احتمالية أن يكون هناك فرد لديه $L+2W$ قيمة أعلى من 44 سم. هذا يتوافق مع الخط المتقطع في الشكل 12-2. قيمة z هي $z = (44 - 41.485) / 1.869 = 1.346$. في إطار الافتراض العادي هذا يعني احتمال $1 - \Phi(1.346) = 0.9108 - 1 = -0.0892$ لتحقيق هذه القيمة. هنا، Φ تمثل دالة التوزيع التراكمي للتوزيع العادي $N(0, 1)$ القياسي. وبالنظر إلى العشرين ملاحظة فهذا من شأنه أن يقودنا إلى توقع حوالي 1.8 من الأفراد بهذه الشروط. في الواقع، ننظر في شخصين - يتوافقون بشكل كبير مع توقعاتنا.

القيمة في نموذج واضح يمكن أن تساعدنا في جعل التوقعات حول احتمالية الأحداث الواقعة في أوقات معينة (أو التي لا تقع أبدًا) يمكن النظر فيها. فعلى سبيل المثال، في مثال أحذية الأطفال يمكن أن نتوقع احتمالية أن يكون هناك فرد نتيجه المركبة أعلى من 4.5 والتي لا تحدث في المجموعة المكونة من عشرين فرد هنا. بالرغم من ذلك، يجب أن نكون حذرين من استقراء ما هو أبعد من البيانات التي لاحظناها، ومن الممكن أن يفشل التقريب الطبيعي لمتعدد المتغيرات كمؤشر للتائج الأكثر شذوذاً. وسوف نتناول هذا بالمزيد من التفصيل في الفصل الرابع حول وضع نموذج منحنيات التوزيعات.

مثال عملي 2-8 متغير واحد أكثر من x مرة أعلى من الآخر

نعود إلى مثال النحاس والرصاص من الشكل 2-7. نعلم بالفعل أنه بالنسبة لهذه البيانات متوسط سعر النحاس يساوي 1231.16 دولار والانحراف المعياري 312.40 دولار؛ متوسط سعر الرصاص يساوي 99,350 دولار والانحراف المعياري 65,69 دولار ويساوي التباين للسعرين 11 281.00. لنفترض أن التوزيع هو متعدد المتغيرات الطبيعية. ما هو احتمال أن يكون سعر النحاس أكثر من خمسة أضعاف سعر الرصاص؟

الحل

سنرمز للنحاس بالرمز X و Y لسعر الرصاص. نريد إيجاد احتمالية أن يكون $X > 5Y$. ولهذا، إذا افترضنا أن $W = X - 5Y$ سنريد أن تكون احتمالية $W > 0$. وفي ضوء افتراضية التوزيع المتعدد التغيرات، W هو متغير عشوائي طبيعي بمتوسط وتباين كالآتي:

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X) - 5E(Y) \\ &= 1231.16 - 5 \times 350.99 = -523.8, \\ \text{var}(W) &= \text{var}(X) + 25 \text{var}(Y) - 10 \text{cov}(X, Y) \\ &= (312.40)^2 + 25(69.65)^2 - 112810 = 106062. \end{aligned}$$

وهذا يعطي انحرافا معياريا لـ W $\sqrt{106062} = 325.7$.. بهذا المتوسط فإن الاحتمالية أكبر من 0 ستكون من خلال $1 - \Phi(325.7/523.8) = 0.0539$. في هذه البيانات هناك 7 من أصل 240 من البيانات تشير إلى نقاط عدم المساواة، مما يعطي احتمالا تجريبيا قدره 0.029، وليس أقل مما توقعه النموذج العادي متعدد المتغيرات.

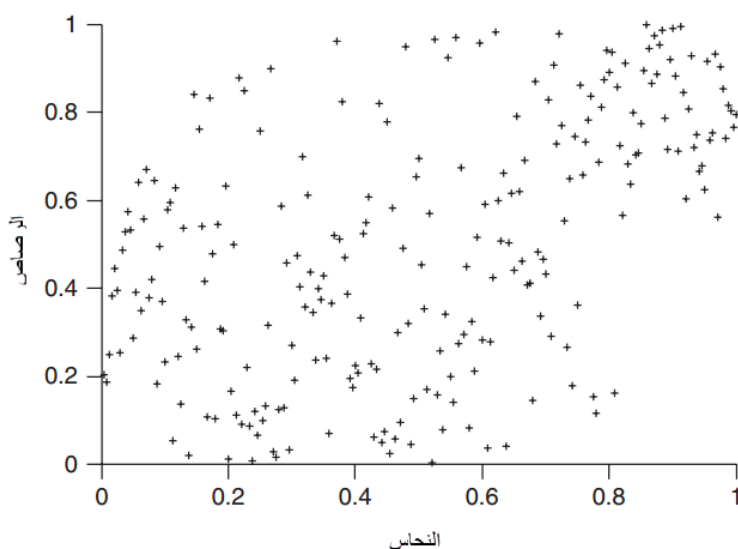
5-2 استخدام كوبولا (نظرية الاحتمالات) لنموذج التوزيعات متعددة المتغيرات

في كثير من الأحيان، تعدد المتغيرات لا يعد تقريبا جيدا لتبعية متغيرين أو أكثر، وذلك نحن بحاجة إلى البحث عن نموذج أكثر مرونة. هناك خيار جيد هو استخدام نماذج "كوبولا"، والتي تعد تطور حديث نسبيا في نظرية الاحتمالات. سنتحدث عن نموذج كوبولا ثنائي الأبعاد يصف السلوك المشترك للمتغيرين X و Y ، ولكن يمكن تطبيق نفس الطريقة على النماذج متعددة المتغيرات مع ثلاثة متغيرات أو أكثر. تتمثل الفكرة في النظر إلى توزيع قيم (x, y) المعبر عنه من حيث الموضعين x و y ضمن التوزيعات لـ X و Y على التوالي. يوفر ذلك وسيلة للتمييز بين ما يحدث نتيجة لتوزيع المتغيرات الأساسية X و Y ، وما يحدث نتيجة لتبعية متغير واحد من جهة أخرى. وهذا يعني أنه يمكننا تطبيق النموذج كوبولا نفسه لتوزيعات مختلفة من المتغيرات الأساسية.

نبدأ بالنظر مرة أخرى في بيانات أسعار الرصاص والنحاس. بدلا من النظر في رسم

بياني بالنقاط المبعثرة في الشكل 2-7 سنقوم برسم النقاط بترتيب قيمها لأسعار النحاس على المحور الأفقي وترتيب قيمها لسعر الرصاص على المحور الرأسي. هناك 240 نقطة وسنضع قياس للترتيب من خلال قسمة 240، بحيث يكون المقياس بين 0 و 1. ولهذا، فإن أدنى سعر للنحاس له قيمة X من $1/240$ وأعلى سعر للنحاس يترجم إلى $1 = 240/240$ (ونفس الشيء مع أسعار الرصاص). وتظهر النتيجة في الشكل 2-13، ويسمى هذا النوع من الرسم البياني برسم بياني تجريبي للترابط (كوبولا).

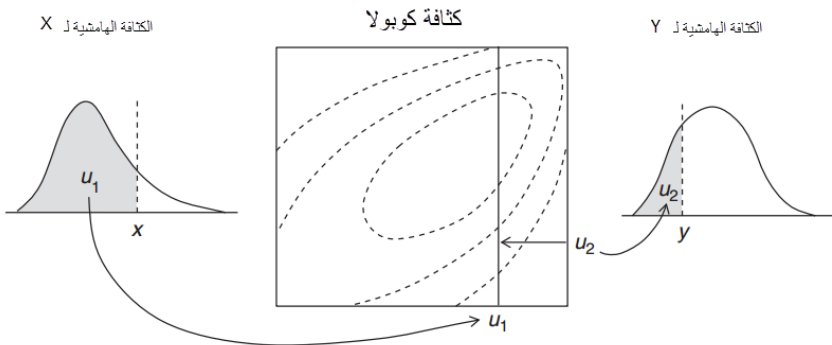
ويبين الشكل 2-13 بعض سمات البيانات بشكل أوضح من الرسم البياني الأساسي باستخدام النقاط المبعثرة في الشكل 2-7. في هذا الرسم البياني يمكننا أن نرى أن تبعية الأسعار أقوى عند الحد الأعلى بأكثر مما هي عليه عن الحد الأدنى. على سبيل المثال، يمكننا أن نرى أن سعر النحاس الذي هو في أعلى 10٪ يتوافق مع سعر الرصاص الذي هو في أعلى 40٪ (تقريباً) من القيم المحتملة. من ناحية أخرى، ومع العلم أن سعر النحاس في أدنى 10٪ من القيم المحتملة هو أقل بكثير: أن سعر الرصاص هو في أدنى 70٪ (تقريباً) من القيم المحتملة.



الشكل 2-13: رسم بياني تخطيطي تجريبي (كوبولا) لأسعار النحاس والرصاص على مدار 20 عاماً منذ 1980.

الرسم التخطيطي التجريبي باستخدام النقاط المبعثرة، هو في الحقيقة عينة من نموذج كوبولا الأساسي، وهي طريقة لوصف التبعية بين متغيرين. وكثافة كوبولا هي الدالة الأساسية التي تعطي الاحتمالات النسبية لنقاط مختلفة تحدث في المربع $(0, 1) \times (0, 1)$. قد نتوقع أن تكون تلك الكثافة لكوبولا على نحو سلس وسلوك جيد، ولكننا سوف نقوم بعمليات خصم على أساس عينة منه. ومن المفيد أن نفكر في نموذج كوبولا كجزء من تحليل توزيع ثنائي المتغير. والفكرة هي أن تأخذ التوزيع العام للقيمتين معا وتقسم هذا من خلال النظر في توزيع كل قيمة على حدة. وغالبا ما تسمى هذه العملية بالتوزيعات المهمشية. ويصف نموذج كوبولا الطريقة التي توضع بها التوزيعات المهمشية معا في التوزيع الكلي.

إذا كان لدينا التوزيعات المهمشية (على سبيل المثال، لأسعار النحاس والرصاص) ودالة كوبولا التي تربط بينهما، ثم عملية توليد عينة لتوزيع ثنائي المتغير الكامل موضح في الشكل 14-2. نأخذ عينة، x ، من توزيع النحاس وفقا للتوزيع هامشي. لنفترض أن له نسبة u_1 من التوزيع دونه، ثم ننظر إلى الكثافة كوبولا على خط عمودي من خلال النقطة u_1 على المحور الأفقي واستخدام هذه الكثافة لعينة نقطة U_2 . هذا سوف يعطي نسبة من أسعار الرصاص تحت نقطة العينة المطلوبة لدينا ويمكن تحويلها إلى سعر الرصاص Y . ثم يكون للزوج (y, x) التوزيع المشترك الصحيح.



الشكل 14-2: التجزئة باستخدام كوبولا. عينة x أولا، ثم عينة من كوبولا للحصول على u_2 ، والتي يتم إيجاد Y من خلالها.

الشيء المهم حول كوبولا هو أنه يمكن أن يشير إلى توقيت زيادة التبعية. فهي نماذج مرنة بما فيه الكفاية للتعامل بشكل مختلف مع منحنيات التوزيع أكثر من الأجزاء المركزية. والسؤال الجيد الذي يجب طرحه عند التعامل مع البيانات متعددة المتغيرات التي تتضمن بعض الارتباط هو، ما إذا كان الارتباط سيكون أكبر أو أقل بقيم شاذة. قد يكون طرح هذا السؤال أسهل الإجابة عليه، ولكن إعارته اهتماماً سوف يضمن تجنب بعض المخاطر المهمة لإدارة المخاطر على الأقل. على سبيل المثال، إذا كان هناك متغيران يرتبطان ارتباطاً ضعيفاً مع تغاير قريب من 0، فربما نستنتج أن تأثير التنوع سيعني وجود انخفاض كبير في مخاطر متوسط قيمهم (على سبيل المثال، تقسيم محفظة متساوية بينهما) خاصة. وهذا عادة ما يكون استنتاجاً صحيحاً، ولكنه سيفشل إذا كان الترابط بينهما منخفضاً جداً، إلا في النقاط التي تحمل قيم كبيرة للغاية، عندما تصبح مترابطة ارتباطاً وثيقاً. وفي هذه الحالة فإن خطر أن يصبح متوسطها كبيراً جداً سيكون قريباً من خطر أن يصبح المتغير الفردي كبيراً، ومنافع التنوع التي قد نتوقعها لن تحدث.

المشكلة المتعلقة بإنشاء بيانات حول العلاقة في المنحنيات هي أن هذه الأحداث نادرة الحدوث، ولهذا من غير المرجح وجود أدلة تاريخية لتوجيهنا. يجدر التفكير في الأسباب الكامنة وراء القيم الكبيرة جداً في واحد أو آخر من المتغيرات. على سبيل المثال، النظر في العلاقة بين اثنين من الأسهم على حد سواء ببورصة نيويورك، مثل أمازون وفورد. وهي أسهم تتأثر بمعنويات السوق والظروف الاقتصادية العامة، وهذا سيؤدي إلى وجود ارتباط بين أسعارهما. ولكن هل سيتم تضخيم هذا الارتباط عندما ينخفض أحدهم بشكل حاد؟ على سبيل المثال، هل تعلم أن سعر سهم أمازون قد انخفض بنسبة 30% في يوم واحد في المقابل يعطي مزيد من المعلومات حول سعر سهم فورد أكثر من معرفة أن سعر سهم أمازون قد انخفض بنسبة 15%؟

ربما يكون الانخفاض المفاجئ في الأسعار بنسبة 30% في يوم واحد ناجم عن عوامل محددة جداً (مثل إعلان الأرباح) وأقل عرضة للارتباط بالعوامل العامة (مثل انهيار السوق) التي من شأنها أن تؤدي إلى انخفاض في سعر سهم فورد أيضاً. وأياً كانت سير

تلك العملية، كوبولا يعطينا وسيلة لنموذج حول ما يجري.

والآن نعود إلى مناقشتنا في بداية هذا الفصل حول فشل التنوع في حماية المستثمرين خلال الأزمة المالية العالمية في 2008. يمكننا أن نعتبر ذلك على أنه زيادة مفاجئة في الترابط مع زيادة الخسائر. ويعني ذلك أن تغاير التبعية بين أسعار الأصول المختلفة قد لا يكون مماثلاً بين المكاسب والخسائر. إذا تحركت بورصة وول ستريت بشكل قوي، فإن التأثير المقابل في بورصة لندن للأوراق المالية قد يكون أقل مما لو انخفضت وول ستريت بشكل حاد. هناك أدلة تجريبية جيدة لدعم فكرة هذا السلوك بالضغط. قد يرى البعض أن شعور الخوف سريع الانتشار أكثر من شعور الطمع، ولكن أياً كانت الآلية، فمن الواضح من عدد من الدراسات التجريبية أن هذا التماثل موجود. نهج كوبولا هو وسيلة جيدة لجعل هذا الأمر واضحاً، على سبيل المثال من خلال استخدام نموذج للخسائر مع منحني علوي تبعي، ولكن ليس منحني سفلي تبعي.

يناقش القسم التالي تفاصيل أكثر حول الرياضيات المستخدمة في نموذج كوبولا.

1-5-2* تفاصيل عن نموذج كوبولا

كثافة نموذج كوبولا $c(u_2, u_1)$ هي كثافة معرفة في مربع الوحدة $0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1$ مع الخاصية أن التوزيع (المهمشي) الناتج عن u_1 يكون موحداً على $[0, 1]$ ، والتوزيع ل u_2 موحد أيضاً على $[0, 1]$. يمكننا كتابة هذه الشروط كالتالي:

$$\int_0^1 c(u, u_2) du = 1, \text{ لكل } u_2 \text{ في } [0, 1],$$

$$\int_0^1 c(u_1, u) du = 1, \text{ لكل } u_1 \text{ في } [0, 1],$$

أبسط طريقة لجعل هذه الشروط قائمة هو جعل موحد الكثافة كوبولا على مربع الوحدة، بحيث $1 = c(u_2, u_1)$ لكل u_1 و u_2 .

قبل أن نتحدث عن أمثلة مختلفة لكثافة كوبولا وكيفية ارتباطها بأنواع مختلفة من

التبعية علينا أن نعرض كيفية تحويل كثافة كوبولا والمعلومات المتعلقة بالتوزيعات الأساسية في توزيع التوزيع متعدد المتغيرات ككل. للقيام بهذا سننتقل من الكثافات (التي هي أسهل في عرضها) إلى وظائف التوزيع التراكمي (والتي من السهل التعامل معها). لذلك تُعرّف كوبولا (توزيع كوبولا التراكمي) باعتبارها دالة التوزيع $C(u_2, u_1)$ من خلال دالة كثافة كوبولا $c(u_2, u_1)$. ولهذا $C(u_2, u_1)$ هي احتمالية أن كلاً من $u_1 \leq v_1$ و $u_2 \leq v_2$ عندما (u_2, u_1) يكون لها دالة كثافة c أو بشكل رسمي أكثر

$$C(v_1, v_2) = \int_0^{v_1} \left(\int_0^{v_2} c(u_1, u_2) du_1 \right) du_2.$$

ثم يتم الحصول على التوزيع التراكمي للتوزيع متعدد المتغيرات من الدالة C ودالة التوزيع الأساسية F_X و F_Y بالنسبة إلى X و Y من خلال معادلة كوبولا الأساسية:

$$\Pr(X \leq x \text{ and } Y \leq y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \quad (2.2)$$

نأخذ x و y ونحولهما إلى كميات للتوزيعات المناسبة، $F(x)$ و $F(y)$ ، ومن ثم استخدام الدالة كوبولا لتحديد احتمال وجودها في المستطيل مع (y, x) عند في الزاوية العلوية اليمنى.

لتوضيح كيفية عمل ذلك، دعونا نعود إلى كثافة موحدة لكوبولا: $1 = C(u_2, u_1)$ ويمكن تحويل ذلك إلى كوبولا

$$C(v_1, v_2) = \int_0^{v_1} \left(\int_0^{v_2} du_1 \right) du_2 = v_1 v_2,$$

لتصبح في هيئة منتج. ثم المعادلة من الشكل (2-2) يكون لدينا

$$\Pr(X \leq x \text{ and } Y \leq y) = F_X(x)F_Y(y) = \Pr(X \leq x) \Pr(Y \leq y).$$

هذا هي صيغة الاحتمال بالضبط إذا كان المتغيران مستقلان. من هذه الملاحظة نستنتج كثافة موحدة لكوبولا (أو منتج كوبولا) تعادل المتغيرات كونها مستقلة.

ويمكننا أيضاً الانتقال من كوبولا إلى كثافتها عن طريق أخذ المشتقات؛ بشكل أكثر دقة

$$c(v_1, v_2) = \partial^2 C(v_1, v_2) / \partial v_1 \partial v_2.$$

أخذ المشتقات سيتعلق بـ x و y من المعادلة (2.2) نحصل على الصيغة

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C(F_X(x), F_Y(y)) = c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y),$$

حيث f هي الكثافة المشتركة على X و Y و F_X ، F_Y هي دالة الكثافة الفردية. يمكننا إعادة كتابة هذا كالتالي:

$$c(F_X(x), F_Y(y)) = \frac{f(x, y)}{f_X(x) f_Y(y)}. \quad (3-2)$$

المعادلة هنا تظهر كيف يمكن الحصول على كثافة كوبولا من خلال دالة الكثافة العادية F من خلال رفعها إلى أماكن يكون فيها X و Y لديهم احتمالات منخفضة ونشرها في أماكن يكون فيها X و Y لديهم احتمالات مرتفعة.

استخدام كوبولا أكثر من كثافة كوبولا يجعلها أسهل من خلال التحكم في بعض المعادلات، ولكننا نريد أن نتحقق من الثلاثة خصائص المطلوبة لكوبولا من أجل تنسيق الخصائص لكثافة كوبولا:

- زيادة في كل متغير: C لا ينخفض في كل متغير، ولهذا في حال $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 1$ و $0 \leq a_2 \leq b_2 \leq 1$ ثم

$$C(a_1, a_2) \leq C(b_1, b_2)$$

- مستطيل عدم المساواة: في حال كان $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 1$ و $0 \leq a_2 \leq b_2 \leq 1$ إذا فإن احتمالية وجودها في المستطيل $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ يمكن الحصول عليه من خلال النظر في المجموعة الصحيحة لأربعة مستطيلات محتملة بزواوية 0 . بالنسبة لـ C أن تكون كثافة، فإن ذلك يجب أن يكون سالب ونشتق عدم المساواة

$$C(a_1, a_2) + C(b_1, b_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) \geq 0.$$

- التوزيع المهمشي غير الموحد: مع ملاحظة أن $C(v, 1)$ هي ببساطة احتمالية أن يكون U_1 أقل من v . ولهذا فإن الشرط هو أن يكون توزيع كلاً من u_1 و u_2 موحدتين: $C(1, 1) = 1$.
 $C(v, 1) = v$ للكل $0 \leq v \leq 1$.

من النظرة الأولى قد يبدو أنه بالرغم من أن مستطيل عدم المساواة يمكن أن يتبع حقيقة أن الكوبولا ترتفع في كل متغير ولكن ليست هذه القضية (انظر مثال 2-10).

نموذج كوبولا هو ما يمثل سلوك التبعية الواضح في توزيع متعدد المتغيرات، وهذا ما يسمى بـ كوبولا غاوسي. ترتبط كثافة كوبولا بكثافة التوزيع الطبيعي لمتعدد المتغيرات ولكن كل مكون يمكن قياسه لضمان أن الهوامش موحدة. نبدأ من خلال القيام بالحسابات التي تعمل مع دالة كوبولا (التراكمية). من خلال أسس معادلة كوبولا ودالة الكثافة. ومن خلال أسس معادلات كوبولا ودالة الكثافة لتوزيع متعدد المتغيرات مع الترابط P بالإضافة إلى كل متغير له متوسط صفري وانحراف معياري 1 يكون لدينا

$$\begin{aligned} C(F_X(x), F_Y(y)) \\ &= C(\Phi(x), \Phi(y)) = \Pr(X \leq x \text{ and } Y \leq y) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s_1^2 + s_2^2 - 2\rho s_1 s_2)\right) ds_1 \right) ds_2. \end{aligned}$$

استخدمنا هنا الرمز المعتاد الذي فيه $\Phi(x)$ مكتوب لدالة التوزيع العادي التراكمي بمتوسط صفر وانحراف معياري يساوي 1. إن الكمية المتكاملة التي تأتي من خلال متعدد المتغيرات الطبيعية مع $\mu_X = \mu_Y = 0$ و $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ للحصول على معادلة $C(v_1, v_2)$ سنطرح قيم X و Y لأي من v_1 و $F_X(x) = v_1$ و $F_Y(y) = v_2$. ولهذا سنضع $x = \Phi^{-1}(v_1)$ و $y = \Phi^{-1}(v_2)$ للحصول على

$$\begin{aligned} C(v_1, v_2) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v_1)} \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v_2)} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s_1^2 + s_2^2 - 2\rho s_1 s_2)\right) ds_1 \right) ds_2. \end{aligned}$$

الصيغة المساوية لدالة كوبولا من معادلة (3-2) هي

$$\begin{aligned} c(F_X(x), F_Y(y)) &= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\rho^2 x^2 + \rho^2 y^2 - 2\rho xy)\right). \end{aligned}$$

إذا

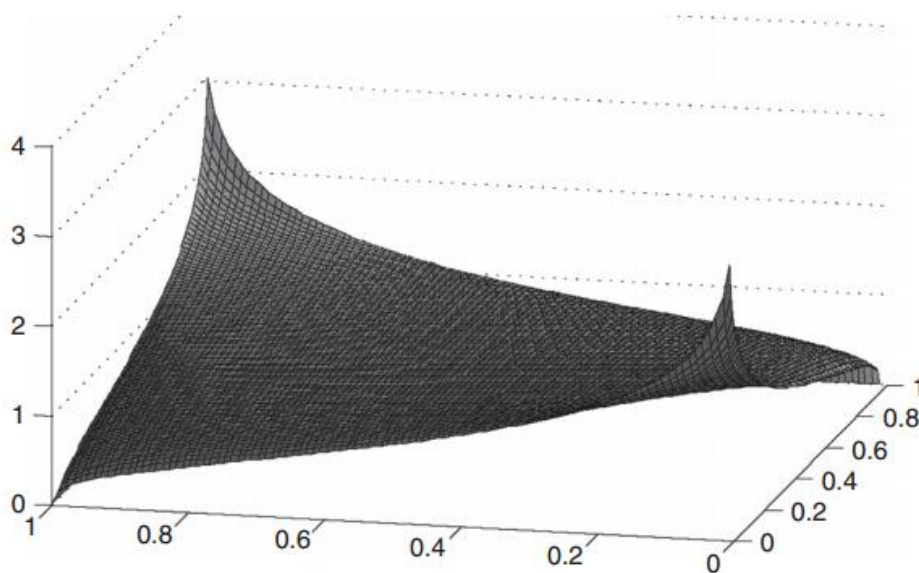
$$\begin{aligned} c(v_1, v_2) &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\rho^2 \Phi^{-1}(v_1)^2 + \rho^2 \Phi^{-1}(v_2)^2 - 2\rho \Phi^{-1}(v_1)\Phi^{-1}(v_2))\right). \end{aligned}$$

هناك عدة أشكال من هذه الصيغة لعدد أكبر من المتغيرات. لقد أصبحت من غير الشائع نوعاً ما منذ أن تم إلقاء اللوم في بعض الأوساط على استخدام الكوبولا الجوسية (Gaussian copulas) كنهج معياري في قياس المخاطر بسبب إخفاقات وول ستريت في التنبؤ بالمخاطر النظامية المرتفعة في السندات المدعومة بالرهن العقاري التي كانت سبب رئيسي في الأزمة المالية في عام 2008 (فينانسيال تايمز، S. جونز، 24 أبريل 2009) في عام 2009، نشرت صحيفة فاينانشال تايمز مقالا يناقش استخدام نماذج كوبولا الجوسية بعنوان "الصيغة التي أضرت وول ستريت".

للمساعدة في فهم صيغة كوبولا الجوسية نحن بحاجة لتحديد، ومن المفيد للغاية تحديد دالة كثافة كوبولا. هذا يعني ببساطة تحديد الدالة من خلال وحدة مربعة كما هو موضح في الشكل 15-2.

في الشكل التالي تمثل الزوايا (0, 0) و (1, 1) ما يحدث للعلاقة عندما يكون كل من المتغيرات كبير وإيجابي جداً أو كبيرة وسلبى جداً. وجود ارتباط يدفع هذه الزوايا إلى أعلى

والزوايا المعاكسة (0, 1) و (1, 0) إلى أسفل. تذكر أن هناك شروط على كثافة التكامل إلى 1 على طول الخط الذي يستقر عليه متغير ما أو آخر، لذلك يمكن اعتبار رفع زاوية واحدة موازن لدفع الزاوية المجاورة لأسفل.



الشكل 15-2: كثافة كوبولا الجوسي Gaussian copula مع $\rho = 0.25$

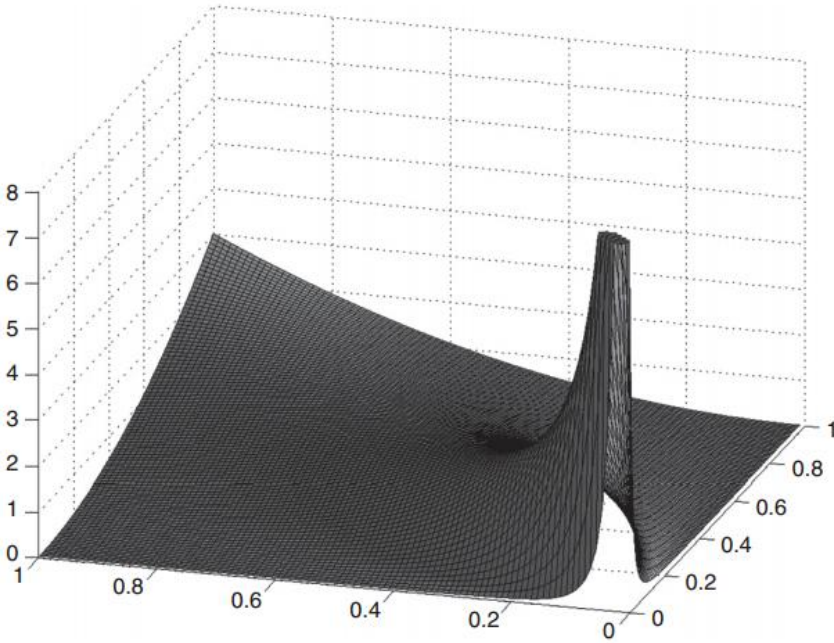
وعندما يكون $\rho = 0$ ، فإن المتغير متعدد المتغيرات له ملامح دائرية، والمتغيرات تكون مستقلة - كما ذكرنا سابقاً - وهذا يعني أن كثافة كوبولا تكون مسطحة عند القيمة 1 (التي هي بمثابة تذكير بأن خلاصات كوبولا بعيدة عن توزيعات المتغيرات الأساسية) هناك العديد من الصيغ كوبولا المختلفة التي تم توضيحها سابقاً. أحد الأمثلة على ذلك هو كوبولا كلايتون لمتغيرين، من خلال الصيغة:

$$C_{\theta}(v_1, v_2) = \left(\frac{1}{v_1^{\theta}} + \frac{1}{v_2^{\theta}} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}},$$

حيث تعد θ مقياس لأي متغير أكثر من الصفر (يمكننا جعل هذه الصيغة صحيحة

أيضًا في حال كانت θ أقل من الصفر وأكثر من -1). يوضح الشكل 16-2 كيف تكون الكوبولا عندما $\theta = 2$. تكون دالة الكوبولا كالتالي

$$c_{\theta}(v_1, v_2) = \frac{3}{v_1^3 v_2^3} \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} - 1 \right)^{-\frac{5}{2}}.$$



الشكل 16-2: كثافة كوبولا كلايتون *Clayton copula* لـ $\theta = 2$.

في الشكل، تظهر القمة عند (0، 0) علاقة ضعيفة جدا بين قيم المنحنى السفلي من التوزيعين الأساسيين. في الواقع، تم تقسيم هذه القمة بقيمة 8 لأغراض رسمها.

هناك نهج آخر يمكننا استخدامه حينما تكون المتغيرات العشوائية مرتبطة بشكل قوي عن أعلى قيم لقياس استقلالية المنحنى بشكل مباشر. الجدير بالذكر أننا نعلم أن

الاستقلال يعني أن المعلومات عن متغير واحد لا تعني أي شيء بالنسبة لمتغير آخر. لذلك يمكننا القول أن احتمال وجود X في العشرية العليا (مثال X تأخذ قيمة حينها تكون $F_X(X) > 0.9$) دون تغيير (عند 0.1 بالضبط) حتى لو كنا نعلم أيضا أن Y في عشريتها العليا أيضًا. وهكذا، مع استقلال المتغيرات

$$\Pr(X > F_X^{-1}(0.9) | Y > F_Y^{-1}(0.9)) = \Pr(X > F_X^{-1}(0.9)) = 0.1.$$

تقريب 0.9 في هذا المثال إلى 1 من شأنه أن يجعل الحد من الاحتمال الشرطي صفر. ومع ذلك، إذا كانت المتغيرات غير مستقلة، وهناك علاقة قوية بين المتغيرات عند القيم المرتفعة، فإن هذا الحد سيكون أكبر من الصفر. لاحظ أيضًا أننا يمكن إعادة كتابة هذا النوع من الاحتمال الشرطي على النحو التالي (باستخدام صيغة بايز) كما يلي

$$\begin{aligned} \Pr(X > F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_Y^{-1}(\alpha)) &= \frac{\Pr(X > F_X^{-1}(\alpha) \text{ and } Y > F_Y^{-1}(\alpha))}{\Pr(Y > F_Y^{-1}(\alpha))} \\ &= \frac{\Pr(X > F_X^{-1}(\alpha) \text{ and } Y > F_X^{-1}(\alpha))}{(1 - \alpha)}. \end{aligned}$$

هذا يحفزنا على تحديد معامل المنحنى العلوي من خلال

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \Pr(X > F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_X^{-1}(\alpha)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\Pr(X > F_X^{-1}(\alpha) \text{ and } Y > F_X^{-1}(\alpha))}{(1 - \alpha)} \end{aligned}$$

ومعامل المقابلة من تبعية المنحنى السفلي كالتالي

$$\begin{aligned} \lambda_\ell &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Pr(X \leq F_X^{-1}(\alpha) | Y \leq F_X^{-1}(\alpha)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Pr(X \leq F_X^{-1}(\alpha) \text{ and } Y \leq F_X^{-1}(\alpha))}{\alpha}. \end{aligned}$$

يمكننا القول هنا أن X و Y لديهم تبعية منحني العائد العلوي في حال $0 < \lambda u$ ولا يوجد تبعية للمنحني العلوي في حال $0 = \lambda u$. نفس التعريف ينطبق على تبعية المنحني السفلي باستخدام $\lambda \ell$ بدلاً من λu . يمكننا تحويل ذلك إلى بيان حول دالة الكوبولا بما أن

$$\lim_{a \rightarrow 0} (C(a,a)/a) = \lambda_\ell$$

يعد وجود تبعية المنحني خاصية قوية جداً، وبالتأكيد أقوى بكثير من اعتبار أن القيم المرتفعة (أو المنخفضة) للمتغيرات تفشل في اختبار التبعية. إذا كان هناك تبعية المنحني إذا كثافة كوبولا سوف تكون إلى ما لا نهاية في الزاوية المناسبة. لن نثبت ذلك بطريقة رسمية، ولكن يمكننا أن نلاحظ أن تبعية منحني سفلي فإن تعريف $\lambda \ell$ يشير إلى أن حد α الصغرى ثم $\lambda \ell \approx C(a,a)$. ولكن عند هذا الحد

$\alpha \approx 2c(\alpha, \alpha)$ سيكون لدينا $\lambda \ell / \alpha \approx c(\alpha, \alpha)$. حيث أن α تتجه للصفر، فإن الجانب على اليسار يقترب من $C(0,0)$ والجانب على اليمين يتجه إلى ما لا نهاية إلا إذا كانت $0 = \lambda \ell$.

ولهذا، يمكننا أن نستنتج أن $C(X,Y) \rightarrow \infty$ حينما يكون $x,y \rightarrow 0$ و $\lambda \ell > 0$. يمكن تطبيق ما سبق على نفس الحالة لتبعية المنحني العلوي. لذلك، في الحالات ثنائية الأبعاد يمكننا أن ننظر إلى مخطط كثافة كوبولا والحصول على نظرة جيدة عما إذا كان هناك تبعية منحني. ويشير الشكل 2-15 إلى أنه لا يوجد تبعية أعلى أو أدنى للذيل للكوبولا الجوسية لهذه القيمة من p ، ومن الشكل 2-16 نرى أنه لا يوجد تبعية منحني علوي لكوبولا كلايتون. ومع ذلك، يبدو أن تبعية منحني سفلي لهذا كوبولا، يمكننا تأكيد ذلك لكوبولا كلايتون.

$$\begin{aligned} C(\alpha, \alpha)/\alpha &= (1/\alpha) \left(\frac{1}{\alpha^\theta} + \frac{1}{\alpha^\theta} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}} \\ &= (\alpha^\theta)^{-\frac{1}{\theta}} \left(\frac{2}{\alpha^\theta} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}} \\ &= (2 - \alpha^\theta)^{-\frac{1}{\theta}} = \frac{1}{(2 - \alpha^\theta)^{\frac{1}{\theta}}}. \end{aligned}$$

$$\lambda_\ell = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{(2 - \alpha^\theta)^{\frac{1}{\theta}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{\theta}}} > 0.$$

ملاحظات

المقدمة التاريخية لنظرية الاحتمالات استمدت بشكل كبير من كتاب *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk* (ضد الآلهة): بقلم بيتر برنشتاين. "باشيولي" هو مصدر الاقتباس في بداية هذا الفصل، ويقدم برنشتاين وصفا رائعا لتاريخ نضال العلماء لإيجاد الإطار الصحيح للتعامل مع المخاطر. وتم نقل اقتباس جاكوب برنولي من ترجمة أوسكار شينين لعمله: *The Art of Conjecturing* (فن التخمين). الجزء الرابع، عرض استخدام وتطبيق العقيدة السابقة للشؤون المدنية والأخلاقية والاقتصادية.

إن مناقشتنا لنظرية الحافطة المثالية في هذا الفصل قصيرة جدا. يناقشها لونبرجر (1998) بشكل أكثر شمولية. وضع "هاري ماركويتز" النظرية في الأساس وتم نشرها لأول مرة في عام 1952؛ في عام 1990 حصل ماركويتز على جائزة نوبل في الاقتصاد عن عمله.

المراجع

- Ang, A. and Chen, J. (2002) Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of Financial Economics*, 63, 443-494.
- Bernoulli, J. *Ars Conjectandi*. Translated by Oscar Sheynin, NG Verlag, 2005.
- Bernstein, P. (1996) *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*, John Wiley & Sons.
- Chua, D., Kritzman, M. and Page, S. (2009) The myth of diversification. *Journal of Portfolio Management*, 36, 26-35.
- Luenberger, D. (1998) *Investment Science*. Oxford University Press.
- McNeil, A., Frey, R. and Embrechts, P. (2005) *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press.
- Schmidt, T. (2006) Coping with copulas. In *Copulas: From theory to application in finance*, Jorn Rank (ed.), Bloomberg Financial.

تمارين

1-2 مشكلة النقاط

حساب التقسيم العادل للحصة في 'مشكلة النقاط' الموضح في القسم 1.2 إذا افترضنا أن الرقم القياسي الحالي لنجاح A ضد B هي توقعات دقيقة لاحتمال فوز ألعاب المستقبل.

2-2 تغيير معدل الفشل اليومي إلى معدل فشل سنوي

على سبيل المثال، هناك سيارة أجرة تُستخدم سبعة أيام في الأسبوع، نفترض أن احتمال حدوث عطل ميكانيكي لهذه السيارة هو 0.001 وأن هذه النسبة تبقى ثابتة مع مرور الوقت.

(أ) إيجاد العدد المتوقع للأعطال خلال سنة (365 يوما).

(ب) على افتراض أن الأعطال مستقلة خلال أيام مختلفة، قم بإيجاد احتمال حدوث عطل مرة واحدة على الأقل خلال 365 يوما (ووضح أن هذا الاحتمال أقل من 0.365).

3-2 تأخر على الفصل الدراسي

يجب أن يصل جيمس إلى صفه في الوقت المحدد، مما يعني وصوله إلى الجامعة الساعة العاشرة صباحا، والخيارات المتاحة هي أن يأخذ الحافلة رقم 12 التي تستغرق 40 دقيقة، أو رقم 15 التي تستغرق 30 دقيقة أو الحافلة السريعة التي تستغرق 20 دقيقة. ما هو احتمال وصوله للصف في الوقت المحدد إذا وصل إلى محطة الحافلات في الساعة 9:15 صباحا، وإذا كان من المرجح أن تصل الحافلة رقم 12 في أي وقت بين 9:10 و 9:30، وإذا كان من المرجح أن تصل الحافلة رقم 15 في أي وقت بين 9:20 و 9:40، وهناك نوعان من الخدمات السريعة التي من الممكن أن يحصل عليها جيمس: الأول هو أنه من المرجح أن يصل في أي وقت بين 9:05 و 9:20، والثاني هو أنه من المرجح أن يصل في أي وقت بين 9:35 و 9:50؟ ونفترض أن جميع الحافلات لديها أوقات وصول مستقلة.

4-2 الجمع بين مخاطر الاتحاد والتقاطع

هناك مشروع بناء متأخر عن الوقت المحدد له، إذا استمر هذا التأخير أكثر من أربعة أسابيع سيتعين إيجاد مكان بديل من أجل إقامة الحدث المخطط له في المبنى الجديد، وهناك احتمال بنسبة 20٪ بأن تسوء الأحوال الجوية مما سيتسبب في تأخير لمدة ثلاثة أسابيع، وهناك احتمال بنسبة 10٪ بأن يتأخر تسليم عنصر أساسي وهذا من شأنه أن يؤدي إلى تأخير ما بين أسبوعين إلى أربعة أسابيع، هذا بالإضافة إلى أي تأخير يمكن حدوثه بسبب الأحوال الجوية. ويتضمن البناء بعض الحفر لإنشاء شبكة الصرف في منطقة ذات أهمية أثرية، وأيضاً يتضمن هذا العمل بعض علماء الآثار وهناك احتمال ضئيل بنسبة (5٪) بأن يتم العثور على اكتشافات مهمة والتي قد تؤدي إلى حدوث تأخير لمدة شهرين.

(أ) استخدام مخطط فين لعرض الأحداث التي ستؤدي إلى تأخير لأكثر من أربعة أسابيع.

(ب) بافتراض أن جميع الأحداث الثلاثة مستقلة، احسب احتمالية حدوث تأخير لأكثر من أربعة أسابيع.

5-2 احتمال الحد الأقصى من التوزيع التجريبي

لقد لاحظت كميات الأمطار خلال شهر أبريل على مدار الثلاث سنوات الماضية، وهناك 90 نقطة من البيانات وأكبر 10 نقاط هي كما يلي (ملم): 305، 320، 325، 333، 340، 342، 351، 370، 397، 420. على افتراض أن معدل هطول الأمطار خلال أيام متتالية مستقل، استخدم البيانات التجريبية لتقدير احتمال أن الحد الأقصى للأمطار اليومية خلال فترة خمسة أيام في العام المقبل أقل من 350 ملم (أي هطول الأمطار أقل من 350 ملم على مدار كل يوم من الأيام الخمسة).

6-2 المحافظ ذات الأعداد الكبيرة والفروق المختلفة

هناك عوائد N من الأسهم المستقلة X_i و σ_i هو الانحراف المعياري لـ X_i ، إذا كان

$\sigma_{\max}$ هو الحد الأعلى على مقياس أي من σ_i يظهر أنه من خلال استثمار مبلغ W بطريقة تعطي السهم i الوزن النسبي لـ $\sigma_i/1$ ويكون الانحراف المعياري الإجمالي للمحفظة هو أقل من وتقترب هذه النتيجة $\sigma_{\max} / \sqrt{N}$ من الصفر كلما كبرت قيمة N .

7-2 المحفظة المثالية

هناك ثلاثة أسهم للاستثمار في: أ، ب، ج وكانت الزيادات المتوقعة في السعر خلال عام واحد هي: 10٪ للمخزون أ، و 15٪ للمخزون ب، و 5٪ للمخزون ج. الانحرافات المعيارية لهذه الأرقام هي 2٪ لـ أ وب و 1٪ لـ ج. وبعبارة أخرى، إذا كان X هو المتغير العشوائي الذي يعطي الزيادة في القيمة لـ أ المقاسة في النسبة المئوية، فإن الانحراف المعياري لـ X هو 2. وإذا كانت جميع العائدات مستقلة، فما هي حافضة التباين الدنيا التي تحقق عائد 10٪؟ (استخدم جدول بيانات وأداة "السولفر" لهذه العملية الحسابية).

8-2 محفظة مثالية وأصول خالية من المخاطر.

باستخدام نفس الطريقة في التمارين 7-2، افترض أن هناك استثمار خالي من المخاطر يدعى ج والذي تزيد قيمته بشكل دائم بنسبة 4٪ على مدار السنة.

(أ) أعد حساب حافضة التباين الدنيا لعائد نسبته 10٪، وعائد بنسبة 7٪، وعائد بنسبة 5٪. (استخدم جدول البيانات وأداة "السولفر" لهذه العملية الحسابية).

(ب) وضح أن هذه المحافظ الثلاثة تقع على نفس الخط الثابت في الانحراف المعياري مقابل الرسم البياني للربح المتوقع.

(ج) وضح أن كل من المحافظ الثلاث هم عبارة عن مزيج يشتمل على نسبة من ج ونسبة معينة من محفظة ثابتة من مخزونات أ وب وج (وهذا مثال على "نظرية الصندوق الواحد" في نظرية المحفظة).

9-2 متعدد المتغيرات الطبيعية.

ترغب شركة في تقدير احتمال أن تؤدي العواصف وارتفاع المد إلى الفيضانات في

منشأة ساحلية ذات أهمية، والعنصران الحرجان هنا هما سرعة الرياح في اتجاه الشاطئ وارتفاع الموجة، وتعتبر حركة الرياح سريعة عندما تبلغ 10 كم في الساعة ويكون الانحراف المعياري 8 كم في الساعة وارتفاع الموجة 2 متر والانحراف المعياري 1 متر، وأن التباين المقدّر بين هذين المتغيرين هو 4. بافتراض أن هذا التوزيع طبيعي متعدد المتغيرات (تجاهل قضايا ارتفاع الموجة السلبية). قم بتقدير احتمال أن يكون هناك فيضانات في العام المقبل على افتراض أن الفيضانات تحدث عندما يكون ارتفاع الموجة جمع (+) $0.05 \times$ (سرعة الرياح) أكبر من 6.

10-2 خصائص نظرية الاحتمالات "كوبولا"

نفترض أننا نرغب في تعريف دالة الكثافة لكوبولا $c(u_1, u_2) = 2/3$ عندما يكون $u_1 < 3/4$

و $u_2 < 3/4$ ؛ $c(u_1, u_2) = 2$ عندما يكون واحد من $u_1 < 3/4$ و $u_2 < 3/4$ و $c(u_1, u_2) = -2$

وضح إذا كانت $C(u_1, u_2)$ معرفة بالطريقة العادية من زيادة c في كلا المعادلتين ولها هوامش موحدة ولكنها لن تكون كافية لعدم مساواة المستطيل (حيث أن كثافة الدالة سلبية في جزء من المربع).

11-2 كوبولا جامبل

قياس كوبولا جامبل المساوي لـ 2 ناتج من

$$C(u_1, u_2) = \exp \left(-\sqrt{(\log(u_1))^2 + (\log(u_2))^2} \right).$$

إذا كان لكل متغيرين توزيعاً أسياً بالقياس 1 (بحيث يكون لدهما $F(x) = 1 - e^{-x}$ $x \geq 0$) ويتم تحديد سلوكهما المشترك بواسطة كوبولا جامبل مع القياس 2، احسب احتمال أن الحد الأقصى للمتغيرين له قيمة أكبر من 3 ومقارنتها مع الحالة التي يكون فيها المتغيران العشوائيان مستقلين.

12-2 تبعية المنحنى العلوي

وضح أن المعادلة لـ λ_u الموضحة في النص يمكن تحويلها إلى

$$\lambda_u = 2 + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(1 - \delta, 1 - \delta) - 1}{\delta},$$

واستخدم هذه الصيغة للتحقق من أن كوبولا كلايتون مع $\theta = 2$ ليس له تبعية للمنحنى العلوي. سوف تجد أنه من المفيد تعيين $C(x, x) = 1 - g(x)$ واستخدام حقيقة أن

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{g(1 - \delta) - g(1)}{\delta} = -\frac{dg(x)}{dx} \text{ evaluated at } x = 1.$$

الفصل الثالث

قياس المخاطر

نشأة القيمة المعرضة للخطر

كان دينيس ويدرستون رئيساً لشركة جيه بي مورجان ولاحقاً أصبح الرئيس التنفيذي لها، وفي العديد من النواحي فقد كان من غير المرجح أن يصبح واحداً من المصرفيين الأكثر احتراماً في العالم والأعلى شأنً، وباعتباره ابن موظف نقل في لندن والذي ولد في ازلنغتون وترك المدرسة عندما كان عمره ستة عشر عاماً، وكان بعيداً كل البعد عن الأشخاص الذين تلقوا تعليماً مكثفاً والذين عادة ما يديرون شركات وول ستريت الكبرى. وانتقل من منصب إدارة مكتب تداول العملات الأجنبية إلى منصب رئيس مجلس الإدارة وكان ينظر إليه على أنه خبير في الأشياء المتعلقة بالمخاطر، ولكن عندما نظر إلى الشركة ككل وجد أنه كان لديه فكرة بسيطة عن المستوى العام للخطر في جيه بي مورجان، وتم تطوير مفهوم "القيمة المعرضة للخطر" على مدى عدة سنوات من قبل المحللين الذين يعملون

(*) إدارة المخاطر التجارية: النماذج والتحليل، الطبعة الأولى. إدوارد ج. أندرسون.

© 2014 جون وايلي & سوننس، Ltd. تم النشر بواسطة جون وايلي & سوننس، Ltd.

الموقع المرفق: www.wiley.com/go/business_risk_management

في شركة جيه بي مورجان كوسيلة للإجابة على هذا السؤال، وكان الهدف من ذلك هو قياس المخاطر الكامنة في أي نوع من المحافظ، وتم إعادة حساب القيمة المعرضة للخطر كل يوم حسب تغيرات المحفظة، حيث يشتري ويبيع التجار أوراق مالية فردية، وقد اتضح أن هذا يجلب فوائد كبيرة بالنظر إلى العديد من الأنشطة الجارية في جيه بي مورجان، فقد أصبح من الممكن أن ننظر إلى الأرباح لمختلف التجار ومقارنتها مع مستوى المخاطر التي تم قياسها بالقيمة المعرضة للخطر.

وفي في أوائل التسعينات بدأ ويثرستون بطلب التقارير اليومية من كل مكتب تداول، وأصبح هذا يعرف باسم تقرير 415: يتم عمل هذه التقارير كل يوم الساعة 4:15 مساءً بعد إغلاق السوق. ومكنت هذه التقارير ويثرستون ليس فقط بمقارنة الأرباح المقدرة لكل مكتب بالمقارنة مع مقياس مشترك للمخاطر ولكن أيضا بتحليل وضع الشركة ككل. وفي عام 1993، كان موضوع المؤتمر السنوي لزبائن مورجان هو الخطر، وقدم هؤلاء العملاء فكرة شاملة على منهجية القيمة المعرضة للخطر. وعندما جاء العملاء ليسألوا ما إذا كان يمكنهم شراء نفس النوع من النظام لشركاتهم الخاصة، قامت شركة جيه بي مورجان بإنشاء مجموعة صغيرة تسمى "مصفوفة المخاطر" لمساعدتهم.

وفي تلك المرحلة كانت هذه منهجية الملكية التي يجري إعطاؤها مجانا، وذلك بهدف مساعدة العملاء وخلق سمعة لشركة جيه بي مورجان في مجال المخاطر، وأصبحت القيمة المعرضة للخطر أداة أكثر شعبية، وفي عام 1998 انفصلت "مصفوفة المخاطر" وأصبحت شركة منفصلة، وكان هذا الوقت الذي بدأت فيه السلطات التنظيمية أن تولي اهتماما أكبر للمخاطر. فعلى سبيل المثال، أعربت لجنة الأوراق المالية والبورصات عن قلقها إزاء حجم المخاطر الناشئة عن التداول في الأصول المالية، وأوجدت قواعد جديدة تجبر الشركات المالية على الكشف عن تلك المخاطر لمستثمريها. ولا بد من أن تكون الأداة المستخدمة هي القيمة المعرضة للخطر. وكان هذا جزءا من التغيير الصعب والبطيء الذي حول القيمة المعرضة للخطر من مجرد كونها مجموعة محددة من الأدوات التي تم تطويرها داخل جيه بي مورجان وبيعها من قبل مصفوفة المخاطر إلى معيار إدارة المخاطر المستخدم في جميع المعاملات المالية حول العالم.

1-3 كيف يمكننا قياس المخاطر؟

في هذا الفصل سوف نتعمق بشكل أكبر حول كيفية قياس المخاطر. وهل من المنطقي التحدث عن منهج محدد للعمل بكونه أكثر خطورة من الآخر؟ وإذا كان الأمر كذلك، فماذا يعني ذلك؟ ففي أبسط الحالات يكون لدينا مجموعة من النتائج تتضمن احتمالات مختلفة وعواقب مختلفة، وعندما يمكن تحويل العواقب إلى مبالغ بالدولار بشكل دقيق، نحصل على توزيع لنتائج الدولار، وقد افترضت مناقشتنا في الفصل الثاني بشكل أساسي أننا نحصل على توزيع النتائج من خلال توزيع احتمال متعارف عليه، ولكن في الممارسة العملية هناك صعوبات كبيرة في معرفة التوزيع الذي نتعامل معه، ومن الصعب دائما تقدير الاحتمالات المرتبطة بمختلف النتائج والعواقب المالية لهذه الأحداث، وقد يكون لدينا فرصة لتقدير الأرقام ذات الصلة في الحساب المالي. على سبيل المثال، قد نتساءل عن احتمالية تجاوز سعر الذهب مستوى معين، و(على افتراض أننا نراهن على ارتفاع أسعار الذهب) ما الذي نخسره إذا حدث هذا، ولكن في معظم أدوار الإدارة فيكون الوضع أصعب بكثير. كيف يمكنني حساب احتمال أن تكون مبيعات منتجي الجديد أقل من 1000 وحدة في السنة الأولى؟ كيف يمكنني أن أعرف التكلفة المطلوبة إذا قدمت الحكومة قانون سلامة منقح في مجال صناعتي؟ في الوقت الراهن نضع هذه المشاكل جانبا ونفترض أن لدينا إمكانية الوصول إلى الأرقام التي نحتاج إليها.

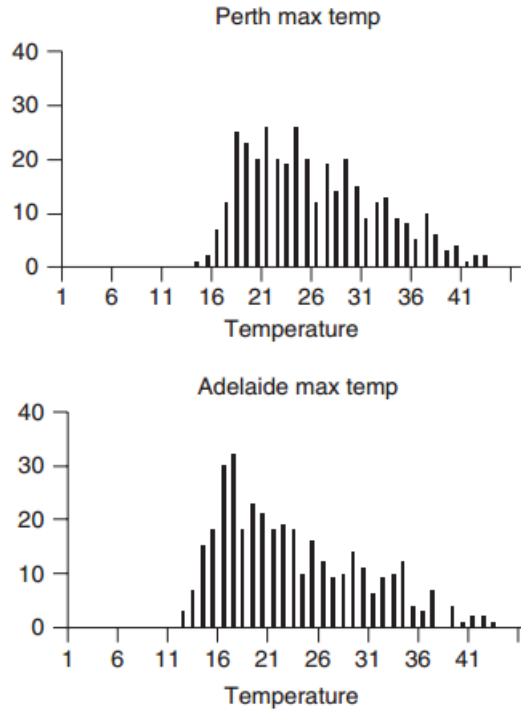
وفي كثير من الأحيان تكون أفضل طريقة لتقدير المخاطر هي النظر في ما حدث في الماضي من أحداث. وحتى إذا كنا نعتقد أن العالم قد تغير، فإنه سيكون من الغباء أن لا نولي أي اهتمام لنمط النتائج التي لاحظناها حتى الآن. ولجعل مناقشاتنا أكثر واقعية، دعونا نلقي نظرة على بعض البيانات المتعلقة بالطقس، وتحديد أقصى درجة حرارة اليومية لمدن مختلفة في أستراليا، وسوف ننظر إلى البيانات بدءاً من عام 2010. ستكون هذه المعلومات مفيدة إذا كنا نحاول بيع وحدات تكييف الهواء، أو محاولة تقرير ما إذا كان سننق المال على شراء وحدات تكييف الهواء لمقرنا، ويزداد الطلب على وحدات تكييف الهواء عندما تكون درجات الحرارة مرتفعة. دعونا نقارن الطقس بين بيرث وأديلايد، قد تكون نقطة البداية هي النظر إلى متوسط درجات الحرارة القصوى، وكان متوسط درجة

الحرارة القصوى اليومية في بيرث في عام 2010 هي 25.27 مئوية (جميع درجات الحرارة بالنسبة المئوية)، في حين أن متوسط درجة الحرارة القصوى اليومية في أديليد هي 22.44 مئوية، وهذا أكثر من درجتين برودة. ولكن يمكننا أيضا قياس التباين، والطريقة المعتادة للقيام بذلك هي استخدام الانحراف المعياري، ويمكن استخدام جدول بيانات لكلا المدينتين لحساب ذلك. فنجد أن الانحراف المعياري لبيرث هو 6.41 والانحراف المعياري لأديليد هو 7.00، وهو أكبر بكثير.

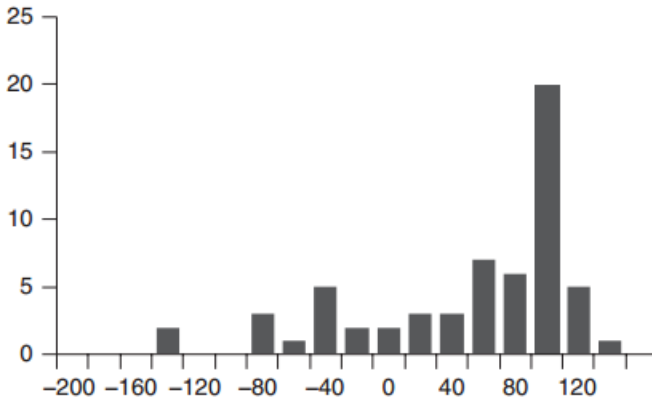
ولكن إذا كنا مهتمين بمعرفة عدد الأيام الحارة جدا، فلن تكون أياً من هذه الأرقام ذو أهمية كبيرة. فمن الأفضل رسم المدرج التكراري للبيانات، وقد بينا ذلك في الشكل 3-1. وتظهر الرسوم البيانية أنه ليس هناك الكثير ليمكننا من الاختيار بين المدينتين فيما يتعلق باحتمال الأيام الحارة جداً.

ففي عام 2010 كانت درجات الحرارة للخمسة أيام الأكثر سخونة في بيرث هي 42.9°، 42.7°، 41.5°، 41.1°، 40.0°، وكانت درجات الحرارة للخمسة أيام الأكثر سخونة في أديليد هي 42.8°، 42.0°، 41.3°، 41.0° و 40.2°. والنقطة الحاسمة هنا هي أنه إذا كنا مهتمين بالنتائج، فإن المتوسط والانحراف المعياري اللذان يتحددان بشكل أساسي عن طريق مجموع النتائج الأكثر أو الأقل من المتوسط لن تعطينا المعلومات التي نحتاجها. فيجب علينا إما أن ننظر في سجل البيانات التاريخية الفعلية، أو أن يكون لدينا فكرة عن توزيع الاحتمالات التي ينتج عنها هذه البيانات. الآن نتقل مباشرة إلى مثال للخطر، لنفترض أننا اتفقنا على بيع 1000 طن من القمح في غضون ثلاث سنوات بسعر 300 دولار أمريكي للطن المتري، فإذا كانت أسعار القمح مرتفعة، سيكون هناك خسارة، ولكن إذا كانت أسعار القمح منخفضة، فسوف نجني ربحاً.

ومن أجل تقدير احتمال حدوث خسارة، فإننا نأخذ بعين الاعتبار السجل التاريخي لأسعار القمح على مدى الخمس سنوات على أساس شهري 1 ابتداءً من يناير 2005، ومن خلال سعر الطن وهو 300 دولار أمريكي فإننا نحصل على الرسم البياني وتردد الأرباح لكل طن كما هو مبين في الشكل 3-2.



الشكل 1-3: الرسم البياني التكراري لدرجات الحرارة القصوى اليومية خلال عام 2010.



شكل 3-2: الشكل البياني التكراري للأرباح لكل طن بقيمة 300 دولار للطن.

ارتفعت أسعار القمح⁽¹⁾ خلال فبراير ومارس عام 2008 إلى حوالي 450 دولاراً، ثم تراجعت لتصل إلى 387 دولاراً بحلول إبريل، ولمدة شهرين (من أصل 60) كانت ستبلغ الخسائر 146 دولاراً إلى 154 دولاراً للطن الواحد، ولمدة ثلاثة أشهر أخرى كانت ستتراوح الخسائر بين 80 دولاراً و90 دولاراً للطن الواحد. وإذا كنا مهتمين بالآخطار فيجب علينا التركيز على الخسائر التي تحدث في هذا المنحنى الأيسر. ويجب أن نقرر ما إذا كنا نعتقد أن التغيرات العامة من المرجح أن تصعد أو تهبط في المستقبل، ولكن بالتأكيد نمط ارتفاع الأسعار الذي شاهدناه في الماضي يجعلنا نتوقع أن نفس النوع من ارتفاع الأسعار قد يحدث في المستقبل.

وتشير هذه المجموعة من البيانات إلى أن ارتفاع الأسعار قد يحدث لمدة شهر خلال السنة، ونلاحظ لاحظ أن متوسط (41.8 دولار) والانحراف المعياري (69.5) نجبرنا القليل جداً حول ما يجري - وأن توزيع الأرباح بعيد جداً عن أن يكون توزيعاً طبيعياً في هذه الحالة. لذلك، فإن النظر إلى تاريخ الأسعار منذ عام 2005 سيعطينا فكرة عن توزيع النتائج وبالتالي المخاطر التي ينطوي عليها ذلك. لنفترض الآن أننا نريد استخراج مقياس واحد للمخاطر من هذا، هناك سؤال واحد قد نطرحه هو: ما هي أسوأ النتائج التي يمكن أن تحدث؟ تاريخياً، الجواب هو 154 دولاراً للطن، ولكن يجب أن نعرف جيداً بأن هذا ليس تقدير موثوق به لأسوأ ما يمكن أن يحدث حتى لو لم تتغير العوامل الأساسية مع مرور الوقت. وإذا نظرنا إلى خمس سنوات مختلفة من البيانات لربما لاحظنا خسارة أكبر. وعندما ننظر إلى أكبر خسارة حدثت، فإننا ننظر إلى خسارة حدثت خلال شهر واحد فقط، وهذا يعني وجود الكثير من التذبذب في ما نلاحظه.

وسوف نعود إلى مشكلة التقدير في مناقشتنا لنظرية القيمة القصوى في الفصل التالي، من حيث أن مشكلة قياس المخاطر هي مشكلة وصف ما يحدث في منحنيات التوزيع،

(1) بيانات القمح، الولايات المتحدة، رقم "الشتاء الحمراء الصلبة" (التقليدي) FOB الخليج. تم تحميله

وهذا حتماً سيؤدي إلى صعوبات إذا رغبتنا في استخدام البيانات التاريخية (حيث أنه، بحكم التعريف، كل ذلك يتوقف على القيم التي تحدث فقط في حفنة من النقاط).

2-3 القيمة المعرضة للخطر

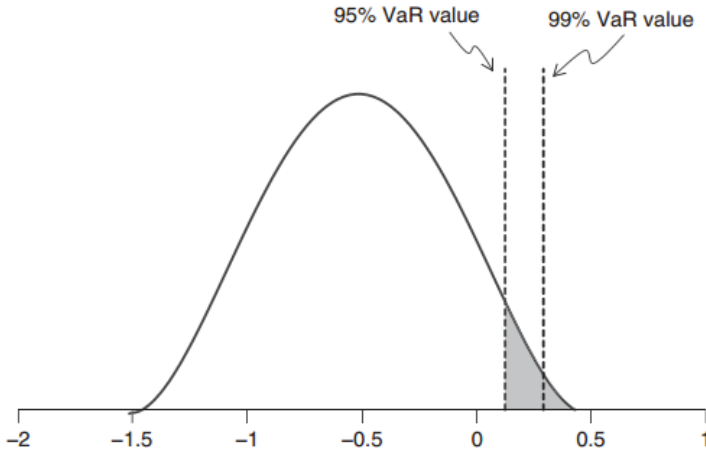
عند التعامل مع توزيع الأرباح، فإن المخاطر تتمحور حول كل ما يتعلق بحجم المنحني الأيسر للتوزيع، ومن ثم يتضح أنه لا توجد طريقة واحدة مناسبة لقياس الخطر. ولكن الطريقة الأكثر شيوعاً هي قياس القيمة المعرضة للخطر، وغالباً ما يتم اختصارها باسم VAR ويتم قياسها بنسب مئوية معينة. على سبيل المثال، قد نقول أن الشكل الذي يوضح القيمة المعرضة للخطر التي تبلغ 99٪ هو 300,000 دولار. هذا يعادل البيان بأن 99٪ من النتائج سوف تفقد أقل من 300,000 دولار. أو يمكننا أن نتأكد بنسبة 99٪ أن الخسائر لن تتجاوز 300,000 دولار أمريكي. لذلك، فإن نسبة القيمة المعرضة للخطر تتوافق مع النقاط نقطة واحدة في التوزيع.

الآن نحن بصدد وضع تعريف دقيق للقيمة المعرضة للخطر، وبما أنه لدينا مخاوف إزاء الخسائر المحتملة، فمن الأسهل وصف كل شيء من حيث الخسائر وليس من حيث الأرباح. لذلك يتم عكس المحور الأفقي من أجل أن تكون الخسائر الكبرى على الجانب الأيمن ويصبح المنحني الأيمن هو محط الاهتمام. وليصبح هذا أكثر وضوحاً يبين الشكل 3-3 أرقام القيمة المعرضة للخطر بنسبة 95٪ و 99٪ لتوزيع الخسائر على المدى (-1.5، 0.5) (يفترض أن جميع القيم مقومة بوحدات قدرها 100 000 دولار). وتبين هذه المعادلة وظيفة الكثافة المعطاة

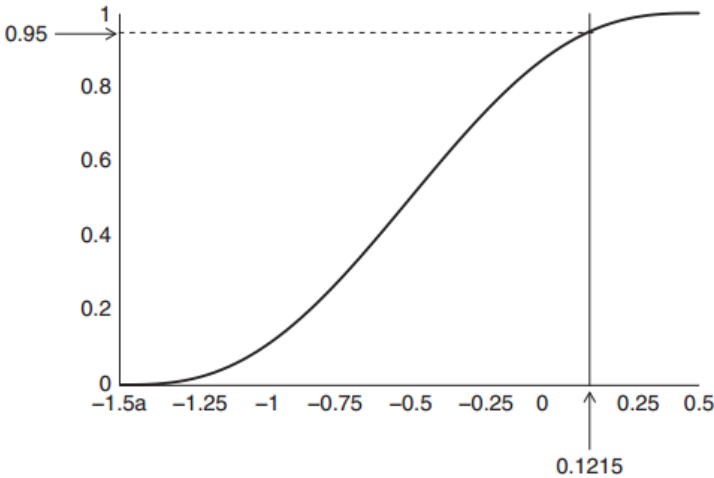
$$f(x) = \frac{15}{16} [(x + 0.5)^4 - 2(x + 0.5)^2 + 1]. \quad 1-3$$

قد نتحدث الناس في بعض الأحيان عن القيمة المعرضة للخطر بنسبة 1٪ أو القيمة المعرضة للخطر بنسبة 5٪، ولكن هذا يعني القيمة المعرضة للخطر بنسبة 99٪ و 95٪. أيضاً قد نتحدث الناس عن "القيمة المعرضة للخطر بمستوى ثقة يبلغ 99٪". وهذا أمر طبيعي، حيث أن القيمة المعرضة للخطر البالغة 99٪ والتي تبلغ 100,000 دولار تعني أننا

نستطيع أن نثق بنسبة 99٪ بأن الخسائر لن تتجاوز 100000 دولار. ويمكن النظر إلى نهج القيمة المعرضة للمخاطر كمثال على استخدام الكميات لوصف منحنيات التوزيع. سوف نستخدم مصطلح نقاط التجزيء $\alpha\%$ للدلالة على القيمة x بحيث تكون $F(x) = \alpha/100$ ، وتشير F إلى دالة التوزيع التراكمي، لذا تكون $F(x) = \Pr(X < x)$ ، حيث تكون X هي المتغير



الشكل 3-3: نقاط القيمة المعرضة للمخاطر بنسبة 99٪ و 95٪



الشكل 4-3: التفسير الكمي للقيمة المعرضة للمخاطر

العشوائي المعني. وبالتالي تكون نقاط التجزيء البالغة 50٪ هي القيمة X حيث أن $F(x)=0.5$ ، على سبيل المثال، عندما يكون نصف التوزيع أقل من القيمة X والنصف الآخر أعلى من القيمة X ، يكون هذا هو المتوسط. وأن القيمة المعرضة للخطر التي تبلغ 99٪ هي مجرد نقاط التجزيء التي تبلغ 99٪ لتوزيع الخسائر. ويمكننا تطبيق المثال السابق على الكثافة الموضحة في المعادلة (1-3) باستخدام الكثافة التراكمية. وبعد دمج مصطلح وظيفة الكثافة

$$F(x) = \frac{3}{16}(x + 0.5)^5 - \frac{5}{8}(x + 0.5)^3 + \frac{15}{16}(x) + \frac{31}{32}.$$

يمكننا ملاحظة أن هذا هو ما يشار إليه في الشكل 3-4، والذي يظهر أيضاً نقاط التجزيء البالغة 95٪ وهو أيضاً القيمة المعرضة للخطر البالغة 95٪، حيث أن قيمة X تساوي $F(x)=0.95$ ، مما يعني أن $x=0.12149$ أو أن هناك خسارة قدرها 12 149 دولار.

اختبار 1-3 القيمة المعرضة للخطر لمخاطر الفيضانات.

شركة غير قادرة على استخراج التأمين ضد الفيضانات لمصنعها بسبب وجود تاريخ من الفيضانات. ويعتقد أن الخسائر في حالة الفيضانات تتراوح بين 10.000 و 160.000 دولار، مع احتمال أن تكون جميع القيم على قدم المساواة، ومتوسط حدوث الفيضانات مرة واحدة كل 10 سنوات، ولا يحدث أكثر من مرة في السنة. ما هي القيمة المعرضة للخطر السنوية البالغة 98٪ بسبب الفيضانات؟.

الحل

نقوم بحساب الكثافة التراكمية للخسائر لكل (1000 دولار) بسبب الفيضانات في السنة الواحدة، نكتب رمز للمتغير العشوائي وليكن L ، إذن $F(x)=Pr(L \leq x)$. وليس هناك أي احتمال لوجود خسائر سلبية، لذلك فإن $F(x)=0$ ، حيث أن $x < 0$. وهناك احتمال بنسبة 0.9 أن $L=0$ ، وعند صفر تقفز نسبة الكثافة الكمية وتكون $F(0)=0.9$. واحتمال أن تكون الخسائر أقل من x ، حيث $x \leq 10$ هو أيضاً 0.9، حيث أن خسائر الفيضانات لا تقل أبداً عن 10000 دولار. أما احتمالية أن تكون الخسائر أقل من x ، عندما تكون $x > 10$ ،

موضح في المعادلة الآتية:

$$0.9 + 0.1(x - 10)/150.$$

ويلاحظ أنه مع هذا التعبير تزيد الاحتمالية بشكل خطي من 0.9 و $x = 10$ ، إلى 1 و $x = 16$. وتعتبر هذه هي خاصية التحديد للتوزيع الموحد للخسائر، لأنه عندما تكون دالة الكثافة ثابتة، يكون تكاملها F خطي. ولإيجاد القيمة المعرضة للخطر البالغة 98٪ نقوم بحل هذه المعادلات

$$0.9 + 0.1(x - 10)/150.$$

وتكون النتيجة

$$0.9 + 0.1(x - 10)/150.$$

وهكذا، أظهرنا أن $\text{VaR}_{0.98} = 130,000$ دولار.

يجب النظر في كتابة تعريف للقيمة المعرضة للخطر بنسبة 95٪، إذا كانت L هي القيمة الغير مؤكدة للخسائر، فمن الطبيعي أن نرمز لـ $\text{VaR}_{0.95}$ (القيمة المعرضة للخطر بنسبة 95٪) بالقيمة X، بحيث تكون $\text{Pr}(L \leq x) = 0.95$ ، وبالتالي

$$F(\text{VaR}_{0.95}) = 0.95$$

حيث تمثل F وظيفة الخسارة، ويمكننا كتابتها كالتالي:

$$F^{-1}(0.95) = \text{VaR}_{0.95}$$

حيث يستخدم الرمز F^{-1} لعكس F (أي $F^{-1}(y)$ هي قيمة x مثل $F(x) = y$). للأسف هذا التعريف لن يعمل بشكل جيد. والمشكلة هي أنه عندما لا يكون هناك توزيع متواصل للخسائر، قد لا تكون هناك قيمة حيث أن $\text{Pr}(L \leq x) = F(x) = 0.95$. على سبيل المثال، لنفرض حدوث الخسائر التالية:

خسارة قدرها 11,000 دولار احتمالية 0.02

خسارة قدرها 10,500 دولار احتمالية 0.02

احتمالية 0.02	خسارة قدرها 10,000 دولار
احتمالية 0.04	خسارة قدرها 9,000 دولار
احتمالية 0.9	خسارة قدرها 0 دولار

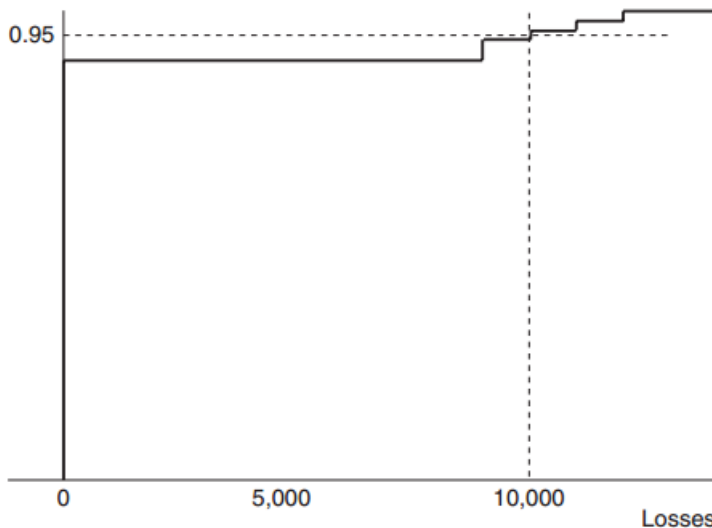
أفضل طريقة لحل هذه المشكلة هي عمل رسم بياني. ومع هذا النوع من التوزيع المنفصل (أي غير مستمر)، تكون الكثافة التراكمية هي وظيفة الخطوة. ويبين الشكل 3-5 الرسم البياني لـ $F(x) = \Pr(L \leq x)$ لهذا المثال. من السهل ملاحظة الرسم البياني لـ $F(x)$ يمر بالقيمة 0.95 عند $x = 10,000$. وبالتالي تكون هذه هي القيمة المعرضة للخطر البالغة 95%. ولكن ما هو سهل ملاحظته على الرسم البياني يكون أكثر تعقيدا عند تحويله لمعادلة. وعادة ما يتم تعريف القيمة المعرضة للخطر على النحو التالي:

$$\text{VaR}_\alpha = \inf(x : \Pr(L > x) \leq 1 - \alpha),$$

وبالنسبة للقيمة المعرضة للخطر بنسبة 95%:

$$\text{VaR}_{0.95} = \inf(x : \Pr(L > x) \leq 0.05),$$

حيث يمكن اعتبارها "أدنى قيمة لـ x ، حيث أن احتمالية أن تكون L أكبر من x أقل من 0.05"



الشكل 3-5: تقاطع وظيفة التوزيع التراكمي 95% عند 10,000 دولار

والفكرة هنا هي أننا نريد إيجاد قيمة كبيرة لـ x وأن هذه الاحتمالية هي بالتأكيد أقل من 0.05، فنقوم بخفض قيمة x تدريجياً حتى تزيد الاحتمالية لتصل إلى 0.05 أو أكثر، وهذا نكون وصلنا للنتيجة التي نريدها. هذا بالضبط كأننا أخذنا قيمة كبيرة لـ x ، حيث أن $F(x)$ هي بالتأكيد أكبر من 0.95، ثم نبدأ خفضها ببطيء حتى تصل قيمة $F(x)$ إلى 0.95 أو أقل. إن استخدام هذه المعلومات وخيارات عدم المساواة الصارمة التي توضح أن $(L > x)$ أو أن $(\alpha - 1) \geq$ هو أمر لا داعي للقلق بشأنه: فهو يغطي تعريف التوزيعات الاحتمالية المنفصلة عندما يكون هناك مجموعة من القيم حيث أن $F(x) = 0.95$ (على سبيل المثال، قسم أفقي في الرسم البياني F). فيما يلي طريقة بسيطة لوصف معادلة القيمة المعرضة للخطر:

القيمة المعرضة للخطر هي قيمة الخسارة التي يصل فيها الرسم البياني لـ $F(x)$ إلى النسبة المئوية الصحيحة. ففي الأسواق المالية غالباً ما يكون متوسط العائد مبني على حسابات العوائد المتوقعة، والشيء الأكثر أهمية هو خطر أن تكون النتيجة النهائية أسوأ بكثير من العائدات المتوقعة. وفي هذه الحالات يتم احتساب القيمة المعرضة للمخاطر مقارنة بالنتيجة المتوسطة. وهكذا، في المثال الوارد في الشكل 3-3، فإن متوسط الربح هو 0.5 أو 50000 دولار. لذلك سيكون من الطبيعي أن نقتبس القيمة المعرضة للخطر البالغة 95٪ كخسارة قدرها كخسارة قدره 629 149 دولاراً بدلاً من "القيمة المعرضة للخطر المطلقة" التي قمنا بحسابها سابقاً بمبلغ 149 12 دولار.

ففي بعض الأحيان تسمى القيمة المعرضة للخطر النسبية بمتوسط القيمة المعرضة للخطر (mean-VaR) ويكتب هكذا VaR_{mean} ، في إدارة مخاطر السوق تكون الفترة الزمنية المعنية قصيرة جداً - على سبيل المثال، يوم واحد، ويسمى متوسط القيمة المعرضة للخطر (VaR_{mean}) بالـ "الأرباح اليومية المعرضة للخطر". ولكن في هذه الحالة، من المتوقع أن تكون حركة السوق المتوقعة قريبة من الصفر، وبالتالي فإن تعريف القيمة المعرضة للخطر سيكونان، على أي حال، متطابقان. إن التمييز بين القيمة المعرضة للخطر النسبية والقيمة المعرضة للخطر المطلقة يكون أكثر أهمية عند التعامل مع آفاق زمنية أطول.

وكمثال على كيفية إبلاغ الشركات عن القيمة المعرضة للمخاطر، نقدم المقتطف التالي من تقرير ميكروسوفت السنوي لعام 2012:

(ميكروسوفت) الإفصاحات الكمية والنوعية حول مخاطر السوق

نحن معرضون لمخاطر اقتصادية من أسعار صرف العملات الأجنبية، وأسعار الفائدة، ومخاطر الائتمان، وأسعار الأسهم، وأسعار السلع. يتم تحوط جزء من هذه المخاطر ولكنها قد تؤثر على البيانات المالية.

العملات الأجنبية: تتعرض بعض المعاملات المتوقعة والأصول والالتزامات لمخاطر العملات الأجنبية، نحن نراقب التعرضات بالعملة الأجنبية يوميا ونستخدم التحوطات حيثما كان ذلك عمليا لتعويض المخاطر وتحقيق أقصى قدر من الفعالية الاقتصادية لمراكز العملات الأجنبية. وتشمل العملات الرئيسة المتحوط لها اليورو والين الياباني والجنيه الإسترليني والدولار الكندي.

معدل الفائدة: تنوع محفظة استثماراتنا ذات الدخل الثابت عبر قطاعات الائتمان واستحقاقاتها، وتتكون أساسا من أوراق مالية ذات تصنيف استثماري. ويتم إدارة مخاطر الائتمان ومتوسط فترة استحقاق حافطة الدخل الثابت لتحقيق عوائد اقتصادية ترتبط ببعض المؤشرات العالمية والمحلية ذات الدخل الثابت. " إلى أن يتم الإعلان عنها" للالتزامات الشراء الآجل للأصول المدعومة بالرهن العقاري للحصول على الأوراق المالية والسندات المدعومة بالرهن العقاري.

حقوق الملكية: تتكون محفظة الأسهم من الأوراق المالية العالمية والمتقدمة والناشئة التي تخضع لمخاطر أسعار السوق. نحن نقوم بإدارة الأوراق المالية المتعلقة ببعض المؤشرات العالمية والمحلية ونتوقع أن تكون المخاطر الاقتصادية والعائد مرتبطة بهذه المؤشرات.

السلع: نحن نستخدم التعرضات السلعية الواسعة النطاق لتعزيز عوائد المحفظة وتسهيل تنويع المحفظة. وتعرض محفظة استثماراتنا لمجموعة متنوعة من السلع الأساسية، بما في ذلك المعادن الثمينة والطاقة، والحبوب. نحن ندير هذه التعرضات ذات الصلة بالمؤشرات العالمية للسلع ونتوقع أن ترتبط مخاطرهم الاقتصادية وعائداتهم مع هذه المؤشرات.

القيمة المعرضة للخطر

نحن نستخدم نموذج القيمة المعرضة للخطر لتقدير مخاطر السوق وتحديد كميا. وتمثل القيمة المعرضة للخطر الخسارة المتوقعة في القيمة العادلة لمحففظتنا بسبب تحركات السوق السلبية على مدى فترة زمنية محددة ولا يقصد بنموذج القيمة المعرضة للمخاطر أن يمثل الخسائر الفعلية في القيمة العادلة، بما في ذلك تحديد خسائر أخرى غير مؤقتة في القيمة العادلة وفقا للمبادئ المحاسبية المقبولة في الولايات المتحدة الأمريكية بشكل عام ولكنه يستخدم كأداة لتقدير المخاطر وإدارتها. ويتم احتساب توزيع التغيرات المحتملة في إجمالي القيمة السوقية، ويتم احتساب توزيع التغيرات المحتملة في إجمالي القيمة السوقية لجميع الحيازات بناءً على التقلبات التاريخية والروابط بين أسعار صرف العملات الأجنبية وأسعار الفائدة وأسعار الأسهم وأسعار السلع، بافتراض ظروف السوق العادية. ويتم احتساب القيمة المعرضة للخطر على أنها الخسارة الكلية التي لن يتم تجاوزها عند مستوى ثقة 97.5٪ أو يمكن أن تتجاوز الخسائر القيمة المعرضة للمخاطر في 25 حالة من أصل 1000 حالة. ولا يتم إدراج العديد من عوامل الخطر في النموذج، بما في ذلك مخاطر السيولة والمخاطر التشغيلية والمخاطر القانونية. يوضح الجدول التالي القيمة المعرضة للمخاطر لمدة يوم واحد لكافة مراكزنا الرئيسية في 30 يونيو 2012 و 30 يونيو 2011 وللسنة المنتهية في 30 يونيو 2012 (بالملايين):

2012-2011			30 يونيو 2012	30 يونيو 2011	فئات المخاطر
منخفض	مرتفع	متوسط			
84 دولار	229 دولار	173 دولار	86 دولار	98 دولار	العملة الأجنبية
57 دولار	73 دولار	64 دولار	58 دولار	71 دولار	سعر الفائدة
165 دولار	248 دولار	194 دولار	212 دولار	205 دولار	حقوق الملكية
15 دولار	29 دولار	20 دولار	28 دولار	18 دولار	السلع

بلغ إجمالي القيمة المعرضة للخطر لمدة يوم واحد لفئات المخاطر ككل 292 مليون دولار أمريكي في 30 يونيو 2012 و 290 مليون دولار أمريكي في 30 يونيو 2011. وكان إجمالي القيمة المعرضة للخطر أقل بنسبة 26٪ في 30 يونيو 2012، وأقل بنسبة 25٪ في 30 يونيو 2011 من مجموع فئات المخاطر المنفصلة في الجدول أعلاه وذلك بسبب فائدة التنويع للجمع بين المخاطر.

3-3 الجمع بين المخاطر ومقارنتها

من المزايا الكبيرة للقيمة المعرضة للخطر كطريقة لقياس المخاطر أنها تحول التعقيد الكامن في توزيع احتمالات النتائج المحتملة إلى رقم واحد، وبشكل عام نحن نريد مقياس واحد للمخاطر لأننا نريد مقارنة حالات مختلفة، هل البيئة الحالية أكثر خطورة بالنسبة لشركتنا مما كانت عليه قبل عام؟ هل هذه الفرصة التجارية المحتملة أكثر خطورة من غيرها؟ هل تقرير "توم" المباشر يعرض نهج إداري أكثر خطورة من تقرير "ديك" المباشر؟ ونحن نفترض أن X هو متغير عشوائي يوضح قيمة الخسائر، ونكتب $\psi(X)$ لقياس الخطر لمتغير عشوائي X . ويمكن أن نفكر في قياس الخطر ψ كوسيلة لتقييم المخاطر التي يوضحها المتغير X وهذه الطريقة في التفكير تجعلنا نتوصل إلى بعض الخصائص البديهية التي ينبغي أن تكون موجودة عند قياس المخاطر.

1- الترابطية: إذا كانت الخسائر في كل حالة تصبح أكبر هذا يعني أن قياس المخاطر يزداد. وفي كثير من الأحيان نكتب $X \leq Y$ للإشارة إنه في كل الحالات يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أقل من أو تساوي قيمة المتغير العشوائي Y . لذلك يمكن التعبير عن هذه الحالة بإيجاز على النحو التالي:

$$\text{إذا كانت } X \leq Y \text{ فإن } \psi(X) \leq \psi(Y).$$

2- التجانس الإيجابي: إن مضاعفة المخاطر بوتيرة إيجابية ثابتة يضاعف قياس المخاطر بنفس الوتيرة، ويمكننا القول بأن التغير في وحدة العملة يؤدي إلى تغيير قياس المخاطر بالطريقة المناسبة. ويكون هذا على النحو التالي:

$$\psi(bX) = b\psi(X) \text{ لكل متغير إيجابي ثابت } b$$

3- ثبات الترجمة: إذا تم تغيير كل نتيجة بمقدار معين، سيحدث نفس مقدار التغير في قياس المخاطر. ومن الناحية المالية يمكننا أن نرى هذا كبيان أن إضافة مبلغ معين من النقد إلى محفظة يقلل من المخاطر بنفس المقدار. (هذه هي الخاصية التي تربط قياس المخاطر بالمبالغ الفعلية بالدولار) يمكننا توضيح هذا على النحو التالي:

$$\psi(c+X) = c + \psi(X) \text{ لكل متغير ثابت } c$$

المثال 2-3 المتوسط بالإضافة إلى ثلاثة انحرافات معيارية

يمكن للشركة تقييم المخاطر من خلال النظر في أسوأ قيمة قد تحدث، استناداً إلى حساب متوسط الخسارة بالإضافة إلى ثلاثة انحرافات معيارية. لذلك، إذا كان X هو المتغير العشوائي للخسائر ويرمز له بالرمز μ ، والانحراف المعياري هو σ ، إذن قياس الخطر هو:

$$\psi(X) = \mu + 3\sigma$$

ومن الشائع أخذ ثلاثة انحرافات معيارية كأكبر انحراف من المرجح أن نلاحظه في الحالة العادية، وإذا كان يوجد توزيع طبيعي لـ X ، فإنه يمكننا البحث عن الاحتمال: $\Pr(X > \mu + 3\sigma) = 0.0013$. ويتم مقارنة فرصتين للاستثمار، فقد حقق الاستثمار A على مدى العامين الماضيين عائد متوسط قدره 6000 دولار في اليوم وانحراف معياري قدره 2500 دولار، وحصل الاستثمار B على عائد متوسط قدره 8000 دولار في اليوم وانحراف معياري قدره 3000 دولار، وللمقارنة بينهما فنحن نحتاج إلى تحويل العوائد إلى خسائر. فيكون مقياس الخطر لـ A : $6000 + 7500 = 1500$ ، ومقياس الخطر لـ B : $8000 + 9000 = 1000$.

وعلى هذا الأساس يكون الاستثمار A هو الأكثر خطورة، ومن المدهش أن قياس الخطر هذا ليس بالضرورة أن يكون رتيب (انظر التمرين 3-3)، على الرغم من أنه يلبي الشرطين الآخرين، وليس من الصعب إثبات أن القيمة المعرضة للمخاطر تلبي كل من هذه الشروط الثلاثة. وبما أن القيمة المعرضة للمخاطر هي كمية، فإن النتائج المتغيرة ليس لها أي تأثير ما لم يطرأ أي تغيير للقيمة الكمية، ويمكن أن يحدث زيادة في القيمة الكمية إذا حدثت زيادة في الخسارة، وهذه هي خاصية الرتبة. يمكننا أيضاً إظهار هذه الخاصية جبرياً إذا أردنا ذلك. فبالنسبة للمتغيرين العشوائيين X و Y ، إذا كانت $X \leq Y$ ، إذن X :

$$\Pr(X > x) \geq \Pr(Y > x)$$

وبالتالي إذا كانت $\Pr(X > x) \leq 1 - \alpha$ لبعض α ، إذن $\Pr(Y > x) \leq 1 - \alpha$. ومن خلال

هذا يمكننا استنتاج أن:

$$\inf(x: \Pr(Y > x) \leq 1-\alpha) \leq \inf(x: \Pr(X > x) \leq 1-\alpha)$$

وهذا هو التفاوت الذي نحتاجه لإظهار القيمة المعرضة للخطر VaR_α $(X) \geq VaR_\alpha(Y)$. ومن السهل أيضاً إيجاد الخاصيتين الأخريتين.

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(bX) &= \inf(y: \Pr(bX > y) \leq 1-\alpha) \\ &= \inf(v: \Pr(X > v/b) \leq 1-\alpha) \\ &= b \inf(w: \Pr(X > w) \leq 1-\alpha) = b VaR_\alpha(X) \end{aligned}$$

لذلك فالقيمة المعرضة للخطر تلي شرط التجانس الإيجابي، وأيضاً:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X+c) &= \inf(y: \Pr(X+c > y) \leq 1-\alpha) \\ &= \inf(y: \Pr(X > y-c) \leq 1-\alpha) \\ &= \inf(v: \Pr(X > v) \leq 1-\alpha) + c \\ &= VaR_\alpha(X) + c \end{aligned}$$

وهناك أيضاً ترجمة الثبات، وبالتالي، فإن القيمة المعرضة للخطر لها ثلاثة خصائص، وقد ناقشنا هذه الخصائص على أنها ملائمة لقياس المخاطر، ولكن الحالة التي تكون فيها القيمة المعرضة للخطر أقل ملائمة ترتبط بجمع المخاطر المختلفة. وهناك خاصية رابعة لقياس المخاطر نريد إضافتها للخصائص الثلاثة المذكورة أعلاه.

4- خاصية الإمكانية الفرعية: إن الجمع بين المخاطر لا يزيد من المبلغ الإجمالي للمخاطر، ويستند ذلك إلى مبدأ أن التنويع ينبغي أن يؤدي إلى انخفاض في المخاطر الإجمالية. ونوضح هذا رياضياً كالآتي:

$$\psi(X+Y) \leq \psi(X) + \psi(Y)$$

ويطلق على قياس المخاطر الذي يفي بجميع الخصائص الأربعة (الترابطية والتجانس الإيجابي وثبات الترجمة والإمكانية الفرعية) بالقياس التماسك، ومن المهم الإشارة إلى أن القيمة المعرضة للخطر لا تفي بالإمكانية الفرعية، ولذلك فهي ليست مقياساً متماسكاً للمخاطر. هناك مثال لتوضيح أن القيمة المعرضة للمخاطر تفشل في أن تكون فرعية:

مثال 3-3 قد يؤدي الجمع بين اثنين من المخاطر إلى جعل القيمة المعرضة للمخاطر أسوأ.

لنفترض أنه يمكننا أن نستثمر 10000 دولار في السندات A والتي سوف تعطي عائداً بقيمة 11 000 دولار في السنة الواحدة، ولكن هناك بعض المخاطر الائتمانية، خاصة أن هناك احتمال ضئيل (بنسبة 4٪) بأن تفلس جهة إصدار السندات، وبالتالي سوف نحصل فقط على جزء بسيط من أموالنا (30٪ من استثمارنا، أي 3000 دولار). على افتراض أن جميع تقديراتنا صحيحة، إذن القيمة المطلقة المعرضة للخطر التي تبلغ 95٪ هي في الواقع قيمة سلبية تقدر بـ 1000 دولار (أي ما يعادل ربح 1000 دولار). وذلك لأن مخاطر الائتمان صغيرة جداً بحيث لا تظهر في حساب القيمة المعرضة للخطر. الآن إذا أردنا الاستثمار في السندات B تحت نفس الظروف التي ذكرناها في السندات A وبافتراض أن السندات B مستقلة تماماً عن السندات A، فنحصل على النتائج التالية:

عدم فشل أي من السندات	الاحتمال $0.96 \times 0.96 = 0.9216$	الربح 2000 دولار
فشل A وعدم فشل B	الاحتمال $0.04 \times 0.96 = 0.0384$	الخسارة 6000 دولار
فشل B وعدم فشل A	الاحتمال $0.04 \times 0.96 = 0.0384$	الخسارة 6000 دولار
فشل كل منهما	الاحتمال $0.04 \times 0.04 = 0.0016$	الخسارة 14000 دولار

يمكننا أن نرى احتمال 0.0784 بأنه سيكون هناك خسارة في المحفظة المجمعة والقيمة المطلقة المعرضة للخطر التي تبلغ 95٪ هي خسارة قيمتها 6000 دولار، إن مخاطر الائتمان صغيرة جداً بحيث لا تؤثر على القيمة المعرضة للخطر للسند الواحد، ولكن عند وجود محفظة من سندات فلا يمكن تجاهلها. ومع ذلك، لاحظ أن فائدة التنويع لا تختفي (انظر التمرين 3-4) ولكن فقط يتم إلغاؤها نتيجة لتأثير خسارة كبيرة في نقاط التجزئة البالغة 95٪.

إن المشاكل التي نواجهها مع خاصية الإمكانية الفرعية تسلط الضوء على واحدة من القيود المفروضة على القيمة المعرضة للخطر، حيث أن هناك شيء تعسفي حول مستوى الثقة $\alpha-1$. إن القيمة المعرضة للخطر لا تعطي صورة كاملة لما يحدث في منحنى التوزيع،

ولا توضح شيء إطلاقاً عن أقصى الخسائر التي قد تحدث. عادة يكون أسوأ ما يمكن أن يحدث هو أن تصبح محفظة بلا قيمة.

لذلك إذا أردنا أن نعرف حجم الخسارة المحتملة، فالجواب قد يكون "كل شيء"!.

ففي سوق الأعمال التجارية عادة ما يكون هناك بعض الأحداث التي تؤدي إلى الخسائر التي ببساطة لا يمكن تقديرها مقدماً. ولكن تظل القيمة المعرضة للخطر شيء مفيد لأنها على الأقل لا تفترض أي تقديرات للخسائر المتطرفة: ومعالجتها لهذه الأحداث المتطرفة يعني أننا بحاجة إلى تقدير احتمالها، وتقدير العواقب الدقيقة.

4-3 القيمة المعرضة للخطر في الممارسة العملية

من الغريب أن القيمة المعرضة للمخاطر تستخدم على نطاق واسع جداً، وفي الوقت نفسه مثيرة للجدل للغاية. هناك الكثير من الجدل لأن التقنية الأساسية يمكن أن تستخدم بطرق مختلفة - وبعض النهج يمكن أن تكون مضللة، وربما حتى خطيرة. ومع ذلك لا يمكن الاستغناء عن القيمة المعرضة للخطر - فبالنسبة للبنوك فهي جزء من إطار بازل 2 الذي يربط متطلبات رأس المال بمخاطر السوق، وفي الولايات المتحدة يتم تكليف بعض المقاييس الكمية للمخاطر من قبل المجلس الأعلى للتعليم لعمل التقارير السنوية للشركة. ويمكن الاطلاع على بما هو مطلوب بموجب اتفاقية بازل 2 من المقتطف التالي من الفقرة 718 (القسم 76) (منقول من <http://www.basel-ii-accord.com>).

ستتمتع البنوك بالمرونة في استنباط الطبيعة الدقيقة لنماذجها، ولكن المعايير الدنيا التالية ستطبق بهدف حساب رسوم رأس المال.

(أ) يجب أن تحسب "القيمة المعرضة للخطر" على أساس يومي.

(ب) عند حساب القيمة المعرضة للخطر، إذا كانت تبلغ 99٪، يتم استخدام فاصل الثقة ذات المنحنى الواحد.

(ج) عند احتساب القيمة المعرضة للخطر، سيتم استخدام الحركة السعرية الفورية تعادل

حركة 10 أيام في الأسعار، أي أن "فترة الثبات" الدنيا ستكون عشرة أيام تداول. ويمكن أن تستخدم المصارف أرقام القيمة المعرضة للخطر المحسوبة وفقا لفترات أقصر تصل إلى عشرة أيام حسب الجذر التربيعي للوقت.

(د) سوف يتم الحد من استخدام فترة المراقبة التاريخية (فترة العينة) لحساب القيمة المعرضة للخطر بحد أدنى سنة واحدة.

(هـ) لا يتم وصف أي نوع معين من النماذج، فطالما أن كل نموذج يستخدم يوضح جميع المخاطر المادية التي يديرها البنك، فتكون للبنوك حرية استخدام أي من النماذج القائمة، على سبيل المثال، مصفوفات التباين أو المحاكاة التاريخية أو محاكاة مونت كارلو.

(و) تتمتع البنوك بالسلطة التقديرية للاعتراف بالعلاقات التجريبية ضمن فئات المخاطر الكبيرة (مثل أسعار الفائدة وأسعار الصرف وأسعار الأسهم وأسعار السلع الأساسية، بما في ذلك التغيرات المتعلقة بالخيارات في كل فئة من فئات عوامل الخطر).

(ز) يجب على كل بنك أن يلبي عدة أشياء على أساس يومي، مثل متطلبات رأس المال وفقا للمعايير المحددة ومتوسط مقاييس القيمة المعرضة للخطر في كل يوم من أيام العمل الستين السابقة مضروبا في عامل مضاعف.

(ح) يتم تحديد عامل الضرب من قبل السلطات الإشرافية الفردية على أساس تقييمها لجودة نظام إدارة المخاطر بالبنك، مع مراعاة الحد الأدنى المطلق.

ومن الناحية العملية، هناك ثلاثة نهج مختلفة لحساب أرقام القيمة المعرضة للخطر، قد نستخدم توزيعات الأسعار التاريخية (القيمة المعرضة للخطر الغير معملية) وقد نستخدم نماذج رياضية للأسعار (ربما في تلك التوزيعات العادية لبعض عوامل الخطر)، أو قد نستخدم محاكاة مونت كارلو. إن النهج التاريخي بسيط، فنحن ننظر إلى محفظة السوق الحالية لدينا، ثم نستخدم المعلومات التاريخية لمعرفة كيف كان من الممكن أن تعمل هذه الحافظة على مدى فترة (لمدة سنة على الأقل) سيكون لدينا حوالي 250 يوم للتداول.

وإذا أردنا، مثل ميكروسوفت، حساب معدل القيمة المعرضة للمخاطر البالغة 97.5٪، فإن ذلك يعني ما بين ست وسبع مناسبات خلال السنة التي يتم فيها تجاوز القيمة المعرضة للخطر. لذلك يمكننا أن نأخذ أصغر سبعة خسائر يومية التي تم تسجيلها في محفظتنا خلال السنة أثناء تقدير القيمة المعرضة للخطر.

ومن المزايا الكبيرة لهذا النهج أنه من خلال التعامل مع البيانات التاريخية، فإننا نفهم بالفعل العلاقات بين مختلف الأسهم في محفظتنا. لذلك، لا يتعين علينا البدء في إجراء أي تقديرات، على سبيل المثال، كيفية ترابط حركة أسعار الأسهم في مايكروسوفت وجوجل. أحد عيوب هذا النهج هو أنه من الصعب معرفة عدد البيانات التي يجب أن نضمّلها. هل تختلف ظروف السوق الحالية عن سوق التداول حتى عام 2008؟ وإذا كان الأمر كذلك، فلا ينبغي أن نضمّل الكثير من تلك الفترة السابقة في تحليلنا. ولكن، من ناحية أخرى، إذا ركزنا على فترة قصيرة لعمل تحليلنا التاريخي، فإننا قد نتأثر بشكل مفرط بأحداث معينة حدثت خلال تلك الفترة. وبوجه عام، يكون النهج التاريخي أقل احتمالاً أن يكون مناسباً عندما يكون هناك تغير كبير في السوق.

النهج الحدودي (البارامتري) مرن ويمكن أن يعمل على هياكل الترابط المختلفة، ولكن من الناحية العملية هناك نقطة ضعف بمجرد أن تصبح المشكلة ذات حجم معقول، وسنحتاج إلى تقديم بعض الافتراضات القوية بشأن توزيع العوائد (غالباً ما يعود السجل إلى توزيع طبيعي). ومع ذلك، بمجرد أن يتم ذلك يمكن أن تكتمل العمليات الحسابية بسرعة كبيرة.

وينظر النهج البارامتري إلى استجابة الأدوات مثل خيارات الاختلافات في الأوراق المالية الأساسية (وهي طريقة شائعة جداً في هذه الفئة يتم توفيرها من قبل مقاييس المخاطر). أما خطورة النهج البارامتري أنه من غير المرجح نمذجة السلوك الفعلي بشكل صحيح في منحنيات التوزيع، وإذا كانت هناك منحنيات توزيع توضح نسبة عالية من الاحتمالات، فقد يكون هذا النهج مضللاً جداً (وسوف نناقش هذه المشاكل في الفصل التالي). الخيار الثالث هو استخدام محاكاة مونت كارلو. ويستخدم هذا الأسلوب

البارامترية لنمذجة المكونات الفردية التي تولد المخاطر، ولكن بدلا من البحث عن الحلول التحليلية، فإنه يحاكي ما قد يحدث. ويمكن للمحاكاة الطويلة بما فيه الكفاية توضيح توزيع السلوك بشكل كامل دون الحاجة إلى خيارات محددة جدا من التوزيع، وفي الوقت نفسه يمكن أن توضح أي درجة من التعقيد في هيكل الارتباط.

ويمكن ضعف هذا النهج في أنه لا يزال يتطلب وضع افتراضات على أشكال التوزيع؛ وأيضاً يمكن أن يتطلب تمثيله بطريقة حسابية. وبعد اتخاذ القرار بالطريقة التي سيتم استخدامها لحساب أرقام القيمة المعرضة للمخاطر، هناك قراران آخران يجب اتخاذهما. أولاً يجب على مدير المخاطر أن يقرر بناءً على أفق المخاطر، لأن هذه هي الفترة الزمنية التي قد تحدث فيها الخسائر. والغرض من استخدام القيمة المعرضة للخطر ليوم واحد هو للنظر في تحركات الأسعار على مدار يوم واحد. ولكن يحدد إطار بازل فترة مدتها 10 أيام، وبالنسبة للعديد من الشركات فإنهم يفضلون أن تكون الفترة أطول من ذلك. فكلما طالت الفترة التي تم اختيارها، كلما كان هناك حاجة أكبر لسلاسل البيانات من أجل تقدير هذه الفترة. وعلى أي حال، إذا كانت الفترة الزمنية طويلة فمن المهم التأكد من أن حسابات القيمة المعرضة للخطر تتم بصورة منتظمة أو على الأقل يتم احتسابها يوميا كما يوصي إطار بازل 2. القرار الثاني هو مستوى الثقة أو نقاط التجزئة التي سيتم استخدامها. يتطلب بازل احتساب القيمة المعرضة للمخاطر بنسبة 99٪، ولكننا رأينا بالفعل كيف تستخدم ميكروسوفت القيمة المعرضة للخطر بنسبة 97.5٪.

ومن المهم أيضا التحقق من تطابق تقديرات القيمة المعرضة للخطر مع الأداء الفعلي للمخاطر، وهو ما يطلق عليه الاختبار المسبق. إن أبسط طريقة للقيام بذلك هي تطبيق الطريقة المستخدمة حاليا على الأداء السابق للشركة للحصول على تقدير للقيمة المعرضة للمخاطر التي كان سيتم احتسابها على أساس كل يوم خلال السنة الماضية. وتبين لنا نظرية القيمة المعرضة للخطر كم عدد المرات التي نتوقع فيها أن نرى خسائر أكبر من القيمة المعرضة للخطر (مرتين ونصف إذا كان مستوى القيمة المعرضة للخطر البالغ 99٪ يستخدم لمدة 250 يوم تداول). إذا وجدنا أن حدود القيمة المعرضة للمخاطر قد تم

اختراقها أكثر من ذلك، فإننا بحاجة إلى إجراء مزيد من التحري والنظر في تغيير طريقة الحساب، وأيا كان النهج المستخدم، فإن الحصول على أرقام القيمة المعرضة للخطر يمكن أن يكون مفيدا للغاية للمديرين، ويجدر مراجعة سبب ذلك إلى:

- سهولة فهم القيمة المعرضة للخطر وهي الآن مألوفة لكثير من كبار المديرين.
- توفر القيمة المعرضة للخطر مقياس واحد ثابت للمخاطر التي يمكن استخدامها في جميع أنحاء الشركة ويمكن أن تشكل محور النقاش حول المخاطر.
- يمكن احتساب القيمة المعرضة للخطر على مستوى الكيانات التشغيلية الفردية (أو مكاتب التداول في البنك)، وهذا يعطي رؤية جيدة وصولا إلى المستويات الدنيا في الشركة، وهي توفر أداة يمكن استخدامها لفرض استراتيجية متسقة للمخاطر من خلال المنظمة، وفي الوقت نفسه تمكن كبار المديرين من فهم المزيد حول من أين وكيف تنشأ المخاطر داخل منظمتهم.
- توفر القيمة المعرضة للخطر أداة جيدة لتقييم كفاية رأس المال (وهي مطلوبة لهذا الغرض من قبل الجهات التنظيمية المصرفية).
- أصبحت القيمة المعرضة للمخاطر الطريقة المعيارية للإبلاغ عن المخاطر خارجيا.

5-3 انتقادات القيمة المعرضة للخطر

كما ذكرنا سابقا، فإن استخدام القيمة المعرضة للمخاطر لا يزال مثيرا للجدل، ومن المهم أن نفهم الانتقادات حولها. والمشكلة الرئيسة مع القيمة المعرضة للمخاطر هي أنها لا تتطرق إلى ما يحدث داخل المنحنى، فإنها لا تعطي أي إرشادات حول كيف يمكن حدوث خسائر كبيرة. هناك الكثير من الاختلاف بين القول بأنه "بنسبة 99٪ من الأيام لن أخسر أكثر من 100 ألف دولار" والقول بأنه "في يوم واحد من كل عام (في المتوسط) سوف أخسر 20 مليون دولار". ومع ذلك، فإن هذين القولين يتفقان تماما مع بعضهما البعض. ففي أغلب الأوقات يجري كل شيء بشكل جيد ويكون تحت السيطرة وتكون الخسائر متواضعة، ولكن من الممكن أن يسوء الوضع تماما وتكون الخسائر كبيرة.

وألقي ديفيد إينهورن، وهو مدير صندوق تحوط معروف، كلمة في عام 2008 (يحذر من المشاكل المحتملة لـ ليان براذرز) وقال في خطابه

أن القيمة المعرضة للخطر "غير مجدية نسبياً كأداة لإدارة المخاطر وربما كارثية عندما يخلق استخدامها شعور زائف بالأمن بين كبار المديرين والمراقبين. وأنها مثل الوسادة الهوائية التي تعمل طول الوقت، باستثناء عندما يحدث حادث سيارة.

وفي كتاب مؤثر يدعى "البجعة السوداء"، قال "نسيم نيكولاس طالب" أننا عادة لا نولي اهتماماً كبيراً للأحداث التي نادراً ما تحدث ولكنها مهمة جداً. هذه الأحداث تسمى في مصطلحاته بـ "البجعيات السوداء" فهي نادرة بما فيه الكفاية بأن لا نلاحظها من قبل، لذا فمن المعقول أن نتحدث عن توقع احتمالها، فهذه الأحداث لها آثار كبيرة جداً. إنها المجهول التي اتضح أنه أكثر أهمية من الأشياء التي نعرفها بالفعل. من كان بإمكانه التنبؤ بالتغيرات التي حدثت بعد الهجوم الإرهابي على البرجين عام 2001؟ من كان يتوقع ظهور وسائل التواصل الاجتماعي على شبكة الإنترنت؟ وتنعكس هذه الظواهر واسعة النطاق على مستوى الشركة من قبل الأحداث الغير متوقع حدوثها.

عندما نستخدم القيمة المعرضة للخطر كمقياس للمخاطر فإننا نستبعد هذه الأحداث وعواقبها عمداً. وحتى استخدام القيمة المعرضة للخطر بنسبة 99٪ لمدة يوم واحد، فإننا نستبعد عمداً أي أحداث قد تحدث أقل من مرة واحدة كل ستة أشهر. فبالنسبة لـ "طالب" الشيء الذي يحدث مرتين في السنة ينبغي اعتباره كحدث يتكرر "كل يوم". ويقول بأن استبعاد المنحنى البالغ 1٪ في العديد من المجالات ينطوي على استبعاد الأحداث والبيانات التي تبين أن لها تأثير كبير جداً على الصورة العامة. على سبيل المثال، إذا نظرنا لحجم التحويلات على آي تيونز واستبعدنا 1٪ من الوسائط الأكثر تحميلاً، فمن المحتمل أن يكون تقديرنا لأرباح آي تيونز دقيق جداً.

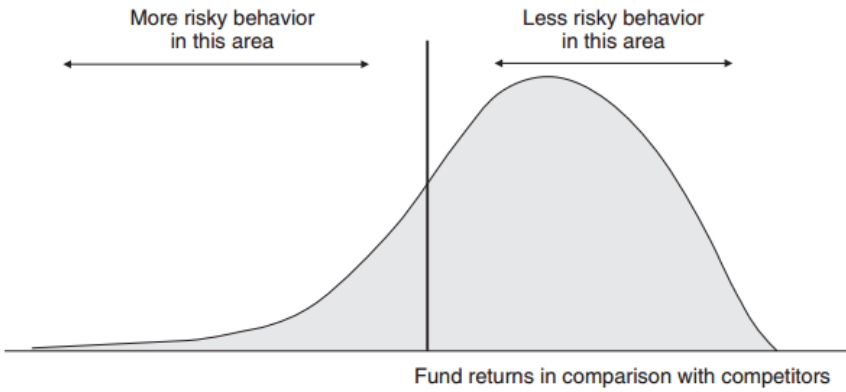
وهناك مشكلة أخرى مع القيمة المعرضة للخطر وهي أنها قد تشجع السلوك غير المناسب من قبل المديرين كما يصف "جو نوسيرا" في مقالته في نيويورك تايمز، كيف يمكن أن يتم التلاعب بالقيمة المعرضة للخطر.

ومن أجل تحفيز المديرين فقد بدأت البنوك بتعويضهم ليس فقط لتحقيق أرباح كبيرة، ولكن أيضا لخفض مستوى المخاطر عند تحقيق الأرباح. وهذا حفزهم على إنشاء ما يمكن تسميته بمرکز المخاطر غير المتماثلة، حيث توجد عادة أرباح صغيرة وخسائر نادرة، ولكن عندما تحدث الخسائر يمكن أن تكون هائلة. وأصبحت القيمة المعرضة للخطر شيء جيد بالنسبة للمديرين، لأنها تجاهلت الاحتمال الضئيل بحدوث الخسائر العملاقة، والتي لا يمكن أن تحدث إلا في حالة وقوع كارثة حقيقية. ومن الأمثلة الجيدة على ذلك هو مبادلة عجز الائتمان، وهي في الأساس عبارة عن تأمين بأن الشركة لن تتخلف عن السداد. هذه المكاسب التي تحققت من بيع مقايضات الائتمان والتخلف عن السداد هي مبالغ صغيرة وثابتة - وإمكانية الاضطرار إلى سداد هذا التأمين كان يفترض أن تكون ضئيلة ولا تكون جزء من احتمالية الـ 99٪ لذلك لم تظهر في عدد القيمة المعرضة للخطر.

في الواقع، إن الدوافع لاتخاذ الإجراءات التي ينتج عنها انحراف أو انحراف غير متماثل هي واسعة النطاق. وهذا غالبا ما يحدث عندما يكون هناك مكافأة على أساس الترتيب النسبي. لنفترض، على سبيل المثال، أننا مدير صندوق، قد يكون لدينا خيارات متاحة لنا والتي سوف تجعل عوائدنا قريبة من متوسط العائد لنوع الأسهم التي نقوم بالاستثمار فيها. ويمكن تحقيق ذلك ببساطة عن طريق نشر محفظتنا على نطاق واسع، والعمل وفق خيار منخفض المخاطر إذا تم مقارنتنا مع متوسط الأداء هذا (أو أداء مديري الصناديق الآخرين).

من ناحية أخرى، يمكننا تركيز محفظتنا على عدد قليل من الأسهم. وهذا من شأنه أن يكون أكثر خطورة، ولكن يمكن أن تثمر هذه الأسهم بشكل جيد إذا كانت جيدة الأداء. وبما أن مدراء الصناديق يدفعون جزئيا على أساس الأموال الخاضعة للإدارة، فإن التدفقات إلى الصندوق غالبا ما تحدد حسب ترتيبه النسبي، فهناك حافز كبير للقيام بعمل أفضل من الصناديق الأخرى. وقد يؤدي ذلك إلى سلوك المقامرة (عن طريق اختيار الأوراق المالية) إذا كانت الأمور تسير بشكل سيء (ربما يتمكن مدير الصندوق من تصليح

الوضع) إذا كانت الأمور تسير على ما يرام (يحدث هذا غالبا إذا كنا بالفعل في المقدمة). الآن يتم توزيع العوائد من خلال المقامرة ولكن ذلك يتوقف على مستوى الأداء. والنتيجة النهائية هي أن توزيع العوائد يتركز على الجانب السلبي ويضغط على الجانب الإيجابي: وينتهي الأمر بالشكل الذي يبدو عليه الشكل 3-6، حيث أن هناك منحنى سلبي طويل.



الشكل 3-6: توزيع العائدات غير المتماثلة.

وهذا يعني وجود احتمال ضئيل بأن تكون هناك عوائد سيئة وفرصة جيدة بأن تكون هناك عوائد معقولة. والنهج الصحيح هنا هو تعرف ما تقيسه القيمة المعرضة للخطر وما لا تقيسه. فهي تتقي نقطة جزئية واحدة وتقيمها، ولا تحاول توضيح إلى أي مدى يمتد المنحنى (إلى أي مدى يمكن أن تكون الخسائر كبيرة). إن النهج الأكثر شيوعا لمعرفة أوجه القصور في القيمة المعرضة للخطر حول الأحداث المتطرفة هو استخدام اختبار الضغط. فهذه هي التقنية التي نشأت في الصناعة المصرفية كما هو الحال مع العديد من نهج إدارة المخاطر الأخرى، والفكرة هنا هي أن الشركة بالإضافة إلى تحليل القيمة المعرضة للخطر، يجب أن تحاول فهم المزيد حول ما يجري في منحنيات التوزيع.

ويمكن فعل هذا من خلال النظر في مجموعة من السيناريوهات المختلفة "السيئة" والعمل على كل واحد ومعرفة ما هي الآثار المترتبة عليه. وكمثال على ذلك، فإن بنك

HSBC ، بعد مناقشة بعض القيود المفروضة على استخدام القيمة المعرضة للخطر البالغة 99٪ بشكل يومي كمقياس للمخاطر، ينص على ما يلي:

اعترافاً بقيود القيمة المعرضة للمخاطر، يقوم بنك HSBC⁽¹⁾ باستخدام اختبار الضغط لتقييم التأثير المحتمل على قيم المحفظة لأحداث أو حركات أكثر تطرفاً وإن كانت معقولة في مجموعة من المتغيرات المالية. وفيما يلي السيناريوهات الواجب تطبيقها على مستوى المحفظة والمستويات الموحدة:

- سيناريوهات الحساسية التي تأخذ في الاعتبار تأثير أي عامل خطر أو مجموعة من العوامل التي من غير المحتمل أن يتم إدراجها ضمن نماذج القيمة المعرضة للخطر، مثل كسر ربط العملة.
 - السيناريوهات التقنية، التي تعتبر أكبر خطوة في كل عامل خطر، دون النظر في أي ارتباط سوقي أساسي.
 - سيناريوهات افتراضية تنظر في الأحداث الاقتصادية الكلية المحتملة، على سبيل المثال، وباء أنفلونزا عالمي.
 - السيناريوهات التاريخية التي تتضمن ملاحظات تاريخية حول تحركات السوق خلال فترات الضغط السابقة والتي لن يتم إدراجها ضمن القيمة المعرضة للمخاطر.
- إن استخدام اختبار الضغط لتحري عواقب المخاطر التي تحدث في المنحنى هو نهج مكمل للقيمة المعرضة للخطر (والذي يتجاهل حجم هذه المخاطر)، وقد يكون مفيداً لمجموعة واسعة من الشركات. وهناك نهج آخر لاختبار الضغط ضد مجموعة من السيناريوهات السيئة وهو البحث بشكل منهجي عن أسوأ سيناريو بين مجموعة معينة؛ وهذا ما يسمى بـ "اختبار الضغط العكسي".

(1) التقرير السنوي لبنك HSBC 21 أبريل 2011

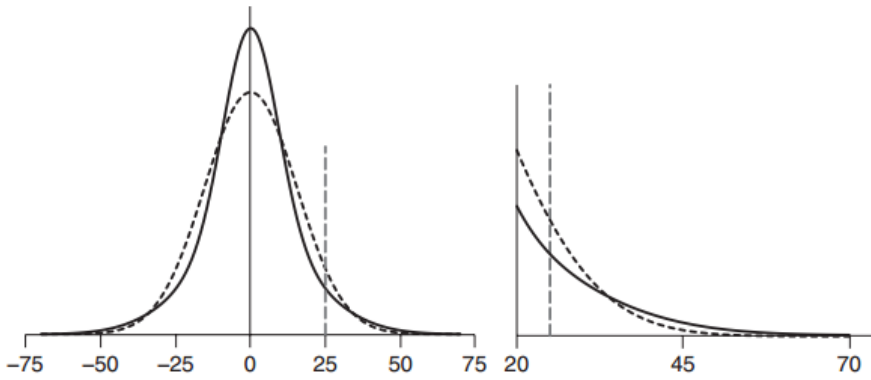
<http://www.hsbc.com/investor-relations/financialresults>

على سبيل المثال، قد نفرض قيوداً على أسعار معينة أو تقلبات معينة، ثم نستخدم إجراء التحسين (مثل أداة السولفر في جدول بيانات) للعثور على المجموعة التي تعطي أسوأ نتيجة بشكل عام. وقد يكون من الصعب أن نعرف مسبقاً أي مجموعة من القيم ستكون أسوأ ما يمكن لاسيما عندما تكون هناك مشتقات مالية متضمنة. ويحدد اختبار الضغط العكسي الاختيار الدقيق الذي يعطي أسوأ نتيجة من بين مجموعة محددة من الاحتمالات لمختلف المتغيرات. ومن المرجح أن يتم الكشف عن ذلك، ولكن قد تكون مجرد نقطة انطلاق لمزيد من التحليل. وبمجرد أن نعرف السيناريو الأكثر ضرراً يمكننا أن ننظر مرة أخرى لمعرفة ما إذا كنا نعتقد أنه من الممكن أن يقترح بتعديل القيود على المتغيرات واستخدام الإجراء مرة أخرى أو أن هذا غير ممكن.

6-3 ما وراء القيمة المعرضة للخطر

إن قياس القيمة المعرضة للخطر يتعلق بمنحنى التوزيع حيث لا يكون هناك تباين. ولكن على الرغم من أن القيمة المعرضة للخطر تركز على المنحنى فهي لا توفر معلومات حول ما يحدث داخل المنحنى. إن توزيعات الخسائر (وظائف الكثافة) المرسومة في الشكل 7-3 لها نفس القيمة المعرضة للخطر البالغة 95٪ بقيمة 25 ولكن الخسائر المحتملة للتوزيع المرسوم بخط ثابت هي أعلى بكثير.

ومن الطبيعي أن نتحدث عن توزيع له منحنيات كبيرة إذا كان هناك احتمال أكبر للحصول على القيم من المنحنيات الكبيرة. والمقارنة هنا هي التوزيع الطبيعي (وهو الخط المتقطع في الشكل) والذي تتجه فيه الاحتمالات نحو الصفر مثل $1/e \times x^2 = e^{-x^2}$ وهو انخفاض سريع جداً. ويتمثل أحد طرق هذه المشكلة في النظر إلى قيم القيمة المعرضة للمخاطر عند الاحتمالات المختلفة. توزيعات الخط الثابت التي توضح منحنيات كبيرة تمثل القيمة المعرضة للخطر البالغة 99٪ من 41، في حين أن القيمة المعرضة للخطر البالغة 99٪ للخط المتقطع، والذي يمثل توزيعاً طبيعياً هو 36، ومن ثم، فإن الفارق بين التوزيعات يصبح أكثر وضوحاً من القيمة المعرضة للخطر.



الشكل 7-3: يحتوي الخط الصلب على منحنى أضيق (يظهر في اللوحة الأيمن). كل من التوزيعات لديها القيمة المعرضة للخطر بنسبة 95٪ من 25.

ويتمثل النهج البديل في استخدام ما يسمى غالباً بالنقص المتوقع، وأحياناً تستخدم مصطلحات أخرى، مثل (منحنى القيمة المعرضة للخطر أو القيمة المشروطة المعرضة للخطر).

العجز المتوقع عند المستوى α لمتغير عشوائي X للخسائر، يكتب بهذه الطريقة ES_α (X) وتكون الخسارة المتوقعة مشروطة بتجاوز المستوى α للقيمة المعرضة للخطر، وتصبح هي القيمة المتوسطة لذلك الجزء من التوزيع الذي يزيد عن القيمة المعرضة للخطر α (X)، أي أكثر من قيم الخسارة. ويرتبط العجز المتوقع ارتباطاً وثيقاً بالقيمة المعرضة للخطر، ولكنه يوضح المزيد عما يمكن أن يحدث في أسوأ الحالات. وبالمقارنة مع القيمة المعرضة للخطر، فإن العجز المتوقع يمثل مقياساً بديهاً للمخاطر. ويتم الحصول على القيمة المعرضة للخطر البالغة 95٪ من خلال طرح السؤال "ما هو الحد الأدنى للخسارة من بين 5٪ من أسوأ النتائج؟"، في حين يتم الحصول على قيمة العجز المتوقعة البالغة 95٪ عن طريق السؤال "ما هو متوسط الخسارة من بين 5٪ من أسوأ النتائج؟". ويمكننا كتابة النقص المتوقع بشكل رسمي بهذه الطريقة:

$$ES_\alpha (X) = E(X | X > VaR_\alpha (X)) \quad (2-3)$$

يجب أن نتوقف ونفصل ما نعينه بتوقع مشروط بحدث آخر، يأخذ المتغير العشوائي المنفصل X القيم $x_1, x_2, \dots, x_N$. مع الاحتمالات ذات الصلة $p_1, p_2, \dots, p_N$ ، ويكون التوقع بهذه الصيغة

$$E(X) = \sum_{i=1}^N p_i x_i$$

ويتم الحصول على العجز المتوقع عن طريق تغيير الاحتمالات، فبدلاً من p_i ، يكون لدينا:

$$\begin{aligned} p'_i &= \Pr(X = x_i \mid X > \text{VaR}_\alpha(X)) \\ &= \frac{\Pr(X = x_i \text{ and } X > \text{VaR}_\alpha(X))}{\Pr(X > \text{VaR}_\alpha(X))}. \end{aligned}$$

المثال العملي 3-4 حساب القيمة المعرضة للخطر وقيمة العجز المتوقع مع وجود تأمين ضد الطقس القاسي.

لنفترض أننا نشترى تأمين ضد الظواهر الجوية القاسية التي تحدث بشكل عشوائي، بمعدل حدث واحد كل 10 سنوات. نحن ندفع 10,000 ألف دولار سنوياً ونحصل على تعويضات قيمتها 95,000 دولار في حالة المطالبة. وبمجرد تقديم المطالبة يتوقف عقد التأمين ويتم سداد الدفعات مقدماً على أساس شهري. ويتم استرجاعها في أي وقت في حالة وجود مطالبة. وبغض النظر عن وجود خصم وأي زيادات تضخمية في الأقساط أو التعويضات، ما هي $\text{VaR}_{0.95}$ (القيمة المعرضة للخطر 0.95) و $\text{ES}_{0.95}$ (القيمة المتوقعة للعجز 0.95) لخسائرنا في هذا العقد؟

الحل

كانت أول حالة طقس هي متغير عشوائي مع توزيع أسّي. إذا أخذنا السنوات باعتبارها وحدات من الوقت سيكون لدينا توزيع أسّي وبراميتر 0.1. وتقدر الخسارة (بالألف دولار) بمقدار $L = 10X - 95$ ، حيث X هو الوقت المناسب حتى نقوم بتقديم مطالبة ولها دالة الكثافة $f(x) = 0.1e^{-0.1x}$ ، ولحساب القيمة المعرضة للخطر $\text{ES}_{0.95}(L)$ علماً بأنه

$$\text{VaR } 0.95 (L)=10 \text{ VaR}0.95 (X)-95$$

الاحتمال الآن في المنحنى الأسّي هو

$$\begin{aligned} \int_u^{\infty} f(x)dx &= \int_u^{\infty} 0.1e^{-0.1x} dx \\ &= [-e^{-0.1x}]_u^{\infty} = e^{-0.1u}. \end{aligned}$$

للعثور على القيمة المضافة $\text{VaR}0.95 (X)$ يجب تحديد قيمة u التي تعطي الاحتمال 0.05، لذلك يجب أن نحدد قيمة u بحيث $e^{-0.1u}=0.05$, i.e. $u=-10 \log_e(0.05)=29.957$ وبالتالي، هناك فرصة واحدة من بين كل 20 فرصة أن لا يحدث أي حالة طقس لمدة 30 عاما وأن المخاطر الهبوطية من وجهه نظر الشخص الذي يشتري التأمين هو $\text{VaR } 0.95 (L)=10 \times 29.957 - 95 = 204.57$ أو 204 570 دولار أمريكي. ولكن بالنظر إلى العجز المتوقع فإنه يعطي رقما أكبر من ذلك: $\text{ES}0.95 (L)=10 \text{ES}0.95 (X)-95$

$$\begin{aligned} \text{ES}_{0.95}(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\text{VaR}_{\alpha}(X)}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \frac{1}{0.05} \int_{29.957}^{\infty} 0.1xe^{-0.1x} dx \\ &= \frac{1}{0.05} [-10e^{-0.1x} - xe^{-0.1x}]_{29.957}^{\infty} \\ &= \frac{1}{0.05} (10e^{-2.996} + 29.957e^{-2.996}) \\ &= 39.946. \end{aligned}$$

(يجب عليك التحقق من أن تعبير التكامل الذي نقلناه هنا يختلف عن $0.1xe^{-0.1x}$) وبالتالي، لدينا عجز متوقع وهو

$$\text{ES}0.95 (L)=10 \times 39.946 - 75 = 304.46$$

أو 304460 دولار، أي بزيادة قدرها 1001000 دولار عن القيمة المعرضة للخطر. فالفرق أكبر مما سيحدث لكثير من التوزيعات، ويرجع ذلك إلى شكل معين للتوزيع الأسّي ووجود منحنى طويل إلى اليمين.

إن العجز المتوقع له فوائد عديدة على القيمة المعرضة للخطر. ليس فقط لأنه يعطي رؤية أكبر في منحنيات توزيع الخسارة ولكنه لديه أيضا خصائص نظرية أفضل. وهذه الأسباب أصبح أكثر شعبية كوسيلة لتتبع المخاطر. وقد تم اقتراحه كبديل أفضل للقيمة المعرضة للخطر من قبل لجنة بازل للرقابة المصرفية.

وبما أن العجز المتوقع هو أفضل بكثير في إعطاء مؤشر لمخاطر المنحنى، فإنه قد يكون من المناسب خفض مستوى α . وبعبارة أخرى، فإن استخدام القيمة المعرضة للخطر البالغة 99٪ بدلا من المستوى الأدنى هو شيء جزئي لأن مستوى ألفا يعطي مؤشرا أفضل لما يحدث في المنحنى. ولكن استخدام العجز المتوقع مع مستوى أقل مثل 98٪ أو 97.5٪ يمكن أن يعمل بشكل جيد. (ويعطى مؤشر جيد لما يحدث في المنحنى) الميزة الكبرى في مستوى α الأدنى هو أنه يتم أخذ المزيد من نقاط البيانات في الاعتبار عند اختبار تقديرات العجز المتوقع.

نريد أن نتحدث أكثر عن الكيفية التي يمكن للشركة من خلالها أن تعيد اختبار العجز المتوقع (وقد تم طرح ذلك في بعض الأحيان كمخاوف من الانتقال من القيمة المعرضة للخطر إلى العجز المتوقع). والشيء المهم الذي يجب أن ندركه هنا هو أن العجز المتوقع لا يتولد من تلقاء نفسه: فهو يحتاج إلى تقدير لقيمة القيمة المعرضة للخطر أيضا. وبالتالي، إذا عملنا على أساس يومي عند مستوى 99٪، سوف ينتهي بنا الأمر إلى رقمين يوميا: لقيمة المعرضة للخطر بنسبة 99٪ والعجز المتوقع بنسبة 99٪. ثم تأتي عملية الاختبار الخلفي لتنظر في الحالات التي يتم فيها اختراق مستوى القيمة المعرضة للخطر وتنظر في خسائر تلك الحالات. وتكون هذه هي الخسائر التي يعزى متوسطها إلى تقديرات العجز المتوقعة. إذا كان العجز المتوقع هو نفسه من يوم لآخر، فإن الاختبار الخلفي سيكون بسيطا: سيكون مجرد مسألة التحقق من متوسط الخسائر في الأيام التي تم فيها انتهاك مستوى القيمة المعرضة للخطر ومقارنتها مع تقدير العجز المتوقع.

وعندما تتفاوت تقديرات العجز المتوقع من يوم لآخر، لا يزال بوسعنا مقارنة هذين الرقمين. إذا كانت الخسارة في يوم معين واختراق القيمة المعرضة للخطر هو X فإن هذا

يمثل قيمة $ES\alpha$ ، وبالتالي $E(X-ES\alpha)=0$. ونكتب X_i للخسارة في اليوم الأول (يرتبط هذا بالأيام التي يكون فيها خرق للقيمة المعرضة للخطر) وتكون α $ES(i)$ هي قيمة $ES\alpha$ في اليوم الأول. وبما أن الفرق هو $X_i - ES(i)$ له قيمة متوسطة تعادل صفر، يمكننا أن ننظر في القيمة المرصودة للمتوسط:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - ES_{\alpha}^{(i)})$$

خلال الأيام التي كان يحدث بها خرق للقيمة المعرضة للخطر. هذا أيضا سيكون له قيمة متوسطة تعادل صفر إذا كان النموذج صحيح.

وهناك حجة لتوسيع نطاق هذه الاختلافات للسماح بتوسيع جميع القيم التي تحدث في الأيام التي تعاني من عجز مرتفع متوقع. وهذا يعني النظر في نسبة $(X-ES\alpha)/ES\alpha$. من الواضح، بما أن $X-ES\alpha$ له متوسط بمعدل صفر، فإن النسبة سيكون لها أيضا معدل صفر، ولذلك فنحن نتمكن من تقييم هذه النسبة لمختلف أيام خرق القيمة المعرضة للخطر ومرة أخرى التحقق من المتوسط، والتي ينبغي أن يكون قريب من الصفر.

لاحظ أن الخسائر في أيام خرق القيمة المعرضة للخطر سيكون لها شكل غير متماثل؛ فإننا نتوقع العديد من نقاط البيانات التي تتجاوز مستوى القيمة المعرضة للخطر، وتقل تدريجيا في المستويات العليا والعالية، لذا فإن $(X-ES\alpha)$ في أيام خرق القيمة المعرضة للخطر من المرجح أن تكون سلبية أكثر من كونها إيجابية، مع احتمال ضئيل أن يكون هناك قيمة إيجابية كبيرة جداً تمثل متوسط صفر. وفي أغلب الأحيان، سيكون إجراء الاختبار الخلفي لديه عدد محدود من البيانات عن أيام خرق القيمة المعرضة للخطر، وسيكون من قبيل الصدفة ما إذا كان قد تم ملاحظة عدد مناسب من هذه القيم الإيجابية الكبيرة لتعويض العديد من القيم السلبية. وهذا يجعل من الصعب الوثوق بتقديرات العجز المتوقع، وهو ما يبعث على القلق بشأن فعالية الاختبار الخلفي للنقص المتوقع.

1-6-3* مزيد من التفاصيل عن العجز المتوقع

هناك طريقة أخرى لتحديد العجز المتوقع وهي إيجاد متوسط قيم VaRu لجميع $u \geq \alpha$. لنرى لماذا يعمل هذا، ونبدأ من التعبير:

$$ES_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_{\alpha}(X)}^{\infty} xf(x)dx. \quad (3.3)$$

الآن سنقوم بتغيير متغير x إلى متغير جديد u ، والذي يعرف بأنه $u=F(x)$ للقيام بذلك نستخدم الإجراء العادي لأخذ المشتقات لمعرفة أن $du=f(x)dx$. كما نلاحظ أن:

$$x=F^{-1}(u)=VaRu(X)$$

وعلاوة على ذلك، في الحد الأدنى من التكامل $x=VaR_{\alpha}(X)$ لذلك $u = \alpha$ وعند الحد الأعلى $u=F(\infty)=1$. وبالتالي:

$$\int_{VaR_{\alpha}(X)}^{\infty} xf(x)dx = \int_{\alpha}^1 VaR_u(X)du$$

4-3

$$ES_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_u(X)du.$$

وهكذا، فإن المعادلتين (3-3) و(4-3) توفران تعبيرين بديلين عن العجز المتوقع في المستوى α ، عندما يكون المتغير العشوائي للخسائر X مستمرا. وهناك تحذير هام هنا للتوزيعات المنفصلة، حيث لا توجد دالة كثافة f ، فإن المعادلة الأصلية للتعريف (3-2) والمعادلة (4-3) لم تعد مكافئة وينبغي أن نستخدم التعريف الثاني للمعادلة (3-4) لتجنب المشاكل (أو استخدام تعريف أكثر تعقيدا بدلا من المعادلة (2-3))

وكما ناقشنا سابقا، فإن إحدى المشاكل المتعلقة بالقيمة المعرضة للخطر هي أنها ليست مقياساً متماسكاً. وعلى وجه التحديد، ليس لدينا خاصية الإضافة الفرعية التي تكون بها $VaR_{\alpha}(X)+VaR_{\alpha}(Y) \geq VaR_{\alpha}(X+Y)$. وتبين أن العجز المتوقع هو مقياس متجانس للمخاطر. هناك أربع خصائص للتحقق: الرتبة، والتجانس الإيجابي؛ ثبات الترجمة والإضافات الفرعية. وحقيقة أن القيمة المعرضة للمخاطر لها الخصائص الثلاثة الأولى تعني

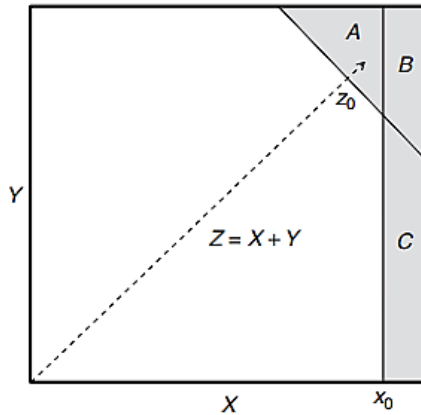
أنه يمكننا استخدام المعادلة (4-3) لإظهار أن العجز المتوقع له هذه الخصائص أيضا. لذلك:

$$\text{If } X \leq Y \text{ then } ES_{\alpha}(X) \leq ES_{\alpha}(Y);$$

$$ES_{\alpha}(bX) = b ES_{\alpha}(X);$$

$$ES_{\alpha}(X + c) = ES_{\alpha}(X) + c.$$

الآن سوف نوضح لماذا العجز المتوقع هو إضافة فرعية، والملاحظة الرئيسة هي أن العجز المتوقع لـ X هو متوسط أعلى قيم X التي يمكن أن تحدث، حيث الأحداث التي تولد هذه القيم لها احتمال معين وهو $1-\alpha$. إذا اخترنا مجموعة مختلفة من الأحداث التي لها نفس الاحتمال $1-\alpha$ ونظرنا إلى متوسط قيم X التي تحدث ضمن هذه الأحداث، يجب أن تكون القيمة أقل من العجز المتوقع. ويمكننا تمثيل ذلك في رسم بياني، كما هو مبين في الشكل 8-3. هنا نأخذ كل من X و Y حيث أن لهما نطاقات محددة بحيث يكون الرسم أسهل.



الشكل 8-3: الرسم البياني لإظهار الإضافة الفرعية للعجز المتوقع.

نحدد متغير عشوائي جديد $Z = X + Y$. نحدد متغير عشوائي جديد $Z = X + Y$ وتتضمن المنطقتان B و C أعلى القيم الممكنة لمتغير الخسارة. لنفترض أنها في المجموع لديها احتمال $1-\alpha$ ، بحيث أن النقطة x_0 سيكون في $ES_{\alpha}(X)$ الآن افترض أن المنطقتين A و B هم حيث توجد أعلى قيم لـ Z و A و C ولهم نفس الاحتمال. إذن A و B سيكون لهم إجمالي

احتمال $1-\alpha$ وقيمة $Z=z_0$ ، والذي يمثل الحدود الدنيا لهذه المنطقة، وهي $VaR_\alpha(Z)$ لاحظ الآن أن أخذ القيمة المتوقعة من X للمنطقة B و C ومقارنتها مع القيمة المتوقعة لـ X على المنطقة A و B ينطوي على تغيير مجموعة من الأحداث $X > x_0$ إلى مجموعة أخرى من الأحداث (مع نفس الاحتمال) حيث $x < x_0$. وبالتالي:

$$E(X | X > VaR_\alpha(X)) \geq E(X | Z > VaR_\alpha(Z))$$

قيمة X على المنطقة A و B تتضمن تغيير مجموعة من الأحداث $X > x_0$ إلى مجموعة أخرى من الأحداث (مع نفس الاحتمال) حيث $x < x_0$. وبالتالي

$$E(X | X > VaR_\alpha(X)) \geq E(X | Z > VaR_\alpha(Z))$$

يمكن استخدام نفس الحجة لتوضيح أن

$$E(Y | Y > VaR_\alpha(Y)) \geq E(Y | Z > VaR_\alpha(Z))$$

ثم نضيف هذين الفوارق معاً لعمل إضافة فرعية:

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) &= E(X | X > VaR_\alpha(X)) + E(Y | Y > VaR_\alpha(Y)) \\ &\geq E(X | Z > VaR_\alpha(Z)) + E(Y | Z > VaR_\alpha(Z)) \\ &= E(Z | Z > VaR_\alpha(Z)) = ES_\alpha(Z). \end{aligned}$$

ملاحظات

يعد المقال الصحفي الذي كتبه جو نوسيرا مقدمة ممتازة لهذا الموضوع، ولقد استخلصت منه نقاط مختلفة في هذا الفصل. إن كتاب كروهي وغالاي ومارك مفيد جداً في فهم ما تعنيه مقاييس القيمة المعرضة للمخاطر في الممارسة العملية، كما يتناول كتاب كولب (2001) الجانب الأكثر عملية لحساب القيمة المعرضة للمخاطر. وأيضاً كتاب يكولاس طالب الشهير يسمى بلاك سوانيس يستحق القراءة، لقراءة وجهات النظر حول ما هو الخطأ في العديد من النهج الكمية لقياس المخاطر. ولمزيد من المعلومات حول الطريقة التي يمكن أن تؤدي إلى التوزيعات غير المتماثلة ومنحنيات طويلة، أنظر أندرسون

(2012). وتوجد توصيات بازل بشأن الانتقال إلى العجز المتوقع في الوثيقة الاستشارية الصادرة في مايو 2012. ويمكن الحصول على دليل رسمي أكثر حول نتيجة التماسك في العجز المتوقع في أسيربي وتاسش (2002).

مراجع

- Acerbi, C. and Tasche, D. (2002) On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26, 1487–1503.
- Anderson, E. (2012) Ranking games and gambling: When to quit when you're ahead. *Operations Research*, 60, 1229–1244.
- Basel Committee on Banking Supervision (2012) Fundamental review of the trading book. Consultative Document, May 2012. Available at: <http://www.bis.org/publ/bcbs219.pdf>
- Crouhy, M., Galai, D. and Mark, R. (2006) *The Essentials of Risk Management*. McGraw Hill,
- Culp, C. (2001) *The Risk Management Process*. John Wiley & Sons.
- Einhorn, D. (2008) Private profits and socialized risk. Speech at Grant's Spring Investment Conference, 8 April 2008 (and Global Association of Risk Professionals Risk Review, 2008).
- Nocera, J. (2009) Risk Mismanagement. *New York Times*, 2 January.
- Taleb, N. (2010) *The Black Swan*, 2nd edition. Random House.

تمارين

3-1 القيمة المعرضة للمخاطر للتوزيعات العادية

- (أ) إذا كانت متوسط الأرباح التي يحققها مكتب التداول كل يوم تقدر بـ 100 000 دولار ولديها توزيع عادي مع انحراف معياري قدره 60 000 دولار، تحسب القيمة المطلقة المعرضة للخطر بنسبة 99٪ و 95٪.
- (ب) للمكتب التجاري الثاني نفس الخصائص (التوزيع العادي بمتوسط ربح قدره 100 000 دولار والانحراف المعياري البالغ 60 000 دولار). إذا كان المكتب الثاني يحصل على عوائد مستقلة تماماً عن الأول، ما هي قيم القيمة المعرضة للخطر المطلقة بنسبة 99٪ و 95٪ للمكتبين التجاريين معاً؟

(ج) إذا كانت نتائج مكتب التداول الثاني ليست مستقلة عن الأولى، فما هي أعلى قيمة (أي أكبر الخسائر) بالنسبة إلى القيمة المطلقة المعرضة للخطر التي تبلغ 99٪ والتي يمكن تحقيقها لكلا من مكتبين التداول؟

2-3 القيمة المعرضة للخطر لتوزيع المثلث

النظر في توزيع الخسائر على مدى يتراوح بين 100 و 100 ألف دولار حيث تتبع الكثافة توزيع المثلث $f(x) = -x/X^2$ for $-X \leq x \leq 0$ و $f(x) = (X-x)/X^2$ for $0 < x \leq X$ ، حيث $X = 100,000$ دولار، أحسب أرقام القيمة المعرضة للخطر المطلقة البالغة 99٪ و 95٪ (في هذه الحالة يمكنك حساب وظيفة الكثافة التراكمية عن طريق عمل الرسم البياني لـ f وحساب المنطقة تحت الرسم البياني).

3-3 مقياس غير رتيب للمخاطر

مثال 2-3 يعطي طريقة لحساب قياس المخاطر من المتوسط والانحراف المعياري. حيث يعطي مثال على أن زيادة الخسارة على بعض النتائج من شأنه أن يؤدي إلى انخفاض في قيمة $3\sigma + \mu$. (تلميح: النظر في توزيع للخسائر يكون فيها احتمالية z هي 0.1، صفر مع احتمال 0.8، و 1 مع احتمال 0.1. ابدأ بـ $z = -1$ ثم حاول زيادة z .)

4-3 التنوع يقلل من القيمة المعرضة للخطر

في المثال 3.3، استخدم القيمة المعرضة للخطر المطلقة البالغة 98٪ لإظهار أن هناك بعض فوائد للتنوع في استثمار 10 000 دولار في كل من A و B بدلا من وضع 20 000 دولار في سندانين من A.

5-3 من يوم واحد إلى عشرة أيام

ويطلب إطار عمل بازل 2 تحديد القيمة المعرضة للمخاطر لمدة 10 أيام، ثم ينص على أنه "يجوز للبنوك استخدام أرقام القيمة المعرضة للخطر المحسوبة وفقا لفترات احتفاظ

أقصر تصل إلى 10 أيام حسب الجذر التربيعي للوقت". فإذا كانت القيمة المعرضة للمخاطر لمدة يوم واحد هي x فإن يمكن تقدير القيمة المعرضة للخطر لمدة 10 أيام على أنها $x\sqrt{10} = 3.1623x$

(أ) اشرح لماذا لا يمكن أن تكون هذه الصيغة مناسبة إلا للقيمة المعرضة للخطر (النسبية) وليس للقيمة المعرضة للمخاطر المطلقة.

(ب) بين أنه إذا كانت العوائد اليومية مستقلة وتوزع عادة فإن الصيغة المقترحة تعطي النتيجة الصحيحة.

6-3 عملية تقديرات القيمة المعرضة للخطر

أنت مدير يستخدم نظام القيمة المعرضة للخطر لحساب قيم القيمة المعرضة للمخاطر النسبية البالغة 99٪ على أساس يومي. على مدى آخر 500 يوم تداول (عامين) كانت هناك خمس مناسبات عندما تم انتهاك قيم القيمة المعرضة للخطر. ويأتي الرؤوس ببعض المخاوف الجدية فيما يتعلق بالحسابات الحالية للقيمة المعرضة للخطر، بحجة أنها تمثل الارتباطات في السلوك الذي يحدث في الأوقات التي تقوم فيها الأسواق بتحركات كبيرة بشكل خاطئ. وقد قام بتنفيذ مجموعة من الحسابات البديلة لقيم القيمة المعرضة للمخاطر اليومية (النسبية) على مدى العامين الماضيين، وأيضاً كان يوجد خمسة مناسبات عندما تم انتهاك قيم القيمة المعرضة للخطر.

(أ) اشرح لماذا قد تختلف قيم القيمة المعرضة للخطر اليومية بشكل ملحوظ عن قيم النظام الحالي، ولكن لديها نفس عدد مرات خرق القيمة المعرضة للخطر.

(ب) افترض أن نظامين لهما نفس الأداء في الاختبار الخلفي، فهل يمكننا أن نستنتج أنهما جيدان بنفس الدرجة؟ وماذا يعني أن يكون واحد أفضل من الآخر؟

7-3 العجز المتوقع للتوزيع الطبيعي

بين أن العجز المتوقع عند المستوى 99٪ إذا كانت الخسائر تتبع التوزيع الطبيعي مع

متوسط صفر والانحراف المعياري 1 يعطى بواسطة $ES_{0.99} = 2.667$ ، باستخدام حقيقة أن:

$$\int_v^{\infty} x \exp(-x^2/2) dx = \exp(-v^2/2).$$

8-3 العجز المتوقع هو إضافة فرعية

استخدم حقيقة أن $ES_{0.99} = 2.667$ للتوزيع الطبيعي مع متوسط صفر والانحراف المعياري 1 (المعطى في التمرين 3-7) للعثور على العجز المتوقع بنسبة 99٪ إذا كانت الخسائر في المشروع A لها توزيع عادي بمتوسط بقيمة 5000 دولار أمريكي وانحراف معياري بقيمة 3000 دولار (وبالتالي، في المتوسط، سوف نحصل على ربح).

ب) نفترض الآن أن الخسائر في المشروع B له توزيع طبيعي بمتوسط قدره 3000 دولار وانحراف معياري قدره 1500 دولار. على افتراض أن المشاريع مستقلة، أحسب العجز المتوقع بنسبة 99٪ لمجموع المشروعين ومن ثم تحقق من الإضافة الفرعية في هذه الحالة.

9-3 التوقف على العجز المتوقع

لنفترض أن دالة الكثافة f للتوزيع للمتغير العشوائي للخسارة X تتناقص فوق 0.95٪. من خلال النظر في شكل دالة وظيفة الكثافة F ، وضح أن $VaR_u(x)$ هي وظيفة محدبة لـ u حيث $u > 0.95$ (بمعنى أن المنحدر يزداد مع u). استخدام رسم تخطيطي لفهم أن متوسط قيمة الدالة المحدبة على فاصل زمني هو أكبر من قيمة نصف الفاصل الزمني (ويمكن أيضا إثبات ذلك رسميا). وأخيرا استخدم المعادلة (3-4) لإظهار أن

$$ES_{0.95}(X) \geq VaR_{0.975}(X).$$

الفصل الرابع

فهم شروط إحلال التوزيع

استقراء ما بعد البيانات

تعمل ماريا في مستشفى تعليمي كبير وتتحمل مسؤولية طلب الإمدادات، وتواجه اليوم موقف صعب: كما أوضحت لصديقتها "آنا" "أنا بحاجة إلى بيانات ثلاث أعوام ولكن ليس لدي سوى عامين". فطلبت منها آنا أن توضح قصدها، وبدأت ماريا في سرد مشاكلها التي وقعت فيها خلال الأيام القليلة الماضية.

"على مدى العامين الماضيين كان لدينا اختبار تشخيصي لنوع معين من مرض الشعب الهوائية الذي يصيب الرضع وقد تم تسجيل المرضى الذين يعانون من هذه الحالة، وكان هناك دواء فعال يعالج هذا المرض. ولكن كان هناك نقص في المعروض بالإضافة إلى ارتفاع تكلفته. والأسوأ من ذلك، أنه يحتوي على بعض المكونات غير المستقرة لذلك كان يجب استخدامه في غضون الستة أسابيع الأولى بعد التصنيع. وكانت الطلبات العاجلة تستغرق أسبوعاً حتى تصل من منشأة التصنيع بسويسرا، لذلك كان يجب علينا الحفاظ على المخزون عن ما لا يقل عن أسبوع، ويجب علي الآن تحديد الكمية المطلوبة.

وفي هذا النوع من الحالات، تشير قواعدها المعتادة إلى أنه ينبغي نفاذ المخزون أكثر من مرة كل ثلاثة سنوات. أستطيع أن استنتج كم كنا سنحتاج في كل من الأسابيع الـ 104 الماضية، ولكن هذه ليست فترة طويلة بما فيه الكفاية "

أنهت "أنا" للتو دورة إدارة المخاطر كمرحلة من ماجستير في إدارة الأعمال وتتساءل عما إذا كان هناك طريقة لاستخدام بعض ما درسته لمساعدة صديقتها. وقالت " لديك بيانات 104 أسبوع ومشكلتك هي كيفية تقدير أعلى رقم إذا تم تمديد هذه لسلسلة إلى ثلاث سنوات، أي $3 \times 52 = 156$ أسبوع من البيانات. "

ردت ماريا "هذا هو بالضبط". "دعينا نفكر في ذلك، حتى في حال كان هناك ثلاث سنوات من البيانات فإنها لن تكون كافية - لمجرد أن شيئاً لم يحدث على مدى السنوات الثلاث الماضية لا يعني أنه لن يحدث على مدى السنوات الثلاث المقبلة." هل فكرت في وضع نموذج للاستخدام الأسبوعي مع التوزيع العادي، أو ربما نوعاً آخر من التوزيع؟ "

ردت ماريا "كانت لدي نفس الفكرة، ولكن نظرت إلى الأرقام وكان هناك المزيد من الأسابيع يشهد فيها معدل الطلب ارتفاعاً مما يضعف احتمالات ما إذا كان سيحدثي التوزيع الطبيعي نفعاً حقاً. يبدو أن ما حدث يرجع إلى كثير من العوامل التي لا أعرف عنها شيئاً. أشياء مثل الطقس، وعدد من حالات التهابات الصدر. لا أعتقد أنني أستطيع استخدام نموذج لوضع توقعات، هناك الكثير من حالات عدم اليقين، لذلك نحن أمام بيانات غير كافية. "

قالت أنا "لذا، أنتي بالحاجة إلى استخدام البيانات المتاحة لديك، ولكن استقراء قيم عالية لم تحدث بعد، وفي الوقت نفسه لا تريد أن تضعي أي افتراضات حول هذا النوع من التوزيع. "

"هذا صحيح: بدون بيانات كافية وبدون نموذج محدد للتوزيع يبدو من المستحيل تقدير العدد الذي أحتاج إليه. "

قالت أنا: "أنا لست متأكدة من ذلك، حتى من دون افتراض أن الأرقام الأسبوعية

تتطابق مع توزيع معين، فإنها بالتأكيد لا يمكن أن تكون شاذة للغاية. أي نوع من الانتظام يجب أن يوفر لكي دلائل على استقرار المشكلة. قد يكون من الصعب استخراج معلومات حول هذا "الذيل (المنحنى) العلوي" للتوزيع من البيانات المتاحة لديك، ولكن ربما ليس مستحيلا. سمعت أستاذي يتحدث عن نظرية القيمة القصوى وربما يمكن أن تساعد بطريقة ما. "

1-4 التوزيع ذو القيم القصوى (غير المحدود)

1-1-4 تعريف مؤشر المنحنى (شروط الإحلال)

إن التحدي المتمثل في استخدام التقنيات الكمية لقياس المخاطر هو أنه يجبرنا على الانتباه إلى ذيول (منحنى) التوزيع. هذا هو بالضبط مدى الصعوبة في التوقع والتقدير: نادرا ما نرى ما يكفي من الأحداث لوضع استنتاجات محددة حول التوزيعات الأساسية. في هذا الفصل سوف ننظر بمزيد من التفصيل في بعض الأدوات للتعامل مع ذيول التوزيعات.

عند التعامل مع المخاطر نهتم كثير من الأحيان بالمتغيرات العشوائية التي لديها احتمالية (على الأقل نظريا) من القيم الكبيرة بلا حدود. مثل التوزيع الطبيعي، الذي له متغيرات عشوائية ليس لها نطاق محدود. ومن الواضح أنه من الناحية العملية سيكون هناك في الغالب حد للتوزيع: فعلى سبيل المثال، إذا تعاملنا مع توزيع الخسارة، ستكون هناك خسارة قصوى تحددها قدرة شركتنا على تجنب الإفلاس. ولكن عادة ما يكون أكثر تكشفا عن نموذج الخسائر كما لو لم يكن هناك حد أقصى. في هذا السياق من المنطقي أن ننظر إلى شكل ذيل التوزيع الذي ليس له نهاية.

التوزيع الطبيعي يعطي نقطة طبيعية للمقارنة بالتوزيعات الأخرى. ويسمى هذا التوزيع بـ "التوزيع غير المحدود" إذا كان لديه المزيد من الوزن في المنحنى بأكثر من التوزيع الطبيعي. ولكن علينا أن نتوقف ونفكر فيما قد نعينه بهذه الجملة. لأنه يمكن تعيين الانحراف المعياري من العادي إلى ما نرغب به، فمن الممكن دائما للعثور على التوزيع الطبيعي الذي يعني

صفر ولكن هناك احتمال كبير لأن يكون أكبر من قيمة معينة. نحن بحاجة لجعل الانحراف المعياري كبير بما فيه الكفاية. لذلك، لفهم التوزيع غير المحدود، نحن بحاجة للتفكير في سلوك توزيعها كمجموعة كاملة من القيم وليس فقط في نقطة واحدة.

طريقة واحدة لفهم سلوك منحنى التوزيع هو أن ننظر في دالة التوزيع التراكمي لنهج التوزيع وهناك طريقة جيدة للقيام بذلك وهي النظر في الناتج $(1 - F(x))X^K$ لبعض K . المصطلح الأول $1 - F(x)$ أقرب إلى الصفر مع زيادة x ، في حين أن المدى الثاني X^K سوف يكون أكبر وأكبر، لذلك يمكننا أن نسأل أي من هذين سيكون الأصح؟ هل سيقرب الناتج من الصفر أو الاتجاه إلى ما لا نهاية؟

يمكننا أن نضمن أننا بجعل k أكبر، وسيكون في مرحلة ما k_0 حينها XK تكون الأثقل وزناً. بالنسبة إلى $k < k_0$ فإن الناتج سوف يقترب من الصفر، وبالنسبة إلى $k > k_0$ فإن الناتج سيتجه للانتهاء. إذا كان ذيل التوزيع ذو قيم كبيرة، سيكون هناك فرص كبيرة للقيم المرتفعة وهذا يعني أن $F(X)$ تقترب من الواحد ببطء. لذلك لن نكون قادرين على مضاعفة مثل هذه القيمة الكبيرة من X^K والاستمرار في الحصول على ناتج يقترب من الصفر. وبالتالي، يرتبط المنحى ذو القيم المرتفعة بقيمة منخفضة من K_0 .

عندما يمكننا تحديد قيمة k_0 بهذه الطريقة، مع $(1 - F(x))x^k$ باتجاهها إلى الصفر أو اللانهاية وفقاً لما إذا كان k إما أقل أو أعلى من k_0 ، ثم نقول أن التوزيع له مؤشر المنحنى (الذيل) من k_0 . لذلك، على سبيل المثال، إذا كان مؤشر المنحنى (الذيل) يساوي 2 ويساوي العبارة $1 - F(x) - x^2$ تتجه إلى الصفر بنفس الطريقة مثل $x^{-2} = 1/x^2$. ولكن التعريف الذي قدمناه، من حيث نقطة فاصلة بين نظامين، أكثر دقة.

مثال 1-4 التوزيع ذو القيم القصوى (غير المحدود)

متغير عشوائي لديه توزيع مع دالة الكثافة

$$f(x) = \frac{1}{(2 + |x|)^2}$$

هذا متماثل حول 0 لأن قيم f لا تعتمد على علامة x . وتتمثل دالة الكثافة في الرسم البياني 1-4. يمكننا التحقق من أن هذا هو توزيع من خلال إظهار أن النهج متكامل 1 كما $x \rightarrow \infty$. للقيام بذلك نلاحظ أن $z > 0$

$$\int_0^z f(x)dx = \int_0^z \frac{1}{(2+x)^2}dx = \left[\frac{-1}{2+x} \right]_0^z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+z},$$

التي تقترب بوضوح من $2/1$ حيث $z \rightarrow \infty$ ، وبالتالي فإن المنطقة تحت المنحنى كلها ستكون 1 كما نرغب. لتحديد دالة التوزيع التراكمي يمكننا استخدام التماثل لمعرفة ذلك

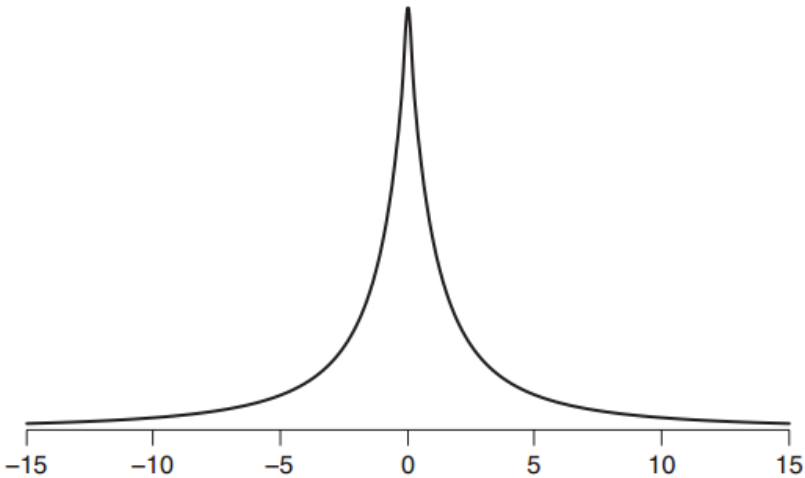
$$F(0) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

$$z > 0,$$

كما

$$F(z) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^z f(x)dx = 1 - \frac{1}{2+z}.$$

وبالتالي، $1 - F(z) = (2+z)^{-1}$ وهذا التوزيع له مؤشر المنحنى (الذيل) عند 1. هذه هي حالة شاذة من التوزيع ذو القيم القصوى.



الشكل 1-4: مثال لدالة الكثافة مع مؤشر المنحنى (الذيل) المساوي لـ 1.

من المهم أن ندرك أن ليس لكل التوزيعات تباين وانحراف معياري واضح المعالم. ويُعرّف التباين لمتغير عشوائي X بأنه $E[(X - E(X))^2]$ وإذا كان التوزيع له منحني ذو قيم قصوى فإن هذا التوقع قد يكون لانهائي. وفي هذه الحالة يكون الحديث عن الانحراف المعياري للمتغير العشوائي بلا معنى. كلما كان مؤشر المنحني (الذيل) أصغر، كلما كان التوليف من التوزيع أكثر احتمالا، والأرجح هو ألا يكون هناك تباين. والنتيجة الرئيسة هنا هي أنه إذا كان مؤشر المنحني (الذيل) أقل من k إذاً $E(X^k)$ سيكون لانهائي (نبين أسباب صحة هذا الأمر في القسم التالي).

هناك مجموعة كاملة من التوزيعات يكون فيها مؤشر المنحني (الذيل) لانهائي بوجود كافة البيانات. التوزيعات، مثل التوزيعات العادية، حينها تكون الاحتمالية في المنحني، $1 - F(x)$ ، تقترب من 0 أسرع من أي x . على الجانب الآخر، توزيع مثل الشكل 1-4 الذي يظهر مشكلة تحديد المتوسط. ومن الواضح أن التوزيع متماثل حول الصفر، وبالتالي يجب أن يكون متوسط يساوي الصفر، ولكن إذا نظرنا فقط في ذيل التوزيع سينصب اهتمامنا على تكامل المعادلة $\int_u^{\infty} xf(x)dx$ لبعض القيم u ، وتبين أن هذا التكامل له قيمة لانهائية.

2-1-4 توقع مؤشر المنحني (الذيل)

بالنظر إلى مجموعة من نقاط البيانات قد نرغب في تقدير مدى سرعة منحني (ذيل) التوزيع في الاتجاه إلى الصفر لمعرفة ما إذا كنا نتعامل مع توزيع ذو حدود قصوى غير محدودة. على سبيل المثال، هناك سؤال يجب الإجابة عليه إذا احتجنا إلى توقع النقص المتوقع من البيانات. في وقت لاحق من هذا الفصل سوف نناقش بشكل أكثر تفصيلا للطريقة التي يمكن أن يتم بها تقدير قياس المخاطر باستخدام نظرية القيمة القصوى، ولكن هنا نريد أن نعطي نهجا أكثر أولية لتقدير مؤشرات الذيل.

دالة التوزيع التراكمي، لنفترض أن التوزيع له مؤشر ذيل α ، ثم، بالنسبة للقيم الكبيرة من x ، نتوقع أن تعطى دالة توزيع تراكمي تقريبا من خلال

$$F(x) = 1 - kx^{-\alpha}$$

لبعض K الثابتة. إذا كان صحيحًا إذًا

$$\log(1 - F(x)) = \log(kx^{-\alpha}) = \log(k) - \alpha \log(x).$$

بما أن $1 - F(x)$ بين 0 و 1 وسجل الأرقام $(\log)$ أقل من 1 سلبى، سيكون مساعد في ضرب هذه المعادلة في -1 للحصول على

$$-\log(1 - F(x)) = -\log(k) + \alpha \log(x).$$

هذا يدل على أنه إذا حددنا السجل $-\log(1 - F(x))$ ضد سجل $\log(x)$ إذًا يجب أن نحصل على خط مستقيم مع ميل α .

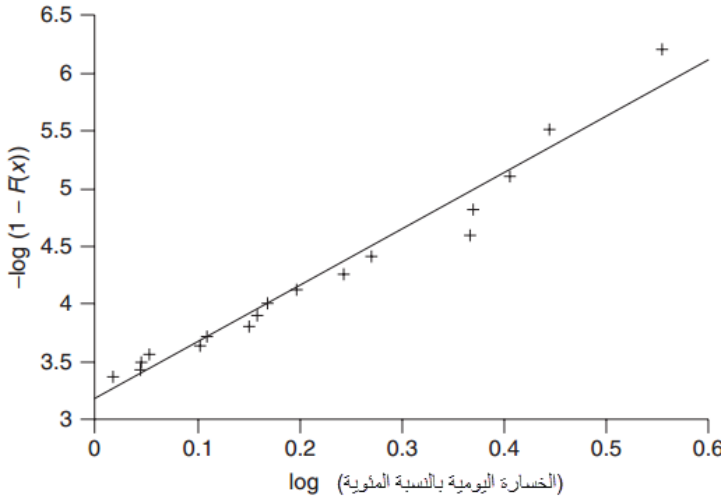
وبالنظر إلى مجموعة من نقاط البيانات فإنه من السهل تقدير $1 - F(x)$ من خلال النظر في نسبة النقاط في العينة فوق القيمة x . وبالتالي، فإن الإجراء هو تحديد نواقص السجل $\log$ لهذا التوقع ضد سجل $\log x$ لتقدير مؤشر المنحنى (الذيل).

مثال 2-4 سلوك المنحنى (الذيل) لأسعار الصرف في سوق العملات

لتوضيح ذلك، يوضح الشكل 2-4 مخطط بياني من هذا النموذج لسعر صرف الجنيه الإسترليني والدولار الأمريكي لفترة 500 يوم تبدأ في مايو 2010. وتظهر البيانات التغير النسبي اليومي في سعر الإغلاق. ننظر هنا في الخسائر من يوم لآخر إذا تم شراء الجنيه الإسترليني (الجنيه ينخفض أمام الدولار)، لذلك يعطي هذا 499 نقطة بيانات مختلفة. خلال هذه الفترة كانت أكبر خسارة 1.74٪ في 13 مايو 2010. يتم رسم ذلك في هيئة 'x' قيمة سجل $\log(1.74) = 0.55$ (باستخدام سجلات طبيعية). هذه النقطة لديها 498 نقطة دون ذلك من تعدد خسائر ولذا فإننا نقدر قيمة $F(x)$ لتكون 499/498 وبالتالي فإن قيمة y في المخطط تعطى من خلال

$$-\log(1 - F(x)) = -\log(1/499) = 6.21.$$

يبين الشكل حركة السعر على مدار 17 يومًا والتي تخطت الخسائر فيها أكثر من 1٪. الخط المستقيم الواصل بتلك النقاط له ميل 4.9. لذلك، من هذه البيانات وحدها، نستطيع توقع مؤشر الذيل بنحو 5، وهناك بعض الأدلة على السلوك المنحنى غير المحدود.



الشكل 2-4: بيانات المنحنى (الذيل) للخسارة اليومية بالنسبة المئوية في سعر صرف الإسترليني/دولار

عندما تكون المنحنيات غير محدودة فسوف يكون مؤشر الذيل لا نهائي. بطبيعة الحال، سينتج عن ذلك ميل قوي ومن خلال رسم مخطط باستخدام توزيع طبيعي سيكون هناك ميل أكثر من المبين في الشكل 2-4. بالرغم من ذلك، بما أن لدينا عدد غير محدود من الأمثلة فإنه من الناحية العملية من المستحيل معرفة سلوك المنحنى تحديداً. وكلما زادت أعداد الأمثلة كلما كانت قدرتنا على التوقع أفضل، إلا أن تعريف الذيل هو شيء يحدث في القيم القصوى ولن يكون لدينا أبداً بيانات كافية للتأكد من هذا الأمر.

مثال 3-4 النظر في سلوك الذيل للتوزيع الطبيعي

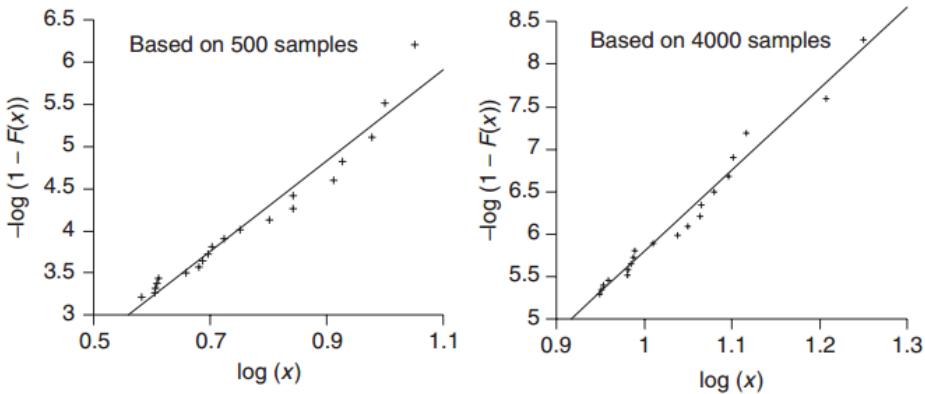
يمكننا محاكاة البيانات ببساطة من التوزيع الطبيعي. يظهر الشكل 3-4 نتائج مثالين مختلفين للتوزيع الطبيعي بمتوسط 0 وانحراف معياري 1. ويوجد على يسار المخطط مثال يحتوي على 500 نقطة من البيانات. ويظهر الشكل سجل $-\log(1 - F(x))$ على المخطط مقابل السجل $\log(x)$ لأعلى 20 نقطة؛ وأعلى نقطة في هذا المثال هي 2.859. والخط المستقيم الواصل بين هذه النقاط له ميل يساوي 5.38. لاحظ أن هذا المثال المختلف قد ينتج عنه

توقعات مختلفة تمامًا.

وعلى يمين الشكل، يوجد نموذج جديد يحتوي على 400 نقطة من البيانات، وأيضًا يظهر الشكل أعلى 20 نقطة. وفي هذه المرة فإن أعلى نقطة 3.48 وتتوافق مع قيمة متوقعة لـ $F(X) = 4000/3999$ تؤدي إلى قيمة Y في المخطط

$$-\log(1 - F(x)) = -\log(1/4000) = 8.29.$$

الخط المستقيم الواصل بين النقاط على اليمين له ميل 9.57 وبالتالي أعلى من الرقم الحاصل من النموذج الأصغر. يمكننا رؤية ذلك من خلال استخدام مثال أكبر، تتوافق الـ 20 نقطة مع جزء من التوزيع أبعد من المنحنى. هذا يعطي لهذه الطريقة فرصة أكبر في اختيار منحنى ذو قيم أصغر ويكون لمؤشر الذيل توقعات أكبر. ولكن يظهر هذا المثال أيضًا صعوبة التأكد من مؤشر الذيل على أساس النموذج الذي يحتوي على 100 نقطة. ويوضح بشكل عملي أن دلائل استخدام التوزيعات غير المحدودة لأسعار الصرف المستخدمة في المثال 2-4 ضعيفة جدًا.



الشكل 3-4: توقعين مختلفين لمؤشر الذيل (المنحنى) باستخدام أمثلة من التوزيع الطبيعي.

3-1-4* المزيد من التفاصيل حول مؤشر الذيل (المنحنى)

افترضنا في تعريفنا لمؤشر الذيل (المنحنى) أن هناك قيمة مفردة لـ K_0 التي هي بين النطاق الذي فيه $x^k(1 - F(x))$ تتجه إلى ما لا نهاية وفي النطاق الذي تتجه فيه إلى الصفر. ولكن ماذا عن النطاق الذي تكون فيه $x^k(1 - F(x))$ لا تقترب من الصفر ولا إلى ما لا نهاية؟ في هذه الحالة لن يكون هناك تعريف محدد لمؤشر الذيل. في حقيقة الأمر، يكون ذلك غير محتمل الحدوث، ولكن لا يمكننا تجاهل تلك الاحتمالية. سنرى ما سبب ذلك.

سنبدأ بأن نكون دقيقين في ما تعنيه الدالة $G(x)$ التي لا تتجه إلى الصفر أو إلى ما لا نهاية. عدم الاتجاه إلى ما لا نهاية يعني أن بعض القيم M مثل $G(x) < M$ لسلسلة لا نهائية من القيم $x: x_1, x_2, \dots$. ولهذا لا يهم كبر حجم قيمة x حيث يمكننا دائمًا إيجاد قيم أكبر يكون فيها $G(x) < M$. هذا هو القيمة المنطقية السلبية لاتجاه $G(x)$ إلى ما لا نهاية، وهو مساوي للقول بأن كل $M, G(x)$ ستكون أعلى من M والاستقرار أعلاه. وفي الاتجاه الآخر، حينما لا تتجه $G(x)$ إلى الصفر فإن ذلك يعني أن بعض القيم لـ m مثل $G(x) > m$ لسلسلة لا نهائية من قيم $x: x_1, x_2, \dots$. الآن افترض أن هذا حدث لـ $(1 - F(x))x^k$

$$x^k F(x) \text{ لكل قيم } K \text{ في نطاق } [k_0 - \delta, k_0 + \delta]. \text{ الآن إذا كان}$$

$$(1 - F(x_i))x_i^{k_0 + \delta} < M \text{ for } x_i \rightarrow \infty,$$

إذا

$$(1 - F(x_i))x_i^{k_0} < Mx_i^{-\delta}.$$

لاحظ أن الجانب الأيمن من هذا التباين يتجه إلى الصفر حيث أن x_i تصبح أكبر. ونفس الطريقة تنطبق على

$$(1 - F(x_i))x_i^{k_0 - \delta} > m \text{ for } x_i \rightarrow \infty,$$

ويكون لدينا

$$(1 - F(x_i))x_i^{k_0} > mx_i^{\delta}$$

الجزء الأيمن يتجه إلى ما لا نهاية حيث x_i تصبح أكبر. ولهذا، في نفس الوقت تكون سلسلة من قيم x_i يكون فيها $(1 - F(x_i))x_i^{k_0}$ تتجه إلى ما لا نهاية أو اتجاهها إلى الصفر. الحالة الوحيدة التي يمكن حدوث ذلك فيها هي في حال كان نتاج الدالة $(1 - F(x_i))x_i^{k_0}$

تتجه إلى الارتفاع أو الانخفاض وارتفاع القمم أكثر وأكثر واقترب القيعان من الصفر وتقترب من الصفر أكثر وأكثر. يمكن أن نبني مثل هذه الدالة إذا حاولنا، ولكنها بالتأكيد ليست شيئاً محتمل الحدوث من الناحية العملية.

عندما نتحدث عن مؤشر الذيل L لـ K لن يتوجب علينا تحديد ما إذا كان التعبير الحاسم $L(x) = (1 - F(x))xk$ نفسه يتجه إلى الصفر. ففي حقيقة الأمر، هناك احتمالية لكل من هذه الخيارات، ولكن الدالة $L(x)$ يجب أن تتجه إلى ما لا نهاية أو إلى الصفر بشكل سريع. وهناك بعض الحالات المطلوبة لهذا الأمر: يجب أن تكون $L(x)$ ذات متغير بطيء بمعنى:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$$

لأي من القيم $t > 0$. ولهذا، على سبيل المثال، إذا افترضنا أن $t = 2$ مضاعفة القيمة X لا يمكن أن تتم (في حدود القيمة الكبرى لـ X) وتبدو كتطبيق أي مضاعف غير الـ 1. لاحظ إنه إذا كان $L(x) = kx^\beta$ ، $L(tx) = t^\beta L(x)$ ، وهذا يمكن أن يساوي فقط 1 (و L ذات متغير بطيء) في حال كان $\beta = 0$.

هناك بعد التعقيدات هنا لا نرغب في الخوض فيها، فالحالة $(1 - F(x))x^\alpha$ ذات متغير بطيء أقوى من الحالة التي يكون فيها الأس α يمثل نقطة الانقسام بين دالات تقترب من الصفر ودالات تقترب من اللانهاية. (يمكننا رؤية ذلك من مراقبة الفترة الزمنية للدالة $2 + \sin x$ التي لا تتغير بشكل بطيء ولكنها سوف تتأثر بـ $x\epsilon$ بأي قيمة صغيرة من ϵ). الوضع الذي يكون فيه تغير بطيء هو الوضع المطلوب لإثبات النتائج ذات القيمة القصوى التي سوف نوضحها لاحقاً، حتى وإن كانت الطريقة التي وضعنا بها مؤشر الذيل أبسط.

كما ذكرنا سابقاً، هناك علاقة وثيقة بين الأوقات التي يكون فيها التوزيع ومؤشرات الذيل متواجدين. نبدأ بالنظر في الأوضاع التي تتواجد فيها الدالة $E(X_2)$. عندما يكون لـ X دالة كثافة f و CDF F يمكننا كتابة

$$E(X^2) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)x^2 dx.$$

هنا قمنا بكتابة الحد العلوي والسفلي للتكامل كـ $-R$ و R (بدلاً من اللانهاية) لأن الصيغة التكاملية $-\infty$ إلى ∞ معرفة فقط عندما تكون حدود $R \rightarrow \infty$ موجودة، والتساؤل حول تواجدها أو لا هو محط اهتمامنا هنا. والآن، اختيار نقطة عشوائية u والتكامل مع النطاق الموضح أعلاه u (لاحظ أن في هذا النطاق $x \geq u$) يمكن أن نحصل على عدم مساواة

$$\int_u^R f(x)x^2 dx \geq \int_u^R f(x)u^2 dx = (F(R) - F(u))u^2.$$

السماح لـ R تتجه إلى ما لا نهاية يوضح أن $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_u^R f(x)x^2 dx \geq (1 - F(u))u^2$.

الآن ضع في اعتبارك التوزيع مع مؤشر الذيل α أقل من 2. ثم $(1 - F(u))u^2$ تتجه إلى ما لا نهاية. ولهذا، لأي رقم كبير لـ M يمكن أن نختار u مع $(1 - F(u))u^2 > M$ وأيضاً لـ $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_u^R f(x)x^2 dx > M$. التكامل للنطاق بأكمله $-R$ إلى R يجب أن يكون أكبر من ذلك، على سبيل المثال؟

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)x^2 dx > M.$$

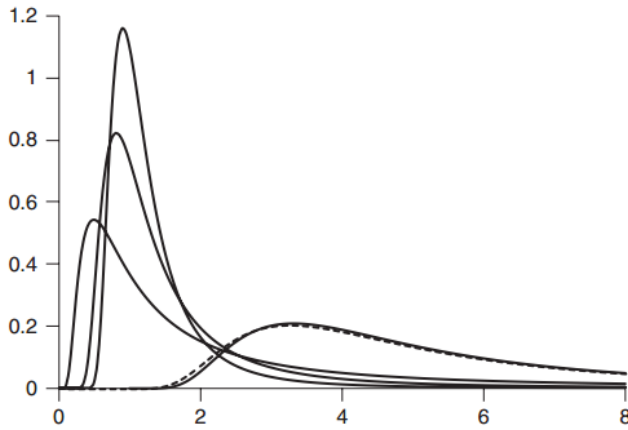
ولكن بما أن M يمكن اختيارها لأن تكون أي رقم نرغب به، سيحدد ذلك كـ $R \rightarrow \infty$ بعدم إمكانية حدوثها، على سبيل المثال. $E(X^2) = \infty$.

بشكل عام، يمكن استخدام هذه المناقشات في إظهار إذا كان التوزيع له مؤشر ذيل لـ α إذا الحالات التي يكون فيها $E(X^k)$ لن تقع لأي من $k > \alpha$.

2-4 تحديد التوزيع للقيم القصوى

في هذا القسم سوف ننظر في المشاكل التي تقع عندما يكون هناك قيم قصوى. اقترض أننا نريد توقع القيم القصوى لـ N لمتغيرات عشوائية مختلفة $X_1, X_2, \dots, X_N$. ولهم نفس التوزيع. على سبيل المثال، يمكن أن نهتم بالثروة القصوى لـ 100 فرد ضمن

عينة عشوائية، ولهذا فإن X_i تعني الثروة لدى i th (ترتيب الفرد). ونعرف أن في حال كانت X_i جميعها مستقلة فهناك N منهم وكل منهم له $F(x)$, CDF، وعليه فإن توزيع القيم القصوى التي نسميها بـ $F_{\max}$ ، لها $(F(x))^N$ CDF عندما تكون N كبيرة، تكون الذيل للتوزيع الأصلي فقط حيث أن أي قيمة لـ X حينما تكون $F(x)$ أقل من 1 سيكون لها $(F(x))^N$ رقم صغير جدًا. ويبدو هذا منطقيًا عندما نأخذ القيمة القصوى لرقم أكبر من الرسومات لمتغيرات عشوائية سنكون ملزمين لرؤية قيمة على الجانب الأيمن للمنحنى التوزيع كما هو الحال مع سلوك التوزيع في المنحنى الذي يكون الشيء الوحيد الذي يحسب.



الشكل 4.4 كثافات فريشيه لقيم مختلفة لـ α

الشكل 4.4: كثافات فريشيه لقيم مختلفة لـ α

سوف نوضح ذلك من خلال طريقة عرض التوزيع للقيم القصوى لـ N لعدد كبير من N سوف يعتمد فقط على مؤشر الذيل للتوزيع الأصلي. سنأخذ في اعتبارنا التوزيع ذو مؤشر الذيل α وبالأخص سنفترض أن F هي التوزيع الذي يكون فيه المنحنى $1 - F(x) = kx^{-\alpha}$ على سبيل المثال $F(x) = 1 - kx^{-\alpha}$ نحتاج إلى تعريف مضاعف محدد b_N والذي سوف يكون بمثابة مقياس.

$$b_N = (kN)^{1/\alpha}.$$

إذن

$$F_{\max}(b_N x) = (F(b_N x))^N = (1 - kb_N^{-\alpha} x^{-\alpha})^N.$$

لكن

$$b_N^{-\alpha} = ((kN)^{1/\alpha})^{-\alpha} = (kN)^{-1},$$

ولهذا

$$F_{\max}(b_N x) = \left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{N}\right)^N. \quad 1-4$$

سنحتاج إلى استخدام العديد من e في هذا القسم وفي بعض الأحيان يكون استخدام رموز $\exp(x)$ أوضح للمتوسط $\exp$. سوف نتقل بين هذين الاثنين (وأيضاً جمعهم) بهدف تجنب المعادلات المطولة من المعدلات الأكثر طولاً لكي يكون التعبير عنها أبسط للقراءة. حقيقة واحدة عن استخدام الدالة الأسية هي أنها يمكن أن تكون بمثابة حد:

$$\exp(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + x/N)^N, \quad 2-4$$

ولهذا، من خلال المعادلة (1-4) نرى أن عندما تكون N كبيرة يكون لدينا $F_{\max}(b_N x)$ قرابة $\exp(-x/\alpha)$.

وقد أضحنا أنه إذا أخذنا القيم القصوى لـ 50 متغير عشوائي لمستقبل موزع يكون فيها $1 - F(x)$ تتجه إلى الصفر مثل $x^{-\alpha}$ إذا يكون التوزيع تقريباً نسخة مقيسة من واحد مع دالة التوزيع $\exp(-x/\alpha)$ ، حيث يبقى الشكل كما هو ولكن المحور الأفقي يتم مضاعفته من خلال $b_{50} = (50k)^{1/\alpha}$.

ولهذا، مؤشر الذيل α هو الشيء الوحيد الذي يحدد شكل التوزيع والتوزيع للقيم القصوى التي لها دالة توزيع تراكمي والتي تكون $F(x) = \exp(-x/\alpha)$ ولكن هذا يكون له قياس من خلال الكمية التي تعتمد على N والتوزيع المطبق.

التوزيع باستخدام دالة التوزيع التراكمي يكون من خلال $F(x) = \exp(-x/\alpha)$ ويسمى بـ "*Fréchet distribution*" على اسم عالم الرياضيات الفرنسي البارز موريس

فريشيه. دالة التوزيع لـ فريشيه يتم الحصول عليها باستخدام قواعد "حساب التفاضل والتكامل:

$$(d/dx) \exp(g(x)) = g'(x) \exp(g(x))$$

حيث نكتب $g'(x)$ لمشتقة الدالة $g(x)$. وعليه تكون الكثافة

$$f(x) = \alpha x^{-\alpha-1} \exp(-x^{-\alpha}).$$

الشكل 4-4 يظهر الكثافة لتوزيع فريشيه لقيم مختلفة لـ α . الثلاث منحنيات على اليسار المبينة على الشكل تظهر دالة الكثافة عندما تكون $\alpha = 1$ و $\alpha = 2$ و $\alpha = 3$ (بقيم أعلى من α بوجود قمم أعلى).

كما أظهر الشكل 4-4 التوزيع للقيم القصوى لـ 16 رسم من التوزيع الذي له $F(x)$ $1 - x^{-2} = 1 - x^{-2}$. يجب أن يتسق هذا تقريباً مع توزيع فريشيه مع $\alpha = 2$ بقياس أفقي. بما أن $F(x) = 1 - kx^{-\alpha}$ مع $k = 1$ و $\alpha = 2$ فإن المقياس هو $a_N = (kN)^{1/\alpha} = 16^{1/2} = 4$. هذه المقارنة تم توضيحها أيضاً (المنحنيان بقمم تقترب من الـ 3): المقياس الملائم لدالة كثافة فريشيه تم توضيحها بخط منقط وتوزيع القيم القصوى بخط متصل. المقياس الأفقي لدالة التوزيع التراكمي سوف يتطلب مقياس رأسي متسق لدالة الكثافة من خلال عامل للرقم 4 (حتى تظل دالة الكثافة تتكامل مع الـ 1). وهذا هو سبب انخفاض القمة هنا دون المقياس الطبيعي لفريشيه باستخدام $\alpha = 2$. الاتصال بين الخط المنقط والمتصل جيد جداً، خاصة بالنظر إلى الحجم الصغير لـ $N = 16$.

لدينا الآن صورة واضحة لما يحدث عندما يكون التوزيع الأصلي له مؤشر ذيل ثابت، ولكن ماذا سيحدث إن قمنا بتطبيق نفس النهج مع الذيل التي تتجه إلى الصفر بأسرع من متعدد الحدود (مثال، لهم نفس مؤشر الذيل غير المحدود)؟ أفضل طريقة لفهم هذا الوضع هو العمل من خلال مثال، ولهذا نضع في اعتبارنا التوزيع الأسّي، الذي لديه دالة توزيع تراكمي $F(x) = 1 - e^{-x}$ ودالة كثافة $f(x) = e^{-x}$ for $x > 0$ ويكون له نفس

خصائص مؤشر غير المحدود. مع وجود مؤشر ذيل محدود استخدمنا مقياس أفقي لـ $N = b(kN)^{1/\alpha}$ ولكن عندما تكون α لا نهائية يصبح هذا مقياس من خلال 1، مثال لا يوجد مقياس على الإطلاق. في حقيقة الأمر، سوف نقولك بتحويلها من خلال كمية معينة تعتمد على N بدلاً من المقياس الأفقي. في هذا المثال سنرغب في تحويلها بكمية $\log(N)$ ، لاحظ التالي:

$$F(\log(N) + x) = 1 - e^{-\log(N)} e^{-x} = 1 - \frac{\exp(-x)}{N}.$$

ولهذا

$$\begin{aligned} F_{\max}(\log(N) + x) &= (F(\log(N) + x))^N \\ &= \left(1 - \frac{\exp(-x)}{N}\right)^N. \end{aligned}$$

من خلال ملاحظتنا السابقة في المعادلة (4.2) حول الأسّي كحد يمكننا رؤية أن N تصبح أكبر،

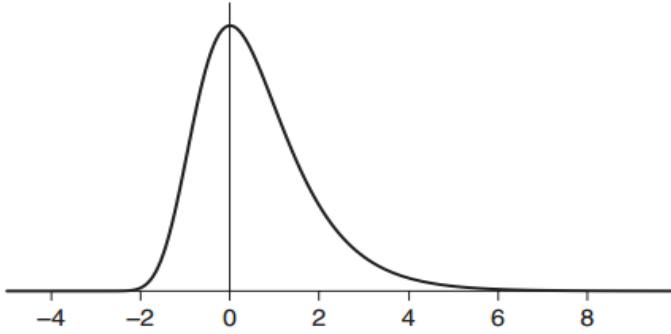
$$F_{\max}(\log(kN) + x) \rightarrow \exp(-e^{-x}).$$

من جديد يكون لدينا توزيع يصل إلى الحد. في حقيقة الأمر هذا التوزيع حينما يكون $F(x) = \exp(-e^{-x})$ يسمى بـ *Gumbel distribution* أي توزيع جامبل. وقد أظهرنا الحدود القصوى لـ 50 رسم من التوزيع الأسّي حينما يكون $F(x) = 1 - e^{-x}$ يكون له توزيع يقترب من توزيع جامبل من خلال كمية تساوي $\log(50) = 3.91$.

قد يبدو من النظرة الأولى أن توزيع جامبل غير ممكن: له دالة توزيع تراكمي حينما يتم زيادة قيمة e إلى قيمة تكون هي نفسها قيمة أعلى.

دالة جامبل تكون

$$f(x) = (d/dx) \exp(-e^{-x}) = e^{-x} \exp(-e^{-x}).$$



الشكل 5-4: دالة الكثافة لتوزيع جامبل

يوضح الشكل 5-4 دالة الكثافة لجامبل ويمكننا رؤية أنه "عادي" جدًا (نظرا لجميع الأسس في تعريفها).

بالرغم من أن التوزيع الأسّي له مؤشر ذيل غير محدود فإنه لا يزال لديه منحنى أكثر سمكًا من التوزيع الطبيعي الذي يتضمن سلوك $\exp(-x^2)$ لدالة الكثافة. من الصعب التعامل مع التوزيع التراكمي للتوزيع، ولهذا سوف نستخدم توزيع أبسط ولكن مع استخدام خصائص $\exp(-x^2)$. ولهذا سنأخذ المثال الثاني للتوزيع مع دالة التوزيع التراكمي من خلال $F(x) = 1 - \exp(-x^2)$ ، هذه المعادلة لها كثافة $f(x) = 2x \exp(-x^2)$. ولإيجاد التوزيع المحدود للقيم القصوى من الرسوم N سنحتاج إلى استخدام كلا المقياسين (من خلال العامل b_N) والتحويل (باستخدام الكمية a_N) وسنحدد

$$a_N = \sqrt{\log N} \text{ and } b_N = 1/(2\sqrt{\log N}).$$

يبدو أننا قد استخرجنا هذه القيم من b_N, a_N من اللاشيء، ولكننا سوف نوضح كيفية اختيارهما لاحقًا، والآن نلاحظ أن

$$\begin{aligned} F(a_N + xb_N) &= 1 - \exp(-(a_N + xb_N)^2) \\ &= 1 - \exp\left(-\left(\sqrt{\log N} + \frac{x}{2\sqrt{\log N}}\right)^2\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\left(\log N + x + \frac{x^2}{4\log N}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{N} \exp(-x) z_N(x),$$

حيث يكون

$$z_N(x) = \exp(-x^2/(4 \log N)).$$

وعليه

$$\begin{aligned} F_{\max}(a_N + b_N x) &= (F(a_N + x b_N))^N \\ &= \left(1 - \frac{z_N(x) \exp(-x)}{N}\right)^N. \end{aligned}$$

لاحظ أن القيم الثابتة لـ $z_N(x)$ تقترب من الـ 1 حيث $N \rightarrow \infty$. ويعد هذا كافياً لإيضاح

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{\max}(a_N + x b_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\exp(-x)}{N}\right)^N = \exp(-e^{-x}). \quad 3-4$$

ونصل في نهاية المطاف إلى توزيع جامبل Gumbel: الذي هو بالضبط نفس توزيع الحد بالنسبة للحالة الأسية. قد يكون هذا مفاجئاً، لأننا لا نتوقع أن نصل إلى نفس التوزيع الحدية لسلوكين ذيلين مختلفين: هناك اختلاف كبير بين $\exp(-x)$ و $\exp(-x^2)$ (على سبيل المثال، حينما تكون $x = 5$ سنحصل على $e^{-5} = 6.7 \times 10^{-3}$ و $e^{-25} = 1.4 \times 10^{-11}$). وجدير بالملاحظة أن المضاعف b_N يتجه إلى الصفر حيث $N \rightarrow \infty$. وهذا يتوافق مع مجموعة من التوزيع الذي لا يحدث مع التوزيع الأسي. حتى هنا هناك فرق نوعي بين الحالتين: مع ذيل أقل سمكاً المنوط بـ $\exp(-x^2)$ يمكننا أن نكون أكثر دقة في توقعنا للقيم القصوى لـ N من الرسوم من خلال شكل التوزيع.

المثالان الموضحين هما مثالان خاصان لنتيجة أكثر عمومية تسمى نظرية فيشر-تبيت Fisher-Tippett theorem. هذه النظرية أظهرت لكافة التوزيعات ذو مؤشرات الذيل غير المحدودة (الأسفي في الأساس) أن توزيع جامبل يحدث كحد حين ننظر في الرسومات

المكررة. في حقيقة الأمر، الحالات التي يحدث هذا فيها هي حالات عامة يمكن افتراض حدوثها مع أي توزيع ذو مؤشر ذيل غير محدود. لكي نكون أكثر دقة نعرف a_N بأنها

$1 - 1/N$ مجزأ للتوزيع (إحصائي)، على سبيل المثال:

$$a_N = F^{-1}(1 - 1/N)$$

و

$$b_N = 1/(Nf(a_N)),$$

حيث f دالة الكثافة لـ F . ثم تظهر النظرية أنه عندما يكون مؤشر الذيل غير محدود (لا نهائي)،

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{\max}(a_N + xb_N) = \exp(-e^{-x}).$$

سوف نعرض بيان رسمي لنظرية Fisher-Tippett بالمزيد من المناقشات في القسم الفرعي التالي.

مثال 4-4 تطبيق نظرية فيشر تبت Fisher-Tippett على التوزيع الطبيعي

سنطبق نظرية Fisher-Tippett الآن على دالة إيجاد التوزيع لأقصى 50 نموذج مستقل من توزيع طبيعي عادي. يكون له دالة كثافة

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

سنكتب $\Phi(x)$ لدالة التوزيع التراكمي العادية، $\int_{-\infty}^x \varphi(s) ds$. أول خطوة هي إيجاد

القيم الصحيحة لـ a_N و b_N لـ $N = 50$ وسيكون لدينا

$$a_N = \Phi^{-1}(1 - 1/N) = \Phi^{-1}(0.98) = 2.054,$$

$$b_N = 1/(N\varphi(a_N)) = 1/(50\varphi(2.054)) = 0.413.$$

بهذه القيم يمكننا القول بأن $F_{\max}(a_N + b_N X)$ تقريباً هي توزيع جامبل، مثال

$$F_{\max}(2.054 + 0.413x) \approx \exp(-e^{-x}).$$

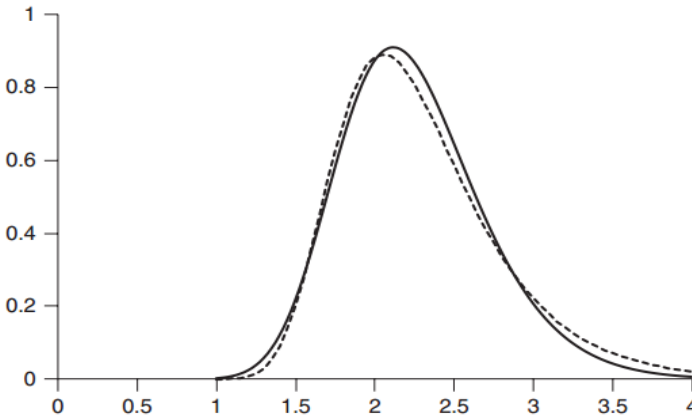
ويمكننا أيضًا عكس ذلك والقول بأن $F_{\max}(y)$ ، فرص أن تكون القيم القصوى لـ 50 نموذج أقل من y هي تقريبًا

$$F_{\max}(2.054 + 0.413x) \approx \exp(-e^{-x}).$$

يكون لها كثافة متوافقة

$$F_{\max}(2.054 + 0.413x) \approx \exp(-e^{-x}).$$

في الشكل 4-6 أظهرنا كثافة القيم القصوى لـ 50 رسم من توزيع طبيعي (الخط المتصل) مقارنة بتوزيع جامبل من خلال f (الخط المنقط). هذا لا يعد توافق جي، والذي يظهر أن التغير في هذه الحالة للتوزيع الطبيعي أكثر تباطؤًا. باستخدام مقياس ثابت a_N و b_N ويمكن أن يتحسن بشكل طفيف، ولكن لا يهم القيم المستخدمة، والتقريب لن يكون دقيقًا. (لاحظ أن القيم لـ a_N و b_N غير فريدة - الاختيارات المختلفة لهذا التسلسل يمكن أن يعطي نفس النتيجة في حد معين ويمكن أن يكون أفضل قليلاً للقيم الأقل لـ N .)



الشكل 6.4: مقارنة جامبل مع القيم القصوى لـ 50 نموذج من التوزيع الطبيعي القياسي

حتى هذه النقطة افترضنا أننا نتعامل مع توزيعات لها مجموعة لا نهائية. ما إذا كان مؤشر الذيل محدود أو لانهائي هو مسألة مدى سرعة كثافة الذي في الاتجاه إلى الصفر، ولكن افترضنا أن الكثافة لا تزال إيجابية. الآن نتقل إلى حالة القيم القصوى للتوزيع. لذلك هناك نقطة نهاية ثابتة على الجانب الأيمن، $x_{\max}$

من الواضح أن التوزيع للقيم القصوى لـ N من النماذج من خلال هذا التوزيع سيكون له نفس هذا الوضع من القيم القصوى. الآن من المنطقية النظر في كيفية سرعة دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الأصلي، $F(x)$ تقترب من الـ 1 حيث x تقترب من النقطة $x_{\max}$ أو (المساوي) كيفية وتيرة اتجاه دالة الكثافة إلى الصفر. اتضح أن التوزيع للقيم القصوى يقترب أيضًا من نوع معين من التوزيع في هذه الحالة. في حقيقة الأمر، الحد يصبح توزيع وايل *Weibull distribution* والذي يكون له دالة توزيع تراكمي $H(x) = \exp(-(-x)^\alpha)$ for $x < 0$ لبعض الاختيارات لـ $\alpha > 0$. دالة الكثافة لـ Weibull هي $h(x) = \alpha(-x)^{\alpha-1} \exp(-(-x)^\alpha)$ for $x < 0$.

في حقيقة الأمر تم وصف هذه الحالة من خلال نظرية Fisher-Tippett. كما هو الحال مع الحالات الأخرى لدينا كمعلمات التحويل والتحجيم a_N و b_N حين تطبيقها. بما أن نظرية توزيع وايل Weibull تنتهي عند الصفر، التحويل يجب أن يكون بكمية $x_{\max}$. لذلك في نهاية المطاف يكون لدينا مجموعة من الأرقام b_N حينها يكون

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{\max}(x_{\max} + xb_N) = \exp(-(-x)^\alpha) \text{ for } x < 0.$$

المقياس α لتوزيع وايل سيتم تحديده من خلال سلوك F قرب $x_{\max}$ في حال، على سبيل المثال، $F(x) = 1 - k(x_{\max} - x)^2$ لبعض K ثم التوزيع المحدود لوايل مع $\alpha = 2$.

1-2-4* المزيد من التفاصيل على التوزيعات القصوى ونظرية Fisher-Tippett

في هذا القسم سنوضح بعض التفاصيل الرياضية المفقودة، نبدأ بالسؤال الدائر حول أسباب أن يكون لدى التوزيع مؤشر ذيل له قيم قصوى (من N نماذج مستقلة) تقترب من توزيع فريشيه.

النقاش الذي وضعناه في القسم الفرعي السابق يفترض شكل معين لدالة التوزيع التراكمي ولكن تعريف مؤشر الذيل أكثر عمومًا من هذا.

نحتاج إلى العمل على دالة متغيرة بوتيرة بطيئة. افترض أن $L(t) = (1 - F(t))t^\alpha$ دالة ذو متغير بطيء لـ t (هذا يعني أن α مؤشر ذيل لـ F ولكن إدعاء أقوى قليلًا). ولهذا، $\lim_{z \rightarrow \infty} L(tz)/L(z) = 1$ لأي قيمة لـ $t > 0$. في هذا التعبير سنحدد $z = b_N$ و $t = x$ وسنرى حين تعريفنا

$$z_N(x) = \frac{(1 - F(b_N x))b_N^\alpha x^\alpha}{(1 - F(b_N))b_N^\alpha} = \frac{(1 - F(b_N x))x^\alpha}{(1 - F(b_N))}, \quad (4.4)$$

ثم الحالة التي سيكون فيها هناك متغير بطيء يعني أن أي قيمة ثابتة $1 \rightarrow z_N(x)$ ، $b_N \rightarrow \infty$ الآن سنحدد

$$b_N = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{N}\right),$$

حينما يكون $1 - (1/N)$ تجزيء للتوزيع، والاختيار الصحيح لعامل القياس. هذا سوف يقترب بالفعل ∞ حيث تصبح N أكبر. والآن نلاحظ أننا يمكن أن نعيد ترتيب المعادلة (4.4) للحصول على

$$\begin{aligned} 1 - F(b_N x) &= z_N(x)(1 - F(b_N))x^{-\alpha} \\ &= \frac{z_N(x)x^{-\alpha}}{N}. \end{aligned}$$

ولهذا

بسبب سلوك الحد لـ Z_n نعرف أن أي $\varepsilon > 0$ سيكون لها $1 - \varepsilon < z_N < 1 + \varepsilon$ لكون N كبيرة كفاية. ولهذا

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(1 - \varepsilon)x^{-\alpha}}{N}\right)^N > \lim_{N \rightarrow \infty} F_{\max}(b_N x) > \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(1 + \varepsilon)x^{-\alpha}}{N}\right)^N.$$

بما أن الجانب الأيمن والأيسر يمكن أن يتم تقريبهما كما نرغب لـ $\exp(-x^{-\alpha})$ من خلال اختيار قيمة صغيرة كفاية لـ ε يمكننا خلق

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{\max}(b_N x) = \exp(-x^{-\alpha}),$$

وهذا هو توزيع فريشيه الذي كنا نعمل عليه.

هذه المناقشات التي تضيق حدود $F_{\max}$ بين التعبيرين اللذان يمكن استخدامها بالقرب الذي نرغب به للدالة الأسية هي أيضًا ما نحتاج إلى إظهاره وهو أن الحد في المعادلة صحيح في الشكل (3-4).

الآن نريد أن نتقل إلى وصف رسمي أكثر لنظرية **Fisher-Tippett**. لاحظ أنه عندما نقول أن توزيع القيم القصوى يقترب من توزيع محدود، يكون ما نعنيه هو التوزيع الحاصل من خلال عملية وضع قياس وتحويل (بهذا القياس والتحويل المعتمد على عدد N للرسوم من التوزيع الأصلي). ولهذا أي شيء تم وضع قياس له وتم نقله من توزيع محدود يمكن استخدامه. ونستخدم مصطلحات مثل: توزيعين F_1 و F_2 وهما نفس النوع في حال كان من الممكن الحصول عليهما من إحداهما من خلال القياس والنقل. مثال، إذا كان

$F_1(x) = F_2(a + bx)$ للاختيار الصحيح لـ a و b . على سبيل المثال، أي توزيع طبيعي بغض النظر عن متوسطه أو انحرافه المعياري هو من نفس النوع.

نقول أن التوزيع F في أقصى مجال لجذب التوزيع H في حال كان هناك تسلسل لـ a_N و b_N مع $(F(a_N + b_N x))N \rightarrow$

$H(x)$ لكل x . نكتب ذلك كالتالي $F \in MDA(H)$. المصطلح هنا يمكن أن يكون مضلل - المجال الأقصى للجذب يبدو كأنه أعلى مجال للجذب بطريقة ما، ولكن بدلاً من ذلك فإن المعنى الحقيقي لذلك هو مجال الجذب تحت عوامل قصوى. القول بأن $F \in MDA(H)$ هي نفسها بالضبط حين القول الحد الأقصى لـ N للنماذج من F لها توزيع يكون له نفس الشكل كـ H (بعد تحجيمها بـ b_N ونقلها بـ a_N).

ونظرًا لأنه تم اختيار a_N و b_N بشكل عشوائي، فإن هذا بيان حقيقي حول أنواع التوزيعات: في حال كانت F توزيع لنفس النوع ك F و H من نفس النوع ك H ثم $F \in MDA(H)$ و $F \sim F$ مساويين بالضبط للبيان.

الآن نحن على استعداد لإقرار نظرية Fisher–Tippett في الصيغة المعتادة لها.

النظرية 1-4 في حال كان F في $MDA(H)$ لبعض التوزيعات H (و H غير مركزة في نقطة بعينها) إذا هناك مقياس ξ حينما تكون H من نفس النوع ك

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-1/\xi}) & \text{for } \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}) & \text{for } \xi = 0. \end{cases}$$

الصيغة لـ ξ H تُعرف بأنها مجموعة من التوزيعات التي عادة ما تسمى بالقيم القصوى العامة *generalized extreme value* أو توزيعات GEV. وتنطبق هذه الصيغة أيضًا على النطاق الذي يحمل قيم X ، وبما أننا نحتاج إلى $H_{\xi}(x)$ صعودًا من 0 إلى 1. عندما $0 < \xi$ نحتاج $\xi^{-1} \leq x$ وعندما $0 > \xi$ نحتاج $\xi^{-1} \geq x$.

هناك ثلاث حالات للنظر وفقًا لما إذا كانت قيمة ξ إيجابية أو صفر أو سلبية. الحالة التي تكون فيها $\xi = 0$ هي نظرية توزيع جامبل. حينما تكون $0 > \xi$ نستطيع أن نضع $\alpha = \xi^{-1}$ ونحصل على دالة توزيع $H(x) = \exp(-(1 + x/\alpha)^{-\alpha})$ ، والتي هي من نفس نوع نظرية توزيع فريشيه $\exp(-x^{-\alpha})$ (نحن فقط بالحاجة إلى تحجيمها بمقدار $1/\alpha$ وتحريكها بمقدار 1). السبب في الحصول على هذه النتيجة في هيئة أكثر تعقيدًا بـ ξ بدلًا من α هي أنها تجعلها أكثر وضوحًا بالحالة التي تكون فيها $\xi = 0$ التي يمكن الوصول إليها في الحدود $0 \rightarrow \xi$ سواء من الأعلى أو الأسفل. في كلا الحالتين نستخدم فقط ملاحظتنا العادية، المعادلة (4.2) وهي أن $(1 + x/n)^n$ تتسق مع e^x as $n \rightarrow \infty$.

نحن بالحاجة مناقشة هذا الأمر بمزيد من التفصيل حينما يكون $0 < \xi$. في هذه الحالة توزيع GEV أو توزيع القيم القصوى يكون له نقطة نهاية ثابتة على الجانب الأيمن، وبما أن $\exp(-(1 + \xi x)^{-1/\xi})$ تصل إلى القيمة القصوى لـ 1 حينما تكون $\xi^{-1} \leq x$ ، وتحديد الجانب

الأيمن للتوزيع. من غير الصعب رؤية أن توزيع القيم القصوى العامة GEV من نفس نوع توزيع وايل. لخلق صلة بين المقياس x لسلوك دالة التوزيع الأصلي، يجب علينا العودة إلى دالة متغير بطيء. بالرغم من ذلك، فكرة دالة المتغير البطيء تتمحور حول كيفية سلوك الدالة باتجاهها إلى ما لا نهاية، ولهذا يجب علينا القيام ببعض التلاعب والعمل على المعكوس للاختلافات بين x و x_{max} في حال

$$(1 - F(x_{max} - (1/z)))z^\alpha$$

كانت دالة متغير بطيء ثم القيم القصوى لـ N من الرسوم من التوزيع تقريباً (بعض التحجيم والتحرك) نظرية وايل مع مقياس α (أو GEV مع مقياس $-1/\alpha$)

نظرية Fisher-Tippett في أصلها لا توضح مدى احتمالية وجود توزيع محدود أو تحجيمي لـ F_{max} ولكنها تحدد فقط شكل هذا التوزيع في حال حدوثها. ولكن في حقيقة الأمر، يعد إيجاد أي مثال دون توزيع محدود أو تحجيمي صعباً للغاية.

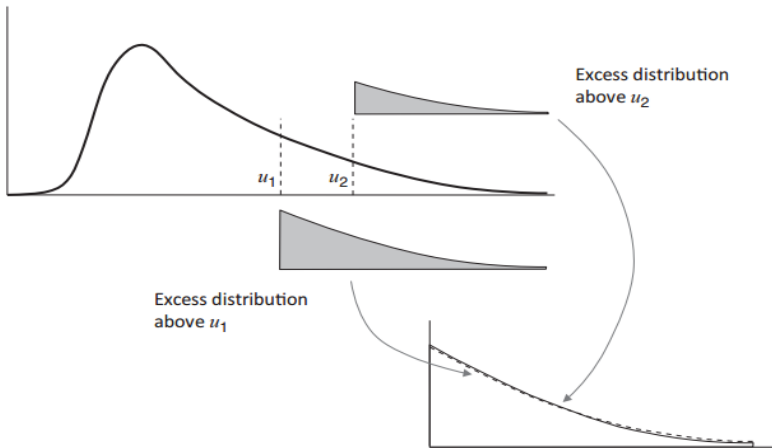
تذكر أننا نسمح بالتحجيم والتحرك ولهذا يعد شكل التوزيع هو المهم في النهاية. يمكننا على سبيل المثال، استخدام التحجيم والتحرك لإصلاح النقاط المئوية الخامسة والمئوية الخامسة والتسعين. ثم مشاهدة ما سوف يحدث إلى نقاط التجزئة الأخرى مع تزايد N . وفي حال تغاير جميعهم سيكون لدينا توزيع محود (تحجيمي).

إذا تخيلنا أنه لا يوجد توزيع تحجيمي أو محدود سيكون من الصعب رؤية قدرتنا على التنقل بين أشكال مختلفة، ولكن إذا لم يكن هناك تنقل إذا النقاط المجزئة المحصورة بين النسب المئوية الخامسة والخامسة والتسعون الملزمة للتغاير. ولهذا فإن الأمر متعلق بالقيم القصوى التي يمكن أن تعطي نتائج خاطئة، مثال من خلال أن يكون لدينا منحني x^{-k} مع تزايد قيمة k أكثر وأكثر مع تزايد N ولكن فعل ذلك بطريقة لا تؤدي إلى نوع من أنواع التوزيع المحدود. اتضح أن ذلك لن يحدث للتوزيع العملي، ويمكن إيضاح ذلك من خلال النظر بشكل أكثر تفصيلاً في الحالات الضامنة أن F في $MDA(H_\xi)$. قمنا بالفعل إظهار كيفية حالة من المتغير البطيء كافٍ حينما يكون هناك مؤشر ذيل لـ α (ونفس الحالة تنطبق على حد

ثابت على الجانب الأيمن) ولكننا بحاجة إلى شيء أكثر تعقيداً للتعامل مع حالة يكون فيها $\gamma = 0$ ولن نقوم بعرض أية تفاصيل هنا.

3-4 توزيعات زائدة

الآن ننتقل إلى موضوع مختلف ذو صلة، فبدلاً من النظر للقيم القصوى لـ N من المتغيرات العشوائية، في هذا القسم سوف ننظر بشكل مباشر في سلوك منحني التوزيع. الفكرة مشابهة للمناقشات الواردة في القسم السابق، حينما انصبي اهتمامنا على شكل التوزيع للقيم القصوى. ما الآن ينصب اهتمامنا على شكل التوزيع فوق الهدف u . وكلما زاد هذا الهدف نتساءل ما إذا كان ذلك توزيع محدود للزائد (مثال، جزء من التوزيع أعلى الهدف u) الذي يفترض دائماً بأننا نحجم بشكل ملائم. تم شرح الفكرة في الشكل 4-7 حيثما كان هدفين مختلف للقيم u لهم توزيعات زائدة تشبه بعضها بعضاً.



الشكل 4-7: التوزيعات أعلى الهدف u_1 والتوزيعات أعلى الهدف u_2 يمكن أن يتم تحجيمها بشكل مشابه

التوزيع الزائد تم الحصول عليه من خلال التوزيع $X - u$ لبعض أهداف u ، المشروط X أكبر من u . نكتب التالي كـ $Fu(x)$ وعليه

$$F_u(x) = \Pr(X - u \leq x | X > u), \text{ for } x > 0.$$

هذه هي ببساطة احتمالية أن يكون المتغير العشوائي X في نطاق u إلى $x + u$ من خلال كونها أكبر من u مثال قاعدة بايس Bayes

$$F_u(x) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}, \text{ for } x > 0.$$

هذا التعبير لـ F_u يمكن كتابته كالتالي

$$F_u(x) = 1 - \frac{1 - F(x + u)}{1 - F(u)}.$$

سوف نستعرض ذلك العديد من التوزيعات F وسوف يكون هناك توزيعات محدودة (معرفة في التحجيم) لـ F_u u تصبح كبيرة جدًا. هذه النظرية تتسق بشكل كبير مع نظرية التوزيع للقيم القصوى لـ N من النماذج الموضحة في القسم السابق.

لشرح ذلك الأمر، افترض أن $F(x) = 1 - kx^{-\alpha}$ ، حتى F يكون لها مؤشر ذيل لـ α .

ثم

$$\begin{aligned} F_u(x) &= 1 - \frac{k(x + u)^{-\alpha}}{k(u)^{-\alpha}} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{x}{u}\right)^{-\alpha}, \text{ for } x > 0. \end{aligned}$$

وهكذا، إذا استخدمنا مقياس u نجد أن:

$$F_u(ux) = 1 - (1 + x)^{-\alpha}$$

حيث $x > 0$

وهنا نجد أنه ليس هناك تقريب، فإن التوزيع الزائد (بعد القياس) يعطى بهذه الصيغة بالضبط. ويسمى هذا التوزيع بتوزيع باريتو النوع الثاني. ويوضح القسم الثاني أن هذا الشكل من التوزيع المحدود هو الوحيد الذي يمكن أن ينشأ من خلال مؤشر المنحنى a

ويمكننا تنفيذ نفس النوع من الحساب عندما تكون توزيعات أرباح لها مؤشر منحنى لانهائي. لذلك نحن نفترض ذلك:

$$F(x) = 1 - \exp(-x^2).$$

فإن

$$\begin{aligned} F_u(x) &= 1 - \frac{\exp(-(x+u)^2)}{\exp(-u^2)} \\ &= 1 - \frac{\exp(-x^2 - 2ux) \exp(-u^2)}{\exp(-u^2)} \\ &= 1 - \exp(-x^2 - 2ux), \text{ for } x > 0. \end{aligned}$$

وبالنظر في التحجيم بنسبة $1/(2u)$ ، نجد أن:

$$F_u\left(\frac{x}{2u}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{4u^2}\right) \exp(-x), \text{ for } x > 0.$$

في حين تصل $\exp(-x^2/(4u^2))$ إلى 1، حيث أن $u \rightarrow \infty$ ، نجد أن:

$$F_u\left(\frac{x}{2u}\right) \rightarrow 1 - \exp(-x), \text{ for } x > 0.$$

حيث أن $u \rightarrow \infty$ ، وبالتالي في هذه الحالة فإن استخدام التحجيم بنسبة $1/(2u)$ يعطي التوزيع الأسّي بشكل تقريبي. واتضح أن الاختيار الصحيح للتحجيم المستمر سيحقق توزيع أسّي في الحد الأقصى لأي توزيع معقول له مؤشر منحنى لانهائي. ويظهر توزيع باريتو في الحد الأقصى عندما يكون مؤشر المنحنى محدود ويحدث التوزيع الأسّي عندما يكون مؤشر المنحنى لانهائي. وهذا يذكرنا بنظرية فيشر - تيسيت لتوزيع الحد الأقصى لعينات N من نفس التوزيع. في الواقع، وكما ناقش في القسم التالي، فإن شروط التقارب هي نفسها تماماً.

مرة أخرى يمكننا تلخيص الموقف النهائي في نظرية واحدة، ولكن هذه المرة نستخدم توزيع باريتو المعمم لالتقاط أشكال التوزيع المختلفة التي قد تحدث. وستحدث عن هذه

النظرية بمزيد التفاصيل في مناقشة القسم الفرعي التالي. ولكن في الوقت الراهن نريد فقط أن نفهم كيفية استخدام النتيجة. وسنعمد على القيمة الكبيرة لـ u والنسبة التقريبية لـ $F_u(x)$ وتوزيع باريتو المعمم الذي له وظيفة التوزيع التالية:

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \beta)^{-1/\xi} & \text{for } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x / \beta) & \text{for } \xi = 0 \end{cases}, \quad (5-4)$$

حيث أن $\beta < 0$ و $\xi \geq 0$ ، ومن ثم يجب أن تكون $x \geq 0$ ، حيث تتوافق الحالة $\xi < 0$ مع توزيع F والقيمة القصوى $x_{\max}$. وهنا يتطلب أن تكون $x \leq -\beta/\xi \geq 0$.

وبشكل عام فإن المعلمة ξ تلتقط الشكل وتعد β بمثابة التحجيم الثابت. وتكون المعلمة ξ هي عكس مؤشر المنحنى، وبالتالي فإن $\xi = 1/\alpha$. وسبب استخدام ξ بدلا من α هو لأن صيغة باريتو المعممة تتسق مع قيم ξ المختلفة. حيث يتم إيجاد $\xi = 0$ في الحد الذي تصل ξ إلى الصفر.

إذا كانت F تحتوي على مؤشر منحنى $\alpha < \infty$ (أي $\xi > 0$) فيكون لدينا:

$$F_u(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{u}\right)^{-\alpha}, \text{ for } x > 0.$$

يمكننا مقارنة هذا التعبير مع توزيع باريتو المعمم الموضح في المعادلة (5-4). ويظهر التحويل من ξ إلى α أن معلمة التحجيم β تعطى بواسطة $u\xi$ في هذه الحالة. وفي حالة وجود a لانهائية (أي $\xi = 0$) سيتم تحديد معلمة التحجيم بواسطة شكل المنحنى. وهو المثال الذي تمت مناقشته أعلاه $f(x) = 1 - \exp(-x^2)$ حيث قيمة β هي $1 / (2u)$. وسوف ستعطي أمثلة أخرى لتوزيعات مؤشر المنحنى اللانهائي قيم مختلفة لـ β . وتعطى دالة الكثافة لتوزيع باريتو المعمم من خلال:

$$g_{\xi, \beta}(x) = (1/\beta)(1 + \xi x / \beta)^{-(1/\xi)-1}$$

فمن السهل رؤية التوزيع في المعادلة (5-4). وتعطى الكثافة عند $\xi = 0$ في المعادلة

$$g_{\beta}(x) = (1/\beta) \exp(-x / \beta)$$

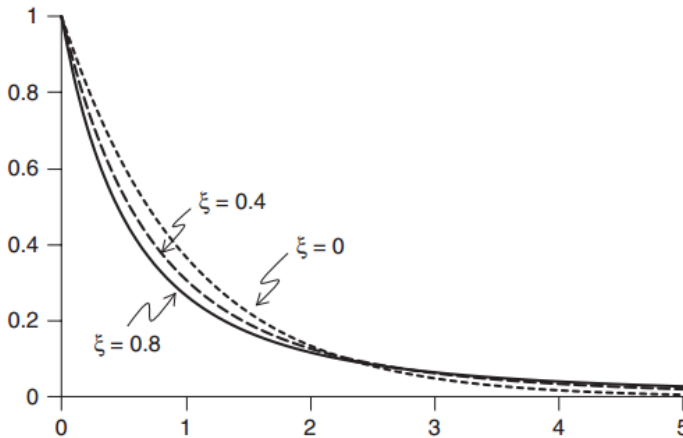
والذي يعد الحد لـ $g_{\xi, \beta}(x)$ حيث تصل ξ إلى الصفر. ويحدد الشكل 4.8 هذه الكثافة لقيم مختلفة لـ ξ ، في كل حالة تقدر فيها قيمة β بـ 1.

إذا كان الزائد لديه توزيع باريتو المعمم، فمن الطبيعي أن نسأل عن متوسط التوزيع: سيكون هذا هو متوسط قيمة الفائض على u ، أي $E(X - u | X > u)$. وعندما تكون X موزعة مثل $G_{\xi, \beta}$ يتضح أن قيمة المتوسط تعطى بواسطة

$$E(X) = \beta / (1 - \xi).$$

يطلب التمرين 4-4 أن تقوم بتنفيذ التكامل لإظهار أن هذه الصيغة صحيحة. ويتم استخدام الصيغة نفسها عندما تكون $\xi = 0$ حيث أن التوزيع الأسّي بكثافة $(1/\beta) \exp(-x/\beta)$ له متوسط β . لاحظ أن الاختلافات في الشكل 4-8 بين التوزيعات الثلاثة لا تبدو هائلة، ولكن يظهر متوسط الكثافة على الخط متين وهو 5 ومتوسط الخط المتقطع هو 3/5 ومتوسط الخط المنقط هو 1.

في حال كان $\xi \geq 1$ إذن الصيغة لم تعد منطقية (إعطاء نتيجة سلبية أو لانهائية). هذا هو بالضبط ما نتوقعه: مؤشر الذيل هو $1/\xi$ ، وإذا كان هذا المؤشر أقل من 1 يكون المتوسط غير موجود.



الشكل 4-8: دالة الكثافة لتوزيع باريتو المعمم مع بارامترات مختلفة. جميع قيم β هي 1

بالنظر إلى التوزيع المعروف من خلال F يوصف توزيع باريتو التوزيع الفاض فوق الحدود u . الآن نستكشف ماذا يحدث عندما يتم استخدام هدف آخر. افترض أن F_u معطاه. إذا الصيغة التي تعرف F_u هي

$$1 - F_u(x) = \frac{1 - F(x + u)}{1 - F(u)}$$

ويمكن إعادة كتابة ذلك كالتالي

$$1 - F(x + u) = (1 - F_u(x))(1 - F(u)). \quad (6-4)$$

افترض أن لدينا $u < v$ ، إذاً، من هذه المعادلة (6.4) يمكن استنتاج التالي

$$\begin{aligned} 1 - F_v(x) &= \frac{1 - F(x + v)}{1 - F(v)} \\ &= \frac{(1 - F_u(x + v - u))(1 - F(u))}{(1 - F_u(v - u))(1 - F(u))} \\ &= \frac{(1 - F_u(x + v - u))}{(1 - F_u(v - u))}. \end{aligned}$$

في الحالة التي يكون فيها $\xi \neq 0$ و F_u معطى من خلال توزيع باريتو المعمم، نحصل على

$$1 - F_v(x) = \frac{(1 + \xi(x + v - u)/\beta)^{-1/\xi}}{(1 + \xi(v - u)/\beta)^{-1/\xi}} = \left(1 + \frac{\xi x}{\beta + \xi(v - u)}\right)^{-1/\xi}.$$

تعد هذه صيغة أيضاً لتوزيع باريتو المعمم ولكن مع بارامتر β يحل محله $\beta + \xi(v - u)$. بمعنى آخر، زيادة الحدود بكمية $\Delta = v - u$ يترك شكل البارامتر ξ دون تغيير، ولكنه يزيد من مقياس البارامتر بكمية $\Delta \xi$.

في الحالة التي يكون فيها $\xi = 0$ و F_u معطاه من خلال صيغة توزيع باريتو المعمم، يكون لدينا:

$$1 - F_v(x) = \frac{\exp((x + v - u)/\beta)}{\exp((v - u)/\beta)} = \exp(x/\beta).$$

حينما يكون $\xi = 0$ ، فإن زيادة الحدود لا يشكل فارقاً للتوزيع الفائض، ولكنه يستقر كأسي مع نفس البارامتر. هذه هي خاصية الذاكرة المعروفة من التوزيع الأسي: إذا كان الوقت بين الأحداث هو توزيع أسي إذا معرفة أن شيئاً لم يحدث حتى الآن لا يشكل فارق في توزيع الوقت إلى الحدث التالي.

هذه النتيجة حول الطريقة التي تغيرت بها β (أو لم تتغير) مع وجود حاجة إلى معاملة الحدود بعناية، لأنه يفترض أن التوزيع الزائد هو بالضبط توزيع باراميتو المعمم وهو مجرد تقريب. على سبيل المثال، في مناقشتنا في وقت سابق حول تلك المسألة التي يكون فيها $F(x) = 1 - \exp(-x^2)$ سنجد أن أفضل التوزيع الفائض F_u له خاصية أن $F_u(x/(2u))$ يقترب من دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الأسي. بمعنى آخر، $F_u(x)$ معطى من خلال تقريباً $G_{\xi, \beta}(x)$ مع $\beta(u) = 1/(2u)$ و $\xi = 0$. ولهذا في هذه الحالة نلاحظ وجود تغيير في β حيث تتغير u حتى وإن كان من المفترض أن تكون β ثابتة في هذه الحالة. بالرغم من ذلك، الموضح كمضاعف للتغير في u يكون الاختلاف ضئيل. إذا أخذنا $v > u$ وتركنا $\Delta = v - u$ يكون لدينا

$$\beta(v) = \frac{1}{2v} = \frac{1}{2u} + \frac{u - v}{2uv} = \beta(u) - \frac{1}{2uv}\Delta.$$

1-3-4 مزيد من التفاصيل حول تجاوزات الحدود

أولاً نعود إلى السؤال حول سلوك التوزيع الفائض حينما يكون لدى F مؤشر ذيل L -a. كما فعلنا سابقاً، نستخدم فكرة أقوى لدالة متغيرة بطيئة ونفترض أن $(1 - F(t))t^\alpha$ دالة متغير بطيء L -t (يعني هذا أن a مؤشر ذيل L -F). ولهذا في حال

$$z_u(k) = \frac{(1 - F(ku))u^\alpha k^\alpha}{(1 - F(u))u^\alpha} = \frac{(1 - F(ku))k^\alpha}{(1 - F(u))},$$

إذا، لأي ثابت من $k, z_u(k) \rightarrow 1$ as $u \rightarrow \infty$ ولهذا

$$\begin{aligned} F_u(ux) &= 1 - \frac{1 - F(ux + u)}{1 - F(u)} \\ &= 1 - (1 + x)^{-\alpha} z_u(1 + x), \end{aligned}$$

حينما يكون لدينا التعريف $Z_u(K)$ مع $K=1+X$. ولهذا حيث $u \rightarrow \infty$ يكون لدينا

$$F_u(ux) \rightarrow 1 - (1 + x)^{-\alpha} \text{ for } x > 0. \quad (7-4)$$

يمكننا القول بشكل عام أن X يتم توزيع حسب توزيع باريتو $Pa(\alpha, \kappa)$ في حال الحصول على دالة التوزيع التراكمي من خلال

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\kappa}\right)^{-\alpha},$$

ولهذا، في هذه الحالة أظهرنا أنه بعد القياس من خلال u ، التوزيع الفائض هو باريتو Pareto مع $k=1$.

الآن سنغطي المساوي لها لنظرية Fisher–Tippett في هذه الإعدادات والتي تظهر دول توزيع باريتو المعمم الموضح أعلاه.

نظرية 2-4: في حال كان F في $MDA(H_\xi)$ إذا يكون هناك دالة لـ $\beta(u)$ مع

$$\lim_{u \rightarrow \infty} F_u(\beta(u)x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-1/\xi} & \text{for } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{for } \xi = 0. \end{cases}$$

لاحظ أنه لا يوجد تشابه بين الصيغتين بين تلك النتائج ونظرية Fisher–Tippett فحسب بل أنها نفس مجموعة التوزيعات التي تتقارب مع الحد الأقصى لتوزيع الصيغة H_ξ التي يتضح أن لها توزيع فائض يتقارب مع $G_{\xi, \beta}(x)$ لبعض خيار الدالة $\beta(u)$.

مع هذه الصيغة نحصل على التوزيع الأسّي في الحد كما $\xi \rightarrow 0$ ، وبالتالي فإن شكل التوزيع يتغير بطريقة مستمرة مع ξ . ومع ذلك، لأن هناك معامل ترجيحي $\beta(u)$ ، يمكننا وضع قياس x بعامل آخر من ξ ونعود إلى النموذج الذي قدمناه في وقت سابق، بمعنى 1

$(1+x)^{-\alpha}$ - كحد أقصى. وبالنسبة إلى $\xi \geq 0$ ، يحدد التوزيع المقيد على المدى $x \geq 0$ وعندما $0 \leq x \leq -1/\xi$ نحتاج إلى $\xi < 0$

ومن المثير للاهتمام مقارنة هذه النتيجة مع نظرية فيشر-تيببت Fisher-Tippett. هناك نعمل مع أقصى قدر من N من العينات، وننظر إلى الحد كما $N \rightarrow \infty$ في حين هنا نعتبر وجود زيادة على u وننظر إلى الحد كما $u \rightarrow \infty$. في نظرية فيشر-تيببت، فإن دالة التوزيع التراكمي المحدودة لها الشكل $\exp(-Z(x))$ حيث تتحرك دالة التوزيع التراكمي من 0 إلى 1 حيث ينتقل التعبير $Z(x)$ من ∞ إلى 0، في حين أن التوزيع المحدود هنا هو ببساطة $1 - Z(x)$ وتعرف على المدى الذي يتحرك فيه Z من 1 إلى 0. وعلاوة على ذلك، في نظرية فيشر-تيببت قد تحتاج إلى كل من التحجيم والتحويل (أي كل a_N و b_N وغير الصفرية) في حين أننا هنا فقط بحاجة إلى مقياس بواسطة $\beta(u)$.

4-4 التقدير باستخدام نظرية القيمة القصوى

إن فهم ذيل التوزيع له قيمة خاصة إذا أردنا تقدير الاحتمالات المرتبطة بالأحداث التي لم نشاهدها، أو نادرا ما نراها. والفكرة هنا هي تقدير شكل وحجم الملاحظات أو البارامترات من البيانات ومن ثم استخدامها لتقدير احتمال الفائدة. بطبيعة الحال، سوف نحتاج إلى افتراض أن هناك اتساقا كافيا في سلوك الذيل الذي تنطبق عليه النظرية التي ناقشناها، ولكن هذا هو التحذير الذي يجب أن يوضع في الاعتبار مهما كان التقدير الذي نقوم به. التقدير قدي يعني استنتاج ما قد يحدث في مرحلة تخلو من البيانات، وهذا الاستنتاج لا بد أن نستفيد منه من بعض افتراضات النمذجة.

يعيدنا ذلك إلى السيناريو الافتتاحي لهذا الفصل، الذي يتمثل فيه الشرط في تقدير كمية من توزيع الاحتياجات الأسبوعية لدواء معين. في هذا المثال، أرادت ماريا أن تعرف قيمة x التي سيتم تجاوزها في أسبوع واحد فقط في 156 أسبوع. وهو تقدير يتجاوز الـ 104 نقطة من البيانات بكثير التي لديها، وبالتالي فإن أي تقدير سيكون غير مؤكد. ومع ذلك فإن الأفكار التي نستكشفها هنا تسمح لنا باستخدام افتراضات غير مقيدة تماما لنقول شيئا ما يحدث بشكل جيد في الذيل. نحن لسنا بحاجة إلى استخدام نموذج معين

للتوزيع (سواء كان ذلك طبيعيا أو أسيا أو أي شيء آخر) لأن التقديرات التي نجريها سوف تنطبق على كل هذه التوزيعات وغيرها. كل ما علينا أن نفترض هو أن هناك ما يكفي من الانتظام في السلوك في الذيل - وجود مؤشر ذيل معين سيكون كافيا.

إن فكرة استخدام افتراضات على سلوك منتظم بشكل معقول من أجل إجراء استقراء ليست مختلفة جدا من حيث نوع ما نقوم به عند استيفاء البيانات (أي عندما نقدر السلوك بين نقاط البيانات الموجودة). التقدير أو الاستقراء يفترض أن سلوك التوزيع لا يتغير فجأة للقيم المتطرفة، في حين جعل التقديرات من ضمن مجموعة من القيم التي لاحظناها يجعل افتراض أنه لا يوجد تغيير مفاجئ في السلوك داخل هذا النطاق. الفرق هو أنه عندما نقوم بالاستقراء بحكم التعريف، لا شيء يوجد في البيانات يُمكن أن يحذرنا عن التغيرات، في حين قد يتم الكشف عن تغيير كبير في التوزيع عند نقطة ضمن مجموعة من البيانات نلاحظها من خلال النظر في البيانات. وقد يبدو ذلك تمييزا مهما، ولكننا نحتاج في الواقع إلى الكثير من البيانات لنكتشف مثل هذا التغيير.

المشكلة التي تواجه ماريا، هي أن المشكلة ستظل قائمة حتى مع وجود أربع أو خمس سنوات من البيانات. إذا كان هناك لسبب ما، تغيير في سلوك توزيع المتطلبات الأسبوعية التي تحدث عند نقطة 99٪، ثم النظر في البيانات التجريبية حيث من المتوقع أن تكون أكبر من اثنين أو ثلاث نقاط من البيانات من هذه القيمة لن تكشف أبدا ما يجري. لذلك، فإن مضاعفة كمية البيانات سيساعد بالتأكيد في إجراء تقدير جيد، ولكن سيكون هناك حاجة إلى افتراض بعض الانتظام في البيانات.

في هذا القسم سوف نقدم طريقة من ثلاث خطوات لتقدير القيمة المعرضة للخطر أو العجز المتوقع (أو قياس المخاطر الأخرى). ومع ذلك، فمن المهم أن ندرك أن هذه مجرد واحدة من عدة طرق التي يمكن استخدامها. ولا سيما فيما يتعلق ببيانات السلاسل الزمنية، هناك حجج جيدة لاستخدام نهج أكثر تعقيدا يأخذ في الاعتبار التغيرات في التقلبات على مر الزمن (كما هو الحال في كثير من الأحيان مع البيانات المالية). ومع ذلك، عندما لا تكون الارتباطات بين نقاط البيانات قوية جدا، وعندما لا يكون هناك سبب لتوقع حدوث

تغييرات في التوزيع الأساسي مع مرور الوقت، فإن الطريقة التي سنصفها يمكن أن تكون فعالة جداً.

1-4-4 الخطوة الأولى اختيار حد u

الفكرة هي تقريب توزيع الخسائر فوق مستوى هدف معين u ، وذلك باستخدام توزيع باريتو المعمم. نحن بحاجة لجعل قيمة u كبيرة بشكل معقول بحيث يتم تطبيق نظرية القيمة القصوى. ومع ذلك، بما أننا سننتهي في نهاية المطاف بتقدير معلمات توزيع باريتو المعمم من البيانات التي تحدث فوق الحدود، يجب علينا التأكد من وجود نقاط بيانات كافية للقيام بذلك. ليس من الصعب جداً اختيار قيمة معقولة للهدف مع مجموعة كبيرة من البيانات، ولكن يمكن أن يكون صعباً إذا كانت مجموعة البيانات صغيرة.

النهج الذي سنوضحه يستخدم عينة مخطط لمتوسط بسيط. وبالنسبة إلى أي قيمة للهدف v ، فإننا ننظر إلى المتوسط الذي يتجاوز فيها نقاط البيانات هذا الحدود، حيث يبلغ متوسطه أعلى بقليل من نقاط البيانات التي هي أكبر من v . متوسط الزيادة في العينة هو تقدير للقيمة الحقيقية، وكما رأينا بالفعل، يكون هذا $(\xi - \beta/1)$ إذا كان التوزيع الزائد لتوزيع باريتو المعمم $G_{\xi, \beta}$ وتبين المناقشة في القسم السابق أيضاً أنه بمجرد اختيار هدف كبير بما فيه الكفاية لكي يكون تقريب توزيع باريتو المعمم دقيقاً فإننا نتوقع أن زيادة الحدود بمقدار Δ يترك ξ دون تغيير ولكن يزيد β بمقدار $\xi \Delta$. وبالتالي، فإننا نتوقع أن يكون متوسط الفائض في ذيل التوزيع خطي كدالة للهدف مع ميل $(\xi - \beta/1)/\xi$ شريطة أن يكون $\xi > 1$.

وبالتالي، إذا قمنا بتعيين المتوسط الزائد لأهداف مختلفة، يجب أن نحصل على خط مستقيم على التوالي لقيم الحدود الكبير بما يكفي لتطبيق تقريب توزيع باريتو المعمم ولكن صغير بما فيه الكفاية أيضاً لتكون هناك نقاط كافية فوق الحدود لتقدير عينة من المتوسط ليكون دقيقاً. من المعقول تنفيذ إجراء التقدير بقيمة u التي تكون بالقرب من بداية هذا الجزء النهائي من الخط المستقيم إذا كان موجوداً.

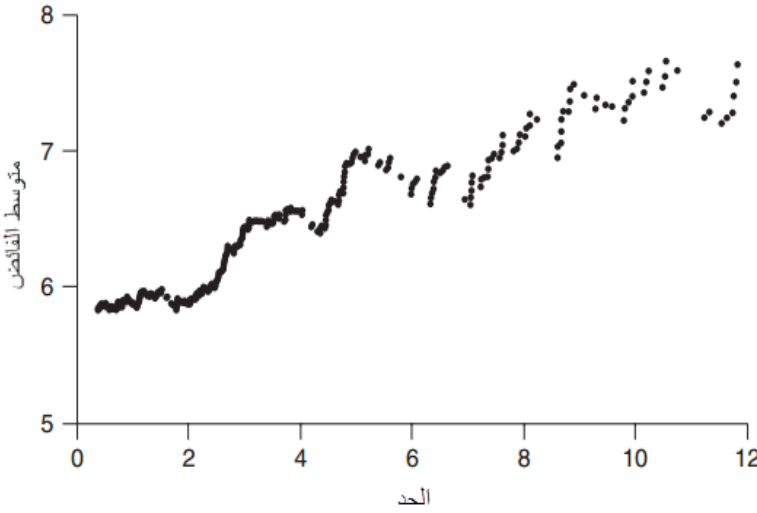
مثال 4-5: تقدير مقاييس المخاطر لموقع Amazon.com

لتوضيح ذلك، سننظر إلى بعض بيانات سعر السهم: يوضح الشكل 4-9 الخسارة



الشكل 4-9: الخسارة / المكاسب الأسبوعية لسهم شركة Amazon.com على مدار الفترة ما بين 1988 و 2011

الأسبوعية (القيم السلبية تعبر عن المكاسب) لسعر سهم Amazon.com على مدى 14 عاما من بداية عام 1998 وحتى نهاية عام 2011. هناك 730 نقطة من البيانات الأسبوعية التي نحسب من خلال نسبة 729 من الخسائر. من الواضح أن هناك تقلبات أعلى بكثير في الجزء الأول من هذه الفترة، ولكننا لن نحاول استخدام هذه التغيرات في التقلب ضمن إجراءات التقدير لدينا. ويبين الشكل 4-10 متوسط البيانات الزائدة مع اختلاف الحدود. يمكننا أن نرى أنه بالنسبة للحدود في نطاق من 0 إلى 2٪، فإن متوسط الفائض يستقر قرابة 6٪ خسارة، ولكن بالنسبة للحدود التي تعدت خسارة أكثر من 2٪، فإن متوسط الفائض يبدأ في الارتفاع. ويرتفع بطريقة غير منتظمة، ولكن هناك اتجاه تصاعديًا واضحًا. هذا يشير إلى أننا يمكن أن نستخدم قيمة خسارة 2٪ للحد u . ولكن أفضل خيار للحد يعد تعسفي إلى حد ما، وبالنسبة لهذه البيانات يمكن أن نأخذ أيضا قيمة للحد قرابة الـ 6٪، والتي من شأنها أن تعطي فائض 125 (من التجاوزات).



الشكل 10-4: مخطط متوسط الفائض لبيانات سعر سهم Amazon

2-4-4 الخطوة الثانية تقدير المعلمات ξ و β

بعد تثبيت قيمة u ، فإن الخطوة الثانية في تلك العملية هي تقدير المعلمات ξ و β في توزيع باريتو المعمم الذي ينطبق فوق u . يمكننا القيام بذلك باستخدام نهج أقصى احتمال. تعد هذه طريقة قياسية إلى حد ما من الإحصاءات، ولكننا سنقدم ملخصاً عن كيفية عملها.

لنفترض أن لدينا M من القيم الملحوظة، ونسأل عن احتمالية تلك القيم إذا كان التوزيع حقاً توزيع باريتو المعمم $G_{\xi, \beta}$ وتم اختيار كل ملاحظة بشكل مستقل؟ من الواضح أن احتمال الحصول على أي مجموعة محددة من القيم هو صفر ولكن يمكننا أن ننظر في الاحتمال المحدد على أنه الكثافة الاحتمالية للتوزيع العام للقيم الممكنة M التي تم تقييمها في مجموعة الملاحظات التي نلاحظها. طريقة أخرى للنظر في احتمال هو الحد من احتمال الحصول على نقاط في فترات صغيرة حول تلك التي نلاحظها حقاً، ولكن مع تطبيعها للسماح لتأثير إطارات الفاصل الزمني.

على سبيل المثال، لنفترض أن هناك ثلاث نقاط فقط فوق مستوى u والقيم التي تتجاوزها

u هي Y_1, Y_2 و Y_3 . وبما أن كثافة توزيع باريتو المعمم هي $(1/\beta)(1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi-1}$ فإن كثافة التوزيع المشترك بافتراض الاستقلالية هي نتاج هذا، مثال، الاحتمالية هي

$$(1/\beta^3)(1 + \xi Y_1/\beta)^{-1/\xi-1}(1 + \xi Y_2/\beta)^{-1/\xi-1}(1 + \xi Y_3/\beta)^{-1/\xi-1}.$$

الفكرة الآن هي البحث عن قيم اثنين من البارامترات التي تجعل هذه الصيغة على أكبر قدر ممكن. النتائج هنا صعب التعامل معها، خاصة عندما يكون لدينا أكثر من ثلاث ملاحظات. ولكن تعظيم الاحتمالات سوف ينتهي في نفس اختيار ξ و β كما يحدث مع تعظيم أي زيادة لدالة الاحتمال، مثل تربيع الاحتمال. دالة الزيادة التي تعمل بأفضل شكل هي تعظيم الاحتمالية اللوغاريتمية لتحويل النتيجة إلى مجموع. ولهذا نقوم بتعظيم

$$\begin{aligned} & \log((1/\beta^3)(1 + \xi Y_1/\beta)^{-1/\xi-1}(1 + \xi Y_2/\beta)^{-1/\xi-1}(1 + \xi Y_3/\beta)^{-1/\xi-1}) \\ & = -3 \log \beta + (-1/\xi - 1)(\log(1 + \xi Y_1/\beta) + \log(1 + \xi Y_2/\beta) + \log(1 + \xi Y_3/\beta)). \end{aligned}$$

بوجه عام، مع وجود قيم فائضة لـ M التي هي $Y_1, Y_2, \dots, Y_M$ يمكن أن نقدر ξ و β من خلال اختيار القيم ξ و β التي تعظم

$$-M \log \beta - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^M \log \left(1 + \frac{\xi Y_i}{\beta}\right). \quad (8-4)$$

مراعاة القيود $\beta > 0$ و $1 + \xi Y_i/\beta > 0$ لكل قيم Y ويمكن إجراء هذا الحساب باستخدام Solver في جدول بيانات (كل ما تحتاجه هو تخمينات β و ξ ، عمود من القيم Y_i ، وعمود الذي يكون فيه اللوغاريتمي $(1 + \xi Y_i/\beta)$ محسوب، ومن ثم خلية فيها الهدف المعطى بواسطة الصيغة (8-4)).

مثال 4-5: (تابع) تقدير مقاييس المخاطر لموقع Amazon.com

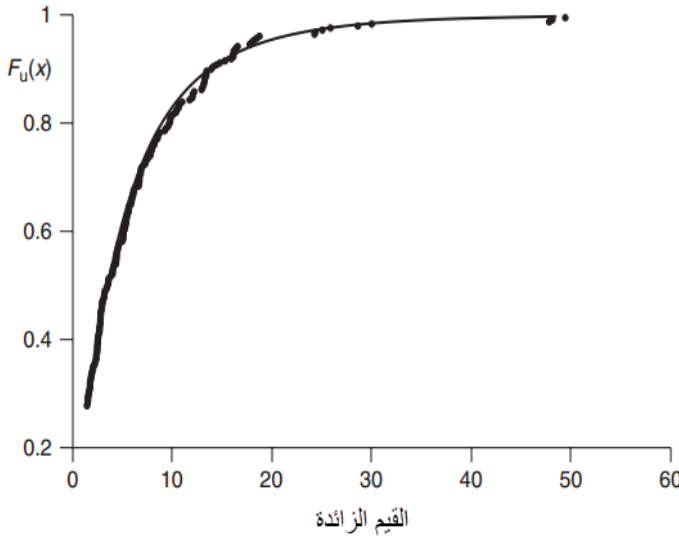
بالعودة إلى بيانات Amazon.com، لدينا 264 أسبوعا كانت الخسارة فيها أكبر من 1/2. يتم تعظيم تعبير لوغاريتمية الاحتمال عن طريق أخذ $\xi = 0.27$ و $\beta = 4.51$. يتوافق ذلك مع قيمة مؤشر ذيل $1/\xi = 3.7$. ويبين الشكل 4-11 مدى ملائمة دالة التوزيع التراكمي للملائمة للبيانات لنقاط البيانات 264 فوق الحد. نعرض القيمة المقدرة لـ $F_u(x)$ كخط

والبيانات التجريبية كنقاط. على سبيل المثال، أكبر 10 خسائر هي 20.73 ويتم رسم ذلك بقيمة y من $264/254 = 0.962$.

3-4-4 الخطوة الثالثة. تقدير مقاييس المخاطر ذات الأهمية

الخطوة الثالثة والأخيرة هي استخدام التوزيع المجهز لتقدير القيم المهمة. سوف ننظر في تقدير كل من القيمة المعرضة للخطر والنقص المتوقع. ننظر أولاً في القيمة المعرضة للخطر. $\text{VaR}_\alpha(X)$ هي x مثل $F(x) = \alpha$. إذا كنا نعمل مع حد ثابت u و $x > u$ ثم

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - \Pr(X > x) \\ &= 1 - \Pr(X > u) \Pr(X > x \mid X > u) \\ &= 1 - (1 - F(u))(1 - F_u(x - u)). \end{aligned}$$



الشكل 11-4: توزيع باريتو المعمم المقدر مقارنة مع البيانات التجريبية للخسارة الأسبوعية % في موقع Amazon.com مع حد 2

بما أننا نفترض أن توزيع F_u هو $G_{\xi, \beta}$ مع قيم متوقعة $\hat{\xi}$ و $\hat{\beta}$ ، إذا $F(x) = \alpha$ نتطلب

$$\alpha = 1 - (1 - F(u))(1 + \hat{\xi}(x - u)/\hat{\beta})^{-1/\hat{\xi}}. \quad (9-4)$$

حل x يعطي القيمة المعرضة للخطر التي نريدها، ويمكننا إعادة ترتيب المعادلة (4.9) للحصول على x من حيث المعلومات الأخرى وحتى الحصول على التقدير التالي

$$\text{VaR}_\alpha(X) = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{1 - \alpha}{1 - F(u)} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right).$$

العجز المتوقع عند مستوى α هو $\text{ES}_\alpha(X) = E(X|X > \text{VaR}_\alpha(X))$. لحساب ذلك يمكننا تحديد $\text{VaR}_\alpha(X)$ واستخدام حساباتنا السابقة في ذيل التوزيع لـ $v > u$ للتوزيع الزائد $F_v(x) = G_{\xi, \beta'}(x)$ حيث $\beta' = \beta + \xi(v - u)$. علاوة على ذلك، نعرف أن متوسط القيمة للتوزيع $G_{\xi, \beta}$ is $\beta/(1 - \xi)$ ولهذا، العجز المتوقع هو

$$\begin{aligned} E(X|X > \text{VaR}_\alpha(X)) &= \text{VaR}_\alpha(X) + E(\text{excess over } \text{VaR}_\alpha(X)) \\ &= \text{VaR}_\alpha(X) + \frac{\beta_V}{1 - \xi}, \end{aligned}$$

حيث β_V هي القيمة المتوقعة β للمنحنى (الذيل) أعلى $\text{VaR}_\alpha(X)$ ، ولهذا

$$\beta_V = \hat{\beta} + \hat{\xi}(\text{VaR}_\alpha(X) - u)$$

ولهذا

$$\text{ES}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X) + \frac{\hat{\beta} + \hat{\xi}(\text{VaR}_\alpha(X) - u)}{1 - \hat{\xi}},$$

التي يمكن تبسيطها لإنتاج الصيغة النهائية

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{\text{VaR}_\alpha(X) + \hat{\beta} - \hat{\xi}u}{1 - \hat{\xi}}.$$

مثال 4-5: (يتبع) توقع إجراءات المخاطر لـ Amazon.com

يمكننا حساب القيمة المعرضة للخطر VaR بنسبة 99٪ وتراجع القيمة المتوقع لبيانات Amazon.com بالضبط بهذه الطريقة. نستخدم توقعاتنا السابقة لـ $\hat{\xi} = 0.27$ و $\hat{\beta} = 4.51$ بقيمة هدف $u = 2$. كما نحتاج أيضًا $1 - F(u)$ والتي هي احتمالية الخسارة بأكثر من u ، ونتوقع

ذلك من خلال نسبة الملاحظات فوق الهدف لـ 2، مثال $1 - F(u) = 264/729$ وهذا يعطي

$$\text{VaR}_{0.99}(X) = 2 + \frac{4.51}{0.27} \left(\left(\frac{0.01}{(264/729)} \right)^{-0.27} - 1 \right) = 29.3.$$

وبالتالي، يقدر التراجع المتوقع من خلال

$$\text{ES}_{0.99}(X) = \frac{29.3 + 4.51 - 0.27 \times 2}{1 - 0.27} = 45.6.$$

يمكننا مقارنة هذه الأشكال من خلال الملاحظات. من بين 729 ملاحظة نتوقع أن نرى 7 أعلى المستوى $\text{VaR}_{0.99}$: أعلى ملاحظة في المرتبة السابعة هي 27.86 والثامنة هي الأعلى عند 26.35. ولهذا فإن طريقة توزيع باريتو المعمم GPD تعطي تغاير أعلى بشكل طفيف بأكثر من المقترح من خلال النظر في أكبر خسائر فقط. قد يكون هذا محور نقاش سواء ما كان التوقع 29.3 أفضل من توقع معتمد على أعلى قيمة سابعة. بالرغم من ذلك، لا يوجد شك أنه كلما كان النهج أكثر تعقيداً كلما كان توقع التراجع أفضل، لأن هذا هو الوضع الذي يصبح فيه عنصر الاستقراء في التقدير أكثر أهمية. وتعطي البيانات التجريبية خسارة متوسطة بين نقاط البيانات السبع الأولى التي تبلغ 38.4 بينما توقع توزيع باريتو المعمم يعطي قيمة أعلى من القراءة 45.6.

ملاحظات

يحتوي هذا الفصل على أكثر التحليلات تعقيداً في هذا الكتاب، ولكن في نفس الوقت نفسه يغطي جزءاً كبيراً مما يمكن تناوله. وتوفر كتب Frey و McNeil و Embrechts مقدمة متكاملة للعديد من التقنيات في هذا الصدد، وهذه هي بداية جيدة لأي شخص يود معرفة المزيد.

قدمنا نموذج لتوقع مؤشرات المنحنيات ببداية هذا الفصل، وفي نهاية الفصل عرضنا نهج أكثر تعقيداً باستخدام الاحتمالات القصوى لتوقع $\hat{u}$ (والتي هي عكس لمؤشر الذي (المنحنى)). ولكن هناك أكثر من نهج آخر: التقنية الأكثر شيوعاً تسمى بمتوقع Hills.

التوزيع الموضح في المثال 1.4 مرتبط جدًا بالتوزيع المعروف لـ Cauchy والذي له

دالة

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

والذي ليس له متوسط معروف بشكل جيد.

ترجع نظرية Fisher–Tippett إلى ورقة بحثية من هؤلاء المؤلفين لعام 1928، ولكن لم يكن هناك إثبات كامل لها حتى ظهور عمل لـ Gnedenko في 1943 وعادة ما يتم إضافة اسمه إلى اسم النتيجة، والتي أصبحت في النهاية Fisher–Tippett–Gnedenko. ولكن حتى أبحاث Gnedenko لم تجيب على كافة التساؤلات المرتبطة بهذه النتيجة واستمر العمل على النظرية بإثباتات جديدة حتى السبعينات.

المواد التي وصفناها حول التوزيعات الزائدة عادة ما تسمى بنظرية "القمم أعلى الهدف" (POT). وتعد هذه النسخة البارزة لنظرية القيم القصوى، وهي مفيدة أكثر من نظيرتها في التعامل مع العدد الأقصى من N من النماذج.

كتب Embrechts و Kluppelberg و Mikosch تغطي الأفكار النظرية الأساسية للقيم القصوى وتحتوي على دلائل للنظريتين الموضحتين. وتوفر الورقة البحثية لـ De Haan إثبات لنظرية القيم القصوى المعممة وتوفر تسلسل للسواكن التطبيعية $a_N = F^{-1}(1 - 1/N)$ و $b_N = 1/(Nf(a_N))$ واللاتان لهم ميزة البساطة التي تسمح باستخدامها في أمثلة. وتوفر هذه المراجع حالات أكثر دقة للتوزيع في $MDA(H0)$ (على سبيل المثال، سوف يتم ضمان ذلك في حال $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)(1 - F(x))/(f(x)^2) = -1$).

المراجع

- De Haan, L. (1976) Sample extremes: an elementary introduction. *Statistica Neerlandica*, 30, 161–172.
- Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer.

- Fisher, R. and Tippett, L. (1928) Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical roceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180–190.
- Gnedenko, B. (1943) Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Serie Aleatoire. *Annals of Mathematics*, 44, 423–453.
- McNeil, A., Frey, R. and Embrechts, P. (2005) *Quantitative Risk anagement*. Princeton University Press.

تمارين

1-4 مقارنة المنحنيات العلوية والسفلية لسعر الصرف

الشكل 2-4 تم إنشاؤه باستخدام البيانات في جدول البيانات Exchange Rate Data. استخدم هذه البيانات للقيام بتحليلات مشابهة للتحركات في سعر الصرف في الاتجاه المعاكس (التراجع في قيمة الدولار الأمريكي مقابل الجنيه الإسترليني).
عل تعتقد أن مؤشر المنحنى قرب الـ 5 ملائم أيضًا لهذه الحالة؟

2-4 توزيع فريشيه

تعرب الشركة عن قلقها إزاء الدعاية السيئة المحتملة الناجمة عن ضمان على موقعها على الإنترنت ("سنقوم بإصلاح المشكلة المتعلقة بجهاز الإرسال "الراوتر" في أقل من 20 دقيقة أو سنقدم لك خدمة الإنترنت مجاناً لمدة عام). افترض أن المدير يبحث في البيانات في 20 يوم عمل لتقدير الوقت الأقصى الذي تستغرق المشكلة ذات الصلة بجهاز الإرسال. في كل يوم كان هناك ما بين 25 و30 استفسار من قبل العملاء من هذا النوع.

الحد الأقصى من بين هذه الأوقات يختلف من يوم لآخر ولكن متوسط قيمة 20 مرة مختلفة هي 12 دقيقة. نفترض أن الوقت المطلوب يمثل مؤشر المنحنى ذو قيم عالية من $\alpha = 5$ ، وبالتالي تحديد توزيع الحد الأقصى اليومي لعدد المرات. استخدام هذا التوزيع لتقدير احتمال أن يتم إلغاء الضمان في يوم معين، وبالتالي العدد المتوقع من الأيام قبل حدوث ذلك. [ستحتاج إلى استخدام صيغة لمتوسط توزيع فريشيه. إذا كانت $F(x) = 1 - (x/\alpha)^{-\alpha}$ فإن المتوسط يعطى بواسطة دالة غاما $(1 - 1/\alpha)$. هنا نحتاج $\Gamma(0.8) = 1.164$].

3-4 سلوك المنحنى في خليط من المعدلات

لنفترض أننا نضع نموذج تكلفة الذهب في وقت محدد في المستقبل (10 يناير 2020) على النحو المعطى من خلال التوزيع العادي بمتوسط μ والانحراف المعياري σ . فكرتنا هي أنه سيكون هناك قيمة متوسطة للذهب في عام 2020 ولكن السعر سوف يتذبذب حول تلك القيمة. نحن لا نعرف أي من هذه الأرقام سوف يتحقق، ولكننا نعتقد أن μ سيكون حوالي 1500 \$ لكل أوقية، ونحن نعتقد أن التقلب اليومي، الذي يقاس بـ σ ، سيكون حوالي 100 \$. وبشكل أدق، فإننا نمثل عدم اليقين حول μ بالقول أن μ يتم استخلاصها من التوزيع العادي بمتوسط 1500 والانحراف المعياري 100 ونمثل عدم اليقين حول σ بالقول أن σ مستمد من توزيع طبيعي بمتوسط 100 وانحراف معياري 20 وتنتج هذه العملية ما يسمى بخليط من التوزيعات العادية.

استخدم نموذج جدول البيانات BRMch4-MixtureOfNormals.xlsx لاستكشاف الطريقة التي يؤثر بها خليط التوزيعات العادية على سلوك المنحنى.

4-4 حساب متوسط القيم بتوزيع باريتو المعمم

أظهر إذا كان التوزيع له كثافة $f(x) = (1/\beta)(1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi-1}$ ثم متوسطه $\beta/(1 - \xi)$. (ملحوظة: استخدم التكامل غير المعرف

$$\int (x/\beta)(1 + \xi x/\beta)^{-(1/\xi)-1} dx = \frac{x + \beta}{\xi - 1} (1 + \xi x/\beta)^{-(1/\xi)}$$

وضع في اعتبارك تكامل من 0 إلى R ثم اترك الحد العلوي R يتجه إلى ما لا نهاية.

5-4 مخطط المتوسط عندما لا يكون المتوسط محدد

خلق بعض البيانات من توزيع بقيمة $\xi = 1.2$ باستخدام الصيغة الخلية $=1/(1-RAND())^{1.2}$ في جدول بيانات (مع مؤشر منحنى منخفض لا يوجد متوسط توزيع). تحقق مما يحدث لمتوسط المخطط الزائد في هذه الحالة. يجب ملاحظة أنه من الغريب

أنه سيسير بشكل جيد بخط مستقيم في أغلب النطاق. هل يمكنك شرح ما يجري؟ (وهذا يدل على قيمة التحقق من تناسب الحصول عليها من أقصى تقدير متوقع بالطريقة التي تتم في الشكل 4-11).

4-6 تقدير البارامترات من متوسط الأرقام الزائدة

ينظر محلل في بيانات متعلقة بتكاليف الرسوم من إنهاء الأعمال التجارية بعد إفلاسها. ولديه بيانات عن 900 حدث من هذا القبيل ويحسب متوسط الأرقام الزائدة التي تستخدم أهداف 10 ملايين دولار و 20 مليون دولار. وهناك 50 حدثاً تزيد تكاليفها الإجمالية عن 10 ملايين دولار، حيث يبلغ متوسط التكاليف 50 دولاراً قدره 19 مليون دولار (أي بزيادة قدرها 9 ملايين دولار)، ويوجد 15 حدثاً بتكاليف إجمالية تتجاوز 20 مليون دولار، بمتوسط حسابي (15 مليون دولار) (بزيادة قدرها 12 مليون دولار). تقدير قيم β و γ لتوزيع باريتو المعمم للفائض فوق 25 مليون دولار.

4-7 تقدير القيمة المعرضة للمخاطر وقيمة العجز المتوقع باستخدام نظرية القيمة القصوى

استخدم العملية الموضحة لبيانات سهم أمازون لتقدير القيمة المعرضة للخطر 99٪ وقيمة العجز المتوقع 99٪ للخسائر اليومية على مؤشر S & P 500. البيانات مدرجة في نموذج جدول البيانات BRMch4-S & P500.xlsx.

الفصل الخامس

اتخاذ القرارات وسط حالة من عدم اليقين

هل نريد أسعار مستقرة؟

ريكو تاسكر هو المسؤول عن مبيعات الفواكه والخضار الطازجة في سلسلة من متاجر البيع بالتجزئة الكبيرة. وتعد الطماطم منتج مهم بالنسبة لريكو. والتمن الذي يدفعه بائع التجزئة ثابت في أسواق الفاكهة بالجملة ويختلف وفقا للطقس والموسم. ويقوم بائع التجزئة بتصنيف ما بين 60٪ و 72٪ من المبيعات، مع متوسط ترميز بنسبة 66٪. هناك حاجة إلى هذه العلامات ذات النسب المرتفعة لتغطية تكاليف التخزين والمناولة وغيرها من نفقات البيع بالتجزئة. يتم إزالة أي منتج من الطماطم في حال عدم بيعه لمدة خمسة أيام، وفي المتوسط، تصل نسبتها إلى 10٪ من الطماطم المشتراه. ويبلغ متوسط سعر الجملة من الطماطم 3 دولارات للكيلو الواحد. بعد مناقشات مع المزارع الذي يوفر حاليا حوالي ثلاثة أرباع الطماطم التي يبيعها بائع التجزئة، يذهب ريكو إلى رئيسه، سوفي مارشال، لاقتراح تقديم المزارع سعر ثابت يقدر بـ 3 دولار للكيلو على مدار السنة، وأن بائع التجزئة يبيع المنتج بسعر 4.99 دولار للكيلو. وهذا يضمن نفس الترميز $(0.663 = 3 / 1.99)$

ومن خلال العمل مع مزارع واحد مع أسعار ثابتة سوف تكون العملية برمتها أكثر بساطة. وقد وافق المزارع على تلبية جميع متطلبات متاجر التجزئة حتى حد معين من قبل الإنتاج الكامل للمزارع في أي أسبوع. يقول ريكو أنه بالإضافة إلى خفض تكاليف الإدارة، فإن هذا القرار سيقفل جزء من المخاطر التي يواجهها بائع التجزئة من خلال القضاء على تقلب الأسعار.

قالت "سوفي" ولكن ماذا يحدث عندما يكون هناك معروض كبير من الطماطم والجميع يبيعها بسعر منخفض؟ ألن يسهم ذلك في تراجع مبيعاتنا بشكل كبير؟"

رد ريكو قائلاً "نعم، اعتقد أنه سيكون هناك تراجع ولكن يأتي العديد من الناس إلى متجرنا لشراء كافة احتياجاتهم من الفواكه والخضروات" وأضاف "بأن المبيعات ستظل في النطاق الإيجابي، بالإضافة إلى أن المتجر سوف يحقق المزيد من المبيعات في أوقات نقص المعروض وعندما يبيع الجميع بسعر أعلى."

لم يقتنع سوفي بشكل كامل، وقال "ماذا عن أدنى مستوى للمعروض من المزارع؟" إذا كان هناك نقص عام، ألن نقوم ببيع ما لدينا بشكل عام وبأي حال من الأحوال؟ ولهذا هل سنقوم بالفعل ببيع المزيد في تلك الأوقات؟

من ناحية أخرى، لفتت فكرة تثبيت السعر انتباه سوفي، ورأى أن أوضاع السوق قد تضمن ثبات الأسعار لمدة عام. ولكن هذا الالتزام قد يؤدي إلى عواقب وخيمة. ففي بعض الأوقات تستمر حالة من الطقس لفترة أطول. ماذا لو كان هناك عروض وفير لمدة ستة شهور مع انخفاض أسعار الجملة؟ أو ستة شهور من نقص المعروض؟ بالإضافة إلى ذلك، تعرف سوفي أن الربح الحقيقي يعتمد بشكل كبير على الكمية المهدورة. فإذا ارتفعت النسبة من 10٪ إلى 12٪ أو 13٪ سيكون هناك فارق كبير. بشكل عام تواجه سوفي قرار صعب: ومن المفارقات أنه حالات عدم اليقين بشأن النتائج تجعل الأمر صعباً، على الرغم من أن التغيير المقترح يهدف إلى تقليل عدم اليقين.

1-5 القرارات والحالات والنتائج

في الفصول السابقة كنا مهتمين بفهم (وقياس) وخصائص المخاطر من حيث الاحتمالات، والعواقب من حيث التكاليف. ننتقل الآن إلى سؤال حول كيفية تصرف المدير في بيئة محفوفة بالمخاطر. في الفصل السادس سنركز على كيفية تصرف الأفراد فعليا عندما تكون هناك شكوك. ولكننا نبدأ مع وجهة نظر معيارية، وليس وصفية: نظرا للحاجة إلى اتخاذ قرار بين البدائل، كل منها يحمل المخاطر، وكيف ينبغي للمدير اتخاذ هذا القرار؟

ومن المفيد أن نميز بعناية بين الأشياء التي يمكننا السيطرة عليها؛ وهي القرارات التي نتخذها، والأشياء التي تحدث خارج نطاق سيطرتنا، وهي الأحداث التي تقع. يمكننا أن نفكر في مشكلة القرار كاملة على أنها خمسة عناصر: القرارات؛ الأحداث، نتائج محتملة مختلفة؛ احتمالات الأحداث المختلفة. والقيمة التي نحدد لها لتتبع مختلفة.

وسوف نتعامل مع هذه العوامل.

1-1-5 القرارات

القرار هو في الواقع خيار بين الإجراءات الممكنة اتخاذها. إذا كان هناك شيء واحد فقط يمكن القيام به، إذاً لا يمكن حينها اتخاذ قرار. في هذا الفصل سوف نركز على القرارات المتخذة في مرحلة واحدة في الوقت المناسب والتي تجعل الأمور أكثر بساطة. (في الفصل السابع سوف ننظر بمزيد من التفصيل في المشاكل الديناميكية التي تحتاج إلى اتخاذ قرارات متتالية). يمكن أن يتضمن القرار اختيار متغير، على سبيل المثال قد نقرر كيفية بناء جدار بحري، أو كم المخزون من منتج ما كافٍ للاستمرار. في هذه الحالات هناك عدد لا حصر له من الخيارات الممكنة، ولكننا سوف نركز على الوضع الذي لا يوجد سوى مجموعة محدودة من الإجراءات الممكنة. وهذا يجعل مناقشتنا أبسط بكثير، وعمليا يمكن اتخاذ قرار مع خيار حر تماما لبعض المتغيرات المستمرة عادة من خلال إنشاء قائمة كبيرة من الخيارات الممكنة بالقدر الكافي.

2-1-5 الحالات

تعاملنا مع الأحداث على أنها عشوائية. قد يكون لدينا معرفة باحتمال وقوع أحداث مختلفة، ولكن لا يمكننا التنبؤ بالضبط بما سيحدث. نشير إلى الأحداث غير المؤكدة، أو قيم لمتغيرات غير مؤكدة، بالحالة. وتكون الحالة غير معروفة لصانع القرار في الوقت الذي يتم فيه اختيار إجراء ما. وتسمى قائمة جميع الحالات الممكنة التي يمكن أن تحدث بمساحة الحالة. هناك طريقة واحدة جيدة للتفكير في الحالة وهي تخيل لعبة فيها واحد من اللاعبين وهو صانع القرار واللاعب الآخر هو "الطبيعة". كلا اللاعبين لهم الفرصة في اتخاذ إجراء: صانع القرار يختار أفعاله والطبيعة تختار أفعالها. في هذا المنظور تُعرف الحالة ببساطة ما تختاره الطبيعة من أفعال.

الحالة تمثل عدم اليقين الذي ينطوي عليه مشكلة اتخاذ القرار. على سبيل المثال، لنفترض أننا نريد أن نضع نموذجاً لموقف نريد فيه استثمار 1000 دولار في الأسهم يوم الأربعاء إذا كان سعر الإغلاق يوم الثلاثاء أعلى من سعر الإغلاق يوم الاثنين. سوف نحتاج إلى اتخاذ قرار حول ما يجب فعله إذا كانت أسعار الإغلاق في اليومين هي نفسها: لنفرض أننا نقوم برمي عملة (قطعة معدنية) لاتخاذ قرار بشأن الاستثمار في هذه الحالة. قد نقرر نمذجة هذا بالقول إن الحالة هنا هي الفرق في الأسعار بين يومي الاثنين والثلاثاء وهناك ثلاثة إجراءات: الاستثمار، وعدم الاستثمار ورمي العملة (قطعة معدنية). ولكن هذا يترك بعض الشكوك من لصف الحالة، فبدلاً من ذلك نحن بحاجة إلى تضمين كل من التغيير في السعر ونتيجة رمي العملة (القطعة المعدنية) ضمن وصف الحالة.

3-1-5 النتائج

الإجراء الذي نتخذه، والأحداث العشوائية التي تحدث، تحدد مجتمعة ما يحدث لنا: هذه هي النتيجة أو العواقب لاتخاذ قرار معين.

وغالباً ما تحتوي النتيجة على عدة أبعاد: على سبيل المثال، سيؤدي قرار الاستثمار إلى تدفق إيرادات توزيعات الأرباح بالإضافة إلى قيمة حافطة نهائية؛ فإن قرار التخلي عن طرح

منتج جديد سوف يؤدي إلى عواقب ليس فقط من أجل الربح ولكن أيضا للسمعة؛ فإن قرار نقل منشأة التصنيع سيترتب عليه تكاليف مباشرة وتكاليف غير مباشرة مرتبطة بأوقات عمل للموظفين وتنقلهم. يجب أن تأخذ النتيجة في الاعتبار كل ما يمكن أن يكون له تأثير على القرار الذي نتخذه.

يمكننا تلخيص هذا الإطار من خلال الرسم البياني للشكل 1.5 الذي يوضح:

- صانع القرار يختار بين مجموعة من الإجراءات المتاحة.
- الحالات المحتملة التي يمكن أن تحدث.
- النتيجة التي يتم التوصل إليها نتيجة الجمع بين اختيار الإجراء من قبل صانع القرار والحالة التي تحدث.



الشكل 1.5: إطار الإجراءات والحالات والنتائج

كل هذا يعد بسيط نسبياً، ولكن هناك ما يجب التنبيه إليه. المصطلحات المستخدمة ليست عالمية. في بعض الأحيان يتم استخدام كلمة 'النتيجة' ببساطة للإشارة إلى حالة معينة تحدث بدلا من نتيجة قرار. كما أنه من الشائع جدا للناس استخدام الكلمة "الحالة" للإشارة إلى المعلومات المتاحة لصانع القرار في وقت معين (وهذا يحدث في كثير من الأحيان عند التعامل مع المشاكل التي تتطور مع مرور الوقت). لذا، على سبيل المثال، قد نتبع مبلغ المال الذي يملكه المقامر بعد عدد من المقامرة المختلفة في عجلة الروليت ونشير إلى ذلك بـ "الحالة" في الوقت t . وتعني حالة المقامر وليس حالة الطبيعة. عندما يتم استخدام مصطلح "الحالة" بهذه الطريقة سيتم تحديده من قبل الحالات العشوائية من الطبيعة وكذلك القرارات التي اتخذها المقامر؛ لذلك، في المصطلحات التي لدينا كون هذه أقرب إلى النتيجة من الحالة.

وبمجرد أن نضع إطاراً للقرارات ونضع النتائج التي تنشأ عن كل مجموعة من الإجراءات والحالة جنباً إلى جنب ، نحتاج إلى عنصرين إضافيين لاستكمال نموذج القرار.

4-1-5 الاحتمالات

نحن بحاجة إلى معرفة احتمال حدوث حالات مختلفة. في الفصول السابقة كنا سعداء بالحديث عن احتمالات الأحداث (مثال، احتمالات لمجموعة من نطاق الحالة). وبذلك قمنا بتجاوز ما هو جدير بالنقاش فعلاً. قد يكون الأمر واضحاً عندما نوضح ما نعنيه عندما نقول أن احتمالية رمي النرد وظهور رقم 6 هي 6/1، ولكن عدد قليل من الأحداث الحقيقية يمكن حساب احتمالاتهم ببساطة جداً. يمكننا القول بأن احتمالية حدوث ركود في الولايات المتحدة (ربعين سنويين من النمو السلبي) في وقت ما خلال العشرة أعوام المقبلة تبلغ 60٪.

ولكن هذا يعد ببساطة توقع غير مستند إلى بيانات: فقد يحدث ذلك أو لا، وفرص حدوث ذلك ترتبط بالعديد من العوامل التي لا تعد ولا تحصى سواء أكانت داخل الولايات المتحدة أو خارجها (على سبيل المثال، القرارات السياسية التي تتخذها الحكومة على الصعيد العالمي). بالإضافة إلى ذلك، هناك عوامل قد تؤثر على احتمالية وقوع ركود تفوق مجرد الأوضاع السياسية مثل التغير المناخي والكوارث الطبيعية والأحداث الإرهابية والحروب.

بالرغم من ذلك، إذا كان علينا أن نتخذ قراراً في مجال الأعمال الذي يتأثر بحالة الاقتصاد في المستقبل، فهذا يعني أن علينا أن نأخذ في الاعتبار إمكانية حدوث ركود. وهذا يقودنا إلى اتخاذ نوع من الحكم الذاتي لهذا الاحتمال، وحتى لو لم نكتب القيم الاحتمالية (أو تضمينها في جداول من البيانات)، وإذا كان لقرار الأعمال نتائج تعتمد على هذا الحدث غير المؤكد، فمن المرجح أن الاحتمالات يجب أن تؤخذ في الاعتبار في عملية اتخاذ قرارنا بطريقة ضمنية في بعض الأحيان - وفي هذه الحالة يكون من الأفضل أن نعرضها ومناقشتها. هنا سنبدأ على افتراض أن صانع القرار لديه مجموعة متفق عليها من الاحتمالات للأحداث التي ينطوي عليها مشكلة اتخاذ القرار.

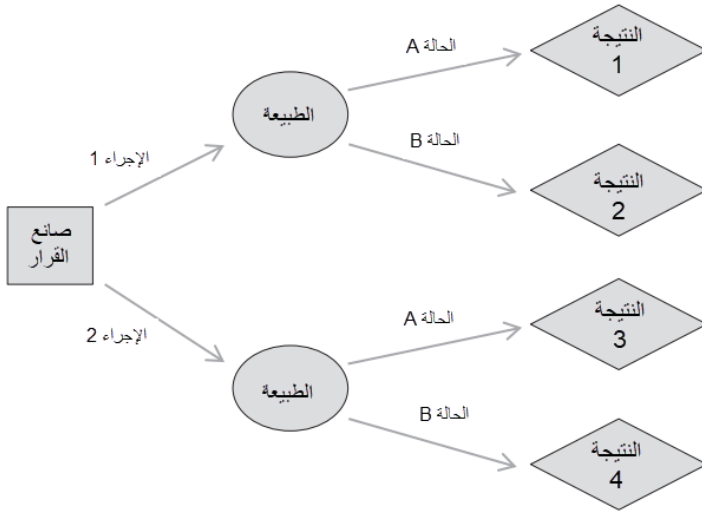
وهناك بعض النهج البديلة لمشاكل القرارات التي يمكن استخدامها عندما تكون حالات عدم اليقين كبيرة بما فيه الكفاية حيث يصبح العمل على احتمال معين أمر خطير: هذه التقنيات للتحسين سيتم مناقشتها في الفصل الثامن.

5-1-5 القيم

وأخيراً، نحن بحاجة إلى معرفة القيمة التي نضعها على نتائج مختلفة. يجب أن يكون لدينا نموذج قرار واضح جداً لمقارنة النتائج المختلفة. في الواقع، نحن بحاجة إلى تجاوز المقارنة بين النتائج البسيطة؛ قد يكون من المؤكد أن خيار واحد من الإجراءات يؤدي إلى النتيجة A، في حين أن البديل من المرجح أن يؤدي إلى إما نتيجة B أو النتيجة C. إذا كان C هو الأفضل لـ A، ولكن A هو الأفضل لـ B اتخاذ قرار بين الاثنين سيكون صعباً. هذه هي المشكلة الرئيسة التي نتناولها في هذا الفصل: "كيف يمكن لصانعي القرارات الاختيار بين إجراءات مختلفة عندما يؤدي كل خيار ممكن إلى عدم التوصل إلى نتيجة واحدة بل إلى مجموعة من النتائج ذات الاحتمالات المختلفة؟"

طريقة أخرى لتمثيل مثل هذا الوضع هو رسم شجرة القرار مع إشارة المسارات المختلفة في الشجرة إلى قرارات مختلفة وحالات مختلفة يمكن أن تحدث. وقد تم ذلك نظراً لمشكلة بسيطة في الشكل 5-2. في هذه الحالة هناك خيارين فقط من الإجراءات لصانع القرار وحالتين يمكن أن يحدثوا. هذا يعطي مجموعة مكونة من أربع نتائج مختلفة. في كثير من الأحيان سوف نكتب الاحتمالات أمام الحالات المختلفة حتى نتمكن من رؤية احتمال نتائج مختلفة.

في النموذج الذي وصفناه، تشير الأسهم إلى الإجراء في الوقت المناسب. ومن المنطقي أن نبدأ من النقطة التي يتم فيها اختيار الإجراء، لأن اهتمامنا كله حول أفضل خيار لصانع القرار. وأي حالة من عدم اليقين في حالة الطبيعة التي يتم حلها قبل نقطة اتخاذ القرار لن تكون ذات صلة. ويحتاج نطاق الحالة إلى التعامل مع كل حالة عدم اليقين بشأن حالة الطبيعة التي سيتم حلها بعد اتخاذ القرار. غالباً ما يحدد اختيار الإجراء ما يحدث، وبالتالي تتطور الاحتمالات والحالات المحتملة بشكل مختلف اعتماداً على الإجراء الذي يتم اتخاذه



الشكل 2-5: اتخاذ القرار مع إجرائين وحالتين

(سنرى ذلك في بعض الأمثلة التي سننظر فيها لاحقاً). من وجهة نظر أشمل، هذا يجعل الأمور أكثر تعقيداً لأنها تقدم الاعتماد بين الإجراءات والحالة (بدلاً من التفاعل بين اثنين فقط يحدثون مع النتيجة)، ولكن من الناحية العملية، لا توجد صعوبة مع الرسم وشجرة القرارات المناسبة، وإجراء الحسابات المطلوبة.

2-5 نظرية المنفعة المتوقعة

1-2-5 تعظيم الربح المتوقع

نريد أن نبدأ مع أبسط موقف، لذلك دعونا نفترض أن الشيء الوحيد المهم لعملنا هو الربح الإجمالي. وبالتالي، فإننا نفترض أن هناك رقم واحد بالدولار ومرتبطة بكل نتيجة ممكنة، ونحن لسنا بحاجة إلى السماح لأي من الجوانب الأقل قابلية للقياس من القرار. في بعض الأحيان، حتى لو كانت هناك عوامل أخرى جديرة بالمراقبة، يمكننا أن نسعر هذه العوامل لإعطاء النتيجة النهائية بالدولار. على سبيل المثال، إذا كنا نفكر في نقل عملية مركز الاتصال في الخارج ثم انخفض مستوى اللغة الإنجليزية المنطوقة في هذا المكان فمن الممكن

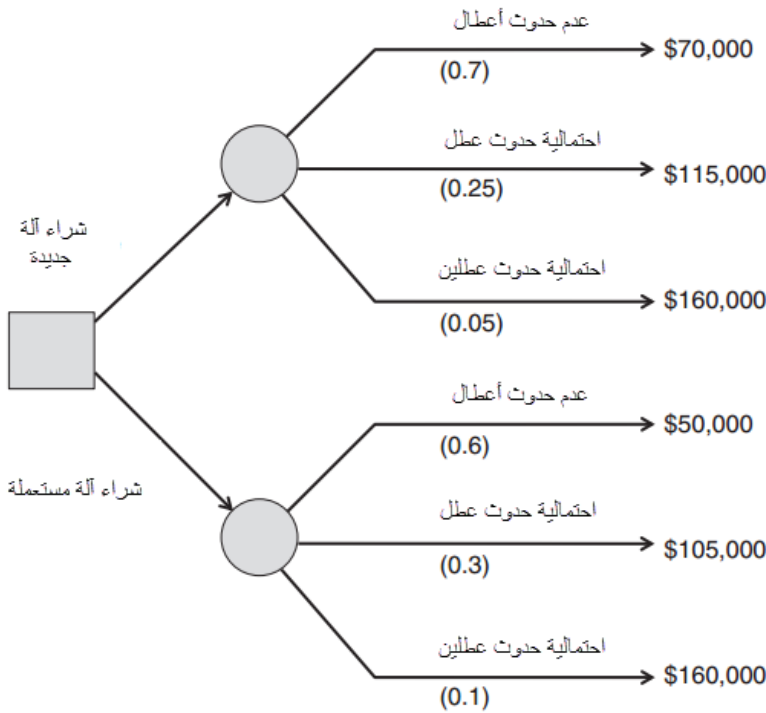
أن يؤدي ذلك إلى تراجع مستويات رضا العملاء وهذا يجب أن يؤخذ في الاعتبار في عملية اتخاذ القرار. نحن بحاجة إلى أن نسأل أنفسنا ما هي التكلفة الحقيقية الناجمة عن تراجع مستوى الخدمة - ربما يجب أن نفكر في حجم ما نحتاج إنفاقه على مركز اتصال في الخارج مما هو عليه الآن. في أي حال، إذا كنا نستطيع تحويل الأمور المتعلقة بالخدمة إلى قيمة دولارية سيكون لدينا أساس أفضل لاتخاذ هذا القرار.

الاقتراح الأول الذي نحذو حذوه، وربما يكون أبسط خيار لمدير ما، هو تحقيق أقصى قدر من الربح المتوقع. وهذا أمر معقول تماما. ونظرا لعدد من مسارات العمل الممكنة، يقوم المدير بحساب الربح المتوقع لكل منها ثم يختار الإجراء صاحب أعلى قيمة ربح متوقعة. يوفر إطار شجرة القرار طريقة مناسبة لتمثيل المشكلة وأيضا لحساب ومقارنة الربح المتوقع من الإجراءات المختلفة.

مثال 1-5 الاستثمار في آلة لصنع الإنفاق

تفكر شركة ماتشستوك في الاستثمار في آلة حفر جديدة بتكلفة قدرها 520,000 دولار أمريكي وهذه الآلة مطلوبة لأداء وظيفة معينة قبلتها شركة ماتشستوك، وسيتم بيع الجهاز في غضون عامين بـ 450,000 ألف دولار أمريكي. وهناك آلة ثانية ولكن تم استعماها سابقاً يُمكن أن تباع بقيمة 400,000 ألف دولار أمريكي، وسوف تكون قادرة على القيام بهذه المهمة بشكل مُرضٍ. وبعد عامين، يمكن بيع هذه الآلة (التي تبلغ من العمر أربعة أعوام) بمبلغ 400 ألف دولار. والفرق الرئيسي في الموثوقية واحتمالية تعطلها تماماً. سيتم تغطية أجزاء الجهاز الجديد طوال العامين الأولين لعملها، وترك فقط تكاليف العمالة وتكلفة فقدان وقت العمل. أخذت ماتشستوك مشورة الخبراء وتعتقد أنه مع الجهاز الجديد سيكون هناك احتمالية تبلغ 0.25 لتعطل الآلة مرة واحدة عن العمل واحتمالية تبلغ 0.05 لتعطل الآلة مرتين خلال المشروع المستمر لمدة عامين (مع احتمال 0.7 لعدم تعطلها على الإطلاق) وسوف يتكلف كل عطل 45,000 ألف دولار في المجموع. وتعتقد الشركة أنه باستخدام هذه الآلة سيكون هناك احتمال 0.3 من لعطل واحد واحتمال 0.1 لعطلين اثنين (مع 0.6 لعدم تعطلها على الإطلاق). وفي هذه الحالة، تقدر التكلفة بمبلغ 55,000 ألف دولار.

ويبين الشكل 3-5 كيف يتم تمثيل ذلك على أنه شجرة قرار. وبالمقارنة مع الشكل 2-5 قمنا بتقليص العقد ووضع المعلومات (بما في ذلك الاحتمالات) على الأسهم. في هذه الحالة يمكننا حساب إجمالي التكاليف المتعلقة بآلة حفر النفق لكل من النتائج المحتملة، وهذا مبين في العمود الأيمن من الشكل. على سبيل المثال، شراء آلة جديدة والحصول على اثنين من الأعطال يؤدي إلى تكلفة قدرها 70,000 ألف دولار خسارة من قيمة الجهاز على مدى عامين بالإضافة إلى تكلفة قدرها 45,000 ألف دولار مرتين، ليصبح الإجمالي 160,000 ألف دولار أمريكي. يتم أخذ هذه التكاليف الإجمالية من الربح لإعطاء ربح نهائي، وبالتالي فإن تحقيق أقصى قدر من الربح المتوقع يعادل خفض التكلفة المتوقعة. لم نأخذ في الاعتبار القيمة الوقتية للنقد. ولهذا لا يوجد خفض للتكاليف.



الشكل 3-5 : النتائج المرجحة واحتمالاتها لشركة ماتشستوك

ما الذي يجب أن تفعله الشركة لتحقيق أقصى قدر من الربح المتوقع؟ إن شراء آلة حفر نفق جديدة يحملها تكاليف متوقعة تبلغ $160 \times 0.05 + 115 \times 0.25 + 70 \times 0.7$ (1000 دولار أمريكي)، والتي تصل قيمتها إلى 85,750 دولار أمريكي. أما شراء آلة مستعملة يجعل التكاليف $160 \times 0.1 + 105 \times 0.3 + 50 \times 0.6$ ، أي 77,500 دولار أمريكي. لذلك، فإن اختيار آلة النفق المستعملة ذات تكاليف أقل وسيزيد الربح المتوقع.

ويمكن تطبيق هذه المنهجية أيضا على القرار الذي يواجهه سوفي مارشال في سيناريو شراء الطهاطم الذي قدمناه في بداية الفصل. ويتعلق عدم التيقن بالطقس، وبالتالي ظروف النقص أو الفائض. إن النظر في المشكلة بهذه الطريقة سيشرح سوفي على التحقق بشكل أكثر تفصيلا حول أرقام الخسائر المحتملة جنبا إلى جنب مع تقديرات المبيعات لسيناريوهات مختلفة. وحيثما يكون هناك نقص في المعلومات، يمكن إدراج ذلك أيضا في حالة عدم اليقين في التحليل. وفي هذه الحالة، يبدو من المستبعد أن يؤدي تحليل شجرة القرارات إلى تقديم توصية لا لبس فيها بالالتزام بخطة الأسعار الثابتة أم لا، ولكنه سيساعد بالتأكيد في تحديد البارامترات الحاسمة لهذا القرار.

2-2-5 المنفعة المتوقعة

بدلا من التعامل مباشرة مع المال، أو الربح المحقق، فمن المفيد أن نقدم فكرة المنفعة المستمدة من الربح المحقق. لمعرفة سبب قيامنا بهذا، سنظهر لماذا قرارات معظم الناس، لا سيما عند التعامل مع القرارات الشخصية أكثر من القرارات التي يتخذونها كمدراء، لن تؤدي إلى تعظيم الربح المتوقع فقط. على سبيل المثال، لنفترض أنك ترغب في الاختيار بين الخيارين التاليين:

الخيار (أ): مع احتمال 0.5 فإن المكسب 1000 دولار مع احتمال 0.8 أن تخسر 800 دولار.

الخيار ب: التيقن من كسب 99 دولار.

في هذه الحالة يكون الخيار (أ) لديه ربح متوقع قدره $0.5(1000) + 0.5(-800) =$

100 دولار وهذا أكبر من ربح من الخيار (ب) (ربح مؤكد قيمته 99 دولار) لذا، صانع القرار الذي يسعى إلى تعظيم الربح المتوقع سيختار بالتأكيد (أ) يفضلته عن الخيار (ب). ومع ذلك، بمواجهة الاختيار في الممارسة العملية، فإن معظم الناس لن يترددوا في اختيار الخيار (ب). وهذا لا يعد سوء فهم من الخيارات المتاحة، أو فشلهم بالقيام بالحساب البسيط. ولكنه يمثل رد فعل تجاه احتمالية خسارة 800 دولار في حال خالفت الأمور التوقعات كرمي القطعة المعدنية. وبالنظر إلى أن هناك فارق في التوقعات بمقدار دولار واحد، فإن الغالبية العظمى من الناس سيختارون الربح المؤكد بقيمة 99 دولار. إذا كنا نفكر في ما يحدث هنا سيمكننا أن نرى أن اختيارنا يعتمد جزئياً على ظروفنا المالية الحالية، وجزئياً على ذوقنا للمقامرة.

ويتمثل أحد النهج المتبعة في هذا السؤال في تحديد وظيفة المنفعة الفردية التي تحدد مدى قيمة (أو تكلفتها) بالنسبة لنا لتحقيق مكاسب (أو فقدان) مبالغ مختلفة من المال. في بعض الأشكال يمكن أن تعزى هذه الفكرة إلى أبناء نيكولا ودانيال برنولي الذين اعتبروا كيف يجب على اللاعبين التصرف في ألعاب تعتمد على الفرص. تحدث عالم الرياضيات السويسري دعا غابرييل كرامر، في كتابته لنيكولا برنولي في 1728، عن وظيفة المنفعة على النحو التالي:

"يتوقع علماء الرياضيات المال بما يتناسب مع الكمية، والأشخاص الذين لديهم حدس جيد بما يتناسب مع الاستخدام الذي قد ينتج عنه أرباحاً"

الفكرة هنا هي أننا قد نقدر قيمة 2000 دولار على أنها تمثل قيمة لنا أقل من ضعف 1000 دولار - كل ذلك يعتمد على الطريقة التي من المرجح أن ننفق أموالنا بها. واحدة من المشاكل أو المفارقات التي واجهت أبناء برنولي هي اللعب التي تعتمد على إلقاء القطع المعدنية. إذا كان أول إلقاء نتج عنه ملك وتم ربح الدولار ستنتهي اللعبة. إذا كان أول إلقاء نتج عنه كتابة وثاني إلقاء ملك نربح دولارين وتنتهي اللعبة. ولكن إذا كان أول اثنين من كتابة والقادم هو ملك سنربح 4 دولارات وتنتهي اللعبة. بشكل أعم، إذا كان لدينا عدد معين من الإلقاءات n و $n + 1$ إرم هو ملك، سنفوز بـ 2^n دولار إذا كان هذا هو

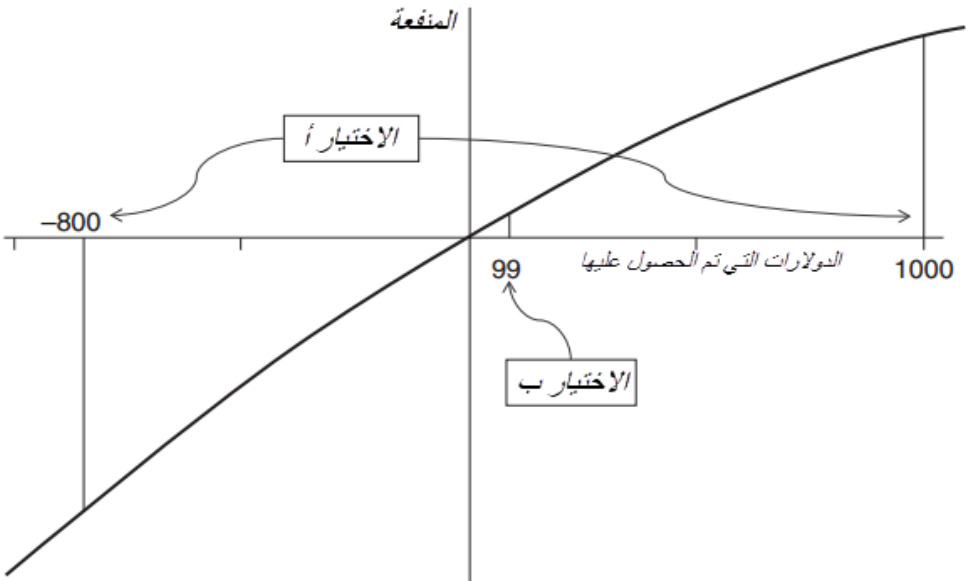
الترتيب، كيف سنكون على استعداد لدفع أموال لتجربة هذه اللعبة؟ قد يدفع معظم الناس 5 دولارات أو ربما 10 دولارات، ولكن ليس أكثر من ذلك.

إن استخدمنا حسابات الربح المتوقع سنكون سعداء لدفع أي مبلغ من المال أقل من الجائزة المتوقعة في اللعبة، ولهذا نحن بحاجة إلى حساب تلك التوقعات. افترض أننا قمنا باللعبة لثلاث جولات. من السهل رؤية أن هناك احتمالية نسبتها $\frac{1}{2}$ للحصول على دولار واحد؛ ونسبة احتمال $\frac{1}{4}$ للحصول على دولارين ونسبة احتمال $\frac{8}{1}$ للحصول على 4 دولارات. ونسبة الفوز المتوقعة هي $(2/1) + 2 \times (4/1) + 8 \times (1/8) = 2.3$. ولكن إذا لعبنا المزيد من الجولات سنلاحظ أن كل جولة ستضيف $(2/1) \times (2^n/1) \times (2^n) = \frac{1}{2}$. بعد خمسون جولة نسبة الفوز المتوقعة قد تكون 25 دولار. كلما استمرينا في اللعب فإن مجموع الربح يصبح أكبر، ولكن احتمالات الفوز بهذا المبلغ المتزايد تتراجع. بوجه عام، من الواضح أن القيمة المتوقعة لا نهائية. (إذا كنا نستخدم مصطلحات الفصل الرابع سيمكننا القول أن هذا الأمر يعد توزيع كثيف للقيم القصوى ولهذا التوقعات لا تعد موجودة.)

قد نعتقد أن حجم الأموال في هذا المثال تبدو جنونية - بعد 30 جولة دون الحصول على "كتابة" فمن الممكن الحصول على 2^{30} دولار الذي يساوي أكثر من مليار دولار. لكن القرار الذي قدمه دانيال برنولي لهذه المفارقة (عادة ما يطلق عليه مفارقة بطرسبورغ) يعتمد على فكرة المنفعة. لكل جولة إلقاء القطعة المعدنية إضافية، فإن حجم المبلغ يتضاعف ولكن الاحتمالية تقل النصف. حسب وجهة نظر الربح المتوقعة فإن مساهمة كل مصطلح متساوية (ويساوي 0.5 في الطريقة التي قمنا بها هذا الحساب أعلاه). ولكن برنولي قال إنه حتى لو كان لدينا 2 دولار إلا أنه ضعف قيمة دولار واحد، فإن الحصول على جائزة قدرها 200 مليون دولار لم يكن ضعف قيمة حصوله على جائزة قدرها 100 مليون دولار. بالنسبة لمعظم الناس، 100 مليون دولار يعد مبلغًا ضخماً (يكفي للعيش في رفاهية دون الحاجة إلى العمل) وسيكون من الحماقة أن نفكر في أن فائدة إضافية من الحصول على 100 مليون دولار إضافية بنفس قيمة الـ 100 مليون دولار الأولى.

يعد ذلك ضمناً حساب الربح المتوقع في جوهره؛ يجب أن نكون غير مباينين بين الحصول على 100 مليون دولار بالتأكيد وإلقاء القطعة المعدنية والحصول على 200 مليون دولار إذا فزنا فقط.

تقودنا هذه الحجج إلى نظرية القرارات على أساس المنفعة العامة. بدلاً من الربح المتوقع نحن بحاجة إلى النظر في المنفعة المتوقعة، وتسمى هذه النظرية بنظرية المنفعة المتوقعة (EUT). تنص هذه النظرية أنه في حال مقارنة الخيارين A و B في المثال أعلاه، نحن بحاجة إلى معرفة دالة المنفعة التي لدينا للعديد من الاحتمالات المرتبطة بالقيم. ويبين الشكل 4-5 الدالة المحتملة للمنفعة. حددنا الرقم "صفر" للثروة التي لدينا، بحيث يمثل المحور الأفقي الربح (أو الخسارة) وفقاً للاختيار الذي تم اتخاذه. على الجانب الإيجابي، منحني دالة المنفعة يتجه للأعلى، بحيث يكون كسب 1000 دولار أقل من ضعف كسب 500 دولار. على الجانب السلبي، فإن المنحنى يتجه أيضاً للأسفل، بحيث يكون خسارة 1000 دولار أكثر من ضعف خسارة 500 دولار.



الشكل 4-5: مقارنة الاختيارات أ و ب باستخدام دالة المنفعة

بالنظر إلى الشكل 4-5 فمن السهل رؤية أن في هذه الحالة تكون المنفعة سلبية عند - 800 دولار وهي أكبر من المنفعة الإيجابية عند 1000 دولار. بما أن الاختيار أ يعطي فرص متساوية لهذين الاحتمالين، فإن المنفعة المتوقعة للاختيار (أ) سيكون سلبية. بتطبيق نظرية المنفعة المتوقعة (EUT) مع دالة المنفعة هذه فقد لا نختار الخيار أ حتى ولو كان البديل عدم الحصول على شيء. ولهذا، سنفضل بالطبع الخيار (ب) مع مكسب مضمون.

لاحظ إضافة رقم ثابت للكميات الناتجة كافة للنظر في دالة المنفعة في نقاط مختلفة على المنحنى، ولأن دالة المنفعة غير خطية، فإن ذلك قد يؤدي إلى اختيار مختلف في اتخاذ قرار بمشكلة ما.

ولهذا السبب، ينبغي أن نفكر في هذه المنفعة بوصفها دالة للثروة الكلية للفرد، بدلا من أن ارتباطها بالتغيرات التي طرأت على الثروة الحالية فحسب. ومع ذلك، يمكننا دائما إضافة أو طرح رقم ثابت من جميع قيم المنفعة دون تغيير تفضيلات بين خيارات مختلفة. وهذا يعني وضع مقياس للأشياء لجعل المنفعة للثروة التي لدينا حاليًا صفر:

يمكننا العمل مع المنافع للتغيرات في الثروة شريطة أن نضع في اعتبارنا أن كل شيء مرتبط بالمنفعة للثروة بأكملها في نهاية المطاف.

مثال عملي 2-5 اختيار بين صندوقين استثمار

لنفترض أن مستثمر يريد الاختيار بين صندوقين استثماريين: صندوق يحقق نمو وصندوق مستقر. في السنوات الثلاث الماضية كان هناك سنة واحدة سيئة حيث فقد الصندوق المستقر 5٪، وفقد الصندوق الذي يحقق النمو 25٪. وفي العام الجيد حقق الصندوق المستقر 15٪، وارتفع الصندوق الذي يحقق النمو بنسبة 30٪. وفي العام المتوسط، حقق الصندوق المستقر 5٪، وارتفع صندوق النمو بنسبة 10٪. وليس لدى المستثمر أي وسيلة لمعرفة ما سيحدث في العام المقبل، لكن بالنظر إلى الاحتمالات النسبية للنتائج المختلفة، من المتوقع أن السنوات السيئة تقع في ثلاثة سنوات على مدار عشرة سنوات، وتحديث السنوات الجيدة في ثلاثة سنوات على مدار عشرة سنوات، وتحديث

السنوات المتوسطة في أربع سنوات على مدار عشرة سنوات. نفترض أن منفعة المستثمر لـ x ألف دولار تُعطى من قبل اللوغاريتمية $\log(x)$. وبالنظر إلى أن لدى المستثمر 100000 دولار متاحين للاستثمار، فما الخيار الذي له أعلى منفعة متوقعة؟

الحل

يظهر الجدول 1-5 كل خيار للصندوق سواء النتائج أو المنفعة (يتم حسابه كاللوغاريتمي $\log$ للقاعدة e) والقيم المتوقعة. ويتم حساب المنفعة المتوقعة لمعدل نمو الصندوق من خلال $4.636 = 4.867 \times 0.3 + 4.701 \times 0.4 + 4.317 \times 0.3$.

يمكننا رؤية أنه بالرغم من أن صندوق النمو الذي يحقق قيمة أعلى من الصندوق المستقر، إلا أن المنفعة المتوقعة أقل بقليل من الصندوق المستقر. يمكننا اختصار ذلك في أنه باستخدام دالة المنفعة يجب على المستثمر اختيار الصندوق المستقر.

3-2-5 لا بديل لنظرية المنفعة المتوقعة

نظرية المنفعة المتوقعة هي طريقة قوية للتفكير في اتخاذ القرارات في بيئة محفوفة بالمخاطر: وهي تمثل نهجا منطقيا عندما يكون تعظيم الأرباح المتوقعة غير ملائم. ولكن من المثير للاهتمام أن نسأل ما إذا كانت هناك تركيبات أخرى قد نستخدمها. على سبيل المثال، قد ننظر في بعض الطرق التي نراعي فيها مباشرة تباين نتائج الدولار بدلا من القيام بذلك بشكل غير مباشر من خلال شكل دالة المنفعة.

القيمة المتوقعة	السنة الجيدة	السنة المتوسطة	السنة السيئة	
105	0.3	0.4	0.3	الاحتمالية
4.651	115	105	95	القيمة
	$\log(115) = 4.745$	$\log(105) = 4.654$	$\log(95) = 4.554$	المنفعة
105.5	130	110	75	القيمة
4.636	$\log(130) = 4.867$	$\log(110) = 4.700$	$\log(75) = 4.317$	المنفعة

الشكل 1-5: نتائج مختلفة للاختيار الاستثماري للمثال 1-5

هل يمثل إقبالنا على المخاطرة أمراً ينبغي النظر فيه أكثر من دالة المنفعة؟ ومن الحقائق الملحوظة أن نظرية المنفعة المتوقعة يمكن أن تُستمد من ثلاثة بديهيات معقولة جداً للخيارات: الترتيب والاستمرارية والاستقلال. والنتيجة هي أنه، إذا قبلنا البديهيات، فإننا لسنا بحاجة إلى النظر في أي خوارزمية قرار أكثر تعقيداً.

قبل الشروع في وصف البديهيات، نحن بحاجة إلى عرض بعض الملاحظات والمصطلحات. سنستخدم مصطلح احتمال لوصف خيار مع مجموعة كاملة من النتائج المحتملة، لكل منها احتمال (مثل الخيارين أ و ب في المثال السابق). كل احتمال هو عقدة واحدة (دائرة) في شجرة القرار، مما يمثل خياراً واحداً لصانع القرار.

وأخيراً، نفترض أن الاحتمال له عدد لا نهائي من النتائج. احتمال q يتشارك فيه نتيجة x_1 مع احتمالية p_1 ونتيجة x_2 مع احتمالية p_2 ، ... ونتيجة x_n مع احتمالية p_n ومن المفيد اختصار ذلك بكتابة $(x_1, p_1, x_2, p_2, \dots, x_n, p_n)$ بحيث يتبع كل نتيجة احتمالها. في كثير من الأحيان سوف نهمل النتيجة صفر، بحيث يتم أخذ احتمال (100 دولار، 0.3؛ - 200 دولار، 0.2) على أنه يعني احتمال 0.3 للحصول على 100 دولار واحتمال 0.2 خسارة 200 دولار. و 0.5 احتمال عدم الحصول على شيء.

وإذا كانت مجموعة من النتائج تحتوي على مبالغ بالدولار، فإن الاحتمال هو مجرد متغير عشوائي منفصل مع توزيع الاحتمالات على نتائج الدولار. هناك مصطلحات أخرى تستخدم بدلاً من "احتمال"، (على سبيل المثال، بعض الكتاب يستخدمون مصطلحات اليانصيب). معظم هذا الفصل سوف يناقش التوزيعات المنفصلة. ولن نحتاج للتعامل مع أي نوع من احتمال مستمر.

نستخدم الرمز $\leq$ للإشارة إلى التفضيل بين نوعين من الاحتمال. ولهذا نقول $r \leq q$ عندما نعني أن q مفضلة عن r . طريقة كتابة العلامة ($\leq$ بدلاً من $<$) يشير إلى ضعف عدم المساواة، ويعني ذلك أن q قد يتم اختيارها في حال كان كلا الخيارين متاحين؛ ولا يعني أنه ما يتم دائماً اختيار q عندما يكون كلا الخيارين متاحين. وبالتالي، فإنه يتضمن إمكانية عدم مبالاة صانع القرار لأي من الاحتمالين. في الواقع، إذا كنا غير مبالين للاختيار بين q و r إذاً

كلاهما $r \leq q$ و $r \leq q$.

الآن نقدم ثلاثة بديهيات. في كل حالة قد نرغب في النظر في مدى منطقيتها - إذا قبلناهم جميعاً، واتضح أننا يجب أن نقبل نظرية المنفعة المتوقعة كوصفاً كاملاً للطريقة التي يجب أن يتخذها صانع القرار العقلاني.

الأمر البديهي 1: الترتيب

الترتيب البديهي ينقسم إلى جزأين: الاكتمال والتعدي. ويستلزم الاكتمال ذلك بالنسبة لجميع الخيارات q, r : إما $r \leq q$ أو $q \leq r$ أو كليهما. وهذا يعني فقط أن صانع القرار لديه طريقة متسقة لاتخاذ القرارات بين الاحتمالات.

التعدي يتطلب أن كافة الاحتمالات q, r و s : في حال كانت $r \leq q$ و $s \leq r$ ، بالتالي $s \leq q$. ويبدو هذا واضحاً تماماً. إذا كان صانع القرار يفضل q عن r ، ولكنه يجد r أفضل من s ، فمن الصعب أن نرى كيف يمكن أن يكون من الخطأ اختيار q في تفضيل s .

الأمر البديهي 2: الاستمرارية

الاستمرارية تتطلب كل الاحتمالات q, r و s حيث $r \leq q$ و $s \leq r$: سنجد احتمالية p كون وجود اختلاف بين r والاحتمال (المركب) الذي لديه q مع احتمالية p ، و s مع احتمالية $1 - p$. بمعنى أن لدينا $r \leq (p, q; s, 1 - p)$ و $r \leq (q, p; s, 1 - p)$.

الأمر البديهي 3: الاستقلالية

يتطلب الاستقلال أن لجميع الاحتمالات q, r و s : في حال كان $r \leq q$ إذاً $r \leq (p, q; s, 1 - p)$ و $r \leq (p, q; s, 1 - p)$ لكل p . بعبارة أخرى، ومع العلم أننا نفضل q عن r ، ينبغي لنا أن نفضل خياراً مع q بدلاً من r حتى إذا كانت هناك فرصة ثابتة لاحتمال مختلف وحدث s . إذا ثبتت الثلاث بديهيات، إذاً يمكن إثبات أن التفضيلات يمكن الحصول عليها من المنفعة المتوقعة لبعض دالة u (٠) المحددة على مجموعة من النتائج. هذه الدالة u يمكن بعد ذلك أن تؤخذ على أنها تمثل منفعة صانع القرار. تعد هذه النظرية شهيرة والمهمة وأثبتها

فون نيومان ومورجنسترن. وبشكل أساسي ما تبينه النظريات هو أنه لا يهم كيف يقرر صانع القرار بين الاحتمالات: إذا كانت جميع القرارات متسقة بالطريقة التي تنطوي عليها البديهيّات الثلاثة، عندئذ يجب أن تكون هناك بعض دالات المنفعة، $u_0(x)$ فإن جميع القرارات المتخذة سوف تتطابق تماماً مع تلك التي كان يمكن أن تحدث إذا كان صانع القرار عظم المنفعة المتوقعة (باستخدام u_0 لحساب هذه التوقعات). وسوف يكون هذا الأمر صحيحاً حتى لو لم ينظر صانع القرار بوعي إلى دالة المنفعة u_0 .

سنعرض بيان أكثر رسمية للنتيجة، وكذلك فكرة عن كيفية تثبيته في القسم الفرعي أدناه. ولكن الآن نريد أن نفكر لماذا نتوقع ثبات البديهيّات. بديهية الترتيب تبدو واضحة إلى حد ما، ولكن سننظر إلى البديهيّات الأخرى بالمزيد من التفصيل.

1-3-2-5 الاستمرارية

بديهية الاستمرارية تفترض أن هناك ثلاثة خيارات. الأولى هناك خيار جذاب q : قد يكون ذلك جائزة رحلة حول العالم لمدة 100 يوم. وهناك خيار أقل جذاباً s : يمكننا التفكير في جائزة غير العظيمة إطلاقاً. وأخيراً هناك بديل r : قد تكون هذه رحلة حول البحر الأبيض المتوسط لمدة 14 يوم. لا ينبغي علينا القلق من حقيقة أن هناك بعض الأشخاص الذين لا يحبون قضاء الوقت في البحر سيرون أن خيار الـ 100 يوم q أسوأ من خيار الـ 14 يوم r . بالنظر إلى هذا الاعتقاد، سنجد أننا نتعامل مع شخص يرى أن $r \leq q$ و $s \leq r$. الاستمرارية هنا كما هو واضح من الاسم تشير إلى أن مراقبة ما قد يحدث للتفضيلات حينما تكون فرصة النتائج الأفضل يتم زيادتها بوتيرة بطيئة.

نفترض أن هناك يانصيب وهناك احتمالية p للفوز بجائزة رحلة حول العالم لـ 100 يوم، ولكن إذا لم نفوز بالجائزة لن نحصل على شيء. هذا الاحتمال $(q, p; s, 1 - p)$. إذا بدأت p عند الصفر إذا لا يمكننا الفوز بالجائزة في اليانصيب ولهذا نفضل الحصول على نتيجة r بدلاً من تذكرة في اليانصيب. من ناحية أخرى، مع وصول p عند 1 بمرور الوقت، لن يكون اليانصيب يانصيب فعلاً؛ حيث أنه سوف ينتج عنه الفوز بالجائزة دائماً. ولهذا، مع p

1 = فإن تذكره اليانصيب ستكون مفضلة عن الحصول على نتيجة r . تقر البديهية ببساطة بأنه يجب أن يكون هناك دائماً قيمة متوسطة لـ p التي يكون فيها صانع القرار في وضع اختلاف بين الحصول على تذكره اليانصيب وكسب الجائزة لـ r ، رحلة لمدة 14 يوم. هذه هي فقط قيمة p التي يتم عندها التنقل بين تفضيل النتيجة r على تذكره اليانصيب.

قد تفشل هذه البديهية إذا كان هناك عدد لا نهائي من النتائج السيئة، لذلك، مهما كان ضعف احتمالية حدوث ذلك، فإن الاحتمالية تصبح سيئة بطبيعة الأمر. وبطبيعة الحال، فإن الموت هنا هو النتيجة السيئة، ولهذا تكون بديهية الاستمرارية قابلة للانهايار. إذا كان q يحصل على دولار واحد؛ r لا يحصل على شيء، ولكن s مصيره الموت، إذاً من الواضح أن $r \leq q$ و $s \leq r$. ولكن هل يتبع ذلك أن يكون هناك احتمال p قريبة جداً من 1 بحيث نكون غير مباينين بين (أ) عدم الحصول على شيء و(ب) الحصول على دولار مع احتمال p ولكن الموت بدلاً من ذلك؟

من وجهة نظر أخرى قد نلاحظ أننا في كثير من الأحيان، في الممارسة العملية، نتبع هذه الطريقة بالضبط. تكلف القهوة 4 دولارات في أحد المتاجر في الشارع، ولكن تكلفتها 3 دولار فقط بنفس الجودة على الجانب الآخر من الشارع. ومع ذلك، إذا عبرنا الشارع للحصول على القهوة الأرخص ألن يكون هناك خطر طفيف بأن يدهسنا سائق متهور؟ يلاحظ جيلبوا أن ما إذا كنا سنعبّر الشارع أو لا قد يعتمد ذلك على كيفية عرض القرار لنا:

"... إذا أوقفتني وقبلت "ماذا تفعل؟" هل فقدت عقلك وتعرض حياتك للخطر بهذه الطريقة؟ فكر في ماذا قد يحدث! فكر في عائلتك!" سوف أعزف عن ذلك واستسلم (توفير الدولار).

هذا يدل على أهمية الطريقة التي يتم بها وضع الخيار في إطار، سوف نتناول هذا الأمر بشكل أكثر في الفصل التالي: سيكون من الغباء أن نفترض أن صانع القرار الحقيقي دائماً ما يتخذ نفس القرار عندما يواجه نفس الخيارين.

2-3-2-5 الاستقلالية

وأحد الطرق للتفكير في بديهية الاستقلالية هو رؤيته علاقتها بالقرارات التي اتخذت في وقت مبكر. إذا كنا نفضل q على r ، رحلة بحرية لمدة 100 يوم إلى خيار الرحلة لمدة 14 يوما، إذاً يجب أن يكون الأمر صحيحاً حتى لو كان الخيار الثالث وارد الحدوث. في هذا المثال، إذا كان s هو الخيار الذي لا تحصل فيه على أي جائزة على الإطلاق، فإن البديهية تنص على أنه إذا أعطى خياراً واضحاً بين الجوائز q و r سنفضل q ، بالنظر إلى كلا الخيارين في اليانصيب، على سبيل المثال، واحد فرصة من الألف للفوز، قد نفضل الاحتفاظ بتذكرة لليانصيب مع جائزة q بدلاً من الاحتفاظ بتذكرة لليانصيب مع جائزة r ؛ ويظل هذا صحيحاً بغض النظر عن احتمال الفوز، شريطة أن يكون هو نفسه بالنسبة لليانصيتين. إذا لعبنا اليانصيب وخسرنا فلن يكون هناك قرار متاح لاتخاذ، وإذا فرزنا سيكون هناك خيار متاح للاختيار بين جائزة q و r ، وأوضحنا بالفعل أننا قمنا باختيار q . قد يكون هناك شيء غريب في حال اختيار اليانصيب r ، إذا كان اليانصيب q متاح. ومن شأن ذلك أن يشكل نوعاً من التناقض الدينامي حيث نتخذ قراراً مختلفاً في وقت مبكر بشأن القرار الذي نتخذه عندما يتعلق الأمر بالاختيار النهائي. وبطبيعة الحال، فإن هذا النوع من التناقض يحدث أحياناً في خياراتنا، ولكننا قد نفضل أن نكون أكثر اتساقاً وأن بديهية الاستقلال هي ببساطة وسيلة لإنفاذ ذلك. في الفصل التالي سوف نستعرض بقدر أكبر من التفصيل الطريقة التي قد تفشل بها فكرة الاستقلال بالنسبة لصانعي القرار الحقيقيين الذين يواجهون خيارات حقيقية.

* 4-2-5 دليل إثبات النظرية

يمكن ذكر نظرية فون نيومان-مورجنسترن على النحو التالي:

نظرية 1-5 افترض أن علاقة تفضيلية $\leq$ على مجموعة من جميع الاحتمالات تفي بديهيات الطلب والاستمرارية والاستقلال. ثم هناك دالة منفعة u ، معرفة على جميع النتائج المحتملة، بحيث دالة المنفعة U على الاحتمالات، المستمدة من u من الصيغة

$$U(x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i u(x_i),$$

لديه خاصية أن أي احتمالات q و r ، $U(q) \geq U(r)$ إذا كانت فقط $r \leq q$. وعلاوة على ذلك، يجب أن تكون أي دالة منفعة أخرى v على النتائج التي لها هذه الخاصية تحولا خطياً موجبا من u (أي $u(x) + v(x) = a$ لبعض a و $b > 0$).

لن نعطي دليلا كاملا على نظرية 1-5، ولكن (إذا كان لديك اهتمام من الناحية الرياضية) فمن المجدي النظر في أهم الخطوات في مثل هذا الدليل. ولتحقيق ذلك، نحتاج إلى معالجة الاحتمالات، وأول ما نلاحظه هو أنه عندما تحدث الاحتمالات داخل احتمالات أخرى، يمكننا توسيع نطاقها من أجل الوصول إلى قائمة واحدة من النتائج واحتمالاتها. على سبيل المثال، إذا كان q_1 هو احتمال بقيمة 100 دولار باحتمالية 0.5 و 50 دولار مع احتمالية 0.5 $q_2 = (100 \text{ دولار}, 0.5; 0.5, q_1)$ ثم يمكننا توسيع نطاق احتمال q_1 للحصول على

$$q_2 = (\$100, 0.5; 0.5(\$100, 0.5; \$50, 0.5)) = (\$100, 0.75; \$50, 0.25).$$

نفترض أن لدينا مجموعة محدودة من الاحتمالات، مما يعني ضمنا أن هناك مجموعة محدودة من النتائج التي بينها احتمالات مختلفة توزع احتمالاتها. سنعمل على ذلك على مراحل.

الخطوة الأولى: يمكن استخدام بديهية الترتيب لإنشاء أفضل وأسوأ النتائج بين مجموعة من النتائج. نقوم بذلك من خلال أخذ النتائج على حدة ومقارنتها مع الأفضل من بين النتائج التي سبق النظر فيها. أفضل النتائج كان يجب أن يتم مقارنته مباشرة مع كل نتيجة التي جاءت بعد ذلك في الترتيب، عن طريق الانتقال، سيكون أيضا أفضل مع كل ما جاء من قبل (لن نحاول إعطاء أي تفاصيل). نحن هنا نتعامل مع النتائج بدلا من التوقعات، ولكن النتيجة هي أساسا نفس احتمال أن يعين احتمال 1 لهذه النتيجة. نفس الإجراء يعمل على العثور على أسوأ نتيجة كذلك. ونسمي أفضل نتيجة x^* وأسوأ نتيجة x^* .

الخطوة الثانية: الآن نقوم بتعيين قيمة المنفعة 0 إلى x^* وقيمة المنفعة من 1 إلى x^* . بالنسبة لأي نتيجة أخرى x في القائمة نحدد منفعة $u(x)$ تساوي احتمال p بحيث أننا غير مباينين بين احتمال $(1, x)$ واحتمال $(1 - p, x^*, p, x^*)$ (باستخدام بديهية الاستمرارية).

الخطوة الثالثة: بعد ذلك سوف نستخدم بديهية الاستقلال، والذي يسمح الاختيار الحر للاحتمال p والبديل المحدد المختار، s . لنفترض أننا نعطي أرقام α و β مع $\alpha \geq \beta < 1$. $0 \leq p = \alpha - \beta$ نختار $p = \alpha - \beta$ و $s = (x^*, \beta / (1 - p), x^*, \alpha - \beta)$ واستبدال هذه القيم في بديهية الاستقلال وهكذا، منذ $x^* \leq x^*$ نحصل على

$$(x^*, \alpha - \beta; x^*, \beta; x_*, 1 - \alpha) \succsim (x_*, \alpha - \beta; x^*, \beta; x_*, 1 - \alpha),$$

والتي يتم تبسيطها إلى

$$(x^*, \alpha; x_*, 1 - \alpha) \succsim (x^*, \beta; x_*, 1 - \beta). \quad (1-5)$$

هذه نتيجة وسيطة مفيدة التي سوف تنطبق حتى عندما x^* و x_* ليسوا أفضل وأسوأ النتائج. لقد أظهرنا أساساً أنه إذا شكلنا آفاقاً من نتيجتين، فإن زيادة احتمال الأفضل بينهما تجعل الاحتمال أكثر جاذبية.

الخطوة الرابعة: الآن نبين أن المنفعة تطابق ترتيب الأفضلية بينهما. افترض أن $u(x) \geq u(y)$ ، ثم من الصيغة (1-5) يكون لدينا

$$(x^*, u(x); x_*, 1 - u(x)) \succsim (x^*, u(y); x_*, 1 - u(y)).$$

ولكن إذا نظرنا إلى ما سبق في كيفية تعريف $u(x)$ و $u(y)$ ، فإننا نرى أن هذا يعادل

$$(x, 1) \succsim (y, 1).$$

الخطوة الخامسة: افترض الآن أن لدينا احتمال $(\alpha, x; 1 - \alpha, y)$: نريد أن نبين أن هذا له منفعة $u(x) + (1 - \alpha)u(y)$ ؛ وبعبارة أخرى، نحن نريد أن نعرض اللامبالاة بين $(1 - \alpha, y, \alpha, x)$ و $(x^*, \alpha u(x) + (1 - \alpha)u(y), x^*)$ و $(1 - \alpha, y, \alpha, x)$ نقوم بذلك من خلال ملاحظة:

$$(x, 1) \succcurlyeq (x^*, u(x); x_*, 1 - u(x)),$$

ولهذا

$$(x, \alpha; y, (1 - \alpha)) \succcurlyeq (x^*, \alpha u(x); x_*, \alpha - \alpha u(x); y, (1 - \alpha)). \quad (2-5)$$

ولكن نظرًا لأن لدينا أيضًا

$$(y, 1) \succcurlyeq (x^*, u(y); x_*, 1 - u(y)),$$

يمكننا أن نأخذ الاحتمال على الجانب الأيسر والحصول على ما يلي من بديهية الاستقلال

$$\begin{aligned} & (y, (1 - \alpha); x^*, \alpha u(x); x_*, \alpha - \alpha u(x)) \\ & \succcurlyeq (x^*, (1 - \alpha)u(y); x_*, (1 - \alpha)(1 - u(y)); x^*, \alpha u(x); \\ & x_*, \alpha - \alpha u(x)). \end{aligned}$$

الاحتمال على الجانب الأيمن يمكن تبسيطه إلى

$$(x^*, \alpha u(x) + (1 - \alpha)u(y); x_*, 1 - \alpha u(x) - (1 - \alpha)u(y)).$$

ولهذا، يمكن تجميع الصيغة (2-5) و(1-5) من خلال الانتقالية للحصول على العلاقة:

$$\begin{aligned} & (x, \alpha; y, 1 - \alpha) \\ & \succcurlyeq (x^*, \alpha u(x) + (1 - \alpha)u(y); x_*, 1 - \alpha u(x) - (1 - \alpha)u(y)). \end{aligned}$$

يمكننا تكرار كل هذا مع عكس ترتيب التفضيلات لإظهار

$$\begin{aligned} & (x^*, \alpha u(x) + (1 - \alpha)u(y); x_*, 1 - \alpha u(x) - (1 - \alpha)u(y)) \\ & \succcurlyeq (x, \alpha; y, 1 - \alpha), \end{aligned}$$

والذي يظهر أخيرًا اللامبالاة المطلوبة.

هناك عدد من الأمور التي يتعين علينا القيام بها لسد الثغرات هنا.

أولاً، تثبت النتيجة دون أي قيود على وجود مجموعة محدودة من النتائج أو التوقعات

المحتملة. وهذا يتطلب منا أن نبدأ بمجموعة محدودة من الآفاق ثم نضيف مجموعة أخرى تقع خارج هذا النطاق (على الرغم من أنها أسوأ من النتيجة الأسوأ في المجموعة الأولى) ونجمع بين دالاتا المنفعة التي نولدها.

ثانياً، لم ندرج جميع مكونات الحجة التي نحتاجها في الخطوة الرابعة، مما يدل على أن عدم المساواة في المنفعة للنتائج يترجم إلى ترتيب الأفضلية. وعلينا أن نبين أن الشيء نفسه ينطبق على الاحتمالات، ونحن بحاجة أيضاً إلى حجة "إذا وإذا فقط".

وفي الخطوة الخامسة أيضاً، أثبتنا ما نريده من احتمال وجود بديلين اثنين فقط - نحتاج إلى توسيع نطاق هذا الأمر ليشمل الاحتمالات مع أي عدد من البدائل.

وأخيراً لم نتناول تفرد دالة المنفعة (حتى التحولات الخطية الإيجابية) - فلن تسمح لنا النظرية بذلك، على سبيل المثال، تربيع جميع قيم المنفعة. وهذا من شأنه أن يترك ترتيب النتائج الفردية دون تغيير، ولكننا سوف نفقد القدرة على الحصول على فائدة احتمال باعتباره مجموع الاحتمالات من نتائج المنفعة الفردية.

2-2-5 ما هو شكل دالة المنفعة؟

عندما تكون النتائج نقدية، فإن دالة المنفعة هي ببساطة دالة قيمة حقيقية محددة على الخط الحقيقي. ومن المفيد استخدام مصطلحات دالات محدبة ومقعرة. دالة المنفعة محدبة لها خاصية تزايد المنحدر (وصف آخر: فإنه يحتوي على مشتق ثاني غير سالب). طريقة أخرى لوصف دالة محدبة هو القول بأن خط مستقيم يصل بين نقطتين على الرسم البياني لمنحنى الدالة ولا يمكن أن يتجه دون الدالة. يمكن وضع هذا في شكل رياضي بالقول أن الدالة $u(\cdot)$ محدبة لأي p بين 0 و 1.

$$pu(x_1) + (1 - p)u(x_2) \geq u(px_1 + (1 - p)x_2).$$

الجانب الأيسر هو ارتفاع نقطة نسبة $1 - p$ على طول الخط المستقيم بين النقاط $(x_2, u(x_2))$ و $(x_1, u(x_1))$ والجانب الأيمن هو النقطة على منحنى نفسه في القيمة x . ويوضح ذلك الشكل 5-5. هذه الخاصية من دالات محدبة يمكن تعميمها على أي عدد من

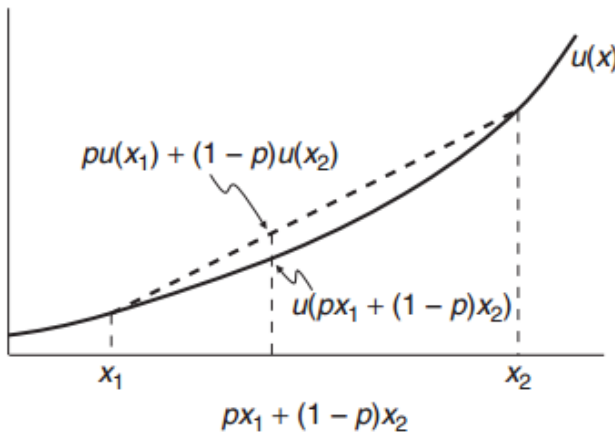
النقاط. لذلك، دالة محدبة لـ u لها الخصائص

$$\sum_{j=1}^n p_j u(x_j) \geq u \left(\sum_{j=1}^n p_j x_j \right), \quad (3-5)$$

في حال كان p_j غير سلمي و $\sum_{j=1}^n p_j = 1$.

المنفعة المتوقعة هي أن دالة المنفعة المحدبة تدل على الإقبال على المخاطرة. إذا كان هناك احتمال الحصول على احتمالية p_1 من خلال تحقيق x_1 واحتمالية $(1 - p_1)$ من خلال تحقيق x_2 إذا تكون المنفعة المتوقعة $p_1 u(x_1) + (1 - p_1) u(x_2)$ والتي نفضلها على قيمتها أكبر من) المنفعة $u(p_1 x_1 + (1 - p_1) x_2)$ والتي نحصل عليها من النتيجة المتوقعة.

وبشكل أعم، يمكننا القول أنه عندما تكون دالة المنفعة محدبة سيكون من الأفضل دائماً اختيار احتمال ينطوي على عدم اليقين، $(x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n)$ بدلاً من أن يكون لدينا نتيجة متوقعة، $\sum p_j x_j$ مع حالة من اليقين. يمكننا رؤية ذلك من خلال عدم المساواة (3-5) حينما تكون المنفعة المتوقعة للاحتمال على الجانب الأيسر أكبر من المنفعة المتوقعة للنتيجة على الجانب الأيمن.



الشكل 5-5: إذا كان $u(x)$ محدباً، يكون الخط المستقيم الذي يصل نقطتين على الرسم البياني u فوق الدالة u .

العكس صحيح لدالة منفعة مقعرة. الدالة المقعرة هي يكون فيها خط مستقيم يصل بين نقطتين على الرسم البياني لمنحنى الدالة والذي لا يكون أعلى الدالة، وهذا يعادل دالة انخفاض المنحدر. في هذه الحالة، وجود النتيجة المتوقعة $\sum p_j x_j$ مع حالة من اليقين هو دائما الأفضل لمواجهة مقامرة تشارك في احتمال غير مؤكد. وبعبارة أخرى، فإن وظيفة المنفعة المقعرة مثل الوظيفة المبينة في الشكل 4-5 تعني سلوكا مخالفا للمخاطر وهذا هو النمط المعتاد لوظائف المنفعة.

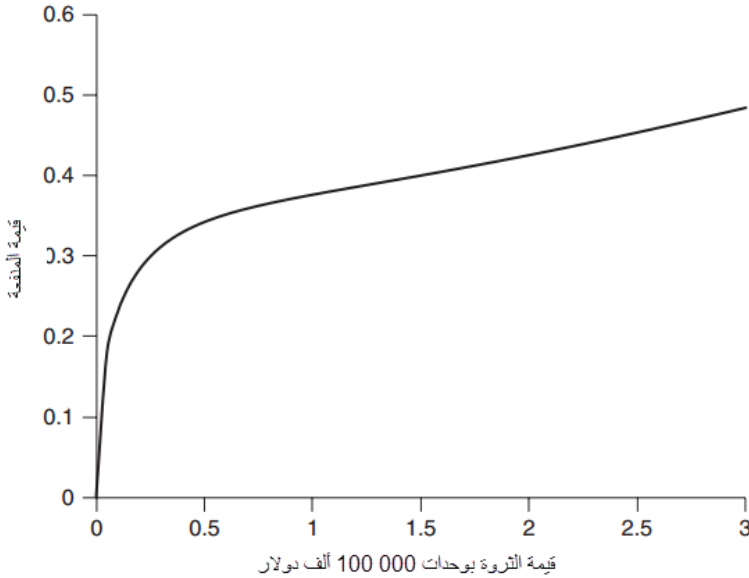
وبطبيعة الحال، يمكن أن يكون لدينا أيضا دالة منفعة محدبة في بعض المناطق ومقعرة مناطق أخرى. على سبيل المثال، لنفترض أن المنفعة لثروة ما x تقاس بوحدات 100,000 دولار هي

$$u_A(x) = \sqrt{x} - 0.9 \log(x + 1).$$

على الرغم من أنه ليس واضحا، فإن دالة المنفعة تبين أن تكون إيجابية للثروة الإيجابية: نرسم الشكل 6-5 لـ x في نطاق من 0 إلى 3. يمكننا أن نرى أن منحنى مقعر لـ x أدناه حول 1. في الواقع، على الرغم من صعوبة رؤية ذلك من خلال الرسم البياني، لكنه يصبح محدب للقيم أعلى 1. هذه دالة منفعة لها مشتق يقترب من الصفر كلما زادت قيمة x . إذا وضعنا مخطط بياني دالة المنفعة لقيم أعلى من x ، يمكننا أن نرى أنه مقعر في الواقع (المشتق الثاني يصبح سلبيا لـ $x \geq 8.163$). وبالتالي، فإن الدالة تتحرك من مقعر إلى محدب والعودة إلى مقعرة.

وهذا النوع من دالة المنفعة يمكننا أن نتوقع سلوكا معتدلا للمخاطر فيما يتعلق بالثروة بين 100 ألف دولار و8163 ألف دولار والسلوك الذي يعزف عن المخاطرة عندما تكون مستويات الثروة أقل من 100000 دولار. يوضح المثال 3-5 أن هذا سيحدث بالفعل من خلال إظهار ذلك مع دالة المنفعة، يمكن أن يستعد الفرد ذاته على اختيار التأمين (وهو سلوك عزوف عن المخاطرة) وأيضا المشاركة اليانصيب للحصول على جائزة كبيرة (وهو سلوك إقبال على المخاطرة).

$$u'_A(x) = (1/2)x^{-0.5} - 0.9/(x+1)$$



الشكل 5-6: منحنى يظهر المنافع لقيم ثروة مختلفة، باستخدام الصيغة

$$u(x) = \sqrt{x} - 0.9\ln(1+x)$$

مثال عملي 3-5: التأمين واليانصيب يمكن أن يتوافقوا

لنفترض أن فرد مع دالة منفعة $u_A(x)$ لديه حالياً ثروة تقدر بـ 100000 دولار (تساوي $x = 1$). هناك مخاطرة قليلة صغير من حريق يتسبب في خسائر بقيمة 75,000 دولار من الممتلكات. احتمالية حدوث هذا العام المقبل هي $1000/1$ وشركة التأمين تحصل على رسوم بقيمة 100 دولار للتأمين ضد هذه الخسارة. هناك أيضاً فرصة لدخول اليانصيب حيث تكلف تذكرة واحدة 500 دولار، ولكن هناك واحد في ألف فرصة للفوز بجائزة بقيمة 500,500 دولار (أي نحصل على 500,000 دولار، وأيضاً نسترجع ثمن سعر تذكرة). تبين أن الفرد سوف يأخذ ضمان التأمين وأيضاً خوض اليانصيب، على الرغم من أن أي خيار لن يزيد الثروة المتوقعة.

الحل

فكر أولاً في خيار التأمين. الخسارة المتوقعة تبلغ 50,000 دولار $\times (1/1000) = 75$ دولار، لذلك، مع قسط يبلغ 100 دولار، وشركة التأمين تصنع الكثير من الأموال ومن منظور الثروة المتوقعة، يجب على الفرد ألا يأخذ خيار التأمين. الآن انظر في حساب المنفعة المتوقعة. المنفعة الحالية هي

$$u_A(1) = \sqrt{1} - 0.9 \log(2) = 0.37617.$$

يمكن حساب المنفعة المتوقعة إذا أخذنا التأمين بعد دفع قسط التأمين:

$$u_A(1 - 0.001) = \sqrt{1 - 0.001} - 0.9 \log(2 - 0.001) = 0.37612.$$

هذا أقل من المنفعة المتوقعة إذا لم نختار التأمين، ولذلك خيار التأمين يبدو منطقيًا.

الآن ننظر في اختيار اليانصيب. عدم شراء تذكرة اليانصيب يترك لنا فائدة حالية من 0.37617. إذا اشترينا التذكرة سيكون لدينا 0.001 احتمال الفوز بـ 500,000 دولار واحتمالية 0.999 لخسارة 500 \$. هذا يعطي فائدة متوقعة من

$$\begin{aligned} & 0.001u(6) + 0.999u(0.99500) \\ &= 0.001 \times (\sqrt{6} - 0.9 \log(7)) + 0.999 \times (\sqrt{0.995} - 0.9 \log(1.995)) \\ &= 0.37624. \end{aligned}$$

لذلك، المشاركة في اليانصيب يعطي فائدة متوقعة أعلى بقليل. الشخص نفسه يعزف عن المخاطرة بشأن الخسائر (يكفي لشراء خدمة تأمين مكلفة نوعاً ما)، ولكن المقبل على المخاطرة يسعى إلى تحقيق مكاسب بالشكل الكافي للمشاركة في اليانصيب.

إذا كانت دالة المنفعة خطية (رسم بياني مستقيم) فلا يوجد عزوف عن المخاطرة ولا إقبال على للمخاطرة، ويمكننا القول إن صانع القرار محايد من حيث المخاطر. ليس من الصعب أن نرى أن تعظيم توقع الدالة في الشكل $bx + u(x) = a$ له نفس الحل الذي يزيد من توقع x (حيث $0 < b$)، لذلك صانع القرار المحايد للمخاطرة سيعظم الربح المتوقع فقط.

عندما يكون هناك عزوف عن المخاطرة، فإن درجة عزوف صانع القرار عن المخاطرة تعتمد على انحناء دالة المنفعة. إذا كانت دالة المنفعة تكاد تكون خطية، فإن مقدار العزوف عن المخاطرة سيكون ضئيلاً. لتحديد درجة العزوف عن المخاطرة نحن بحاجة إلى النظر في $u''(x)$ وهو مشتق الثاني من $u(x)$ ، أي المعدل الذي يتغير عليه درجة الميل u . مع العزوف عن المخاطرة، يتناقص ميل دالة المنفعة ولهذا يكون المشتق الثاني سلبياً. ومن الشائع تحديد حجم العزوف عن المخاطرة باستخدام مقياس أرو-برات للعزوف المطلق عن المخاطر *of absolute risk aversion Arrow-Pratt measure*، الذي يعطى من خلال

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

نكتب $u'(x)$ لمشتقة u وتقسيم ذلك من خلال تطبيع $A(x)$. مع هذا التطبيع، والتحجيم u من قبل ثابت لن يؤثر على العزوف المطلق للمخاطرة.

على سبيل المثال، النظر في دالة المنفعة اللوغاريتمية المعرفة بواسطة $u(x) = \log(x)$.

ثم $u(x) = 1/x$ و $u''(x) = -1/x^2$. ولهذا، مقياس أرو-برات للعزوف المطلق عن المخاطر سيكون

$$A(x) = \frac{(1/x^2)}{(1/x)} = \frac{1}{x}.$$

ينخفض ذلك نحو الصفر كلما أصبحت x أكبر. فكرة أن الأفراد أقل عزوف عن المخاطرة حيث يصبح المستوى العام للثروة أكبر يتم تحديده من خلال دالة المنفعة اللوغاريتمية.

6-2-5 * المنفعة المتوقعة عندما تكون الاحتمالات غير موضوعية

تطوير نمط فون نيومان - مورجنسترن لنظرية الفائدة المتوقعة أساسية لفهمنا لاتخاذ القرار في ظل حالات عدم اليقين، ولكنها، بطريقة ما، تطورت بشكل غير متوازن. الافتراض هو أن المنافع غير معروفة (يتم استخلاصها من الخيارات التي يتم اتخاذها بين الاحتمالات) ولكن هذه الاحتمالات معروفة على وجه التحديد.

كما أشرنا سابقا، غالبا ما تتضمن القرارات خيارات تتأثر بالأحداث التي لا يمكن أن نتحكم فيها، بالإضافة إلى ضرورة معاملة فكرة الاحتمالية بعناية. ومن المثير للاهتمام أن نسأل كيف يمكن لصانع القرار أن يتصرف إذا لم يكن مستعد لتحديد احتمالات ثابتة لمختلف الأحداث. بعد كل شيء، في الحياة اليومية نتخذ قرارات بشكل روتيني دون توقف لتسأل عن الاحتمالات. لذلك، إذا اتخذ مدير قرارا دون التفكير بوعي في الاحتمالات، ولكن في الوقت نفسه يتخذ إجراء عقلائي تماما ومدرّس حول تلك القرارات، يمكن أن نستنتج أن هناك إطار قرار ثابت لا يستخدم الاحتمالات؟

الجواب على هذا السؤال هو "لا". ذكر ليونارد جيمي سافاج في عمل مهم تم نشره في عام 1954، يظهر أنه إذا كانت الخيارات تفي ببعض البديهيات المنطقية إذا يجب على صانع القرار التصرف كما لو كان هو أو هي يعين الاحتمالية الذاتية لكل من النتائج المحتملة التي يمكن أن تنشأ عن اختيار التصرف، فضلا عن دالة المنفعة على تلك النتائج، ثم يقرر بين الخيارات على أساس تعظيم المنفعة المتوقعة كما تحددها الاحتمالات غير الموضوعية.

وضع كل هذا في نظرية واحدة يتطلب قدرا كبيرا من الدقة. في نموذج سافاج فإن صانع القرار لديه خيار بين مختلف الإجراءات وهذه الإجراءات سوف تحدد النتائج التي تتفق مع الحالات. من الناحية النظرية، نضع قائمة لجميع الحالات الممكنة كما مجموعة S ويتم التعامل مع الإجراء كدالة تأخذ الحالات ضمن الاعتبار، حيث X هو مجموعة من النتائج. يجب على مجموعة الحالات أن تحل كل عدم اليقين، بحيث يحدد الإجراء ببساطة ما هي النتيجة التي تحدث في كل حالة من الحالات المحتملة. هذه الطريقة في التفكير لا تتناسب بشكل جيد مع إطار شجرة القرار، حيث نتصور اتخاذ القرار أولا يليه عدم اليقين يتم حلها لتؤدي إلى نتيجة معينة. في بعض النواحي، تكون مثل عكس هذه العملية: نفكر في عدم اليقين الذي يتم حله في حالة واحدة ثم خريطة القرارات لكل حالة تؤدي إلى نتيجة. إن طريقتي التفكير ليستا مختلفتين حقا. في كل نهج اتخاذ قرار وحالة الطبيعة معا تنتج نتيجة. السبب في المضي قدما في فكرة أكثر تعقيدا من الإجراءات كخرائط من

الحالات إلى النتائج هو أننا سوف نحتاج إلى إجراء مقارنات بين جميع الإجراءات الممكنة. وهذا يعني أننا نحتاج إلى أن نكون قادرين على تصور إجراء يحدد نتائج معينة لكل حالة ممكنة من الطبيعة، دون أن يقيد بأي شكل من الأشكال النتائج التي تتسق مع الحالة. تخيل مرة واحدة مثل هذا الإجراء، سنكون بحاجة إذاً إلى مقارنة أي عمل آخر متصور والإجابة على السؤال: ما الذي سيكون مفضل؟

للحصول على البديهيات، سنصف ثلاثة منهم (الإجمالي سبعة).

البديهية الأولى P1

تقر بوجود أمر ضعيف في الإجراءات. لهذا، للإجراءات $f: S \rightarrow X$ و $g: S \rightarrow X$ ، $f \leq g$ أو $g \leq f$ لكلاهما، وهذه العلاقة انتقالية.

البديهية الثانية P2

تظهر هذه البديهية أنه بمقارنة الإجراءات نتهم فقط بالحالات التي يكون ينتج فيها عن الإجراءين نتائج مختلفة. ولهذا في حال كانت $g \leq f$ وهناك مجموعة من $A \subset S$ مع $f(s) = g(s)$ لكل الحالات s في A ، ثم التفضيل بين f و g يحدده ما يحدث $\perp A \ni s$. بشكل أكثر دقة، يمكننا القول أن في حال $f'(s) = f(s)$

$$\perp f(s) = g(s) = h(s) \text{ و } s \notin A \text{ و } g'(s) = g(s) \text{ و } s \notin A \text{ و } s \notin A$$

$$s \in A, \text{ ثم } f' \succcurlyeq g'.$$

قبل إعطاء البديهية الثالثة نحن بحاجة إلى اثنين من التصفيات. علينا أولاً أن نكون قادرين على إجراء مقارنة بين النتائج بدلا من الإجراءات. هذا يعد بسيط بما فيه الكفاية، نقول أنه بالنسبة للنتائج $x, y \in X, x \succcurlyeq y$ إذا كان الإجراء الذي يأخذ كل حالة إلى x مفضل للعمل الذي يأخذ كل حالة إلى y . إذا كنا نعلم أننا سوف ننتهي بـ x تحت بعض الإجراءات ونعلم أننا سوف ننتهي بـ y في إطار العمل g ، فإن ما يحدث مع الحالات لم يعد مهماً.

ثانياً نحن بحاجة إلى تحديد خاصية مجموعة من الحالات (أي حدث) $A \supset S$ الذي يقال أن هناك احتمال لا يكاد يذكر أن واحدة من الحالات في A ستحدث. الطريقة الأكثر طبيعية لوصف هذا هو القول أن احتمال A أكبر من الصفر، ولكن مع نظرية سافاج ليس لدينا احتمالات للتعامل معها. وبدلاً من ذلك نقول إن الحدث A لاغي إذا كان أي من هذين الفعل متساويين. ($f \succcurlyeq g$ و $g \succcurlyeq f$) . وبعبارة أخرى، ما يحدث للأحداث لا يشكل فارقاً في تفضيلاتنا.

البديهية الثالثة P3

تنص على أنه إذا كانت النتيجة x مفضلة على النتيجة y ، وأن الإجراءين f و g يختلفان فقط على مجموعة من الحالات A التي لا تكون خالية، وعلاوة على ذلك، تنتج A و f و g y ، فيجب أن تكون f مفضلة عن g . في الواقع، تنص البديهية على أكثر من ذلك، لأنها تنص أيضاً على أن عكس هذه العملية صحيحاً (وبالمثل نحن بحاجة إلى أنه إذا كان x مفضل عن y ثم f مفضلة عن g). رسمياً، يمكننا كتابة هذا على النحو التالي. بالنسبة إلى الحدث A الذي لا يكون خالياً، إذا كان

$$\text{إذا } f(s) = x \text{ لـ } s \in A, g(s) = y \text{ لـ } s \in A, \text{ و } f(s) = g(s) = h(s) \text{ لـ } s \notin A, \\ \text{إذا}$$

$$f \succcurlyeq g \quad \text{إذا وإذا فقط} \quad x \succcurlyeq y$$

عند هذه النقطة قد تشعر جيداً أننا قد قمنا بمد عقولنا بما فيه الكفاية دون الحاجة للنظر إلى مزيد من التفاصيل. البديهيات الأربعة المتبقية هي مجموعة مختلطة. وتتعلق البديهية P4 بالوضع الذي تفضل فيه النتيجة x بشكل صارم على y ، والنتيجة z مفضلة تماماً عن w . وتنص العبارات البديهية على أنه إذا كان الإجراء الذي يأتي بـ x على A و y خلاف لذلك مفضل على الإجراء الذي يأتي بـ x على B و y خلاف ذلك، فإن الإجراء الذي يأتي بـ z على A و w خلاف ذلك يفضل الإجراء الذي يأتي بـ z على B و w خلاف ذلك.

هذا هو تقريبا نفس القول بأن A تحدث في كثير من الأحيان عن B ، ولكن بالطبع لا يمكننا استخدام هذه المنطق لأننا لا نملك فكرة محددة عن الاحتمال. تشير البديهية $P5$ ببساطة إلى أنه يجب أن يكون هناك عمليين لا يعادلان بعضهما البعض. وترتبط البديهية $P6$ بالاستمرارية وتعني أنه يمكننا دائما تقسيم مجموعة من الحالات S بدقة بحيث يكون التغيير في مكون واحد للاحتمال يترك المفضل دون تغيير.

يعد هذا الافتراض قويا، ويمكن أن تعمل فقط إذا كان هناك مساحة للحالات بشكل لا نهائي S ، وكل حالة على حدة في s في S لا يعد قائما. في كثير من الأحيان لا ينطبق ذلك على المشاكل ذات الاهتمام، ولكن يمكننا أن نجعل ذلك صحيحا من خلال توسيع نطاق الحالات التي لدينا للنظر في مجموعة لا حصر لها من الأحداث الأخرى (ليست ذات صلة) التي تحدث بالتوازي مع الحالات الأصلية لدينا. تكون البديهية $P7$ مطلوبة فقط عندما تكون مجموعة النتائج X لانهائية، ولن نناقش ذلك بالتفصيل.

لنقر نظرية سافاج Savage علينا أن نفهم المقصود بتعيين الاحتمالات لجميع الحالات في S . وهذا يتطلب قياس μ الذي يعين احتمال لكل حدث $A \subset S$. يجب أن يكون القياس المضاف ($\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$) إذا كان A و B منفصلين، كما يجب أن يكون إيجابيا (نظرية non-atomic) بمعنى أنه إذا كان هناك حدث A مع $\mu(A) > 0$ نختار أي r ، وأي عدد بين 0 و $\mu(A)$ ، ثم يمكننا العثور على مجموعة فرعية من $B \subset A$ مع $\mu(B) = r$. بمجرد أن يكون لدينا مقياس μ على الحالات S ودالة عددية محددة على الحالات، يمكننا تقييم توقعات هذه الدالة عن طريق كتابة تكامل فيما يتعلق بـ μ . وهكذا، الآن نحن على استعداد لتأكيد النظرية.

نظرية 2-5: (سافاج Savage) عندما يكون X هو محدود، تكون العلاقة $\succsim$ تتسق مع البديهية $P1$ إلى $P6$ إذا وإذا فقط احتمالية مضافة محددة إيجابية لقياس μ على S ودالة غير ثابتة $u(x)$ ، ل $x \in X$ بحيث، لأي إجراءات f و g

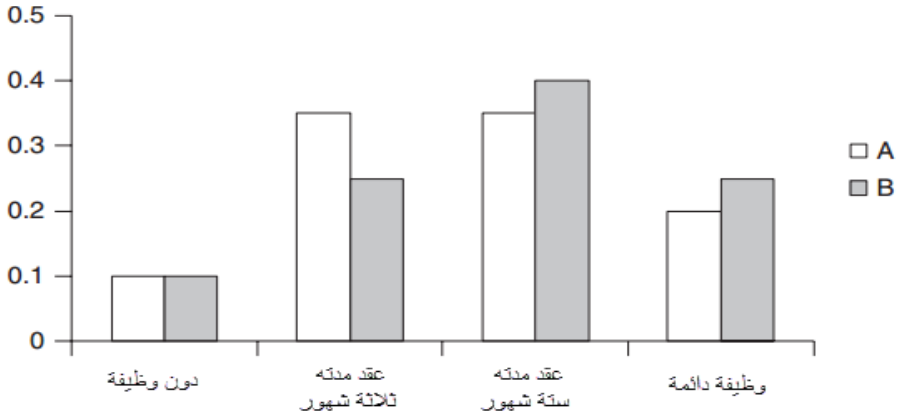
$$f \succsim g \quad \text{إذا وإذا فقط} \quad \int_S u(f(s)) d\mu(s) \geq \int_S u(g(s)) d\mu(s).$$

وعلاوة على ذلك، في هذه الحالة μ فريدة من نوعها و u هي فريدة من نوعها تصل إلى التحول الخطي إيجابي.

3-5 الهيمنة العشوائية والمخاطر

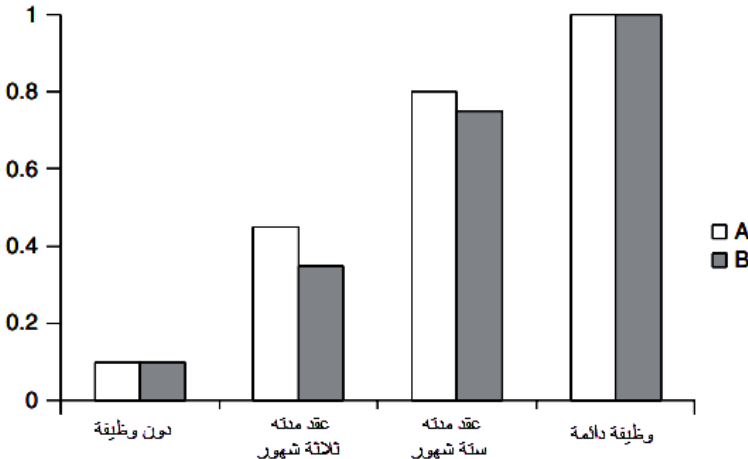
نفترض أن هناك احتمال له n من النتائج المحتملة ونقوم بترتيب هذه الاحتمالات من الأسوأ x_1 إلى x_n . يمكننا أن نفعل ذلك حتى لو لم تكن النتائج لها قيم نقدية. يمكننا بعد ذلك رسم موجز للمخاطر واستخدام هذا لمقارنة اثنين من إمكانيات مختلفة. على سبيل المثال، لنفترض أن راج وهو موظف له عقد قصير الأجل لمدة ستة شهور، وكان راج لا يفعل شيئاً، ويعتقد أن هناك احتمالية نسبتها 10٪ ألا يتم تجديد العقد في نهاية فترة العقد، وهناك احتمالية نسبتها 35٪ لتجديد العقد لمدة ثلاثة أشهر أخرى، واحتمالية نسبتها 35٪ لتجديد العقد لمدة ستة أشهر أخرى، واحتمالية نسبتها 20٪ لتثبيته في الوظيفة. ما يحدث سيعتمد على كل من أداء راج وأداء النشاط التجاري للشركة. لا يزال هناك شهرين متبقين في عقد راج، لكنه يعتقد أن لديه بعض المهارات التي من شأنها أن تساعد في الحصول على تثبيته والتي يمكن التغاضي عنها في العملية العادية، حتى أنه يفكر في الذهاب إلى رئيسه ومناقشته في تثبيته. يعتقد راج أن هذا سيزيد من فرصة تثبيته إلى 25٪، وفي هذه الحالة احتمالات النتائج الأخرى هي 10٪ بالألا يتم تجديد العقد؛ و 25٪ لتجديد لمدة ثلاثة أشهر؛ و 40٪ لتجديد العقد لمدة ستة أشهر إضافية. ماذا ينبغي أن يفعل راج؟ يظهر الشكل 5-7 ملخصات المخاطر لهذين الخيارين.

ليس من الواضح كيفية إجراء مقارنة بين الإجراءات $A = \text{"عدم فعل شيء"}$ و $B = \text{"طلب وظيفة دائمة"}$ من هذه المخاطر وحدها. التعقيدات هنا تتمثل في أننا لم نحدد مدى قيمة تعيين دائم أكثر من تعيين ستة أشهر. وعلينا أيضاً أن ننظر في علاقة تعيين لمدة ستة أشهر إلى ثلاثة أشهر؛ كل ما نعرفه هو أن هناك ترتيب الأفضلية: دائم هو الأفضل، ثم ستة أشهر أفضل من ثلاثة أشهر وفقدان العمل هو الأسوأ. وأفضل طريقة هنا هي رسم موجز للمخاطر التراكمية، كما هو مبين في الشكل 5-8.



الشكل 7-5: المخاطر للخيارين المتاحين لـراج.

وهنا يتضح أن الإجراء (A) ينطوي على خطر تراكمي (نتيجة أسوأ) يكون دائماً أعلى أو يساوي الخطر التراكمي للعمل (B)؛ هناك نوع من الهيمنة بين الاثنين. في وقت لاحق سوف نبين أن هذا يعني أنه من الأفضل لراج اختيار الخيار B والسعي للحصول على تعيين دائم، بغض النظر عن قيم المنفعة التي يضعها على نتائج مختلفة. ولكن علينا أولاً أن نحدد بدقة ما المقصود بالهيمنة العشوائية.



الشكل 8-5: المخاطر التراكمية للخيارين المتاحين لـراج.

وبالنظر إلى اثنين من الإمكانيات q و r يمكننا أن نأخذ مجموعة مشتركة من جميع النتائج الممكنة وترتيبهم حسب الزيادة في القيمة أو المنفعة. لاحظ أنه لا يوجد فقدان للعمومية في مقارنة احتماليين بافتراض أن لديهم نفس مجموعة من النتائج المحتملة، وإذا كان أحد التوقعات لا تتضمن واحدة من النتائج، سنقوم بتعيين احتمال صفر لهذه النتيجة.

نقول أن q تهمين عشوائياً على r إذا أخذنا مجموعة من النتائج مجمعة مع الاحتمالات $q_i \leq r_i$ و q_i و r_i ترتبط بنفس النتيجة (x_i) ، التفاوتات التالية تعد قائمة مع وجود واحدة على الأقل من هذه التفاوتات. كل من هذه النتائج تتسق مع نتيجة m من خلال كافة النتائج الجيدة إلى أفضلها. وبالتالي، احتمال q يعطي احتمالات أعلى إلى x_i العالي التي هي الأفضل.

$$\sum_{j=m}^n q_j \geq \sum_{j=m}^n r_j \text{ for } m = 2, 3, \dots, n \quad (4-5)$$

هناك تعريف بديل يستخدم حقيقة أن مجموع كل قيم q_j هو 1 (حيث أنها احتمالات). باستخدام هذا، نرى أن عدم المساواة (5.4) يمكن إعادة كتابتها كالتالي

$$1 - \sum_{j=1}^{m-1} q_j \geq 1 - \sum_{j=1}^{m-1} r_j \text{ for } m = 2, 3, \dots, n.$$

يمكن إعادة ترتيب هذا (من خلال مبادلة المجموع إلى الجانب الآخر مع عدم المساواة وإعداد $l = m - 1$) لتصبح

$$\sum_{j=1}^l r_j \geq \sum_{j=1}^l q_j \text{ for } l = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (5-5)$$

وهكذا، قمنا بتحويل تعبير ينطوي على احتمالات "أفضل من شيء" في تعبير ينطوي على "أسوأ من شيء"، وهذا يعني تغيير في علامة عدم المساواة. هذا التعريف البديل للهيمنة العشوائية مشروط الآن بالمخاطر المتراكمة. يمكننا أن نرى من الشكل 5-8 أنه في حالة اختيار راج بين الإجراءين (A) و (B) ، فإن الاحتمالات التراكمية لـ (A) أكبر من تلك

الخاصة لـ (B)، وهذا يعني أن (B) يهيمن عشوائياً على (A).

تعمل هذه الطريقة عندما لا تكون هناك قيم نقدية مرتبطة بالنتائج، ولكن بالطبع يمكننا أيضاً تطبيق الطريقة نفسها عندما تكون هناك قيم بالدولار. عندما تكون النتائج عبارة عن قيم، يمكننا أن نفكر في احتمال q كما يعادل متغير عشوائي منفصل، X ، وأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$. إذا أخذنا إمكانية r بشكل مساوي لمتغير عشوائي Y ، إذن عدم المساواة (5-5) يمكن كتابتها كالتالي

$$\Pr(Y \leq x_l) \geq \Pr(X \leq x_l), \text{ for } l = 1, 2, \dots, n - 1,$$

والتي تحول الهيمنة العشوائية إلى بيان دالة التوزيع التراكمي لمتغيرين عشوائيين. بشكل عام، يمكننا القول أن متغيرين عشوائيين X و Y :

تهيمن X عشوائياً على Y في حال دالة التوزيع التراكمي F_X و F_Y لـ X و Y تتسق مع $F_X(x) \leq F_Y(x)$ لكل x ، وتلك عدم المساواة ترتبط بواحد على الأقل من X .

لاحظ أنه في بعض الأحيان ينسى الناس الطريقة التي تتأثر بها عدم المساواة أو التفاوت هنا: هو المتغير العشوائي (أو الإمكان) مع توزيع تراكمي أقل والذي يسيطر عشوائياً على الآخر. ولا يحتاج تعريف الهيمنة العشوائية هذا إلى متغيرات عشوائية التي يجب تحديدها بناء على مجرد مجموعة محدودة من النتائج، ويمكننا تطبيقها بشكل جيد على حد سواء عندما يكون X و Y متغيران عشوائيان بدلاً من متغيرات عشوائية منفصلة.

نقطة أخرى جديرة بالملاحظة أنه إذا كان $X = Y + k$ لبعض k الثابتة < 0 إذاً

$$F_X(x) = \Pr(Y + k \leq x) = F_Y(x - k) \leq F_Y(x),$$

مثال عملي 4-5: التحقق من الهيمنة العشوائية

تحقق ما إذا كان هناك هيمنة عشوائية بين الإمكانيات A و B المعرفين كالتالي:

$$A = (\$100, 0.2; \$160, 0.2, \$200, 0.6),$$

$$B = (\$100, 0.3; \$120, 0.1; \$180, 0.1; \$200, 0.5).$$

الحل

نبدأ بتشكيل مجموعة كاملة من مبالغ مالية تحدث في أي من الاحتمالين التاليين: { \$100، \$120، \$160، \$180، \$200}. من خلال صفوف الجدول أعلاه، احتمال الحصول على هذا المبلغ أو أقل من ذلك. ويظهر ذلك في الجدول 2-5 الذي يوفر لكل احتمال مبالغ الشكل في شكل عدم مساواة أو تفاوت (5-5). كل عنصر في العمود الذي يعرض مجموع A هو أقل من أو يساوي العنصر المقابل في المجموع ل B، ومن ثم يهيمن A عشوائيا على إمكانية B. (لاحظ أن هناك نهجا بديلا وهو النظر في مجموع احتمالات وتلقي أكثر من مبلغ معين واستخدام عدم المساواة أو التفاوت (4-5)).

الجدول 2-5: مقارنة بين إمكانيات A و B.

المبلغ بالدولار	احتمالات A	المجموع لـ A	احتمالات B	المجموع لـ B
\$100	0.2	0.2	0.3	0.3
\$120	0	0.2	0.1	0.4
\$160	0.2	0.4	0	0.4
\$180	0	0.4	0.1	0.5
\$200	0.6	1.0	0.5	1.0

النتيجة الرئيسة هي أنه في ظل نظرية المنافع المتوقعة، إذا كان احتمال أن يهيمن q عشوائياً على احتمال r، إذا q سيكون المفضل على r بغض النظر عن الفائدة المعطاة لكل نتيجة منفردة.

والشرط الوحيد هو أن المنافع تتزايد، لذا $u(x_1) < u(x_2) < \dots < u(x_n)$. وفي الواقع، فإن هذا الأثر يعمل أيضا في الاتجاه الآخر. إذا كانت المنفعة المتوقعة من احتمال أن يكون q أكبر من المنفعة المتوقعة لاحتمال r لكل خيار ممكن من المنفعة المتوقعة المتزايدة (التي لها $u(x_1) < u(x_2) < \dots < u(x_n)$). إذا q تهيمن عشوائيا على r. وسوف نوضح كيفية إثبات هذه النتيجة في القسم الفرعي التالي. في بعض الأحيان يتم استخدام هذه الخاصية (من الهيمنة لأي دالة منفعة متزايدة) كتعريف للهيمنة العشوائية.

وإلى جانب إثبات هذه النتائج، يقدم القسم التالي أيضا نوع ثان من الهيمنة العشوائية

- يسمى الهيمنة العشوائية الثانية. ويمكن تعريف ذلك بالقول إن المتغير العشوائي X من الدرجة الثانية يسيطر عشوائيا على Y إذا كان $E(u(X)) \geq E(u(Y))$ لكل دالة فائدة مقعرة متزايدة u (أي عندما يكون صانع القرار غير مقبل على المخاطرة). وكما سنبين لاحقا، فإن الشرط لتحقيق الهيمنة العشوائية الثانية هو أضعف من تحقيق الهيمنة العشوائية ('الدرجة الأولى'). بدلا من الحاجة إلى $F_Y(x) \geq F_X(x)$ لكل x ، نحن بحاجة

$$\int_a^x F_X(z)dz \leq \int_a^x F_Y(z)dz, \text{ for every } x,$$

حيث a هو الحد الأدنى للتوزيع. لذلك نقارن تكاملات دوال التوزيع التراكمي بدلا من دوال التوزيع التراكمي نفسها.

1-3-5 المزيد من التفاصيل حول الهيمنة العشوائية

سنعمل مع المتغيرات العشوائية بدلا من الإمكانيات. ثم ذكر النتيجة كما يلي

نظرية 3-5: للمتغيرات العشوائية X و Y ، كلاً منهما يحمل قيمة في نطاق لا نهائي $[a, b]$ شرط الهيمنة العشوائية سيكون:

$$F_X(x) \leq F_Y(x) \text{ for all } x \in [a, b],$$

يكون قائم إذا وإذا فقط

$$E(u(X)) \geq E(u(Y))$$

لكل الدوال المتزايدة u

الدليل

سوف نتقل إلى المتغير العشوائي المستمر، حيث تكون أسرع طريقة لإثبات هذه النتيجة من خلال استخدام التكامل الجزئي، مثال نستخدم حقيقة أن

$$\int_a^b g(x)h'(x)dx = [g(x)h(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)h(x)dx.$$

وبالتالي، فإننا نفترض أن مشتق u موجود وهناك كثافات محددة F_X و F_Y . والنتيجة تكون
عمومية، ويمكن تمديد الأدلة التوضيحية التي نقدمها إلى هذه الحالات الأخرى (على
سبيل المثال عندما تكون X و Y منفصلتين). باستخدام التكامل من خلال الأجزاء التي
لدينا

$$\begin{aligned} E(u(X)) - E(u(Y)) &= \int_a^b u(x) f_X(x) dx - \int_a^b u(x) f_Y(x) dx \\ &= \int_a^b u(x) (f_X(x) - f_Y(x)) dx \\ &= [u(x)(F_X(x) - F_Y(x))]_a^b - \int_a^b u'(x)(F_X(x) - F_Y(x)) dx \\ &= - \int_a^b u'(x)(F_X(x) - F_Y(x)) dx. \end{aligned} \quad (6-5)$$

استخدمنا هنا حقيقة أن $F_X(a) = F_Y(a) = 0$ و $F_X(b) = F_Y(b) = 1$.

الآن افترض أن $F_X(x) \leq F_Y(x)$ على مدار النطاق $[a, b]$ و $u'(x) \geq 0$.

ثم التكامل في المعادلة (6-5) تكون غير سلبية كما هو الحال مع $E(u(X)) \geq E(u(Y))$.

لكي نظهر ما نريده في الاتجاه الآخر، نفترض أن $F_X(c) > F_Y(c)$ بالاستمرار
بهذا الافتراض بأن الدوال موجودة، فإن دوال التوزيع التراكمي تتواجد أيضًا، ولهذا
سيكون هناك نطاق صغير $c - \delta$ to $c + \delta$ ؛ فيه تكون F_X أكبر من F_Y . على وجه التحديد
نفترض أن $F_X - F_Y > \varepsilon > 0$ على هذا النطاق. الآن ضع في اعتبارك دالة المنفعة المعرفة
لكي تكون $u'(x) = \varepsilon / (b - a)$ مستثناه من النطاق $c - \delta$ إلى $c + \delta$ حيث تكون $u'(x)$
 $1/\delta$ = . بعبارة أخرى، دالة المنفعة تكون مستقرة في الأغلب حينما تكون F_X أكبر من F_Y
حيث ترتفع دالة المنفعة بقوة. إذاً

$$\begin{aligned} E(u(X)) - E(u(Y)) &= \int_a^b u'(x)(F_Y(x) - F_X(x)) dx \\ &\leq \int_a^{c-\delta} u'(x) dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} u'(x)(-\varepsilon) dx + \int_{c+\delta}^b u'(x) dx \\ &\leq \varepsilon - (2\delta) \frac{\varepsilon}{\delta} < 0. \end{aligned}$$

وهكذا، فقد أظهرنا أنه كلما كان هناك نقطة تكون فيها F_X أكبر من F_Y ، يمكننا أن نجد دالة المنفعة التي تجعل Y مفضلة عن X .

الآن ننتقل إلى النتيجة الثانية للهيمنة العشوائية التي توازي نظرية 3-5 ولكنها تنطبق على دالة المنفعة المقعرة. تماما كما في نظرية 3-5، وسنقدم نسخة مستمرة منها، ولكن تكون النتيجة صحيحة أيضا لمتغير عشوائي منفصل.

النظرية 4-5: بالنسبة للمتغيرين العشوائيين X و Y ، فكلاهما يحملان قيم في نطاق محدود $[a, b]$ ، حالة الهيمنة العشوائية الثانية تكون:

$$\int_a^x F_X(z)dz \leq \int_a^x F_Y(z)dz \text{ for all } x \in [a, b], \quad (7-5)$$

تكون قائمة إذا وإذا فقط

$$E(u(X)) \geq E(u(Y))$$

لجميع دوال المنفعة المقعرة المتزايدة u

الدليل

سوف نستخدم التكامل الجزئي مرة أخرى لإثبات هذه النتيجة. نكتب $F \sim (X)$ لتكامل F . ولهذا

$$\tilde{F}_X(x) = \int_a^x F_X(z)dz, \text{ and } \tilde{F}_Y(x) = \int_a^x F_Y(z)dz.$$

ثم، التكامل الجزئي للمعادلة (6-5) يعطي:

$$\begin{aligned} E(u(X)) - E(u(Y)) &= \int_a^b u'(x)(F_Y(x) - F_X(x))dx \\ &= [u'(x)(\tilde{F}_Y(x) - \tilde{F}_X(x))]_a^b - \int_a^b u''(x)(\tilde{F}_Y(x) - \tilde{F}_X(x))dx. \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_X(a) = \tilde{F}_Y(a) = 0,$$

$$E(u(X)) - E(u(Y)) = u'(b)(\tilde{F}_Y(b) - \tilde{F}_X(b)) - \int_a^b u''(x)(\tilde{F}_Y(x) - \tilde{F}_X(x))dx \quad (8-5)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_Y(x) \geq \bar{F}_X(x) \quad u''(x) < 0 : \quad x \in [a, b] \quad (b) \geq 0, \\ E(u(X)) \geq E(u(Y)). \end{aligned}$$

لإثبات النتيجة في الاتجاه الآخر، نفترض أن $\bar{F}_X(c) > \bar{F}_Y(c)$ على C . ثم يمكننا إيجاد $\delta > 0$ ، ε مع $\bar{F}_X(x) - \bar{F}_Y(x) > \varepsilon$ ، $x \in (c - \delta, c + \delta)$. الآن قم ببناء دالة المنفعة u مع

$$\begin{aligned} u(x) &= x, \text{ for } a \leq x < c - \delta, \\ u(x) &= x - (x - c + \delta)^2 / (4\delta), \text{ for } c - \delta \leq x < c + \delta, \\ u(x) &= c, \text{ for } c + \delta \leq x \leq b. \end{aligned}$$

مع هذا الاختيار لـ u يكون المشتق مستمر، وله

$$u'(x) = 1 \quad \text{لـ} \quad x \leq c - \delta, \quad u'(x) = 0 \quad \text{لـ} \quad x \geq c + \delta \quad \text{و} \quad u'$$

برسم خطي منخفض من 1 إلى 0 في النطاق $(c - \delta, c + \delta)$. ولهذا، يكون u'' سلبي على $(c - \delta, c + \delta)$ وصفر خارج النطاق.

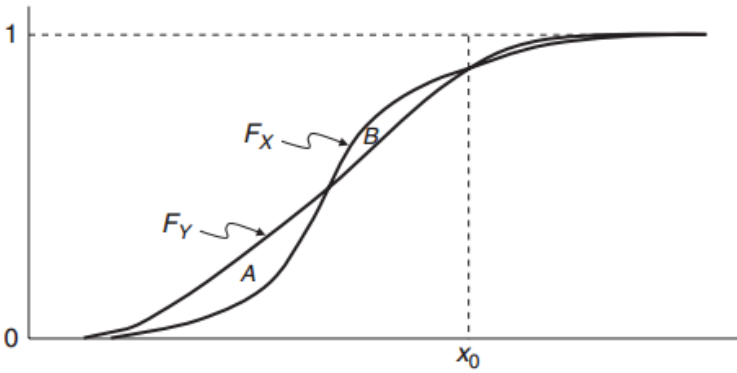
ولهذا، بما أن $u'(b) = 0$ يكون لدينا من المعادلة (8-5).

$$\begin{aligned} E(u(X)) - E(u(Y)) &= \int_{c-\delta}^{c+\delta} (-u''(x))(\bar{F}_Y(x) - \bar{F}_X(x))dx \\ &\leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} (-u''(x))(-\varepsilon)dx \\ &= \varepsilon(u'(c + \delta) - u'(c - \delta)) \\ &= -\varepsilon \end{aligned}$$

والمتغير العشوائي y له منفعة متوقعة أعلى من X .

إذا كان X المهين الثاني عشوائياً على Y ، إذاً الشرط في (7-5) يعني أن F_X يبدأ بكونه أقل F_Y . بالنسبة للهيمنة العشوائية العادية (التي تسمى أحياناً الهيمنة العشوائية الأولى)، يظل F_X أقل من F_Y . ولكن مع الهيمنة العشوائية الثانية، يمكن أن يصبح F_X أعلى من F_Y ،

بشرط أن يبقى التكامل جزءاً لا يتجزأ من F_Y . وبعبارة أخرى، المنطقة تحت الرسم البياني من F_X تصل إلى نقطة x_0 أقل من المنطقة تحت الرسم البياني لـ F_Y حتى نفس النقطة x_0 . ويمكن النظر إلى هذا على أنه بيان حول ما يحدث لنطاق المنطقة بين الرسمين من F_X وفي F_Y ويتضح الوضع في الشكل 9-5. في هذا الرسم البياني، المنطقة المظللة A أكبر من المنطقة المظللة (B) . ليس من الصعب أن نرى أن $A - B$ تساوي $\bar{F}_Y(x_0) - \bar{F}_X(x_0)$ (نقطة التقاطع الثانية) وأكبر من ذلك بالنسبة إلى x_0 على جانبي x_0 . وهكذا، مع دالة التوزيع التراكمي المبينة في الرسم التخطيطي، المتغير العشوائي X الترتيب الثاني X يهيمن عشوائياً Y .

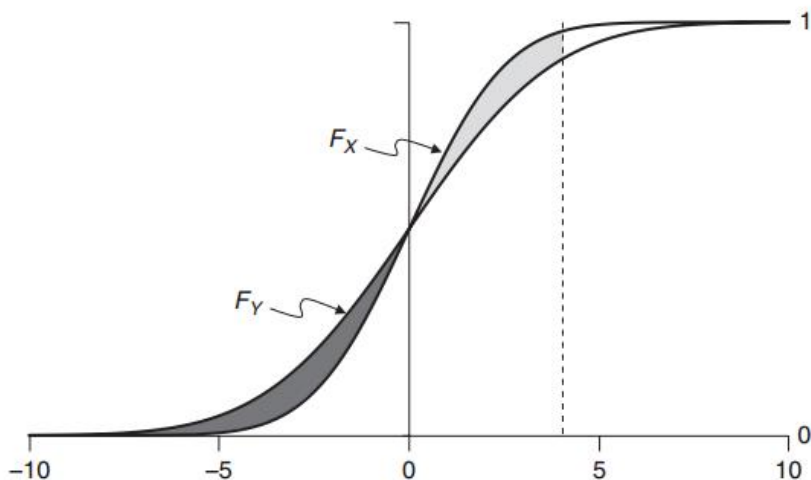


الشكل 9-5: التوزيع التراكمي لـ X المهيمن الثاني العشوائي للتوزيع التراكمي لـ Y .

وأخيراً... سوف نبين أنه بالنسبة للتوزيع المتماثل حول متوسطه (مثل التوزيع الطبيعي)، فإن عملية تقلص التوزيع قرب المتوسط سوف ينتج متغيراً عشوائياً يهيمن على الأول عشوائياً في الترتيب الثاني. ولتحقيق ذلك، نستفيد من الرسم البياني المبين في الشكل 10-5. في هذا الشكل، التوزيع التراكمي لـ F_X هو لمتغير عشوائي X مع توزيع طبيعي (متوسط 0 وانحراف معياري 2)، بينما F_Y لمتغير عشوائي Y له توزيع طبيعي مع انحراف معياري أكبر (3 في هذه الحالة) ولكن نفس النهج يظل قائماً بغض النظر عن التوزيع المتماثل

المستخدم. التماثل يوضح أن المنطقة المظللة على يمين المحور لديها مساحة أصغر من المنطقة المظللة المظلمة على يسار المحور. وعلاوة على ذلك، لا يزال هذا صحيحا بغض النظر عن أين يتم رسم خط عمودي متقطع (بعيدا بما فيه الكفاية إلى اليمين والمجالين كما هما). وهذا يكفي لإظهار، باستخدام نهج الشكل 5-9، أن X تهمين عشوائياً من الترتيب الثاني على Y .

إن عملية التقلص نحو المتوسط سوف تنتج، في الحد الأقصى، كتلة واحدة في المتوسط، ونحن نعلم بالفعل أن هذا سيكون المفضل للتوزيع الأصلي من قبل صانع القرار الذي يعزف عن المخاطرة (أي اليقين من الحصول نتيجة متوسط هي إمكانية يكون فيه الهيمنة العشوائية الثاني على الإمكانية الأصلية).



الشكل 5-10: التوزيع الطبيعي بتباين أقل هو مهيمن عشوائي ثاني.

4-5 قرارات المخاطرة للمدراء

ركزت العديد من الأمثلة التي قدمناها في هذا الفصل على الشخص الذي يختار خيارا له يؤثر عليهم فقط. نتقل الآن إلى القرارات التي تتخذها الشركات وعلى وجه التحديد مديري

أو مجالس تلك الشركات. بداية من التساؤل عما ستبدو عليه دالة المنفعة بالنسبة لقرارات الأعمال بدلا من القرارات الشخصية. نتيجة فون نيومان مورجنسترن تشير إلى أنه يجب أن يكون هناك دالة منفعة أساسية، ولكن ما هي؟ هناك عدد من النقاط التي ينبغي النظر فيها.

1-4-5 المدراء والمساهمين

نحن بحاجة إلى البدء بالتفكير في من الذي يتخذ القرارات وما الأهداف التي يسعون إلى تحقيقها. من المعتاد أن نفكر في الإدارة باعتبارها تعمل لصالح المساهمين، الذين هم أصحاب الشركة، ولكن في الواقع لدينا أنظمة معقدة من حوكمة الشركات مع مجلس إدارة مسؤول عن التوظيف ومراقبة الإدارة العليا في لحماية مصالح المساهمين.

معظم المساهمين لديهم الفرصة لتنويع حياتهم عبر شركات متعددة. هناك استثناءات لذلك عندما يرغب المساهمون في الحفاظ على السيطرة أو التأثير من خلال الاحتفاظ بجزء كبير من الأسهم، على سبيل المثال في الشركات التي تسيطر عليها مصالح الأسرة. غير أن معظم الأسهم تكون مملوكة عادة للمؤسسات أو للمستثمرين الأفراد الذين يتمتعون بتنوع جيد ومن ثم يشهدون تغيرات نسبية طفيفة في ثرواتهم الإجمالية من التغيرات التي تحدث في قيمة شركة بعينها. من هذا يمكننا أن نستنتج أن المساهمين سوف يكونون محيادين من حيث المخاطر في نظرهم من أعمال شركة فردية.

لمعرفة السبب في ذلك، ننظر في شركة يمكن أن تدفع \$K مليون لاتخاذ إجراءات محفوفة بالمخاطر التي توفر إما لا شيء أو مليون دولار، كل خيار له احتمالية 0.5. إذا كان المساهم بنسبة δ من أسهم الشركة يمكن أن يتخذ القرار بشأن القيمة العادلة لـ k ، عندئذ يجب على المساهم بالثروة الحالية W ودالة المنفعة u أن يقارن $u(W)$ (المدير لا يقوم بشيء) مع $0.5u(W - \delta k) + 0.5u(W + \delta(1 - k))$ (مدير يأخذ قرارات محفوفة بالمخاطر). ويحتاج المساهم الذي يعمل على أساس المنفعة المتوقعة أن يقوم المدير بالمخاطرة من خلال

$$0.5u(W - \delta k) + 0.5u(W + \delta(1 - k)) > u(W).$$

ولكن لصغر δ يمكننا تقريب الجانب الأيسر لهذا التعبير من خلال استخدام المشتق لـ u عند W (والذي نكتبه كـ $u'(W)$) للحصول على

$$0.5u(W) - 0.5\delta ku'(W) + 0.5u(W) + 0.5\delta(1 - k)u'(W) \\ = u(W) + 0.5\delta(1 - 2k)u'(W).$$

وبالتالي، أي k أقل من 0.5 يعد استثمار جدير بالاهتمام من وجهة نظر المساهمين، ولكن ليس مجدي إذا كان k أكبر من 0.5. في نهاية المطاف نجد أن القيمة حيادية للمخاطرة بالنسبة لهذا الاستثمار.

وعلى صعيد آخر، علينا أن نلاحظ أن هذه الحجة لا ينبغي النظر إليها على أنها تشير إلى أن المستثمرين غير مباينين تماما للمخاطر. يقوم نموذج (تسعير الأصول الرأسمالية) باستكشاف كيف يمكن لمكون في تباين أصل ألا يتم تنويعه (قيمة β أو مخاطر نظامية) ينعكس على سعر الأصل. ولكن نوع القرار الإداري الذي نناقشه هنا والذي هو أيضًا خاص بهذه الشركة بالذات، قد لا يظهر في β .

ولكن إذا كان التنويع يجعل المساهمين محايدين للمخاطرة، نفس الشيء لا يمكن أن ينطبق على المديرين. يلتزم مدير الشركة بقواعد لا تنطبق على المستثمر، ويرتبط نجاح مهنة المدير بأداء الشركة. وعلاوة على ذلك، يمكن للمدير الأقدم الاحتفاظ بعقود الأسهم التي تعطي له أيضًا مصلحة مباشرة في سعر سهم الشركة. ومن المتوقع أن يؤدي ذلك إلى سلوك منفوذ للمخاطر من جانب المدير، وهذا يختلف عن السلوك المحايد للمخاطر الذي يفضلوه المستثمرون. لذلك هناك مشكلة محتملة للوكالة حيث أن المديرين الذين يعملون، من الناحية النظرية، بوصفهم وكلاء لأصحابها، يخضعون في الواقع لحوافز مختلفة.

2-4-5 وجهة نظر شركة من نطاق واسع حول المخاطرة

في كثير من الحالات يكون من المناسب النظر إلى الشركة ككيان واحد. وربما يرتبط هذا بنوع من الخيال القانوني للشركة باعتبارها فرد. ولكن من الناحية العملية من الواضح أنه سيكون هناك اختلافات بين نوع الإجراءات والخيارات التي يتخذها مدير واحد مقارنة مع

نوع آخر داخل الشركة نفسها. يتوافق ذلك مع مختلف الشخصيات المعنية: قد يكون هناك مدير يعزف عن المخاطرة بطبيعته، في حين يكون زميله في المكتب المجاور هو مقامر بطبيعته. وعندما يحدث ذلك، هناك خطر من عدم الكفاءة، حيث أن أحد المديرين قد يدفع علاوة مخاطر لتحقيق قدر من اليقين، إلا أن ذلك يَنْفي على مستوى الشركة بسبب السلوك الخطر نسبياً للمدير الثاني. نهج دينيس ويذرستون في J.P. مورغان (الذي تم مناقشته في بداية الفصل الثالث) يحاول جلب الشركة بأكملها تحت مظلة واحدة من المخاطر. ويمكن الدافع نفسه وراء الفكرة القائلة بأن الشركات بحاجة إلى تحديد الرغبة في المخاطرة المناسبة للشركة ككل (واحدة من مبادئ إدارة المخاطر المؤسسية)، مما يعني أنه يمكن مناقشة نهج مشترك للمخاطر والموافقة عليه في فريق الإدارة العليا. ولكن من الناحية العملية، ليس من السهل الحصول على نهج موحد للمخاطر للشركة بأكملها.

وتكمن أحد المشاكل في أنه إذا أردنا أن يكون هناك مستوى موحد لشهية المخاطرة للشركة ككل هي أنه إذا كان مستويات شهية المخاطرة مرتبطة بشكل دالة بالمنفعة، فقد تعتمد حينها على عوامل مثل حجم الرهان والاحتياطي النقدي الحالي للشركة. هذا يفسر أسباب صعوبة إعطاء تعريف مبسط لشهية المخاطرة: لا يمكن النظر إليها كنقطة على مقياس تتحرك من العزوف عن المخاطرة إلى الإقبال على المخاطرة.

في الفصل الأول علقنا على الطريقة التي استخدمت في عمليات التداول في أوقات مختلفة من المخاطر بأكثر من المكتب الخلفي، ومن الشائع أن يكون هناك مستويات مختلفة مفضلة من المخاطرة بشكل هرمي أو بأقسام مختلفة. على مستوى ما يمكن أن يعزى هذا ليس فقط إلى مختلف تفضيلات المخاطر الفردية (كما نرى في كاريكاتير يمثل المتداول كونه شاب يعيش حياته بوتيرة سريعة والأدريين الذين يجري في عروقه بملايين الدولارات تعتمد على قرارات مستمرة) ولكن أيضاً إلى الاختلافات في هياكل المكافأة، إما بشكل صريح من خلال العلاوات أو ضمناً من خلال ما يتم تقييمه ضمن ثقافة فريق العمل.

كل هذا سيجعلنا نخشى من تحديد مستوى واحد من الرغبة في المخاطرة للشركة ككل. ونادراً ما يكون الأمر بسيطاً. إن التعقيدات التي تنشأ عند التعامل مع هذه المسألة

تجعل النهج "السريع وغير الدقيق" لقياس القيمة المعرضة للخطر واستخدام هذا على أساس الشركة بأكملها يبدو أكثر جاذبية.

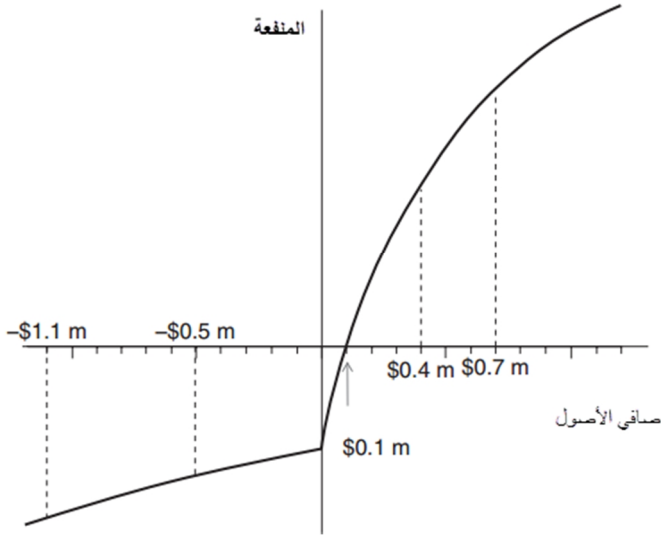
3-4-5 مخاطر الإفلاس

سواء كان المديرون عازفين عن المخاطرة معظم الأحيان، فإنهم سيحققون بالتأكد من خطر الإفلاس. وهذا من شأنه أن يشير إلى أن هناك دالة منفعة مقعرة تنخفض بشكل حاد حيث يصبح خطر إفلاس الشركة يشكل تهديدًا. في الواقع، عندما تدخل الشركة ما يسمى بمنطقة الإفلاس (أي عندما يكون الإفلاس احتمالًا حقيقياً)، فإن المجلس (أو ينبغي له) أن يغير الطريقة التي يتصرف بها وسير العملية التي يتم بها اتخاذ القرار. وقد يشترط قانون الشركات أن يصبح الأفراد في مجلس الإدارة مسؤولين شخصياً إذا فشلت الشركة، ولذلك ليس غريباً أنه إذا كان الإفلاس وشيكاً، فسوف يتصرف المجلس على الفور. أحد جوانب ذلك هو أنه إذا كانت الشركة مفلسة، فإن الدائنين لهم أولوية المطالبة بأصول الشركة أكثر من المساهمين، ولهذا، بالنسبة للشركة التي تقع في منطقة الإفلاس، يجب على أعضاء مجلس الإدارة ألا يتصرفوا بطريقة من شأنها الإضرار بمصالح الدائنين على المساهمين إذا وقع الإفلاس.

ما الذي ستبدو عليه الدالة لمجموع صافي الأصول (الأصول مطروحاً منها الالتزامات) للشركة التي تواجه احتمالية الإفلاس؟ تقترح المناقشات هنا أن دالة المنفعة قد تبدو مثل المنحنى المبين في الشكل 5-11. وبمجرد توقف الشركة عن العمل، فإن درجة الإفلاس (مدى ديون الشركة) ستحدد المبلغ الذي يحصل عليه الدائنون. وسيكون للمديرين بعض الاهتمام في رؤية الدائنين الذين يقدمون صفقة معقولة، ولكن منحدر دالة المنفعة في هذه المنطقة سيكون ثابتاً نسبياً. من النظرة الأولى، دالة المنفعة المبينة في الشكل تشير إلى إمكانية سلوك الإقبال على المخاطرة. ولأخذ مثال مبسط، لنفترض أن الشركة ذات الأصول الصافية الحالية التي تبلغ 100000 دولار فقط إذا سمح لها بمواصلة التداول تنتج فرصة بنسبة 10٪ من صافي الأصول إلى 0.5 مليون دولار، وفرصة 70٪ من صافي الأصول المتبقية عند 100000 دولار أمريكي 20٪ فرصة صافي الأصول زيادة إلى 0.4 مليون

دولار. ومن ثم، فإن القيمة المتوقعة لصافي الأصول تظل 100 000 دولار، بما أن

$$0.1(-0.5) + 0.7(0.1) + 0.2(0.4) = 0.1$$



الشكل 11-5: دالة المنفعة

من وجهة نظر المنفعة المتوقعة، فإن نتائج التداول هذه إيجابية (نظراً لسلوك المنفعة الموضح في الشكل 11-5). بما أن $u(0.1) = 0$ ، المنفعة المتوقعة هي

$$0.1u(-0.5) + 0.2u(0.4),$$

نلاحظ أن القيمة تكون إيجابية، لذلك فإن الشركة لديها حافز لمواصلة عملها حتى ولو كان هذا ينطوي على خطر الإفلاس. في الواقع، إذا كانت استراتيجية التداول أكثر مخاطرة يمكن أن يزيد ذلك من حجم المكاسب والخسائر مع ترك القيمة المتوقعة دون تغيير، وقد يكون ذلك مفضلاً. على وجه التحديد، لنفترض أن استراتيجية بمخاطر أعلى تعطي فرصة 10٪ من صافي الأصول للتحرك إلى - 1.1 مليون دولار، فرصة 70٪ من صافي الأصول المتبقية عند \$ 100000 و فرصة 20٪ من صافي الأصول زيادة إلى 0.7 مليون دولار. وبالنظر إلى شكل دالة المنفعة المبينة في الشكل 11-5، من السهل النظر إلى

استراتيجية التداول الأكثر مخاطرة على أنها ذات فائدة أعلى من ذلك بكثير، حيث أن الكسب في المنفعة في الانتقال من 0.4 إلى 0.7 مليون دولار يتجاوز خسائر المنفعة في الانتقال من -0.5 دولار إلى -1.1 مليون دولار ويحدث ذلك مع احتمال أكبر. وعموماً، يمكننا أن نرى أن الزاوية في دالة المنفعة تنتج منطقة من التقارب، وبالتالي سلوك الإقبال على المخاطرة.

غير أنه من الناحية العملية، من غير المرجح أن يحدث السيناريو الموضح أعلاه، لأنه يفترض أن الاستراتيجية الأكثر مخاطرة يمكن أن ينتج عنها صافي عجز أعلى بكثير، في حين أن الشركة يجب أن تتوقف عن التداول بمجرد أن يصبح صافي الأصول صفراً. وعلاوة على ذلك، فإن المديرين قد يتحملوا مخاطر شخصية عالية تكون فيها الاستراتيجية ذات المخاطرة العالية غير ملائمة، ومن ثم يتحملون بعض الالتزامات بشكل شخصي للديون.

ملاحظات

كتاب بيتر "بيرنشتاين" يعطي المزيد من التفاصيل حول تطوير فكرة المنفعة من قبل دانيال برنولي وغيره. أفكار شجرة القرار التي نقدمها هي المعيار الأساسي ويمكن العثور عليها في أي كتاب عن نظرية القرار.

كتاب اسحق جيلبوا يعد كتاب ممتاز بتعمقه الكبير في الأطر المختلفة التي تكمن وراء استخدام نظرية المنفعة المتوقعة ويقدم نظرية القرار في حالات عدم اليقين من قبل. هذا هو الكتاب الذي يعطي مقدمة يمكن الوصول إليها لبعض من الأسس الفلسفية والمفاهيمية المهمة لنظرية القرار. لاحظ، جيلبوا يعطي شكلاً مختلفاً قليلاً من بديهية الاستمرارية في وصف نظرية فون نيومان مورجنسترن. يمكن القول إن هذا افتراض أضعف، ولكن يزيد قليلاً من تعقيد فهم ما يجري.

إن مناقشة دالة المنافع مثل تلك التي تم توضيحها في الشكل 5-6 تعمل كتفسير للتعايش بين القمار في اليانصيب والتأمين (كما تمت مناقشته في المثال العملي 5-3) تعود إلى

بحث كتبه فريدمان وسافاج في عام 1948. ومع ذلك، نقدم تفسير موضح أكثر وأكثر اقناعاً في الفصل الثالث حو نظرية الإمكانيات.

مناقشة نظرية سافاج مستمدة من كتاب جيلبوا. تم تصميم هذه النظرية حول الوضع مع مساحة الحالات (لانهائية مع كل عنصر فردي فارغ). هناك نهج بديلة يحتاج إلى مساحة نتائج غنية، ولكن مساحة الحالات أبسط، ويوضح واكر (2010) هذا التطور.

لقد قدمنا بتقديم أدلة قصيرة على نتائج الهيمنة العشوائية القائمة على افتراض المتغيرات العشوائية المستمرة المحددة على نطاق محدود، ودوال المنفعة المختلفة (انظر بحث هدار وراسيل، 1971 لنهج مماثل). وهو يتطلب المزيد من العمل لإثبات هذه النتائج في شكل أكثر عمومية. شيلدون روس (2011) يغطي بعض هذه المواد في كتابه عن التمويل الرياضي التمهيدي.

ومناقشتنا لقرارات المخاطر وفائدتها على مستوى الشركة هي نظرة مبسطة لموضوع معقد. على سبيل المثال، لم نأخذ في الاعتبار ضرائب الشركات) التي غالبا ما يكون لها أثر في جعل الدخل بعد الضريبة دالة مقعرة للدخل قبل الضريبة (، كما أننا لم نضع في الاعتبار تكاليف معاملة الإفلاس. سميث أند ستولز (1985) يناقشون ذلك بشكل أكثر تفصيلا.

المراجع

- Bernstein, P. (1996) *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*. John Wiley & Sons.
- Friedman, M. and Savage, L. (1948) The utility analysis of choices involving risk. *Journal of Political Economy*, 56, 279–304.
- Gilboa, I. (2009) *Theory of Decision under Uncertainty*. Cambridge University Press.
- Hadar, J. and Russell, W. (1971) Stochastic dominance and diversification. *Journal of Economic Theory*, 3, 288–305.
- Ross, R. (2011) *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*, 3rd edition. Cambridge University Press.
- Smith, C. and Stulz, R. (1985) The determinants of firms' hedging policies. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20, 391–405.
- Wakker, P. (2010) *Prospect Theory for Risk and Ambiguity*. Cambridge University Press.

تمارين

1-5 عرض السعر المناسب

تقوم شركة Xsteel بتقديم عطاءات لتوريد صفائح من الصلب المموج لمشروع بناء رئيسي. ومعلوم أن Yco هو المنافس الوحيد بين مقدمي العطاءات الجادين. هناك متغير سعر واحد وسوف يفوز مقدم العرض الأقل سعرًا، وإذا كان كلا السعرين متساويين سيتم تحديد الفائز بالعطاء على عوامل أخرى، احتمالية فوز Xsteel أو Yco متساوية. وتعتقد شركة Xsteel أن شركة Yco ستقدم عرضاً بقيمة 800 دولار أو 810 دولار أمريكي أو 820 دولاراً أمريكياً أو 830 دولاراً أمريكياً للطن، مع تساوي احتمالات تلك الإمكانيات كافة. تبلغ تكلفة إنتاج Xsteel 790 دولاراً للطن، ولا يمكن تقديم عروض أسعار إلا بمضاعفات 10 دولارات للطن الواحد. ما هو عرض السعر الذي سيعظم ربح Xsteel المتوقع؟

2-5 نظرية المنفعة المتوقعة ومشروع تجاري

جيمس لديه 1000 دولار ويرغب في استثمارهم لمدة عام. يمكن له أن يضع المال في حساب توفير، الذي يدر فائدة بمعدل 4٪. صديقه كيت تطلب منه استثمار المال في مشروع تجاري الذي يكلف 100 دولار بالضبط. ومع ذلك، فإن احتمالية فشل مشروع كيت هي 0.3 وفي حال حدوث ذلك لن يحصل جيمس على شيء. ومن ناحية أخرى، في حال نجاح المشروع ستجني 2000 دولار ويمكن استخدام أرباحها لسداد قرض جيمس. وجدير بالذكر أن فترة سماح سداد القرض هي عام واحد.

(أ) باستخدام نظرية الفائدة المتوقعة وافترض أن جيمس حيادي للمخاطرة، ما هو المبلغ الذي تحتاج كيت سداد جيمس لإقناعه بإقراضها الأموال؟

(ب) افترض أن جيمس شخص لا يقبل على المخاطرة مع دالة منفعة مقعرة $u(x) = \sqrt{x}$. كم المبلغ الذي يتوجب على كيت سدادها في حال نجاح المشروع التجاري من أجل إقناع جيمس بإقراضها المال؟

3-5 حساب المنفعة من الخيارات

يحاول باحث فهم دالة المنفعة من رجل أعمال يملك شركة تبلغ قيمتها مليون دولار. ويقوم بذلك من خلال وصف مختلف المشاريع المحتملة ويسأل المدير عما إذا كانت ستتخذ هذا المشروع بموجب الشروط الموصوفة. من خلال تغيير الاحتمالات المخصصة للنجاح والفشل، يجد ثلاثة مشاريع لا يبالي بها المدير من حيث بدائها أو لا. وترد الاحتمالات على مختلف النتائج في الجدول 3-5.

استخدم هذه المعلومات لتقدير المنافع على مختلف قيم الشركة: 1.5 مليون دولار و 2 مليون دولار و 2.5 مليون دولار على افتراض أن المنفعة على قيمة الشركة 0.5 مليون دولار هي 1، والمنفعة على قيمة الشركة مليون دولار هي 2. (يمكن أن تكون هاتان القيمتان تم تعيينها بشكل عشوائي لأن المنافع يتم تعريفها فقط من الخيارات حتى التحول الخطي الإيجابي: انظر نظرية 1-5). رسم دالة منفعة لرجل الأعمال.

الجدول 3-5: نتائج لمشاريع تجارية مختلفة للتمرين 3-5

النتائج	الاحتمالات			
	خسارة مليون \$0.5	ربح مليون \$0.5	ربح مليون \$1	ربح مليون \$1.5
A المشروع التجاري	0.4	0.6	0	0
B المشروع التجاري	0.6	0	0.4	0
C المشروع التجاري	0.7	0	0	0.3

4-5 الهيمنة العشوائية والإمكانات السلبية

أظهر أنه في حال الإمكانية $(x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n) = A$ تهيمن عشوائياً على
 الإمكانية $(y_1, q_1; y_2, q_2; \dots; y_n, q_n) = B$ إذا الإمكانية $-B = (-y_1, q_1; -y_2, q_2; \dots; -y_n, q_n)$
 $-A = (-x_1, p_1; -x_2, p_2; \dots; -x_n, p_n)$ تهيمن عشوائياً.

5-5 الهيمنة العشوائية والتوزيع الطبيعي

الأرباح من مبيعات المنتج تعتمد على الطلب، الذي يتبع توزيع طبيعي. متوسط الطلب في الأسبوع الأول له توزيع بمتوسط 1000 وانحراف معياري 100. الطلب في الأسبوع الثاني له متوسط 1010.

(أ) افترض أن الانحراف المعياري للطلب في الأسبوع الثاني هو 100. اشرح لماذا يهيمن الربح في الأسبوع الثاني عشوائياً على الربح في الأسبوع الأول، وهذه النتيجة لا تعتمد على العلاقة الدقيقة بين الربح والمبيعات.

(ب) اظهر إذا كان الطلب في الأسبوع الثاني له انحراف معياري 105، إذا الربح في الأسبوع الثاني لن يهيمن عشوائياً على الربح في الأسبوع الأول.

(ج) اظهر إذا كان الطلب في الأسبوع الثاني له انحراف معياري 95، إذا الربح في الأسبوع الثاني لن يهيمن عشوائياً على الربح في الأسبوع الأول.

6-5 فشل الهيمنة عشوائياً

فكر في الاحتمالين التاليين: $q = (100 \text{ دولار}, 0.1 \text{ و } 300 \text{ دولار}, 0.2 \text{ و } 400 \text{ دولار}, 0.2 \text{ و } 700 \text{ دولار}, 0.3 \text{ و } 900 \text{ دولار}, 0.2)$ و $r = (300 \text{ دولار}, 0.3 \text{ و } 500 \text{ دولار}, 0.3 \text{ و } 700 \text{ دولار}, 0.2 \text{ و } 900 \text{ دولار}, 0.1 \text{ و } 1000 \text{ دولار}, 0.1)$. وتبين أن كلاهما لا يهيمن عشوائياً على الآخر وأجد مجموعة من تعيينات المنفعة حيث q مفضل ومجموعة من تعيينات المنفعة حيث r مفضل. يجب أن تفي قيم المنفعة الخاصة بك بشرط أن وجود المزيد من المال يعطي منفعة أعلى.

7-5 الهيمنة العشوائية الثانية (الترتيب الثاني)

بالنظر إلى الاحتمالين الموضحين في تمرين 5-6، اظهر أن r يهيمن عشوائياً من حيث الترتيب الثاني على q .

الفصل السادس

فهم سلوكيات المخاطر

اقتصاديات الضمانات الموسعة

إن المستهلك الذي يشتري إما سلع إلكترونية (مثل التلفزيون أو الكمبيوتر المحمول) أو سلع بيضاء (مثل غسالة) لا بد من تقديم ضمان تمديد له. المصطلح التقني لهذا هو "عقد الخدمة الممتدة" (ESC) هذا العقد سوف يمدد ضمان الشركة المصنعة من ربما عام واحد إلى ثلاثة أعوام من تاريخ الشراء. يدفع المستهلك مبلغ إضافي حتى يتأكد أنه لن يضطر إلى دفع إصلاحات مكلفة. وهذه المبالغ الإضافية ليست صغيرة، فعلى سبيل المثال: يمكن أن يكلف عقد الخدمة الممتدة لجهاز كمبيوتر محمول بتكلفة 600 دولار، 100 دولار كمبلغ إضافي. وتعد هذه تجارة هائلة بقيمة مليارات الدولارات في السنة، ويمكن أن تكون مربحة جدا لتجار التجزئة الذين يتقاضون هامش سخي بالإضافة إلى التكلفة التي يدفعونها لمقدم الضمان. وهناك تقارير تفيد بأن الهوامش يمكن أن تكون 50٪ أو أكثر، وأن تجار التجزئة الذين يبيعون الإلكترونيات يمكن أن يكسبون نصف إجمالي أرباحهم من مبيعات الضمان الممتدة. ويواجه المستهلك قرارا يصعب فيه تقدير الاحتمالات التي ينطوي عليها الأمر كما

يصعب تقدير التكاليف التي يمكن تكبدها. هناك بعض الحالات التي يمكن فيها إصلاح المشكلة بأقل التكاليف ولكن هناك احتمال أن تتلف السلعة بالكامل.

ولكن إذا كان موردين الضمان يجنون مبالغ كبيرة، فسوف تكون فكرة عقد الخدمة الممتدة سيئة على أساس التكلفة المتوقعة. ومع ذلك، فإن نظرية المنافع المتوقعة يمكن أن تفسر ذلك على أنها معاملة تنطوي على مستهلكي لا يريدون أي مخاطر يدفعون مقابل التأمين الذي يقدمه مزود خدمات أكثر محايدة من حيث المخاطر.

يقول الكثير من الخبراء أن شراء عقد الخدمة الممتدة هو خيار سيء من جانب المستهلك. في عام 2006 كان هناك إعلان في صفحة كاملة وضعت في العديد من الصحف من قبل "تقارير المستهلك"، قائلاً ببساطة، "عزيزي المتسوق، على الرغم من ما يقوله مندوب المبيعات، فأنت لا تحتاج إلى الضمان الممتد".

والحجة تقول أنه حتى مع افتراض مستوى مرتفع نسبياً من النفور من المخاطرة من جانب المستهلك، فإنه لا يزال من الصعب تبرير ارتفاع تكلفة عقد الخدمة الممتدة لكثير من المنتجات. وعلى هذا الأساس يمكن للمرء أن يتوقع أن العملاء الذين قد اشتروا ضمانات ممتدة سيكونون غير سعداء، وقد أجري استطلاع رأي في "وارنتي ويك" (نشرة إخبارية إلكترونية للأشخاص العاملين في هذا المجال) في مارس 2012، حيث قاموا بسؤال أولئك الذين اشتروا ضمانات ممتدة في الماضي ما إذا كانوا سيفعلون ذلك مرة أخرى: قال 49٪ "نعم"، وقال 48٪ "ربما، اعتماداً على المنتج والتسعير" و3٪ فقط قال "لا". ويستمر المستهلكون في شراء ضمانات ممتدة ويبدو أنهم سعداء للقيام بذلك.

1-6 لماذا تفشل نظرية القرار

في الفصل السابق ناقشنا نظرية المنفعة المتوقعة وكيف يمكن استخدامها لاتخاذ القرارات في بيئة محفوفة بالمخاطر أو غير مؤكدة. وأظهرنا كيف أن العمل مع المنفعة حسب النتائج وبساطة اتخاذ الخيارات التي تعظم قيمة المنفعة المتوقعة هو نظرية قرار معياري قوية، ويصف الطريقة التي ينبغي للأفراد استخدامها لاتخاذ القرارات. في الواقع، إن قضية نظرية المنافع

المتوقعة لا يمكن تعويضها، ويمكن أن تستمد من البديهيّات التي تبدو معقولة تماما، فهي توفر كل الخصائص المناسبة - مثل تفضيل خيار أن ييمن عشوائيا آخر. كما أنها تمكننا من فهم سلوك البحث عن المخاطر أو تجنب المخاطر اعتمادا على تقعر أو تحدب دالة المنفعة. ومع ذلك، هناك الآن مجموعة كبيرة من الأدلة لإظهار أن نظرية المنافع المتوقعة لا تعمل بشكل جيد في التنبؤ بالخيارات الفعلية التي يتخذها الناس. في الواقع، وكما سنظهر، فإن الأفراد ينحرفون عن نظرية المنافع المتوقعة بطرق متسقة. وأثناء فهم ما قد يكون خاطئا في نظرية المنفعة المتوقعة كمؤشر على الاختيار الفردي، فنحن بحاجة إلى التشكيك في المكونات الفردية لهذه النظرية.

1-1-6 معنى المنفعة

ولعل الفكرة الأساسية في نظرية القرار التي قدمناها هي أنه يتم تعريف المنفعة ببساطة عن طريق النتائج بالنسبة للفرد. هذا يسمح لنا بقول أن A مفضل لـ B ، ويعني بذلك أن A يفضل دائما لـ B . المشكلة هنا أنني قد أتخذ قرار اليوم وقرار آخر غدا. إذن فإن هناك عدم اتساق في قرارات وخيارات الفرد. قد يكون هذا ببساطة لأنني أكثر أو أقل مبالاة تجاه الخيارات المتاحة. ما الحبوب التي أختارها لتناول الإفطار؟ أين اختار الجلوس في القطار؟ إن عدم الاتساق هنا ليس مشكلة حقيقية بالنسبة للنظرية. ولكن ماذا لو لم أكن حائر بين خيارين، ولدي تفضيل واضح تجاه أحدهما؟ فهل هذا يعني أنني سأختار نفس الخيار في مناسبة أخرى؟ ربما لا، ن كل قرار يتم في سياق معين. على سبيل المثال، فإن اختيار شراء منتج أو لا يعتمد على الطريقة التي يتم بها وصف المنتج (علماء النفس يتحدثون عن هذا) وهذا يمكن أن يحدث فرقا - ربما هناك بائع مقنع لهذا المنتج.

وعلاوة على ذلك، فإن القرار الذي أقوم به في هذه المناسبة لا يمكن فصله عن الأشياء الأخرى التي تجري في حياتي: الخوف من أقوم بحادث سيارة أثناء قيادي اليوم سوف يجعلني أكثر ميلا لشراء التأمين على الحياة مما كنت عليه أمس. وهناك مشكلة منفصلة ينبغي أن نتصدى لها وهي الصلة بين فائدة النتيجة والارتياح الذي أشعر به تجاهها. على سبيل المثال، يمكنني توقع أنني سأختار الخيار الذي سيوفر لي أكبر قدر من المتعة، ولكن علينا أن ندلي

بهذا البيان فقط للاعتراف بأنه تبسيط مفرط.

- قد أكون غاضبا وأختار إجراء يفيد صديق أو أحد أفراد العائلة أو المجتمع ككل. لذلك، على الأقل، يمكننا أن نقول أن الارتياح أو الرضى هو أمر معقد ولا تنطوي فقط على ملذاتنا الخاصة.
- قد أؤجل القيام بشيء أعرف أنني سأستمتع به. فمن وجهة نظر القرار الذي أواجهه الآن، فنجان القهوة سيكون جيد ويستحق سعره، ولكنني أعلم أنه يمكنني الاستماع بفنجان القهوة في وقت لاحق من الصباح ولذلك قررت الانتظار. أو ربما أنا أدخر المال من أجل تقاعدي وقررت عدم شراء عطلة مكلفة أردتها لأنها سوف تأخذ كل مدخراتي. جزء من ما يجري في هذه الأمثلة هو أن هناك استمتاع في توقع المتعة.
- قد يتم تحديد الإجراء الذي اخترته من قبل الشخص الذي أتمنى أن أكون عليه وكيف أريد أن يروني الآخرون، على سبيل المثال، أريدهم أن يروني شخص مسئول ومنضبط النفس، وربما مغري أيضاً على الرغم من أنني لن أقوم بشراء سيارة رياضية، الأمر الذي يمثل متعة كبيرة بالنسبة لي.

هذه الملاحظات كلها تثبت أننا لا يمكن ببساطة تحديد فائدة على أساس التمتع الشخصي المباشر.

وبالإضافة إلى هذه التعقيدات، يمكننا ملاحظة أن فائدة النتائج غالباً ما تحدد جزئياً بمقارنة النتائج الأخرى. وهناك ثلاثة جوانب مهمة في هذا الصدد.

- عند تقييم النتيجة، فإننا غالباً ما نقارنها مع النتائج التي يحققها الآخرون. على سبيل المثال، سوف تحكم الموظفة على راتبها ليس فقط من حيث قيمته ولكن أيضاً بمقارنته مع زملائها في العمل وأصدقائها. إذا كان الآخرون أفضل مني ثم سوف أشعر بشعور أسوأ. وكما قال " غور فيدال " " هذا ليس كافياً لتحقيق النجاح، يجب أن يفشل الآخرون "، هذه الفكرة مهمة عندما نفكر في مفهوم باريتو لتحسين النتيجة، حيث تقوم جميع الأطراف بالعمل بنفس مستوى الكفاءة الذي اعتادوا عليه في السابق، وبعض الناس تعمل بشكل أفضل. قد يبدو كما لو أنه يجب أن يكون شيئاً جيداً، ولكن الحياة هي

أكثر تعقيدا. إذا أعطى مدير نصف موظفيه حافزاً قدره 500 دولار بشكل تعسفي، ولا يعطي شيء للنصف الآخر، قد ينتج عنه مفهوم باريتو لتحسين النتيجة للقوى العاملة. لكن بالتأكيد سيكون هناك بعض الناس التعساء. (وتخيل ما يمكن أن يحدث إذا حصل الموظفين المذكور على مكافأة ولم تحصل الإناث على شيء!)

- عند تقييم نتيجة ما، فإننا غالبا ما نقارنها مع ما كانت عليه الأمور من قبل. وهذا يعني أن فائدة النتيجة يكن أن تعتمد على الوضع الذي وصلنا له. يدخل شخصان في كازينو ويقضون الليل في المقامرة: يبدأ شخص بفقدان بعض المال، وبعد ذلك بقليل يفوز به مرة أخرى، ويكسب 500 دولار فوقه، في حين حقق الشخص الآخر بعض النجاحات المبكرة، فقد ربح ربحا قدره 5000 دولار على دفعة واحدة، قبل الاستمرار في المقامرة بشكل أقل نجاحا، وفقدان 90٪ من مكاسبه والانهاء بربح قيمته 500 دولار. ومن ثم فإن الشخص الذي خسر الربح المحتمل بقيمه 5000 دولار وانتهى بربح 500 دولار فقط من المرجح أن يكون أقل رضاءً على النتيجة النهائية.

- عند تقييم النتيجة، فإننا غالبا ما نقارنها مع التوقعات. وبطريقة مشابهة لتلك التي يقارن فيها الناس حالتهم الراهنة مع حالتهم السابقة، فإن توقعات النتائج تلعب دورا أيضاً. الموظف الذي تلقى مكافأة في العام الماضي قدرها 5000 دولار ويتوقع مكافأة مماثلة هذا العام، سوف يشعر بالإحباط إذا حصل على مكافأة مماثلة أكثر من الموظف الذي يتوقع مكافأة بقيمة 2000 دولار وبدلاً من ذلك يحصل على 5000 دولار.

وقد أثبتت مناقشتنا حتى الآن أن الفائدة لا يمكن فهمها دون الأخذ في الاعتبار العديد من العوامل المختلفة: سعادتنا تعتمد على السياق والمقارنة، والقرارات التي نتخذها لا تتمحور حول تحقيق متعتنا بشكل فوري ومباشر. ولكن لا يزال بإمكاننا إنقاذ فكرة أن يكون هناك فائدة محددة لكل نتيجة ممكنة، نحن بحاجة إلى فهم هذه المنفعة على نطاق أوسع. على سبيل المثال، يمكننا القول بأننا نتلقى فائدة عند رؤية أصدقائنا في حال جيد أو الاعتقاد بأن الأشخاص الآخرين يرونا بشكل جيد، أو عند التفكير بأننا عملنا بشكل أفضل من غيرنا، أو عندما نشهد تحسنا في ظروفنا؛ أو عندما يتحقق شيء قريب من توقعاتنا،

وتستنتج نظرية فون نيومان - مورجنسترن فائدة القرارات، وليس العكس. لذلك ليس هناك شيء يقوض بالضرورة هذه النظرية فيما يتعلق بصعوبات بناء الفوائد عند النظر في خصائص النتائج.

2-1-6 العقلانية المقيدة

إذا كنا نعمل بنظرية المنفعة المتوقعة، فإنها تقترح أن يقوم صناع القرار الجيدين (الذين يتخذون خيارات متسقة ومدروسة) باستثمار تقدير كل من منافع النتائج المختلفة والاحتمالات التي قد تحدث. وعندما يتم ذلك، يقوم فرد عقلائي بحساب القيمة المتوقعة من الخيارات المختلفة من أجل اتخاذ قرار فيما بينها.

وعلى الرغم من أننا يمكن أن نبني أمثلة اصطناعية تكون فيها هذه الحسابات سهلة التنفيذ نسبياً، فإن القيام بذلك في الممارسة العملية هو أكثر صعوبة. ففي معظم الحالات هناك نتائج محتملة كافية، حتى أن عمل قائمة تضم كافة هذه النتائج سيكون تحدياً. ناهيك عن تقييم المنافع لهم جميعاً. وما الطرق التي يمكن استخدامها لتقدير احتمالات هذه النتائج؟ وأخيراً، هناك حساب للتوقعات التي يتعين تنفيذها. ولكنه أيضاً لا يتناغم جيداً مع ما نعرفه في الممارسة العملية، حيث أننا نتخذ معظم القرارات دون اللجوء إلى جدول بيانات أو آلة حاسبة.

دعا هربرت سيمون إلى التساؤل عما إذا كنا نستطيع أن نتوقع الكثير من صناع القرار، وأطلق عليها اسم العقلانية المقيدة. ولا يقتصر الأمر على مسألة القدرة الحسابية فحسب، بل أيضاً على ما إذا كان من المرجح تعويض الوقت والنفقات المتكبدة عن طريق اتخاذ قرار نهائي أفضل. ولكن ما البديل لاتخاذ القرارات؟ إذا لم يتم إجراء حساب شامل للمنافع المتوقعة، فإننا بحاجة إلى التحقيق في العمليات العقلية التي تحدث. كان هناك قدر كبير من البحوث الأكاديمية في العمليات التي يستخدمها الناس لاتخاذ القرارات. هناك مجموعة متنوعة من الاستدلالات والتحيزات المختلفة التي يأتي معظمها دون وعي، يصف دانيال كاهنمان نظامين لصنع القرار أو الإدراك، الذي سوف نسميه "المنطق والحدس". يجري التفكير عمداً ويتطلب جهداً، بينما الحدس يحدث تلقائياً ولا يتطلب أي جهد. ففي معظم الأحيان نعمل بشكل حدسي، ويمكننا التحكم في ضبط النفس عندما يتعلق الأمر بالإجراءات والخيارات البديهية.

ويتطلب مكون الاستدلال في القرارات جهداً، ولا توجد فيه سوى قدرة عامة محدودة، ولهذا السبب يمكن وقفه إذا نشأت مهمة أخرى للتفكير. ويشير كاهيمان إلى أن هذا هو ما يحدث عندما يتوقف السائق عن إجراء محادثة من أجل القيام بمناورة صعبة: إن قرارات القيادة تتحرك مؤقتاً من كونها بديهية إلى قرارات تتطلب الاستدلال.

ولكن حتى عندما يتم اتخاذ القرار في إطار منطقي، أيضاً سوف نلاحظ تبسيط الاستدلال والتحيزات، فمثلاً:

- عند مواجهة خيار معقد يشمل العديد من البدائل، يميل صانعو القرار إلى القضاء على بعض الخيارات بسرعة باستخدام كميات صغيرة نسبياً من المعلومات، وفقط عندما يتم تقليل مجموعة الاختيار إلى حجم صغير (ربما اثنين فقط) يحاول صانع القرار المقارنة على أساس جميع المعلومات المتاحة.
- خيارات القرار أو النتائج التي لها قدر أكبر من البروز أو إمكانية الوصول الأكبر ستعطى ترجيحاً أكبر. إن إمكانية الوصول هنا تشير إلى السهولة التي يمكن بها وضع شيء ما في الاعتبار، وقد تحدده التجربة الحديثة أو وصف النتيجة أو الخيار. هذه الدلائل تشير إلى أن تأطير القرار سيكون له تأثير كبير على الاختيار.
- عادة ما يقبل صانعو القرار الصياغة التي تعطى بشكل سلبي نسبياً، ومن غير المرجح أن يقوموا ببناء إطار عملهم الخاص بالتقييم لخيارات مختلفة. وعلى وجه الخصوص، فإن أي خيار يقدم بوصفه الخيار الافتراضي له احتمال أكبر في اختياره.

3-1-6 الخيارات غير المتسقة في ظل عدم اليقين

في مناقشاتنا حتى الآن قمنا بتقليل مجموعة من الظروف التي نتوقع أن نظرية الفائدة المتوقعة ستطبق بها. نحن بحاجة إلى افتراض أن النتائج بسيطة بحيث يمكن تقييم المنافع بسهولة. نحن بحاجة للتأكد من أن يتم اتخاذ القرار من خلال التفكير (وتطبيق الجهد العقلي) بدلاً من القيام بها بطريقة بديهية. أخيراً، يجب أن يكون لدينا ترتيب بسيط واحتمالات محددة جيداً من أجل تجنب القيود المفروضة على العقلانية.

الجدير بالملاحظة أنه حتى في ظل هذه القيود، يمكننا أن نجد أمثلة حيث يتخذ صانعو القرار الخيارات التي لا تتفق مع أي خيار لدالة المنفعة، وبالتالي تظهر انحرافاً عن نظرية المنافع المتوقعة. وقد أدلى "موريس أليس" بأول ملاحظة من هذا القبيل في مقال عام 1953 في "إكونوميترিকা" ('سلوك الرجل العقلاني في حالات محفوفة بالمخاطر - نقد لبديهيات ومفاهيم المدرسة الأمريكية). ويوضح أليس أن مبدأ الاستقلال قد لا يمارس عملياً. أو، بطريقة أخرى، فإن البديهية قد لا تعقد في نظرية وصفية بدلاً من نظرية معيارية لصنع القرار. بعد ذلك نعطي ثلاثة أمثلة من بين العديد من الأمثلة التي يمكن أن تعطى. في كل حالة يطلب من الناس أن يختاروا بين خيارين (أو، يكونوا أكثر دقة ويقولون أي من الخيارين يفضلون أ، يتم عرضه عليهم) ويكون هذا القرار الأول، ثم يطلب من نفس الأفراد أن يختاروا من بين زوج مختلف من الخيارات (القرار الثاني). يتم بناء الخيارات بطريقة تجعل بعض أزواج القرارات غير متناسقة مع أي مجموعة من قيم المنفعة. وتكرر التجارب مع العديد من الأفراد لإظهار نمط ثابت في الطريقة التي يتخذ الناس بها القرارات. وتمثل هذه الأمثلة حالة مقنعة جداً بأن هناك حاجة إلى إيجاد بديل لنظرية المنفعة المتوقعة إذا أردنا أن نقوم بشرح كيفية قيام الأفراد بالاختيار عند مواجهة عدم اليقين.

مثال 6-1: تفضيلات المكاسب المؤكدة: الإصدار الأول

بالنظر في التجارب التالية: طلب من المشاركين في القرار الأول الاختيار بين احتمالين

A1 و B1 على النحو التالي:

A1: كسب 2500 دولار مع احتمال 0.33 كسب 2400 دولار مع احتمال 0.66

صفر مع احتمال 0.01

B1: كسب 2400 دولار مع اليقين.

وتبين التجربة أن أكثر من 80٪ من الناس يختارون B1. ومع افتراضات نظرية المنفعة المتوقعة يمكننا تحويل هذا إلى بيان حول منافع مختلف المبالغ المعنية. ونستنتج أنه بالنسبة لمعظم الناس:

$$u(2400) > 0.33u(2500) + 0.66u(2400)$$

حيث يمكننا أن افترض أن: $u(0)=0$. ويمكن تبسيط ذلك في:

$$0.34u(2400) > 0.33u(2500).$$

في القرار الثاني طلب من المشاركين الاختيار بين احتمالين C1 و D1 على النحو التالي:

C1: كسب 2500 دولار مع احتمال 0.33 صفر مع احتمال 0.67

D1: كسب 2400 دولار مع احتمال 0.34 صفر مع احتمال 0.66

وفي هذه الحالة أكثر من 80٪ من الناس اختاروا C1. ولكن، مرة أخرى باستخدام $u(0)=0$ ، فهذا يعني أنه:

$$0.33u(2500) > 0.34u(2400)$$

أي عدم المساواة العكسية الدقيقة التي استخلصناها للتو.

حاول التحقق من اختياراتك الخاصة في هذين القرارين المختلفين. فبالنسبة لمعظم الناس، عدم التناسق لم يغير الخيارات التي كانوا سيتخذونها. بالنسبة لمعظم الناس، وعدم التناسق أشار لهم لا يغير الخيارات التي سيجعلونها. وفي مفارقة أليس، يتم الحصول على احتمالات C1 و D1 من احتمالات A1 و B1 ببساطة عن طريق القضاء على فرصة 0.66 للفوز بـ 2400 دولار من كلا الاحتمالات.

ويؤدي هذا التغيير إلى انخفاض أكبر في الرغبة عندما يتحول الأمر من كسب مؤكد إلى كسب محتمل، بدلا من أن يكون كل من الاحتمالات الأصلية والمخفضة غير مؤكدة. وهناك شيء حول مكاسب B1 يجعلها جذابة بشكل خاص، مما يؤدي إلى انتهاك بديهية الاستقلال. مثال 2-6 تفضيل الكسب المؤكد: الإصدار الثاني يظهر نفس النوع من الظاهرة في التجربتين التاليتين. في القرار الأول يطلب من المشاركين الاختيار بين اثنين من الاحتمالات B2 و B2، وتم وصفها كالتالي:

A2: كسب 4000 دولار مع احتمال 0.8 صفر مع احتمال 0.2

B2: ربح 3000 دولار مع اليقين.

غالبية الناس (80%) اختاروا B2. بالنسبة لهؤلاء الناس يمكننا استنتاج أن $u(4000) > 0.8u(3000)$. وفي القرار الثاني، هناك احتمالان هما:

C2: كسب 4000 دولار مع احتمال 0.2 صفر مع احتمال 0.8

D2: ربح 3000 دولار مع احتمال 0.25 صفر مع احتمال 0.75

اختار غالبية الناس (65%) C2. بالنسبة لهؤلاء الناس يمكننا استنتاج أن $0.25u(3000) < 0.2u(4000)$ وهو عكس عدم المساواة المستمدة من التجربة الأولى. ويعد هذا مثال آخر على الناس الذين يفضلون اليقين. في هذا المثال، اختيار B2 وتفضيلها على A2 هو مثال على النفور من المخاطرة. إذا كان الأفراد محايدين للخطر، ستكون A2 ذات القيمة المتوقعة الأعلى (3200 دولار) هي المفضلة. ويعكس تفضيل اليقين هنا دالة الفائدة المقعرة. وتكمن مشكلة نظرية المنفعة المتوقعة في أن القرارين المختلفين ينطويان على كميات مختلفة من التعر (درجة أكبر من التعر في القرار الأول من القرار الثاني).

مثال 3-6: غير معجب بالخسارة المؤكدة

ويظهر العكس تماماً لهذه النتائج عندما تكون الخسائر متضمنة بدلاً من المكاسب. وفي هذه الحالة، طلب من المشاركين في القرار الأول الاختيار بين الاحتمالين A3 و B3 الموصوفين على النحو التالي:

A3: خسارة 4000 دولار مع احتمال 0.8 صفر مع احتمال 0.2

B3: خسارة 3000 دولار مع اليقين.

اختار الغالبية العظمى من الناس (90%) A3. بالنسبة لهؤلاء الناس يمكننا استنتاج أن $u(-3000) < 0.8u(-4000)$. وفي القرار 2، هناك احتمالان:

C3: خسارة 4000 دولار مع احتمال 0.2 صفر مع احتمال 0.8

D3: خسارة 3000 دولار مع احتمال 0.25 صفر مع احتمال 0.75

ثم اختار غالبية الناس (58%) D3، مما يؤدي إلى عدم المساواة:

$0.25u(-3000) < 0.2u(4000)$. وهو ما يعادل العكس تماما لاستنتاج القرار الأول.

وبما أن الغالبية العظمى من الناس يختارون A_3 ويفضلونه عن B_3 ، على الرغم من أن الخسارة المتوقعة تحت A_3 أكبر (عند 3200 دولار)، يمكننا أن نستنتج أن الناس يسعون للمخاطر من خلال المكاسب السلبية (أي الخسائر)، حيث سيقامرون لإعطاء أنفسهم فرصة لتجنب الخسارة. وهذا يعني وجود دالة فائدة محدبة، والصعوبة في هذا المثال هي أن هناك درجة أكبر من التحذب في القرار الأول أكثر من القرار الثاني.

4-1-6 مشاكل توسيع وظائف المنفعة

مثالنا الأخير على الطريقة التي يمكن أن تفشل به نظرية المنفعة المتوقعة هو مأخوذ من راين وثالر (2001). وهو يبين أن المشاكل تنشأ ما لم نتعامل مع التغيرات في الثروة بدلا من القيم المطلقة. لنفترض أنه عرض عليك المقامرة بفرصة 50٪ للفوز بـ 100 دولار و 50٪ بخسارة 90 دولار. معظم الناس سيرفضون هذا الرهان بصرف النظر عن حجم رصيدهم المصرفي. وبالنسبة لنظرية المنفعة المتوقعة، إذا كانت W هي ثروتهم الحالية، فهذا يعني أنهم يفضلون أن تكون هناك فرص متساوية أن تكون $(W-90)$ أو $(W+100)$. مع دالة الفائدة u ، وهذا يعطينا:

$$u(W) > 0.5u(W - 90) + 0.5u(W + 100).$$

وبالتالي، ضربهم في 2 وإعادة الترتيب:

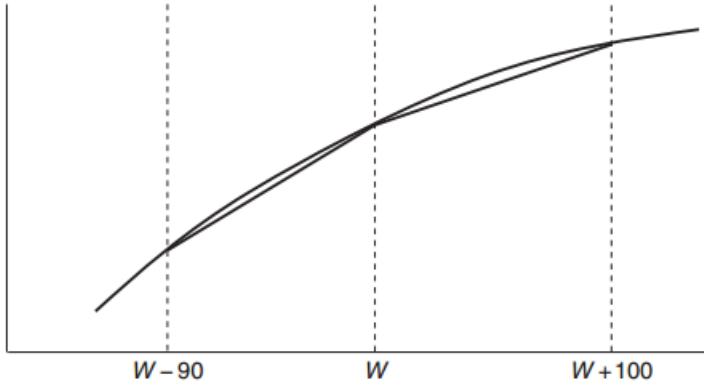
$$u(W) - u(W - 90) > u(W + 100) - u(W). \quad (1-6)$$

وهذا يدل على أن u مقعرة على الفاصل الزمني، ولكن يمكننا أن نكون أكثر تحديدا. ويبين الشكل 1-6 أن مشتق u في $W + 100$ هو أقل من منحدر الخط المستقيم الذي ينضم إلى النقاط على منحنى W و $W + 100$ ، أي:

$$u'(W - 90) > (u(W) - u(W - 90))/90.$$

بنفس الطريقة، مشتق u في $W-90$ هو أكثر من منحدر الخط المستقيم الذي ينضم إلى النقاط على منحنى في $W-90$ و W ، أي:

$$u'(W - 90) > (u(W) - u(W - 90))/90.$$



الشكل 1-6: مقارنة قطاعات الخط المستقيم مع دالة المنفعة.

ويظهر وضع هذه الملاحظات جنباً إلى جنب مع وجود عدم المساواة (1-6) أن:

$$u'(W - 90) > (10/9)u'(W + 100).$$

الآن، وبما أن هذا التفاوت تعسفي، يمكننا استنتاج أن:

$$\begin{aligned} u'(W) &> (10/9)u'(W + 190) \\ &> (10/9)^2 u'(W + 380) \\ &> (10/9)^n u'(W + 190n). \end{aligned}$$

ما حدث هنا هو أننا قمنا بتطبيق التفاوت الناتج عن عدم لعب القمار في نقاط مختلفة على طول المنحنى ثم تجميع أوجه عدم المساواة معا لنقول شيئاً عن الطريقة التي ينخفض فيها الميل على مدى فترة زمنية أطول. عندما $n = 50$ ، فهذا يعطينا:

$$u'(W) > 194u'(W + 9500).$$

إن منحدر دالة المنفعة يجبرنا ببساطة عن قيمة الدولار الإضافي بالنسبة لنا، وبالتالي فإن هذا التفاوت يقول أن قيمة الدولار الإضافي تقل بنحو 200 مرة إذا كنت أكثر ثراء

بقيمة 9500 دولار. هذا لا يبدو قابل للتصديق: فمن المعقول تماماً أن نفترض أن زيادة الثروة تجعل شخص ما يقدر ثروة إضافية أقل، لكن هذا لا يمكن أن يحدث إلى الحد الذي تتوقعه هذه العملية الحسابية. من هذا يمكننا أن نرى أن تطبيق عواقب رفض مقامرة صغيرة بشكل موحد يعطي نتائج تبدو خاطئة عند توسيع نطاقها.

2-6 نظرية الاحتمالات

قد عمل العديد من الباحثين على طرق مختلفة لشرح الانحرافات عن نظرية المنفعة المتوقعة. في هذا الفصل سنصف واحدة من هذه النظريات فقط، تسمى نظرية الاحتمالات، التي وضعتها دانيال كانيمان وأموس تفيرسكي.

هذه النظرية مبنية على العديد من الأفكار التي سبقتها، وحتى لو كان البعض يجادلون بنهج مختلف، فإن المكونات الرئيسة لهذه النظريات متشابهة. لذلك، فإننا لن نفقد الكثير من خلال التركيز على نسخة من نظرية الاحتمالات. علاوة على ذلك، فإن عمل كانيمان وتفيرسكي (الموجز في كتبهم عامي 1979 و1992) هو أهم مساهمة في هذا المجال وحصلوا على جائزة نوبل في عام 2002.

1-2-6 أسس نظرية القرار السلوكي

نظرية الاحتمالات هي مثال على نظرية القرار السلوكي. هذه "النظرية" تعني وجود قوة تنبؤية؛ فهي توضح لنا كيف يتصرف الناس عند مواجهه خيارات مختلفة تنطوي على عدم اليقين. وسنبدأ بثلاث ملاحظات أساسية حول الطريقة التي يتخذ بها الناس القرارات.

1-1-2-6 استخدام نقطة مرجعية

أحد نقاط الضعف في نظرية المنافع المتوقعة هو أنها يجب أن تنطبق على الثروة الإجمالية للفرد وهذا من أجل أن يكون هناك أتساق. ومع ذلك، يبدو أن هناك أدلة قليلة على أن الناس يأخذون في الاعتبار رصيدهم المصرفي أو حقوقهم السكنية عند النظر في القرارات المالية الصغيرة.

ومن الواضح أن هذا المبدأ يعتمد إلى حد ما على الظروف الفردية: عند مواجهة الإفلاس، فبال تأكيد ستكون الثروة المطلقة هي محط الاهتمام. ولكن في السياق الطبيعي للأحداث (مثلا في تحديد ما إذا كان سيتم تقديم عرض الضمان الممتد الذي ينطوي على دفع المال الآن لمزيد من الأمن في المستقبل)، فإن ثروتنا الكلية ليست عاملا كبيرا. بدلا من التفكير في القيمة الإجمالية لجميع أصولهم واستخدام ذلك في حساب المنافع، ميل الناس إلى مقارنة النتائج المحتملة مقابل بعض المعايير في أذهانهم.

لقد قلنا بالفعل أن شعورنا بالنتائج قد يعتمد على مدى نجاحنا بالمقارنة مع الآخرين من حولنا، أو بالمقارنة مع التوقعات التي شكلناها. ولكن عندما يتم اتخاذ القرارات التي قد تنطوي على مكاسب أو خسائر، يصبح الوضع الحالي نقطة الانطلاق العادية. ويركز صناع القرار على التغييرات بدلا من القيم المطلقة.

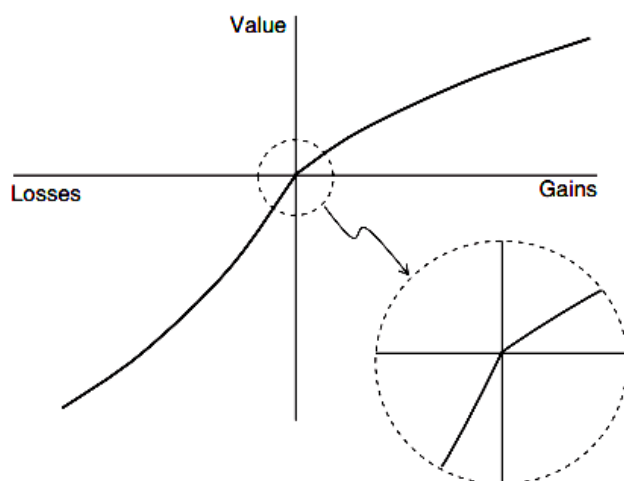
وتعتمد الطريقة التي يتم بها بناء نقطة مرجعية على الظروف الدقيقة للقرار وهناك فرصة لقيادة صانع القرار نحو نقطة مرجعية معينة. وسوف نركز على آفاق بسيطة دون النظر إلى أي من العوامل السياقية التي يمكن أن تدخل في الممارسة العملية. وفي هذه الحالات يكون الموقف الحالي هو النقطة المرجعية، ما لم ننظر في احتمال تنطوي فيه كل نتيجة على مكسب؛ ويبدو أن الاحتمال يتم تقييمه من خلال أخذ أدنى مكاسب معينة واستخدام أدنى مكسب كنقطة مرجعية. وبطريقة مماثلة، عند تقييم احتمال حيث كل نتيجة تنتج خسارة، فإن معظم الناس يأخذون أصغر خسارة كشيء مؤكد وتقييم الاحتمالات الناتجة من تلك النقطة.

2-1-2-6 تجنب الخسائر إن أمكن

وجود نقطة مرجعية يعطي إمكانية وجود سلوك مختلف على جانب واحد من النقطة المرجعية وهذا هو ما نجده بالضبط.

الناس يكرهون الخسائر بطريقة مطلقة أكثر مما يكرهونها بطريقة تتطابق مع مجرد النظر في انخفاض الفائدة كلما انخفضت الثروة. على سبيل المثال، يمكننا أن ننظر إلى المقامرة التي

توجد فيها فرص متساوية في خسارة X أو كسب Y ، ولكي يكون هذا الأمر جذاباً، فإن معظم الناس يريدون كسب حوالي ضعف حجم X . فالتفكير في شروط المنفعة يشير إلى أنه كلما زاد حجم X و Y ، يجب أن يكون صانعو القرارات أكثر ميلاً لقبول المقامرة شريطة أن يكون Y (الكسب) أكبر من X (الخسارة). ولكن في الممارسة العملية، لا يبدو أن هذا يحدث حتى تصبح X و Y صغيرة جداً بحيث تكون غير مادية. وهناك طريقة جيدة لوصف ذلك هي أن دالة القيمة لدى الأفراد مرتبطة بالنقطة المرجعية، كما هو مبين في الشكل 2-6. نحن نستخدم مصطلح "دالة القيمة" هنا لوصف شيء مثل دالة الفائدة ولكنها تحسب حسب النقطة المرجعية (سنوضح هذا بشكل أدق في وقت لاحق). وهذا منطقي لكثير من الملاحظات التي يمكننا أخذها حول سلوك الناس. فعلى سبيل المثال، لوحظ في كثير من الأحيان أن صانعي القرار يبدو أنهم يفضلون الوضع الراهن. أحد التفسيرات هو أنه عند النظر في بديل عن الوضع الراهن هناك عادة احتمال فقدان الثروة بالمقارنة مع الوضع الحالي، فضلاً عن احتمال أن يكون هناك مكسب في الثروة. ثم يعني تأثير النفور من الخسارة أن المكاسب أو احتمال المكاسب، تحتاج إلى أن تكون مرتفعة بشكل غير متناسب من أجل إجراء تغيير جدير بالاهتمام.



الشكل 2-6: شكل دالة القيمة في نظرية الاحتمالات

3-1-2-6 إعطاء قدر كبير من الترجيح للاحتتمالات الصغيرة

معظم الناس لا تفهم خصائص الاحتمالات الصغيرة جدا بشكل جيد، على سبيل المثال، من المحتمل أن يكون لدينا فكرة جيدة عن ما يعنيه مغادرة المنزل في وقت متأخر وخطر فقدان القطار. يمكننا اتخاذ قرارات بسهولة مثل العودة أو عدم العودة لالتقاط مظلة منسية، نظرا لفرصة أن هذا سيجعلنا نفوت القطار.

وهذا هو الخيار مع عدم اليقين (احتمال أن تاطر، احتمال تفويت القطار) ونتائج محتملة مختلفة (أن تبطل؛ التأخر)، ولكن الاحتمالات المعنية ليست صغيرة جدا (مثلا، أكبر من 0.5٪). ولكن عندما نتعامل مع احتمالات أصغر بكثير، فنحن أقل عرضة لاتخاذ أحكام بديهية فعالة.

على سبيل المثال، إذا تذكرنا فجأة أن هناك نافذة خلفية غير مغلقة، هل نرجع لإغلاقها ونخاطر تفويت تفوقت القطار؟ هنا تكون الخسارة المحتملة إذا كانت احتمالية حدوث سطو على المنزل أكبر بكثير من مجرد أن يتل المنزل بالماء. ولكن هذه الاحتمالية صغيرة جدا (محاولة السطو: إذا وجد اللص النافذة المفتوحة، أو كان اللص سيذهب بعيداً إذا كانت كل النوافذ مغلقة) وبطبيعة الحال، سوف نبذل قرارا سريعا (لأن هناك القطار الذي يجب الوصول له في الوقت المحدد) ولكن نوعية هذا القرار قد لا تكون جيدة.

وتبين التجارب أن وجود احتمالا صغيرا أن يكون هناك ربح كبير يعطى قيمة أعلى مما قد نتوقعه. لنفترض أننا قارنت اثنين من اليانصيب: A لديه فرصة واحدة من ضمن 100,000 لكسب الجائزة الكبرى و B لديه فرصة واحدة من ضمن 10,000 لربح نفس الجائزة الكبرى. فمن السهل أن نرى أن تذكرة A قيمتها أكبر من التذكرة B، ولكن الناس لديهم صعوبة في تصور ماذا يعني أن يكون هناك فرصة واحدة من ضمن 100,000، وأن تذاكر A ستكون قيمة في الواقع أكثر من ذلك بكثير. نفس الشيء يحدث في الاتجاه المعاكس في الاحتمالات التي تبلغ قيمتها تقريبا 1. إذن فإن هذا الحدث يقرب من أن يكون مؤكدا.

ويبدو أن احتمالية عدم حدوث هذا الحدث متأصل في أذهان الناس. والنتيجة هي أن

اليقين القريب للمكاسب الكبيرة يبدو أقل جاذبية مما قد نتوقعه. على سبيل المثال، لنفترض أنني عرضت جائزة قدرها 6000 دولار، ما لم يتم رمي 6 مرتين في النرد، (أي يتم تلقي جائزة 6000 دولار مع احتمالية 36/35 ولا يتم تلقي أي شيء مع احتمالية 1/36). ولكن هناك بديل، وهو أن تأخذ جائزة أكيدة قدرها 5000 دولار. نجد أن معظم الناس يختارون الجائزة اليقينية بقيمة 5000 دولار. وذلك لأننا نميل إلى تضخيم الاحتمالية الصغيرة بدلاً من أن لا نربح أي شيء على الإطلاق ونشعر بالحماقة. هذا هو نفس النوع من السلوك الموصوف في المثال 1-6 أعلاه.

2-2-6 أوزان القرار والقيم الذاتية

وضع كانهان وتفرسكي أول إصدار من نظرية الاحتمالات في عام 1979 ثم تم تحديثها في وقت لاحق. سنبدأ بمناقشة "الإصدار الأول" من نظرية الاحتمالات قبل الانتقال إلى الإصدار التراكمي الكامل في القسم التالي. ساسا، يتم بناء نظرية الاحتمالات من الملاحظات الثلاثة أعلاه. وبما أن الناس يميلون باستمرار إلى تضخيم الاحتمالات الصغيرة، فإنه من المنطقي أن نحدد دالة π التي تحول الاحتمالات إلى أوزان القرار. وهكذا، يتم تعريف $\pi(p)$ لـ $0 \leq p \leq 1$ وسوف نفترض أن $\pi(0) = 0$ و $\pi(1) = 1$.

والفكرة هنا هي أنه بدلاً من تشكيل القيمة المتوقعة (أو فائدة) بناء على الاحتمالات، فإننا بدلاً من ذلك نستخدم أوزان القرار التي قدمتها دالة π . نحتاج أيضاً إلى تحديد القيمة الذاتية (x) لكل تغيير في النتيجة (الربح أو الخسارة). نحن هنا نستخدم الثروة الحالية كنقطة مرجعية، ولدينا أيضاً $v(x)$ ، وتشبه القيمة الذاتية دالة الفائدة قليلاً ولكنها تطبق على التغيرات في الثروة، بدلاً من القيم المطلقة للثروة. وفي أبسط حالة، بالنظر في توقع حدوث ربح x مع احتمالية p وتوقع حدوث خسارة y مع احتمالية q .

هنا لا يوجد أي تغيير مع احتمالية $1-p-q$. فنحن نشكل دالة قيمة الاحتمال (بالمقارنة مع النقطة المرجعية لأي تغيير) من خلال استبدال احتمالية الأوزان وفقاً لدالة π لأوزان القرار. واستخدام قيم الأرباح والخسائر الفردية بالطريقة نفسها التي نستخدم بها فوائد النتائج في نظرية المنفعة المتوقعة. وبالتالي نحصل على قيمة الاحتمال:

$$V(x, p; y, q) = \pi(p)v(x) + \pi(q)v(y). \quad (2-6)$$

لاحظ أن $v(0) = 0$ وبالتالي فإنه لا يظهر في التعبير V . ومع ذلك، نحن بحاجة أيضا إلى رصد ملاحظة أنه إذا كانت جميع النتائج عبارة عن أرباح، يتم اعتبار أقل ربح على أنه مؤكد (وبالمثل لجميع الخسائر). وبالتالي، إذا كانت $x > y > 0$ و $p + q = 1$ فإن هذا ينظر له على أنه مكافئ لربح معين y والقيمة الذاتية $v(y)$ والاحتمالية p (مع ترجيح القرار $\pi(p)$)، وعند استبدال أرباح y بأرباح x ، نحصل على:

$$V(x, p; y, q) = v(y) + \pi(p)[v(x) - v(y)]. \quad (3-6)$$

وهذا يختلف عن المعادلة (2-6) ما لم تكون $\pi(1-p) = 1 - \pi(p)$ في هذه الحالة يعتبر التعبيرين متماثلين.

وفي حالة الخسائر تكون الحالة مماثلة، عندما تكون $x < y < 0$

$$V(x, p; y, q) = v(y) + \pi(p)[v(x) - v(y)].$$

إذا كانت أوزان القرار تساوي الاحتمالات، بحيث $\pi(p) = p$ ، وكانت دالة القيمة هي منفعة، فإن هذه التعبيرات ترجع إلى نظرية المنفعة المتوقعة العادية. وتعني نظرية الاحتمالات أن القرارات سوف تكسر القوانين بشكل عام بالنسبة لصانع القرار العقلاني (مع وجود نوع من التناقضات).

في بعض الأحيان إذا كان صانع القرار لديه هذه المفارقات فإنه سوف يعدل تفضيلاته ليتجنب أن تكون غير متناسقة. لكن إذا كان صانع القرار لا يلاحظ أن تفضيلاته تنتهك قواعد القرار المناسبة، فإن المفارقات التي تفرضها نظرية الاحتمالات سوف تحدث. في الواقع، عندما يكون هناك قرار واحد فقط (وليس سلسلة كاملة) وتكون النتائج شخصية بالنسبة لصانع القرار، مع وجود أرباح وخسائر فعلية، فمن غير المرجح أن يكون صانع القرار قلق بشأن انتهاك استقلالية نظرية المنفعة المتوقعة، في هذه الحالة، من المرجح أن يتبع الناس احتمالات نظرية الاحتمالات حتى عندما يأخذون وقتا للنظر في قراراتهم بعناية. لفهم الآثار المترتبة على هذه النظرية بمزيد من التفصيل، نحن بحاجة إلى النظر في دالة v و π .

ولقد رأينا بالفعل في الشكل 6-2 كيف تؤثر دالة القيمة الذاتية v على كثير من الناس. وإحدى الملاحظات التي تظهر من التجارب هي أنه، الاحتمالية المفضلة عن غيرها سوف تكون مفضلة دائما إذا تضاعفت جميع مبالغ الأموال المتضمنة بشكل ثابت. وهذا هو ما يحدث عندما تتبع دالة القيمة الذاتية "قانون السلطة"، أي لدينا:

$$v(x) = \gamma x^\alpha$$

ولبعض γ و α وبما أننا نتوقع أن تكون دالة القيمة مقعرة، فيجب أن تكون $\alpha < 1$. وتطبق هذه الصيغة على x الايجابية ولكن لا يمكن تطبيقها على x السلبية، (على سبيل المثال لا يمكننا أن نأخذ الجذر التربيعي لرقم سلبى). لذلك، عندما تكون X سلبية، فنحن بحاجة إلى إعادة ترتيب هذا للحصول على:

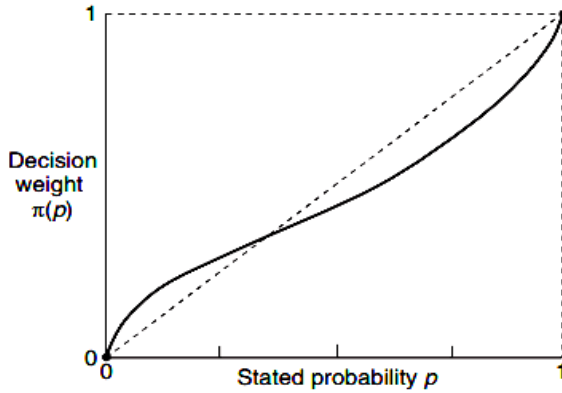
$$v(x) = -\gamma(-x)^\alpha.$$

ويمكننا أيضا أن نسأل كيف تعمل دالة π ، مرة أخرى سيعتمد ذلك على الفرد، ولكن الشكل العام مبين في الشكل 6-3. وقد أجريت العديد من التجارب لفهم ما تبدو عليه هذه الدالة، وهي تشير إلى الكثير من عدم اليقين أو الاختلاف في π في كل من 0 و 1 (حتى الفجوات المحتملة).

وبشكل عام، فإنه يصعب على الأشخاص تقييم الاحتمالات عندما تقترب من الصفر، إما أن يتم تجاهلها، أو أن تعطى الكثير من الترجيح، وفي الغالب يأخذ الأفراد قرارات غير متناسقة من وقت لآخر. ويعكس شكل الدالة الخصائص التي ناقشناها أعلاه. أولا، الاحتمالات الصغيرة نسبيا تكون مفرطة الترجيح.

إذا كنا نعلم أن شيئا ما سيحدث بنسبة 10٪، سوف نتصرف بقدر ما يجب علينا "التصرف تحت نموذج المنفعة إذا كان هذا الحدث من المرجح أن يحدث بنسبة 15٪ أو 20٪ على سبيل المثال) ثانيا، يوجد كثير من الاحتمالات أقل ترجيحاً (التي ترتبط مع تفضيل اليقين الذي سبق أن لاحظنا). فنحن نتعامل مع حالة تحدث بنسبة 99٪، فهي تعتبر مؤكدة الحدوث. وهذا ينطبق أيضاً إذا كانت تحدث بنسبة 95٪. ويمكننا إجراء

بعض الاستقطاعات من شكل الدالات المتضمنة. لاحظ أن كل من دالة القيمة ودالة ترجيح القرار، تعبر من الصفر وتبدو مقعرة في منطقة الجانب الأيمن للصفر. وتكون دالة ترجيح القرار $\pi(p)$ مقعرة في المنطقة تقريبا من صفر إلى 0.3، وتكون دالة القيمة $v(x)$ مقعرة لجميع $x > 0$.



الشكل 3-6: دالة ترجيح القرار النمطية.

وهكذا، بالنسبة إلى $0 < p < q < 0.3$ نعلم أن الخط مستقيم على النقطة $(q, \pi(q))$ يقع تحت المنحنى π وبوجه خاص، أسفل النقطة $(p, \pi(p))$. بالتالي:

$$\pi(p) > \frac{p}{q} \pi(q)$$

وبنفس الطريقة، إذا كانت $0 < x < y$ إذن $v(x) > (x/y)v(y)$. ويمكن أن تكون هذه العلاقات مفيدة في التحقق من أوجه عدم المساواة التي تنطوي على خيارات معينة ستجرى في إطار نظرية الاحتمالات، كما يبين المثال التالي.

المثال العملي 4-6: استخلاص أوجه عدم المساواة في القرارات المتخذة

لنفترض أن دالة القيمة الإيجابية x تعطى بواسطة $v(x) = x^{0.8}$ تبين أن الخيارات التي يتخذها معظم الناس في القرارات الموضحة في المثال 2-6 تتفق مع شكل دالة ترجيح القرار.

الحل

بما أن غالبية الناس اختاروا الربح المؤكد بقيمة 3000 دولار على أن يختاروا ربح 4000 دولار مع احتمالية 0.8، نستنتج أن $(3000, 1.0)$ $\succ$ $(4000, 0.8)$ دولار). وهذا ما يعادل نظرية الاحتمالات حيث هناك تفاوت:

$$v(3000) > \pi(0.8)v(4000).$$

الآن لدينا

$$\frac{v(3000)}{v(4000)} = \left(\frac{3000}{4000}\right)^{0.8} = 0.794$$

بحيث يمكن إعادة كتابة هذا التفاوت هكذا:

$$\pi(0.8) < 0.794.$$

ولكن بالنظر إلى الشكل 3-6، يمكننا أن نرى أن دالة الترتيب $\pi(p)$ أقل من القطر عند $p = 0.8$ وهكذا يبدو أن هذا التفاوت صحيح. وأيضاً يكون في هذا المثال $(4000, 0.2)$ دولار) $\succ$ $(3000, 0.25)$ دولار). من هذا نستنتج أن:

$$\pi(0.2)v(4000) > \pi(0.25)v(3000).$$

وعند استبدال $v(3000)/v(4000)$ نحصل على التفاوت:

$$0.794 < \frac{\pi(0.2)}{\pi(0.25)}. \quad (4-6)$$

ولكن، باستخدام ملاحظتنا السابقة على π كونها مقعرة في المنطقة من 0 إلى 0.25، نعلم أن:

$$\pi(0.2) > \frac{0.2}{0.25}\pi(0.25),$$

وبالتالي:

$$0.8 < \frac{\pi(0.2)}{\pi(0.25)}$$

ما يجعل التفاوت في الشكل (4-6) مؤكدا. لذلك فإن مع دالة القيمة في هذا المثال تكون الخيارات المتخذة هي ما نتوقعه حسب نظرية الاحتمالات.

1-2-2-6 اليانصيب والتأمين

من وجهة نظر نظرية الاحتمالات فإنه من المفيد أن ننظر في مبيعات تذاكر اليانصيب، فكثير من الناس على استعداد لشراء تذاكر في اليانصيب العادل. فإن اليانصيب يعطي فرصة صغيرة للحصول على جائزة كبيرة. أما بالنسبة لربح الشخص الذي يدير اليانصيب فإن القيمة المتوقعة من الأرباح يجب أن تكون أقل من تكلفة التذكرة. ولكن دعونا نعتبر أنه لا توجد أي أموال في اليانصيب من جانب المنظم، فمثلاً، شراء تذكرة بقيمة 5 دولار والحصول فرصة واحدة من ضمن ألف فرصة للفوز بـ 5000 دولار يعادل (5000,0.001 دولار) من سعر التذاكر وهو احتمال (5, 1 دولار) وهذا يعني أن $v(5) > v(5000) \cdot \pi(0.001)$.

ولكن إذا كانت دالة القيمة مقعرة بالنسبة للأرباح، وهو ما نتوقعه، فإن $v(5000) \cdot \pi(0.001) > v(5)$ وعد الجمع بين هذين التفاوتين نحصل على $\pi(0.001) > 0.001$ وبصورة أعم، فإن الرغبة في الانخراط في اليانصيب تدعم الفكرة القائلة بأن $\pi(p) > p$.

لاحظ أنه مع نظرية المنفعة المتوقعة، فإن تفسير الشخص الذي يتناول اليانصيب له علاقة بدالة المنفعة (وهي منطقة يوجد فيها سلوك البحث عن المخاطر). ومن خلال الانتقال إلى نظرية الاحتمالات يمكننا أن نرى أن فإن وجود تفسير بديل أكثر إرضاءً ليس له علاقة بشكل دالة القيمة، فبدلاً من ذلك، فإنه يدور فقط حول الإفراط في ترجيح الاحتمالات الصغيرة جداً، إن التفسير الكامل للسبب الذي يجعل الأفراد غالباً ما يستعدون للمقامرة في اليانصيب ينطوي على عامل آخر مهم، وهو متعة وقع إمكانية الفوز حتى إذا لم يحدث ذلك في النهاية. فإن تذكرة اليانصيب هي عبارة عن شراء أحلام اليقظة وشراء احتمال صغير لربح الجائزة الكبرى.

وتحدث الفكرة الأساسية نفسها مع التأمين. فإن صاحب المنزل المؤمن على ممتلكاته يفضل بشكل أساسي احتمال وجود تكلفة صغيرة مؤكدة عن وجود تكلفة أكبر بكثير

ولكنها ليست أكيدة واحتمال الحصول عليها ضئيل. لذلك يمكننا أن نرى هذا كما يتضح من القول بأن احتمال (-5.1 دولار) هو مفضل عن (-5000,0.001 دولار). وبما أننا نتوقع أن تكون دالة القيمة الذاتية محدبة بالنسبة للخسائر، إذن يمكننا أن نستخدم نفس الفكرة التي ناقشناها في موضوع تذاكر اليانصيب، لإظهار أن هذا أيضاً يعني $\pi(p) > p$. ومرة أخرى هناك تأثير ثان يتعلق بالطريقة التي يشعر بها الفرد على مدى عمر وثيقة التأمين. ويمكن تسميه ذلك "راحة البال": معرفة أنه لدينا وثيقة تأمين فلن يكون هناك داعي للقلق حول إمكانية وقوع كارثة.

3-6 نظرية الاحتمالات التراكمية

تعمل نظرية التوقعات التي قمنا بتطويرها بشكل جيد عندما يكون هناك اثنين فقط من النتائج للاحتتمالات، ولكننا يمكن أن يكون هناك صعوبات إذا كان هناك أكثر من نتيجتين. فقد اتضح في "الإصدار الأول" من نظرية الاحتمالات أنه من الممكن للاحتتمالات المماثلة أن تنتهي بقيم مختلفة جداً. على سبيل المثال، مقارنة الاحتمالات:

AA: (0.05، 100) دولار؛ (0.05، 101) دولار؛ (0.05، 102) دولار؛ (0.05، 103) دولار

BB: (0.2، 103) دولار).

ونتوقع أن تكون BB هي المفضلة لأنها تسيطر بشكل عشوائي على AA. فمهما قلنا عن النفور من المخاطر أو الإفراط في ترجيح الاحتمالات الصغيرة، فإنه من الصعب أن نتصور صانع القرار يختار AA ويفضلها عن BB. إذا جمعنا أوزان القيم مع أوزان القرارات، نحصل على:

$$V(AA) = \pi(0.05)(v(100) + v(101) + v(102) + v(103)) \\ \simeq 4\pi(0.05)v(103).$$

لاحظ أن هناك احتمال 0.8 بأن لا نحصل على شيء، لذلك نحن لسنا في وضع ربح مؤكد لتطبيق المعادلة (3-6). ومع ذلك، بسبب خصائص الدالة المقعرة، نحن نعلم أن $\pi(0.05) > 0.25\pi(0.2)$. وبالتالي $V(AA) > v(103)$. واستخدام الإصدار الأول من نظرية

الاحتمالات يعني أن احتمالية AA لديها قيمة أكبر بكثير من BB، ولإصلاح هذه المشكلة فنحن بحاجة إلى تقديم نظرية الاحتمالات التراكمية. وبإلقاء نظرة سريعة على اثنين من الصفحات التالية يشير إلى أن هذا سيجعل التعبيرات أكثر تعقيداً في كتابتها.

ولكن عندما ننظر لجوهر الإصدار الثاني من نظرية الاحتمالات فسنجدها أقل تعقيداً قليلاً من الإصدار الأول. أولاً نبدأ بتحديد دالتين مختلفتين لترجيح القرار. ستطبق واحدة على النتائج الإيجابية والأخرى على النتائج السلبية. ونحن نسمي دالات ترجيح القرار بـ w و (p) و $w^-(p)$ ويتم تعريفها على الاحتمالات p . وتكون هذه الدالات مشابهة لـ π . ويكون لها نفس الشكل العام لـ π . وسوف نفترض أن $w^-(0) = w^-(1) = 0$ و $w^-(1) = w^-(0) = 0$ و $w^-(1) = w^-(0) = 0$. وسوف نتعامل مع النتائج الإيجابية أولاً. النهج هو أن تجد النتائج المحتملة وتطبيقها على كل ترجيح ناتج عن الزيادة في الدالة w^+ ، إذا كانت $y < x$ ، فإن:

$$V(x, p; y, q) = [w^+(p + q) - w^+(p)]v(y) + w^+(p)v(x).$$

نلاحظ أنه لا يوجد أي خيار لحدوث تغيير في اثنين فقط من النتائج، وبالتالي إذا كانت: $0 < x_1 < x_2$ و $p_1 + p_2 = 1$ ، فإن:

$$\begin{aligned} V &= v(x_1)[w^+(p_1 + p_2) - w^+(p_2)] + v(x_2)w^+(p_2) \\ &= v(x_1) + w^+(p_2)[v(x_2) - v(x_1)], \end{aligned}$$

وذلك باستخدام حقيقة أن $w^+(p_1 + p_2) = w^+(1) = 1$.

وبشكل عام، بالنسبة إلى الاحتمالات التي تكون فيها النتائج صفر أو x_i و $x_n < \dots < x_1$ وهناك احتمال P_i من النتيجة x_i ، فإن:

$$V = \sum \pi_i^+ v(x_i),$$

بالإضافة إلى

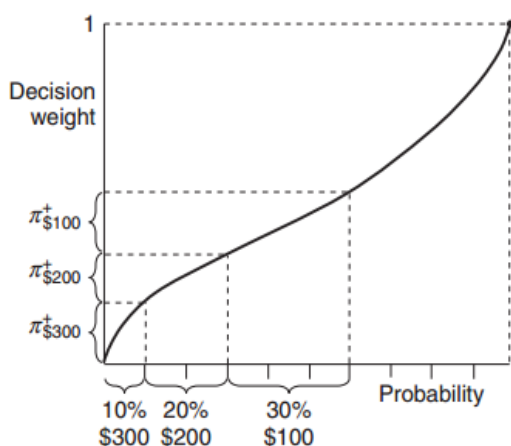
$$\pi_i^+ = w^+(p_i + \dots + p_n) - w^+(p_{i+1} + \dots + p_n)$$

و

$$\pi_n^+ = w^+(p_n).$$

يوضح الشكل 4-6 الطريقة التي يتم بها إجراء هذا الحساب المتراكم لاحتمال وجود احتمال 40٪ لعدم ربح أي شيء، واحتمال 30٪ لربح 100 دولار، واحتمال 20٪ لربح 200 دولار واحتمال 10٪ لربح 300 دولار. وبالتالي، فإن الاحتمال هو (100، 0.3 دولار؛ 200، 0.2 دولار؛ 300، 0.1 دولار). ومن أجل حساب ترجيحات الاحتمالات لكل من النتائج، نقوم بتقسيم محور الاحتمال إلى مناطق مناسبة الطول بدءاً بأعلى ربح قدره 300 دولار، ثم يتم قراءة قيم π^+ من الزيادات في قيم الدالة w^+ . لاحظ أن الترجيح المخصص للنتيجة الأولى 300 دولار هو أعلى نسبياً بالنسبة لاحتمالات الترجيح المخصص للنتيجة الوسطى 100 دولار (تذكر أن أسوأ نتيجة هي صفر).

وهناك أيضاً ترجيح كبير بأن تحدث أسوأ النتائج حتى إذا كان احتمال حدوثها ضئيلاً. وتتبع هذه الحقائق منحدر أعلى من منحنى ترجيح القرار في طرفي الفاصل الزمني. ومن السمات الرئيسة لنظرية الاحتمالات أنها تعطي ترجيحات أعلى للنتائج المتطرفة غير المحتملة نسبياً (إما للأرباح الكبيرة أو الأرباح القريبة من الصفر) وهذا ينطبق أيضاً على الخسائر. وأيضاً تعريفات النتائج السلبية تكون متشابهة. لنفترض أن هناك احتمال نتيجه 0 و $x_1 > \dots > x_n$ وهناك احتمال π_i للنتيجة x_i .



الشكل 4-6: حساب ترجيحات القرار باستخدام الطريقة التراكمية لنظرية الاحتمالات التراكمية.

إذن:

$$V = \sum \pi_i^- v(x_i),$$

$$\pi_i^- = w^-(p_i + \dots + p_n) - w^-(p_{i+1} + \dots + p_n) \text{ and } \pi_n^- = w^-(p_n). \text{ و}$$

إذا كان الاحتمال f يضم كل من النتائج الإيجابية والسلبية، إذن يمكننا تحويل f إلى f^+ مع تغيير جميع العناصر السلبية إلى صفر، ونحول f^- إلى f مع تغيير جميع العناصر الإيجابية إلى صفر. فنحصل على:

$$V(f) = V(f^+) + V(f^-)$$

تذكر أن $v(0) = 0$ وبالتالي فإن نتائج قيمة الصفر الزائد في f^+ و f^- لا تغير قيمة V . يمكن فهم هذا بسهولة من خلال النظر في المثال التالي: إذا كانت نتائج الاحتمال هي: 5 - دولار، 3 - دولار، 1 - دولار، 2 - دولار، 4 - دولار، 6 - دولار، ولكل منها احتمال 1/6. فإن:

$$f^+ = (\$0, 1/2; \$2, 1/6; \$4, 1/6; \$6, 1/6),$$

$$f^- = (-\$5, 1/6; -\$3, 1/6; -\$1, 1/6; \$0, 1/2).$$

فإن:

$$\begin{aligned} V(f) &= v(2)[w^+(1/2) - w^+(1/3)] + v(4)[w^+(1/3) - w^+(1/6)] + v(6)w^+(1/6) \\ &\quad + v(-1)[w^-(1/2) - w^-(1/3)] + v(-3)[w^-(1/3) - w^-(1/6)] \\ &\quad + v(-5)w^-(1/6). \end{aligned}$$

والآن نعود إلى المثال الذي ناقشناه بالأعلى، ستكون قيمة الاحتمال AA هي:

$$\begin{aligned} V(AA) &= v(100)(w^+(0.2) - w^+(0.15)) + v(101)(w^+(0.15) - w^+(0.1)) \\ &\quad + v(102)(w^+(0.1) - w^+(0.05)) + v(103)w^+(0.05). \end{aligned}$$

وهكذا، إذا كانت القيم $v(100)$, $v(101)$, $v(102)$ and $v(103)$ كلها قريبة من بعضها البعض، فإن:

$$\begin{aligned} V(AA) &\simeq v(100)(w^+(0.2) - w^+(0.15) + w^+(0.15) - w^+(0.1) \\ &\quad + w^+(0.1) - w^+(0.05) + w^+(0.05)) \\ &= v(100)w^+(0.2) = V(BB). \end{aligned}$$

لذا فإن قيم هذين الاحتمالين قريبة من بعضها البعض كما توقعنا. في الواقع، يمكننا أن نبين أنه، في إطار هذا الإصدار من نظرية احتمال $V(BB) > V(AA)$ هذا مثال على نتيجة أكثر عمومية أنه إذا كان أحد الاحتمالات يهيمن عشوائياً على الآخر، فيكون له قيمة أعلى حسب نظرية الاحتمالات التراكمية. وسنقوم بتوضيح هذا في القسم التالي.

1-3-6 * مزيد من التفاصيل حول نظرية الاحتمالات

في هذا القسم سوف نستمد اثنين من النتائج المتعلقة نظرية الاحتمالات. أولاً نريد أن نبين أن قانون السلطة لدالة القيمة ذاتية هو السبيل الوحيد لتحقيق مجموعة من التفضيلات التي لا تتأثر بتغيير في وحدات المال. ثانياً، سوف نبين أن نظرية التوقعات التراكمية تضمن أنه عندما يسيطر احتمالاً بشكل عشوائي على احتمال آخر سيكون هو المفضل. لنفرض أن دالة القيمة الذاتية تتبع "قانون القدرة" حيث، $x \geq 1, v(x) = \gamma x^\alpha$ ولبعض γ و $0 < \alpha < 1$ (فنحن بحاجة إلى هذا الشرط لجعل دالة القيمة مقعرة). في هذه الحالة، إذا كنا حائرين بين الاحتمالين (x, p) والاحتمال (y, q) فإن: $\pi(p)v(x) = \pi(q)v(y)$ وبالتالي:

$$\pi(p)\gamma x^\alpha = \pi(q)\gamma y^\alpha.$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\pi(p)v(kx) = \pi(p)\gamma k^\alpha x^\alpha = \pi(q)\gamma k^\alpha y^\alpha = \pi(q)v(ky),$$

مما يدل على أننا ما زلنا حائرين بين هذه الاحتمالات عندما ضاعفنا كلا من النتائج بدالة k ، وعلاوة على ذلك، يمكننا توضيح أن دالة قانون السلطة هي الوحيدة التي لديها هذه الخاصية. لنفترض أن ضرب القيم بمقدار k لا يميز بين احتمالين متكافئين. بالتالي:

$$\pi(p)v(kx) = \pi(q)v(ky) \text{ تعني } \pi(p)v(x) = \pi(q)v(y)$$

وبالتالي:

$$v(kx)/v(x) = v(ky)/v(y). \quad (5-6)$$

القيمة y هنا تعسفية: فبالنسبة لقيم y المختلفة نختار قيم مختلفة لـ q ، حتى نظل حائرين بين (y, q) و (x, p) . لذلك يمكننا كتابة hk لقيمة النسبة في المعادلة (5-6) وتفي $v(x)$ بمعادلة النموذج

$$v(kx) = h_k v(x) \text{ for all } x > 0.$$

الآن نحدد دالة g من خلال:

$$g(w) = \log(v(e^w))$$

(هذا يشبه قليلاً التخطيط للدالة v في ورقة الرسم البياني) لاحظ أنه، لأي k :

$$g(w + \log k) = \log(v(e^w k)) = \log(h_k v(e^w)) = \log(h_k) + g(w),$$

لذلك يجب أن يكون للدالة g ما يمكن أن نسميه خاصية "الزيادة المستمرة": وبعبارة أخرى: $g(x+A) - g(x)$ بالاعتماد فقط على A (وليس على x). وهذا يعني أن g هي دالة خطية. وإذا كانت الدالة g ليس لها منحدر ثابت فإن يمكننا أن نجد النقطة x . والمسافة δ حيث $g(x + \delta) - g(x) \neq \delta$ (فقط) فأخذ $g(x)$ ونضعها مع مشتق ثان غير صفري واختيار δ صغيرة بما فيه الكفاية). ولكن هذا يتعارض مع خاصية مع الزيادة المستمرة لـ g لذا يجب أن تكون g خطية، ويمكننا أن نكتبها هكذا: $g(w) = a + bw$ لبعض الخيارات من a و b .

$$\text{لذلك فإن: } \log(v(e^w)) = a + bw$$

وبالتالي:

$$v(e^w) = e^a (e^w)^b,$$

وهي الصيغة:

$$v(z) = \gamma z^\alpha,$$

في حين أن $\gamma = e^a$ و $\alpha = b$. بالتالي فقد أثبتنا أن دالة قانون السلطة يمكن أن تستخدم باعتبارها دالات القيمة إذا أردنا الحفاظ على ترتيب الاحتمالات عندما تضرب القيم

بمعيار ثابت. الآن ننتقل إلى مسألة الهيمنة العشوائية. وسوف نأخذ فقط احتمالات جميع القيم الإيجابية. $0 < x_1 < \dots < x_n$ ونفرض أنه بالنسبة لاحتمال P ، هناك احتمال P_i من النتيجة x_i ، وبالنسبة لاحتمال Q هناك احتمال q_i من النتيجة x_i ، لنفترض أن P يهيمن على Q بطريقة عشوائية. فإن:

$$\sum_{i=m}^n p_i \geq \sum_{i=m}^n q_i, \text{ for } m = 2, 3, \dots, n \quad (6-6)$$

ونلاحظ تفاوت صارم في m واحدة على الأقل. سنقوم بحساب قيم π_i^+ لـ P والقيم المقابلة لـ Q وسوف نكتبها بهذه الطريقة ρ_i^+ . وبالتالي:

$$\begin{aligned} \pi_i^+ &= w^+(p_i + \dots + p_n) - w^+(p_{i+1} + \dots + p_n), \pi_n^+ = w^+(p_n), \\ \rho_i^+ &= w^+(q_i + \dots + q_n) - w^+(q_{i+1} + \dots + q_n), \rho_n^+ = w^+(q_n). \end{aligned}$$

الآن نريد توضيح أن $V(P) > V(Q)$:

$$\begin{aligned} V(P) &= \sum \pi_i^+ v(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (w^+(p_i + \dots + p_n) - w^+(p_{i+1} + \dots + p_n)) v(x_i) + w^+(p_n) v(x_n) \\ &= v(x_1) + \sum_{i=2}^n w^+(p_i + \dots + p_n) (v(x_i) - v(x_{i-1})) \end{aligned}$$

حيث استخدمنا حقيقة أن $w^+(p_1 + \dots + p_n) = w^+(1) = 1$ وتم تجميع الشروط التي تضم نفس قيم w^+ بنفس الطريقة.

$$V(Q) = v(x_1) + \sum_{i=2}^n w^+(q_i + \dots + q_n) (v(x_i) - v(x_{i-1})).$$

وبسبب حصولنا على x_i ، فنحن نعلم أن $v(x_i) - v(x_{i-1}) > 0$ ، $i = 2, \dots, n$ ، وهكذا، يمكننا أن نستنتج من التفاوت (6-6) أن كل شرط في هذا التوسع لـ $V(P)$ هو أكبر من الشرط المقابل في $V(Q)$ مع وجود تفاوت صارم لشرط واحد على الأقل. وبالتالي تكون $V(P) > V(Q)$ كما أردنا.

2-3-6 تطبيق نظرية الاحتمالات

يشير تفرسكي وكانمان (1992) إلى بعض الأشكال الوظيفية للدالات V و W وتقييم المعلومات لهذه الدالات لمجموعة من المواضيع التجريبية (الطلاب). ويشيرون إلى أن دالة القيمة لكل من الأرباح والخسائر تتبع قانون السلطة، وبالتالي:

$$\begin{aligned} v(x) &= x^\alpha \text{ if } x \geq 0 \\ &= -\lambda(-x)^\beta \text{ if } x < 0. \end{aligned}$$

لاحظ أننا يمكننا التطبيع لذلك ليس هناك حاجة لوجود لمضاعف ثابت لدالة القيمة لـ x الإيجابية. وعلاوة على ذلك، فإن خصائص قانون السلطة تعني أننا لسنا بحاجة إلى تحديد وحدات المال المتضمنة هنا. إن الأشكال الوظيفية التي يقترحها تفرسكي وكانمان لدلائل ترجيح القرار هي:

$$\begin{aligned} w^+(p) &= \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma}}, \\ w^-(p) &= \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{1/\delta}}. \end{aligned}$$

كما يقوم تفرسكي وكانمان أيضاً بتقييم المعلومات المختلفة:

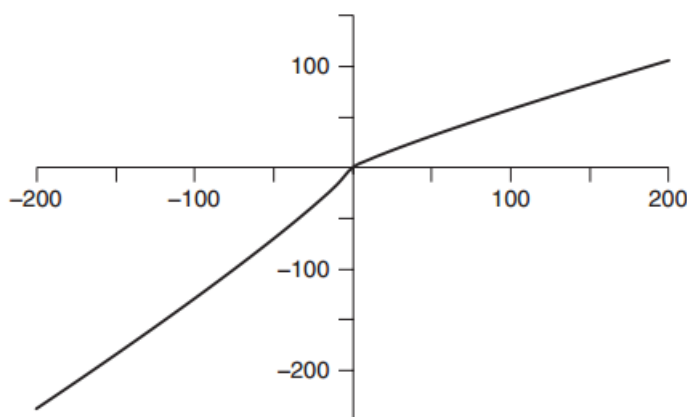
$$\alpha = \beta = 0.88;$$

$$\lambda = 2.25;$$

$$\gamma = 0.61; \delta = 0.69.$$

وسوف ندعو هذه القيم المعلمة المعارف التقليدية. وهي قيم متوسطة يتم الحصول عليها عندما يتم إجراء تقديرات منفصلة لكل موضوع تجريبي فردي. ويبين الشكل 5-6 سلوك دالة القيمة مع معلومات المعارف التقليدية. حيث يمكننا رؤية أن هناك اشتباك عند الصفر، وأن الأس قريب نسبياً من 1، وأن دالة القيمة هي إلى حد كبير خط مستقيم بعيداً عن الأصل. والمثير للدهشة أن مشتق هذا المنحنى عند الصفر هو لانهائي، حيث Z الإيجابية تساوي:

$$v'(z) = \alpha z^{\alpha-1} = 0.88z^{-0.12}$$

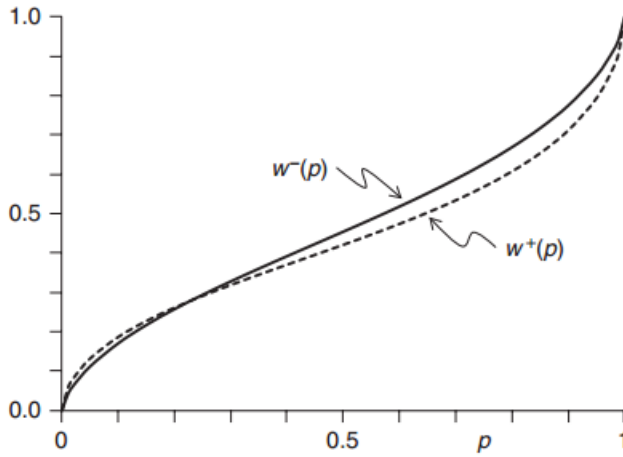


الشكل 5-6: رسم بياني لدالة القيمة الذاتية v .

وبما أن $z \rightarrow 0$ تذهب قيمة $z - 0.12$ إلى ما لا نهاية ومع ذلك، نحن بحاجة إلى اتخاذ القيم الصغيرة لـ z للحصول على قيم كبيرة من المنحدر أن هذا السلوك لا يظهر أبداً على هذا النوع من الرسم البياني (على سبيل المثال لدينا $v'(0.001) = 0.88(0.001)^{-0.12} = 2.02$ و $v'(0.00001) = 3.50$) القيم الواردة ضمن w^+ و w^- وردت في الجدول 1-6 ورسمت في الشكل 6-6. لاحظ أنه على الرغم من أن هذا الجدول يعطي ثلاث خانات عشرية، تنشأ الأعداد من اختيارات البارامترات المقدرة على أساس مجموعة محدودة من القرارات المتخذة في وضع المختبر وينبغي ألا تؤخذ إلا كدليل تقريبي لسلوك أي فرد.

الجدول 1-6: قيم ترجيح القرار المتوسط التي وضعها تفرسكي وكانمان.

p	$w^+(p)$	$w^-(p)$	p	$w^+(p)$	$w^-(p)$
0.05	0.132	0.111	0.55	0.447	0.486
0.10	0.186	0.170	0.60	0.474	0.518
0.15	0.227	0.217	0.65	0.503	0.552
0.20	0.261	0.257	0.70	0.534	0.588
0.25	0.291	0.294	0.75	0.568	0.626
0.30	0.318	0.328	0.80	0.607	0.669
0.35	0.345	0.360	0.85	0.654	0.717
0.40	0.370	0.392	0.90	0.712	0.775
0.45	0.395	0.423	0.95	0.793	0.850
0.50	0.421	0.454	1	1	1



الشكل 6-6: مقارنة معلومات المعارف التقليدية لـ w^+ و w^- باستخدام معلومات المعارف التقليدية.

المثال العملي 5-6: الاختيار بين ثلاثة احتمالات

استخدام نظرية الاحتمالات التراكمية مع قيم معلومات المعارف التقليدية لتحديد أي من الاحتمالات الثلاثة التالية هي الأفضل:

A : (\$100, 0.5; \$200, 0.4; \$300, 0.1),

B : (-\$100, 0.1; \$300, 0.5; \$800, 0.1),

C : (\$150, 1).

الحل

تجتمع كل الأرباح في الاحتمال A، فنحصل على:

$$\begin{aligned}
 V(A) &= (w^+(1) - w^+(0.5))v(100) + (w^+(0.5) - w^+(0.1))v(200) \\
 &\quad + w^+(0.1)v(300) \\
 &= (1 - 0.421) \times 100^{0.88} + (0.421 - 0.186) \times 200^{0.88} + 0.186 \times 300^{0.88} \\
 &= 86.35.
 \end{aligned}$$

بالنسبة إلى الاحتمال B لدينا خسارة واحدة وربحين، فنحصل على:

$$\begin{aligned} V(B) &= w^-(0.1)v(-100) + (w^+(0.6) - w^+(0.1))v(300) + w^+(0.1)v(800) \\ &= 0.170 \times (-2.25) \times 100^{0.88} + (0.474 - 0.186) \times 300^{0.88} \\ &\quad + 0.186 \times 800^{0.88} \\ &= 88.28. \end{aligned}$$

بالنسبة إلى الاحتمال C ليس هناك عدم يقين وببساطة لدينا:

$$V(C) = v(150) = 150^{0.88} = 82.22.$$

وبوجه عام، نرى أن الاحتمال B يحقق أعلى قيمة وأن استخدام هذه البارامترات سيؤدي إلى اختيار الاحتمال B.

3-3-6 لماذا لا توفر نظرية الاحتمالات تنبؤات جيدة دائماً

قد ذكرنا من قبل حقيقة أن هناك العديد من النظريات المتنافسة في هذا المجال. وعلى الرغم من هذا فإن التنبؤات العامة التي تقدمها نظرية الاحتمالات التراكمية هي صحيحة. ولكن بعض جوانب النظرية هي موضوع نقاش كبير. إن المشكلة الأساسية مع نظرية الاحتمالات عند وصف الطريقة التي تتخذ بها القرارات هو أنه يمكن أن يكون من الصعب جداً حساب قيمة الاحتمال، ويبدو من الصعب تصور أن هذه هي الطريقة المثلى التي يتخذها الأفراد عند اتخاذ القرارات (حتى في الحالات التي يتم فيها التفكير بعناية في القرارات المتخذة، حيث يعمل صانع القرار ضمن "المنطق" بدلاً من إطار البديهية).

ومن الأمثلة على تلك الملاحظة التي أجريناها في وقت سابق، أنه عند الاختيار بين الاحتمالات عادة ما تعطي النتائج ذات الوضوح الأعلى ترجيحاً أكبر. إلى حد ما ينعكس هذا في نظرية الاحتمالات من خلال استخدام الثروة الحالية كنقطة مرجعية - التغييرات المتطرفة ستكون أكثر وضوحاً. ولكن من المحتمل أن يكون للجوانب الأخرى للاختيار تأثير على الوضوح.

في "الإصدار الأول" من نظرية الاحتمالات في صحيفة كانمان وتفيرسكي عام 1979، كان هناك دور أكبر للاستدلاليات التي يطبقها صانع القرار من أجل تبسيط القرار الذي ينبغي اتخاذه (على سبيل المثال، القضاء على الخيارات المهيمنة). وفي الإصدار الثاني

لنظرية تم إسقاط خطوات "التعديل" الأولية. لأنها لم تكن ضرورية من خلال استخدام دالة الترجيح التراكمي المرتكزة على الرتبة. وهذا له ميزة كبيرة في جعل الاختيار المتوقع واضح (بمجرد اختيار المعلنات) في حين أن أي نظرية تزيد من التركيز على العمليات التي يستخدمها صانع القرار من المرجح أن تؤدي إلى حالات يكون فيها التنبؤ أقل وضوحاً (على سبيل المثال، اعتماداً على الترتيب الذي يتم فيه تنفيذ بعض عمليات التعديل الأولية). ومع ذلك، فإن الثمن الذي يتعين دفعه هو أن هناك العديد من الحالات التي يبدو فيها أن مغزى نظرية الاحتمالات التراكمية ليس واضحاً بما فيه الكفاية ولا يوضح الصورة كاملة.

وهناك عدد من الأسباب الأخرى التي تجربنا لماذا يجب أن نكون حذرين عند استخدام نظرية الاحتمالات التراكمية للتنبؤ بالسلوك الفردي:

- سيكون لدى الأفراد المختلفين أنماط مختلفة من السلوك، تنطوي على درجات مختلفة من النفور من الخسارة، ودرجات مختلفة من النفور من المخاطر، وما إلى ذلك. وبعبارة أخرى، حتى قبول الافتراضات الأساسية لنظرية الاحتمالات لا تزال تترك السؤال حول ماهية المعلنات بالنسبة للفرد. وعلاوة على ذلك، لا ينبغي لنا أن نفترض أن الفرد يتعامل دائماً مع نهج معين لاتخاذ القرار - ربما تجربنا على مدى الساعات القليلة الماضية سيكون لها تأثير على كمية المخاطر التي نخترها.
- سيكون هناك عنصر عشوائي في الطريقة التي يتم بها الاختيار، وخصوصاً عندما ينظر إليها على أنها مشابهة تماماً في القيمة الإجمالية. ونحن ندرك ذلك في اختياراتنا في بعض الأحيان، ومن الشائع جداً في الإعداد التجريبي أن يتخذ نفس الفرد خيارات مختلفة بين نفس الزوج من التوقعات عندما يتم تقديمها له في أوقات مختلفة.
- لا يبدو أن دالات ترجيح القرار تعمل بشكل جيد مع قيم الاحتمال التي تكون قريبة من الصفر أو بالقرب من 1. يكون من الصعب بالنسبة للأفراد أن يتخذوا القرارات عند مواجه الاحتمالات التي تبلغ 0.01 أو أصغر (أو 0.99 أو أكبر)، فهنا من الممكن أن تنشأ التناقضات.
- الأشكال الوظيفية المحددة التي تم اختيارها لـ w و v هي، إلى حد ما، تعسفية. وقد

اقترحت أشكال وظيفية مختلفة وقد تؤدي إلى تنبؤات مختلفة.

- يجوز للأفراد تغيير تفضيلاتهم بين الخيارات بمرور الوقت نتيجة للتعرض المتكرر لنفس الخيارات، أو حتى بسبب المناقشة مع الزملاء. هذه المسألة معقدة ولكن على الرغم من ذلك، إذا كان صانع القرار يعرف من البداية أنها سوف تواجه سلسلة كاملة من الخيارات المماثلة مجمعة معا، فإنه من المرجح أن يكون اختيارها مختلف عن الاختيار الذي قامت به عندما واجهت خيار واحد فقط.
- قد يتخذ الفرد قرارات مختلفة تبعا لكيفية صياغة حالة الاختيار. وبما أن الناس ينظرون عادة إلى التغيرات في الثروة فيما يتعلق بالنقطة المرجعية، فقد تحدث الصياغة من خلال اقتراح نقطة مرجعية تختلف عن الصفر. على سبيل المثال، قد يتم تقديم خيار على النحو التالي: "هل تفضل ربح 30 دولار بشكل مؤكد أو أن تعطى احتمال 50٪ لربح 80 دولار؟ ويمكن صياغة نفس مشكلة اتخاذ القرار من خلال إخبار شخص ما بأنه قد ربح 30 دولار، ومن ثم تسأله "هل تريد أن تدخل المنافسة حيث هناك احتمال 50٪ بخسارة 30 دولار واحتمال 50٪ لربح 50 دولار؟ في الصياغة الثانية للاختيار. أصبحت النقطة المرجعية + 30 دولارا. ويؤكد النفور من الخسارة أن عددا أقل من الناس سوف يقبل المقامرة عندما تكون قيمة النقطة المرجعية 30 دولار. وليس ما كانت عليه في الصياغة الأولى.

4-6 اتخاذ القرارات في الحالات الغامضة

في هذا القسم سوف نناقش الطريقة التي يتخذ بها الأفراد القرارات عندما يكون هناك غموض فيما يتعلق بالاحتمالات المتضمنة. إن نظرية سافاج، التي نوقشت في الفصل الخامس، تشير أنه في كثير من الحالات، سيعمل صناع القرار المتسقون كما لو كان هناك احتمال شخصي مرتبط بأي حدث معين، ولكننا في هذه المرحلة نهتم بشكل أكبر بوصف الطريقة التي تتخذ بها القرارات في الممارسة العملية. فالأمثلة التي تعاملنا معها حتى الآن قد تطرقت جميعها لهذا السؤال "من أين تأتي الاحتمالات؟".

لقد افترضنا أن بعض علماء النفس (عالم النفس الذي يقوم بإجراء التجارب)، يعلن لنا احتمالات أحداث معينة، مما يسمح لنا بكتابة احتمال وسلسلة من القيم والاحتمالات.

أو ربما يتم خلق الاحتمالات عن طريق رمي النرد أو قذف النقود المعدنية. وهذا ما يسميه نسيم طالب "المغالطة" - الاعتقاد بأن القرارات الحقيقية ممثلة تمثيلاً جيداً بالقرارات التي تواجهها عند خوض فرص احتمالات بسيطة. ولكن، كما أوضحنا في الفصول السابقة، عادة ما تتضمن القرارات الفعلية احتمالات يمكننا تخمينها، ولكننا لا نعرفها على وجه اليقين. ويحدث هذا عندما ينشأ الاحتمال بسبب عدم يقيننا بشأن الطريقة التي سيتغير بها العالم في المستقبل.

على سبيل المثال، لنفترض أننا نتساءل "ما هو احتمال أن يرتفع سعر النفط فوق 150 دولاراً للبرميل بعد عام من الآن؟" قد يعتمد القرار التجاري بشكل جيد على احتمال تعييننا لهذا الحدث، لذلك قد نضطر إلى إعطاء إجابة، سواء بشكل صريح أو ضمني، بالقرار الذي نتخذه. ويمكن لجميع أنواع التحاليل الاقتصادية التنبؤ بسعر النفط، وبالتالي فإن صانع القرار سيكون لديه بعض المعرفة بهذا الاحتمال، ولكن هناك العديد من القرارات التجارية التي يمكن اتخاذها مع معرفة القليل جداً من الاحتمالات المتضمنة. على سبيل المثال، قد نكون مهتمين باحتمال أن تقوم شركة منافسة بالانسحاب من سوق معين، أو فرصة أن يكون مركب صيدلاني قيد التطوير، سيثبت أنه آمن وفعال كعلاج لمرض الزهايمر. ففي هذه الأنواع من القرارات يكون مدى جهلنا كبير، ومن المرجح أن نضطر إلى النظر في إحصاءات لحالات مماثلة في الماضي (إذا أمكن العثور عليها). وتقدم مفارقة "إلسبرغ" مثال جيد على أن عدم وجود معرفة حول الاحتمالات الدقيقة لها تأثير على قراراتنا، لنفترض أن لديك اثنين من الجرار وتحتوي كل منهما على 100 كرة. في الجرة الأولى، هناك بالضبط 50 كرة سوداء و50 كرة بيضاء، ولكن ليس لديك معرفة حول عدد الكرات ذات الألوان المختلفة في الجرة الثانية.

الآن عرض عليك جائزة قدرها 100 دولار إذا قمت بسحب كرة بيضاء من أحد الجرارين، ولكن لديك فقط محاولة واحدة، فيجب عليك اختيار أي جرة ستقوم بالسحب منها. ماذا كنت ستفعل؟ اتضح أن نسبة كبيرة من الناس سوف تختار الجرة الأولى. بمعنى أن هناك قدر أقل من عدم اليقين مرتبط بالجرة الأولى، حيث نعلم أنه ستكون هناك فرصة

50٪ للفوز؛ فإذا اخترنا الجرة الثانية لن يكون لدينا أي معرفة على الإطلاق عن احتمالية الفوز، التي ربما تكون صفر إذا كانت كل الكرة في الجرة الثانية سوداء. إن تفضيل الجرة الأولى لا يزال صحيحا بالنسبة لمشكلة مختلفة، حيث تمنح فيها الجائزة بقيمة 100 دولار إذا كنت تستطيع التنبؤ بشكل صحيح لون الكرة الأولى المسحوبة.

وفي هذه الصيغة، يختار صانع القرار لونا ثم يختار واحدة من الجرارين، وبالتالي ليس هناك إمكانية أن تكون الجرة الثانية بطريقة أو بأخرى غير مواتية. ولكي نشرح المشكلة النظرية بشكل أكثر وضوحا، لنفترض أنك صانع القرار وقد عرض عليك اثنين من الجرار وعرض عليك جائزة بقيمة 100 دولار إذا سحبت الكرة البيضاء من أحد الجرارين. من المحتمل أن تختار الجرة الأولى، وربما تفوز وربما لا. ثم تضع الكرة مرة أخرى في الجرة وترجعها حتى تختلط جميع الكرات. بعد ذلك يتم منحك فرصة ثانية للفوز بجائزة قيمتها 100 دولار، ولكن هذه المرة سوف تحصل على الجائزة إذا سحبت كرة سوداء. فماذا ستختار؟

معظم الناس لا يزال لديهم تفضيل واضح للجرة الأولى، حيث يعلمون أن هناك 50 كرة من كل لون. ففي هذه الحالة لم يتم المساس بالجرة الثانية لذلك فمن الصعب أن نفهم لماذا تغيير اللون من شأنه أن يغير قرار التفضيل. القرار الأول بين احتمال (100:0 دولار) واحتمال (100 دولار، pW) حيث pW هو احتمال (ذاتي) لسحب الكرة البيضاء من الجرة الثانية. تفضيل الجرة الأولى يعني أن $pW < 0.5$. فهذا واضح وهو ما ينطوي عليه أيضا تقييم الاحتمال، والتي تتضمن $\pi(pW)v(\$100) > \pi(0.5)v(\$100)$ ، ولكن إذا كانت pW أقل من 0.5 فإن pB الاحتمال الذاتي للكرة السوداء التي يتم سحبها من الجرة الثانية يجب أن يكون أكبر من 0.5. وبالتالي، فمن العقلاني أن تفضل الجرة الثانية، وهذا هو جوهر المفارقة، التي يمكن حلها إذا كان صناع القرار حائرين بين الجرارين.

هذا مثال على حالة عدم اليقين بشأن الاحتمالات في الجرة الثانية يجعلنا مترددين في اختياره. في بعض الأحيان هذا النوع من عدم اليقين يسمى الغموض، ويسمى التأثير الذي نراه في مفارقة إلسبرغ "النفور من الغموض". وهذا مثال قوي على نوع من عدم اليقين من الدرجة الثانية عندما يكون الاحتمال في حد ذاته متغيرا عشوائيا. وسوف نعود

إلى التفكير في هذه الأنواع من المشاكل في مناقشتنا حول التحسين القوي في الفصل الثامن. نادرا ما يمكن مراقبة تفضيل الغموض بدلا من النفور من الغموض. وقد اقترح إلسبرغ مثالا حيث يوجد اثنين من الجرار: الأول يحتوي على 1000 كرة مرقمة من 1 إلى 1000، والثاني يحتوي على 1000 كرة، كل كرة عليها رقم ينحصر بين 1 إلى 1000 ويمكن أن يكون هناك أرقام مكررة وليس لدينا معلومات عن الأرقام التي تم استخدامها. لذلك، على سبيل المثال، قد يكون لدينا 500 كرة عليها رقم 17، و500 كرة أخرى رقموا بأرقام تم اختيارها عشوائيا بين 200 و800. الآن طلب منك أن تكتب رقم بين 1 و1000 ثم سحب كرة من أحد الجرارين، إذا كان الرقم على الكرة يطابق الرقم الذي كتبته فسوف تحصل على الجائزة. وفي هذا السيناريو من المرجح أن يختار الناس الجرار الثاني (الغامض). ويمثل الهيكل الأساسي هنا مفارقة إلسبرغ ولكننا نتعامل مع احتمالات 1 من 1000 بدلا من 1 من 2.

5-6 كيف يتعامل المديرون مع المخاطر

في هذا القسم الأخير سوف ننظر في تأثير علم النفس للمخاطر على قرارات الإدارة. ومن الملاحظات الرئيسة لنظرية الاحتمالات أن الأفراد يصعدون أحكاما بناءً على تغيير الذي يحدث في ثروتهم، بدلا من النظر إلى المنافع المرتبطة بالقيم المختلفة لثروتهم الإجمالية بعد اتخاذ القرار وعواقبه. ومن وجهة نظر المدير فإن هذا ليس ما يريده المساهمين. فإن اتخاذ قرارا أكثر عقلانية سوف يعظم الربح الإجمالي ويعد هذا هو الهدف الحقيقي بغض النظر عن الطريق الذي سلكناه للوصول إلى هدفنا.

يرتبط ذلك بما يحدث عندما تتوفر لدينا فرص متعددة للمقامرة. على سبيل المثال، المقامرة التي تنطوي على ربح 100 دولار أو خسارة 90 دولار قد لا تبدو جذابة، ولكن إذا علمنا أنه سيتم تكرارها عدة مرات فإن الوضع سيتغير. على سبيل المثال، إذا تم تكرارها أربعة مرات سيكون هناك فرصة 16/1 بخسارة 360 دولار وفرصة 4/1 بخسارة 170 دولار وفرصة 8/3 بربح 20 دولار وفرصة 4/1 لربح 210 دولار وفرصة 16/1 لربح 400 دولار. قد لا يكون هذا كافيا لتشجيع الجميع على قبول مجموعة من المقامرة،

ولكن من المؤكد أنها أكثر جاذبية من مقامرة التي لعبت مرة واحدة فقط.

أو قد نأخذ مثالا آخر يكون فيه كثير من الناس حائرين بنسبة كبيرة أو قليلة في قبول المقامرة، أي عندما تكون الخسارة تقريبا ضعف المكسب؛ دعنا نفترض أن هناك احتمال 50٪ بخسارة 100 دولار واحتمال 50٪ بربح 200 دولار، ولكن بتكرار هذه المقامرة مرتين يكون هناك فرصة 4/1 بربح 400 دولار وفرصة 2/1 بربح 100 دولار وفرصة 4/1 بخسارة 200 دولار. نجد أن معظم الناس يعطون هذه الاحتمالات قيمة إيجابية، حيث هناك فرص متعددة للمقامرة مع وجود نتيجة إيجابية متوقعة تؤدي إلى فرصة أكبر وأكبر لتحقيق نتيجة جيدة.

ومع ذلك، يبدو أنه من الصعب علينا كصانع القرار أن ننظر فقط إلى النتيجة المباشرة للخيار الذي نواجهه، بدلا من أن نرى ذلك كعنصر واحد في سلسلة الخيارات. ونتيجة لذلك، فإننا نولي اهتماما فقط للتغيير الناتج عن القرار الحالي، فضلا عن نتائج القرارات السابقة. يمكننا القول إن صانعي القرار لديهم قصر النظر (مصطلح تقني بكون شخص "قصير النظر" عند صنع القرار).

وهذا يؤدي إلى نفور عالي نسبيا من المخاطرة تجاه المقامرات الصغيرة وكذلك المقامرة الكبيرة. هذا ليس عقلانيا لأنه من المرجح أن تتكرر المقامرة الصغيرة. قد لا تتكرر بنفس الشكل بالضبط، ولكن من المؤكد أنه على مدى فترة من الزمن سيكون هناك فرص محفوفة بالمخاطر متاحة لصانع القرار والتي تتوافق مع المقامرة الصغيرة. فإن صانع القرار الذي عادةً ما يأخذ هذه المقامرات الصغيرة التي توفر قيمة إيجابية متوقعة مؤكدة سوف يربح بالنهاية مع مرور الوقت.

لقد دار معظم نقاشنا حول القرارات الفردية بشأن التوقعات - قد نفترض (أو نأمل) أن قرارات المديرين هي "أفضل" بطريقة ما. فعالمياً ما يتخذ المديرون القرارات في السياقات التي عادةً ما تتضمن فريق كامل من الأشخاص وتخضع لفحص كبير. ومع ذلك، يبدو أن هناك أدلة قليلة على أن المديرين يقومون بعمل أفضل في اتخاذ القرارات الإدارية للشركات مما يقوم به الأفراد في اتخاذ القرارات الشخصية.

الملاحظة الأولى التي يجب اتخاذها هي أن قرارات المدير تتخذ في سياق شخصي. فإن الإجراءات التي يتخذها المدير ليست فقط لمجرد تحقيق أفضل نتيجة للشركة. وبالإضافة إلى ذلك، سوف يسأل المدير نفسه، "ماذا سيقدم هذا لمهنتي؟" أو "هل هذا سيكون جيدا لخيارات الأسهم الخاصة بي؟" الملاحظة الثانية هي أن أفكار المديرين الخاصة حول أدوارهم لها تأثير على سلوكهم. قد نري مديرين يتعاملون مع المخاطر التي لا يمكن السيطرة عليها بطريقة تقبل النتائج المحتملة (السلبية)، لأنهم يعرضون بفرص كبيرة للربح. ولكن هذه ليست الطريقة التي ينظر بها المديرون إلى أدوارهم (مارش وشابيرا، 1987). فبدلاً من ذلك، من المرجح أن ينظر المديرون إلى المخاطر باعتبارها تحدياً ينبغي التغلب عليه بممارسة المهارات والخيارات. وقد يقبلون احتمال الفشل في النهاية. ولكن يميلون أن لا يروا أنفسهم مقامرين، ولكن كعملاء دقيقين ومحددin يمارسون قدراً كبيراً من السيطرة على كل من الأشخاص والأحداث. والنتيجة النهائية هي أن المديرين غالباً ما يكونون أكثر عرضة للمخاطرة مما نتوقعه، وسواء أدركوا ذلك أم لا، فإن العديد من المديرين يعتقدون بأنهم يمكنهم التحوط من المخاطر أو تجنبها إذا كانوا يؤدون وظائفهم بشكل جيد.

ما هو الحل لهذا الإطار المحدود الذي ينظر فقط في قرار واحد وينتهي بالنفور من المخاطر بدون داعي؟ ويشير كاهيمان ولوفالو (1993) إلى أن هذا التحيز يمكن أن يساعد على بذل المزيد من الجهود لتشجيع المديرين على رؤية القرارات الفردية باعتبارها عنصر واحد من تسلسل كبير (ربما عن طريق القيام بالتقييمات بشكل أقل تواتراً) وأيضاً من خلال التشجيع على اتخاذ موقف مفاده "أنك تربح مرات وتخسر مرات أخرى" ويشير إلى أنه ينبغي تجميع نتائج مجموعة من القرارات قبل تقييمها.

وحتى إذا رأى المراقب أن المديرين يأخذون مخاطر كبيرة، فإن المديرين أنفسهم ينظرون إلى تلك المخاطر على أنها صغيرة - ويوضح الفرق من خلال الطريقة التي عادةً ما يستخدمها المديرون لتخفيف درجة عدم اليقين التي يواجهونها. كما يصف كاهيمان ولوفالو (1993) ذلك من حيث التنبؤات الصارمة والجريئة. لماذا غالباً ما يتخذ المديرون وجهة نظر متفائلة ويقللون من إمكانية حدوث نتائج سلبية؟ وهذا مثال على ظاهرة أكثر عمومية وهي الميل

إلى أن تكون أكثر ثقة في تقديراتنا مما ينبغي أن نكون عليه. وحتى إذا كنا متطورين بما فيه الكفاية لفهم أن أي تقدير أو توقع هو توزيع وليس مجرد رقم واحد، فنحن ما زلنا نميل إلى إعطاء الكثير من الترجيح لتخميننا أفضل، أو بطريقة أخرى، نحن نستخدم التوزيعات التي لا توفر احتمال كاف في المنحنيات.

قد يكون هناك العديد من العوامل في العمل، ولكن أحد الجوانب المهمة لهذا التحيز يتعلق بما يصفه كيمانان ولوفالو (1993) على أنه وجهة النظر الداخلية (والتي تعكس إلى حد ما تحيز الإطار المحدود الذي ذكرناه أعلاه). فعندما نواجه مستقبلا غير مؤكد وضرورة التنبؤ، فإن غريزتنا الطبيعية هي أننا ننظر بحرص شديد في جميع تفاصيل الوضع، وأن نفهم السلاسل السببية المحتملة ثم نحدد النتيجة المرجحة. ولكن المشكلة في هذا النهج هي أنه في كثير من الأحيان هناك طرقا كثيرة جدا يمكن أن تنكشف فيها الأحداث لكي نفهمها جميعا. قد يكون من المحتمل أن سلسلة الأحداث التي تؤدي إلى إنجاز المشروع في الوقت المحدد هي الأكثر احتمالا من بين جميع الاحتمالات، ولكن إذا كان هناك العديد من الأسباب المحتملة للتأخير، وهناك احتمالية ضئيلة بأن يحدث أي من هذه الأسباب، ففي هذه الحالة يكون التأخير الكبير للمشروع شبه مؤكد. ولمعالجة هذا الوضع يتم التراجع عن النظر في تفاصيل ما يمكن أن يحدث بالتفصيل، ومحاولة فهم الوضع بشكل أكثر إحصائية.

وعلى نقيض وجهة النظر الداخلية، يمكن أن نصف هذا بـ "وجهة النظر الخارجية". هل هناك مجموعة من الظروف المعادلة التي تمكن المدير من أن يتعلم المزيد حول المدى المحتمل للتأخير؟ في بعض الأحيان يكون هذا الأمر مباشرا إلى حد ما - على سبيل المثال، التنبؤ بنيل المرتبة الأولى في شبك التذاكر للدراما الكوميديّة القصيرة التي تعرض في نيويورك، فمن الطبيعي أن نتحقق من المعلومات حول العروض مماثلة التي عرضت في الماضي. وهذا يتطلب في كثير من الأحيان الحرص للعثور على المجموعة المناسبة من الحالات التي ستأخذ أساسا للمقارنة. فهناك الكثير من الأدلة التي تنبني وجهة النظر الخارجية والتي من المرجح أن تؤدي إلى تنبؤات جيدة، ولكن هذا ينذر حدوثه في الممارسة العملية. وكما يوضح كاهنمان ولوفالو (1993):

"إن الطريقة الطبيعية للتفكير في مشكلة هي أن تخبر الجميع عن هذه المشكلة، مع إيلاء اهتمام خاص لخصائصها الفريدة، ونادراً ما يتم اختيار الالتفاف الفكري في إحصاءات الحالات ذات الصلة. وفي بعض الأحيان يتم إنكار أهمية الرأي الخارجي بشكل واضح: فالأطباء والمحامون كثيراً ما يجادلون ضد تطبيق المنطق الإحصائي في حالات معينة. ففي هذه الحالات يتم تفضيل وجهة النظر الداخلية حيث أنها تحمل طابع أخلاقي. وتقدر وجهة النظر الداخلية بأنها محاولة جادة للتغلب على تعقيدات المشكلة. ويتم رفض وجهة النظر الخارجية لأنها تعتمد على التشبيه المجرد من الحالات المماثلة السطحية".

وتتعلق المسألة المحددة هنا بخصائص التفاؤل التي نفهمها بشكل جيد، وبشكل عام، يكون الأشخاص متفائلون عندما يتعلق الأمر بتقييم قدراتهم الخاصة (لذلك، على سبيل المثال، فإن الغالبية العظمى من الناس يعتبرون أنفسهم مسيطرون على الوضع بشكل جيد "مستوى فوق المتوسط). فهم متفائلون بشأن الأحداث والخطط المستقبلية وأخيراً فهم متفائلون بشأن قدرتهم على السيطرة على ما يحدث. وبشكل عام، يعتبر هذا سمة إيجابية ويرتبط التفاؤل بالصحة النفسية (تايلور وبراون، 1988). ومع ذلك، لا يعني ذلك أن هذه الميزة مفيدة عندما يمارسها المديرون الذين يواجهون قرارات مهمة بشأن مستقبل منظماتهم.

ملاحظات

هناك كمية هائلة من المواضيع التي كتبت حول نظرية سلوك اتخاذ القرار والاقتصاد السلوكي. ويقدم كتاب ويلكنسون (2008) مقدمة سهلة الفهم في هذا المجال، كما يقدم كتاب ستارمر (2000) مناقشة أكثر تفصيلاً لكثير من المؤلفات في هذا المجال. ويقدم كتاب بيتر واكر نظرة شاملة وتقنية لجميع جوانب نظرية الاحتمالات، ولكن يصعب قراءته بالنسبة لشخص ليس عنده خبرة في هذا المجال. وقد استندت المواد المعروضة في هذا الفصل بشكل كبير على كتاب كاهنمان وتفيرسكي (1979) وتفرسكي وكانيان (1993) وكانيان ولوفالو (1993). وأيضاً كتاب كيمايان، "التفكير، بسرعة وببطء" يقدم مقدمة سهلة الفهم في هذا المجال (انظر كانيان، 2003). ولمناقشة الغموض في صنع القرار، فقد استخلصت بعض الأفكار من كتاب إينهورن وهو غارث (1986).

المراجع

- Allais, M. (1953) The behavior of rational man in risky situations – A critique of the axioms and postulates of the American School. *Econometrica*, 21, 503–546.
- Einhorn, H. and Hogarth, R. (1986) Decision making under ambiguity. *The Journal of Business*, 59, 225–250.
- Kahneman, D. (2011) *Thinking, Fast and Slow*. Farrar, Straus and Giroux.
- Kahneman, D. and Lovallo, D. (1993) Timid choices and bold forecasts: A cognitive perspective on risk taking. *Management Science*, 39, 17–31.
- Kahneman, D. and Tversky, A. (1979) Prospect Theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47, 263–292.
- March, J. G. and Shapira, Z. (1987) Managerial perspectives on risk and risk taking. *Management Science*, 33, 1404–1418.

تمارين

1-6 شرح المثال 1-6

يوضح المثال العملي 4-6 كيف أن السلوك الموضح في المثال 2-6 هو بالضبط ما يمكن توقعه من نظرية الاحتمالات إذا كانت قيمة الدالة الإيجابية x تعطى بواسطة $v(x) = x^{0.8}$. استخدم نفس النوع من التحليل لشرح سلوك المثال 1-6.

2-6 نظرية الاحتمالات عندما تتحول الأرباح إلى خسائر

افترض أن $w^+(p) = w^-(p)$ ودالة القيمة لها الخاصية:

$$v(-x) = -\lambda v(x) \text{ for } x > 0.$$

إذا كان الاحتمال $A = (x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n)$ هو المفضل عن الاحتمال

$B = (y_1, q_1; y_2, q_2; \dots; y_n, q_n)$ وكل من x_i و y_i إيجابية. والاحتمال

$B^- = (-y_1, q_1; -y_2, q_2; \dots; -y_n, q_n)$ هو المفضل عن الاحتمال

$A^- = (-x_1, p_1; -x_2, p_2; \dots; -x_n, p_n)$.

3-6 التأمين الاحتمالي

أجرى خانمان وتفيرسكي تجربة مع 95 طالبا من ستانفورد حيث عرضوا عليهم

المشكلة الآتية:

'نفترض أنك تنظر في إمكانية تأمين بعض الممتلكات ضد الأضرار (مثل الحريق أو السرقة). بعد فحص المخاطر والخيارات، تجد أنه ليس لديك أي تفضيل واضح بين خيارات شراء التأمين أو ترك الممتلكات غير مؤمن عليها. ثم تنتبه إلى أن شركة التأمين تقدم برنامجاً جديداً يسمى التأمين الاحتمالي، حيث تدفع نصف الأقساط، وهناك احتمال 50٪ أن تدفع النصف الآخر من القسط في حالة حدوث ضرر وتغطي شركة التأمين جميع الخسائر. وهناك احتمال 50٪ أن تحصل على قسط التأمين الخاص بك مرة أخرى وتحمل جميع الخسائر. على سبيل المثال، إذا وقع الحادث في يوم فردي من الشهر، فإنك تدفع النصف الآخر من القسط وتغطي شركة التأمين جميع الخسائر. ولكن إذا وقع الحادث في يوم مميز من الشهر (به مناسبة) فسوف تحصل على قسط التأمين الخاص بك مرة أخرى وتحمل جميع الخسائر.

فإذا كان هذا التأمين يستحق تكلفته، فهل تشتري التأمين الاحتمالي؟

في هذه التجربة، أجاب 80٪ من الطلاب بـ "لا". بين أن هذا لا يتفق مع نظرية الاحتمالات المتوقعة مع وجود دالة مقعرة لأن التأمين الاحتمالي يعطي فائدة أعلى من التأمين القياسي. يمكنك القيام بذلك عن طريق كتابة نتيجة التأمين الاحتمالي في الصيغة:

$$(1 - p)u(W - (z/2)) + (p/2)u(W - z) + (p/2)u(W - K),$$

ونستخدم للدالة المقعرة u :

$$u\left(W - \frac{1}{2}z\right) \geq \frac{1}{2}u(W) + \frac{1}{2}u(W - z).$$

4-6 الأس في قانون السلطة

ويطلب من الطلاب أن يقرروا بين خيارين، الخيار A والخيار B.

الخيار A: ربح 1 دولار مع احتمال 95٪ وربح 381 دولار مع احتمال 5٪

الخيار B: ربح 20 دولار بشكل مؤكد.

معظم الطلاب يفضلون الخيار B. بعد ذلك يتم عرض نفس الخيارين على الطلاب ولكن بعد إضافة 300 دولار إلى جميع النتائج، أي:

الخيار C: ربح 301 دولار مع احتمال 95٪ وربح 681 دولار مع احتمال 5٪.

الخيار D: ربح 320 دولار بشكل مؤكد.

قام العديد من الطلاب بتغيير قرارهم وقاموا باختيار الخيار المحفوف بالمخاطر. وهذا يبين أنه مع وجود المعارف التقليدية القياسية لن تتنبأ نظرية الاحتمالات بحدوث هذا التغيير. ولكن بالنسبة للأفراد حيث يتم خفض الأس a في قانون السلطة إلى 0.6، فسوف نرى التغيير حسب نظرية الاحتمالات (تم الإبلاغ عن هذه التجربة في بوردالو، ب، جينايلي، ن. أند شليفير، أ، 2011، نظرية الاحتمال للاختيار في ظل الخطر، نفر وركينج بابر # 16387، والذي يقدم تفسيراً بديلاً لهذه الملاحظات).

5-6 ضمانات الكمبيوتر المحمول

تقدم شركة تبيع الكمبيوترات المحمولة ضمان ممتد على منتجاتها، بالنسبة للكمبيوتر المحمول بتكلفة 900 دولار، فهو يأتي بفترة ضمان لمدة عام واحد ويغطي الضمان الممتد سنتين إضافيتين مقابل 75 دولاراً.

(أ) افترض أن احتمال حدوث ضرر في فترة الضمان الممتد هو 0.1 وأن العميل الذي ليس لديه ضمان سيتحمل تكلفة قدرها 500 دولار إذا حدث ذلك. لنفترض أنه يمكن تحديد خيارات العميل باستخدام نظرية الاحتمالات ومعلومات المعارف التقليدية. قم بتحديد ما إذا كان من المرجح أن يشتري العميل الضمان الممتد.

(ب) نفترض الآن أنه إذا حدث ضرر ولم يتم تنفيذ الضمان، فإنه من المرجح أن يتطلب استبدال الكمبيوتر المحمول بتكلفة 900 دولار أو إجراء إصلاح بسيط بتكلفة 100 دولار (وبالتالي فإن التكلفة المتوقعة هو 500 دولار). احسب قيمة الاحتمال في هذه الحالة وبالتالي ما إذا كان العميل سوف يشتري الضمان أم لا.

6-6 قد يؤدي انقسام الاحتمالات إلى تغيير القرارات

(أ) استخدام نظرية الاحتمالات $\alpha = \beta = 0.9; \lambda = 2$ ودلائل القياسية لترجيح القرار الواردة في الجدول 1-6 لحساب القيم المعطاة للاحتتمالات الأربعة التالية من أجل التنبؤ بما سيتم اختياره.

A: (100,0.5 – دولار؛ 1000,0.5 دولار)

B: (1000,0.4) (دولار)

C: (200,0.3 دولار؛ 300,0.3 دولار؛ 550,0.4 دولار)

D: (340 دولار بشكل مؤكد)

(ب) نفترض الآن أن الاحتمالات A و B و C قد بنوا على مرحلتين، حيث تم تلقي 340 دولاراً أولاً ثم تم عرض المقامرات (بحيث تم استبدال A بـ D متبوعاً بـ 440,0.5 دولار؛ 660,0.5 دولار) وبالمثل بالنسبة لـ B و C) بين أنه لن يتم اختيار أيّاً من مقامرات المرحلة الثانية.

7-6 البحث عن المخاطر عندما تكون دالة القيمة مقعرة بالنسبة للخسائر

بالنسبة لبعض الأفراد يتم عكس النمط العام وبدلاً من أن تكون دالة القيمة v محدبة بالنسبة للخسائر، فإما أن تكون مقعرة أو مقعرة بشكل معتدل. ومع ذلك، قد يؤدي سلوك دالة ترجيح القرار إلى سلوك البحث عن المخاطر (حيث يفضل خيار محفوف بالمخاطر بنفس القيمة المتوقعة على اختيار نتيجة مؤكدة). أعثر على مثال يوضح هذه الحالة، حيث تكون الخسارة المؤكدة بقيمة 100 دولار هي أقل جاذبية من المقامرة التي لها نفس القيمة المتوقعة. يجب عليك استخدام ترجيحات القرار w - الواردة في الجدول 1-6 واستخدام:

$$v(x) = x^{0.9} \text{ for } x > 0$$

$$v(x) = -2(-x)^{1.1} \text{ for } x < 0.$$

الفصل السابع

تحسين النموذج العشوائي

تحسين الربح من خلال التخزين الضخمي

يعمل مرفق تخزين الضخ عن طريق ضخ المياه إلى خزان مرتفع عندما تكون الطاقة متوفرة ورخيصة الثمن ثم تترك لتتدفق من الخزان من خلال مولدات طاقة كهرومائية لتوليد الطاقة عندما يرتفع ثمنها. وفي حال وجود عجز في الكفاءة، إذا تم ضخ الماء للأعلى لا يمكنها توليد طاقة بقدر ما يمكن توليده من تدفقها من خلال التوربينات على النحو المطلوب في المرة الأولى. مع ذلك، فإن هذه الممارسة جديرة بالاهتمام لأن التكلفة الفعلية للكهرباء أثناء الليل أقل بكثير من النهار. ومن ثم، يمكن استخدام الطاقة الكهربائية رخيصة الثمن ليلاً الخزان المرتفع أثناء الليل ثم الاستفادة بهذه الطاقة أثناء النهار عندما تكون الأسعار مرتفعة. ومع زيادة كمية الطاقة المولدة من الرياح والتي غالباً ما تزداد بأقوى درجات الطاقة في الوقت الذي يكون فيه الطلب غير مرتفع، تصبح الحاجة إلى المخزون الضخمي أكبر من أي وقت آخر.

تعتبر محطة جبل الراكون للتخزين الضخمي مثال جيد على العملية سابقة الذكر، تم بناءها في السبعينيات، حيث تمتلكها وتقوم على تشغيلها سلطة وادي تينيسي. تبلغ مساحة الخزان أعلى جبل الراكون أكثر من 500 فدان (200 هكتار)، عند ضخ المياه إلى هذا الخزان يمكن ملأه في 28 ساعة. وعندما يكون الطلب على الكهرباء مرتفعاً يمكن إطلاق المياه لتوليد الطاقة الكهربائية حتى 1600 وات في الساعة. وفي حالة كان الخزان ممتلاً، قد يستغرق 22 ساعة ليصبح فارغاً إذا تم تشغيله بشكل مستمر.

ولتحديد سياسة تشغيل محطة التخزين الضخمي، يمكن تقسيم كل يوم إلى فترات مختلفة: القمة تستغرق 7 ساعات، الأكتاف تستغرق 8 ساعات، وما قبل القمة تستغرق 9 ساعات. عادة ما تكون فترة ما قبل القمة خلال ساعات الليل ويصبح ممتلاً بنهاية تلك الفترة، ثم يتم إخراج المياه أثناء السبع ساعات في فترة القمة (تسع ساعات من الضخ ستوفر كمية مياه كافية لسبع ساعات من توليد الطاقة). لكن عند زيادة الطلب والأسعار، يمكن استخدام مياه الخزان لوقت أطول ليشمل فترة الأكتاف. من ثم، يصبح مستوى المياه منخفض للغاية بنهاية اليوم، ولا يمكن ملأه مجدداً أثناء الليل ما يؤدي إلى انخفاض منسوب المياه بالخزان بعد عدد من الأيام المتعاقبة. ويصبح الخزان فارغاً بالكامل أثناء النهار، وفي الصباح تبقى فقط المياه التيتم ضخها في الساعات المتأخرة من الليل، ما يحدد كمية الطاقة المتاحة في أي يوم (بصرف النظر عن مدى ارتفاع سعر الكهرباء).

وتتمثل المسألة التي تواجه مشغل المحطة في إذا كان يمكن الاستفادة من الأسعار المرتفعة اليوم عن طريق تشغيل المولدات لفترة أطول. وما إذا كان السعر مرتفع بشكل كافٍ للتوليد الطاقة أثناء فترة الأكتاف، وما كمية الطاقة التي يمكن توليدها؟ وكلما زادت فترة تشغيل المولد، انخفض مستوى المياه الناتجة، وتضاءلت فرصة الاستفادة عند ارتفاع الأسعار مرة أخرى في المستقبل.

1-7 مقدمة في تحسين النموذج العشوائي

نطرح في هذا الفصل كيفية استخدام مناهج التحسين لتحديد كيفية اتخاذ قرار جيد في إطار بيئة احتمالية، حيث ألقينا الضوء في الفصل السابق على اتخاذ قرارات من خلال مجموعة

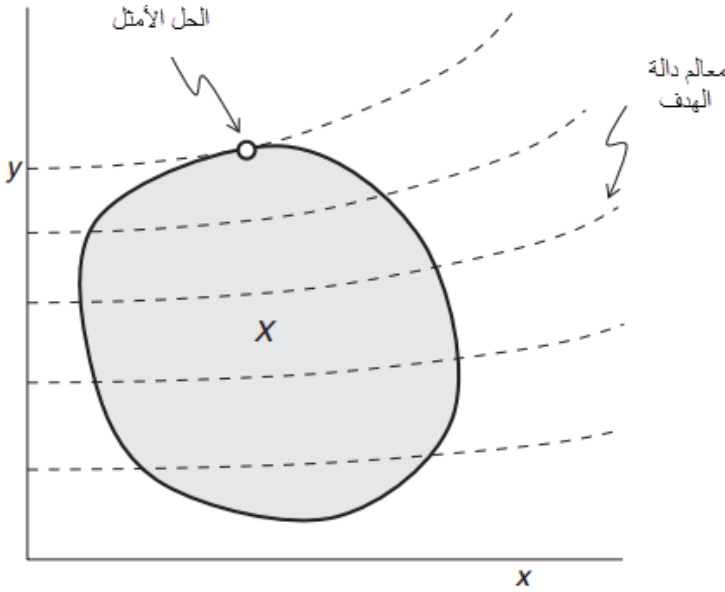
خيارات واضحة، يتضمن كل خيار منهم عدد صغير من الاحتمالات مع الاحتمالات والنتائج المرتبطة بها، أما في هذا الفصل سنناقش مشكلات أكثر تعقيداً. سنكون في حاجة إلى عمل نموذج لما يحدث (مشتماً على عناصر عشوائية) ثم نقوم بتحليل هذا النموذج. ونظراً لزيادة التعقيد، سنعاود التركيز على الجانب المعياري أكثر من الوصفي. بالتالي سوف نتساءل عن ما يجب على المديرين فعله بدلاً من التساؤل عن ما سوف يفعلونه. وجدير بالذكر أن غالبية النماذج التي تعاملنا معها في هذا الفصل، كان يلزم تحليلها استخدام أداة حسابية مثل جدول البيانات.

أحد الاختلافات المهمة بين مشكلات تحسين النموذج العشوائي يتمثل في حصولنا على فرصة واحدة لصنع قرار والمشكلات التي نمتلك فرصة لصنع قرار بشأنها في أوقات مختلفة. على سبيل المثال، إذا كنا نبيع أزياء وملابس في حين أن الطلب غير مستقر، إذن فنحن بحاجة إلى اتخاذ قرار في بداية الموسم بشأن عدد القطع التي علينا صنعها. رغم ذلك، قد تكون لدينا فرصة لصنع المزيد خلال الموسم عندما نحصل على معلومات عن سير المبيعات: ما يعتبر نقطة اتخاذ قرار ثانية.

وقبل أن نواصل مناقشة تحسين النموذج العشوائي نحتاج لمراجعة بعض الأفكار الأساسية عن مشكلات تعظيم الاستفادة.

1-1-7 مراجعة آلية تعظيم الاستفادة

أحد مشكلات تعظيم الاستفادة تتمثل في الحاجة إلى اختيار بعض متغيرات القرار من أجل تعظيم (أو تقليل) دالة الهدف الخاضعة لبعض الشروط على المتغيرات لتحديد القيم المحتملة. ومن ثم، فإن أهم ثلاثة عناصر هي: المتغيرات، الهدف، والشروط. إذا كانت المتغيرات (n) فإننا بحاجة إلى اختيار أرقام حقيقية، ومن ثم يمكننا التفكير في المسألة على النحو الموضح بالشكل 1-7. يشير (x) و(y) إلى متغيرات القرار، محور x يمثل مجموعة النقاط المحتملة المحددة من خلال شروط المسألة، وتشير الخطوط الخارجية إلى دالة الهدف. تقع النقطة المثلى (التي نطلق عليها أيضاً الحل الأمثل) على حد المحور x ويعظم دالة الهدف (مشكلات تحسين الاستفادة قد تشمل تقليل أو تعظيم دالة الهدف).



الشكل 1-7: رسم تخطيطي لمشكلة التعظيم

الفئة الأولى من مشكلات التعظيم تتميز بين نوعين من المشكلات؛ الأولى ذات عنصر أمثل محلي والثانية ذات عدد من العناصر المثلى المحلية المحتملة، وعلينا المقارنة بينهم لإيجاد الأفضل. وفقاً للرسم البياني 1-7، فإن ميزة امتلاك حد أقصى واحد محتمل تأتي من طبيعة دالة الهدف ومجموعة النقاط المحتملة.

مجموعة النقاط المحتملة تأخذ شكل محدب (ما يعني أن الخط المستقيم بين نقطتين على المحور x لا يمكنها الخروج عن x أبداً) أما دالة الهدف فتأخذ شكل مقعر (تأخذ شكل تل، وهي الخط المستقيم بين نقطتين على السطح المحدد بدالة الهدف والذي يقع أسفل السطح بدلاً من تجاوزه). ويمكن أن يمتد تعريف الدالة المقعرة إلى أي عدد من النقاط، ومن ثم فإن الدالة (x, y) المحددة على مستويات (x, y) المقعرة، في حالة مجموعة النقاط n $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ، وفي حالة المجموعة z الغير سلبية، وبما أن $\sum_{j=1}^n 1w_j$ إذن:

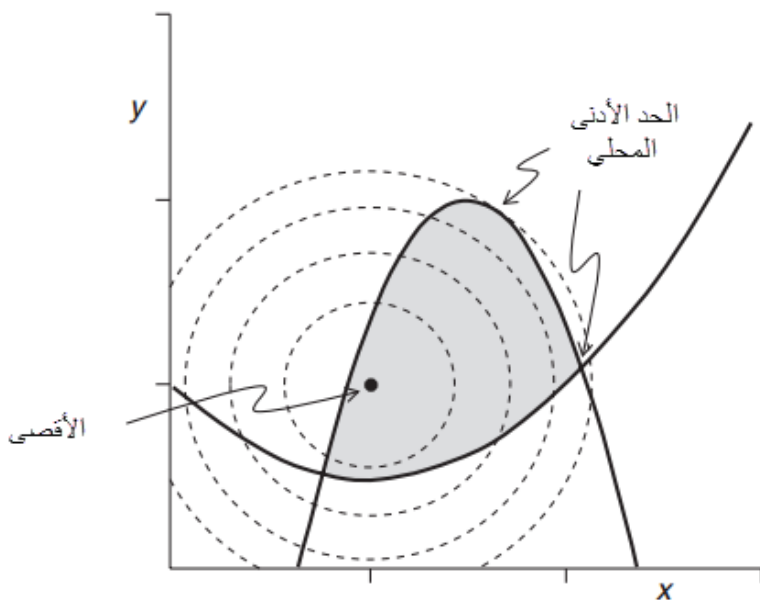
$$\sum_{j=1}^n w_j f(x_j, y_j) \leq f \left(\sum_{j=1}^n w_j x_j, \sum_{j=1}^n w_j y_j \right).$$

تعريف آخر للدالة المقعرة عندما يتم تحديد الدالة بناءً على ثلاثة متغيرات أو أكثر. أيضاً، الدوال المحدبة لها نفس التعريف بتباين معكوس. وبذلك سوف نجد حد أقصى محلي واحد (وهو أيضاً حد أقصى عالمي). على الجانب الآخر، إذا كان لدينا مسألة تقليل وليس مسألة تعظيم، فيجب أن نحصل على دالة محدبة بدلاً من الدالة المقعرة.

قد تجد مسألة التعظيم المحدب (مع دالة الهدف المقعرة ومجموعة الاحتمالات المحدبة) حلها الأمثل على الحد أو داخل مناطق المحور x . ويوضح الشكل 2-7 مسألة تعظيم من النوع ذو الحد الأقصى

ويمكن صياغة مسألة التعظيم (P 1) كالتالي:

$$P1 : \text{maximize } 4 - (x - 1)^2 - (y - 1)^2,$$



شكل 2-7: هذا المثال يتضمن حد أقصى واحد مع أكثر من حد أدنى محلي

ووفقاً للشروط:

$$\begin{aligned} 2y - (x - 1)^2 &\geq 1, \\ 3y + 2(2x - 3)^2 &\leq 6. \end{aligned}$$

القيد الأول يحدد الحد السفلي لمنطقة الاحتمالات، أما الثاني يحدد الحد العلوي. وتشير المنطقة المظلمة إلى النقاط المحتملة. النقطة التي تعظم الهدف هي $x = 1$ ، $y = 1$ ، وذلك داخل منطقة الاحتمالات x .

لكن إذا فرضنا تغير المسألة الآن من تعظيم دالة الهدف إلى تقليلها، وحدود دالة الهدف الموضحة بالخطوط المنقطة، فيمكن أن نرى اثنين من الحدود القصوى المحلية على الجانب الأيمن للرسم البياني (وحد أقصى آخر على الجانب الأيسر). الحد الأدنى المحلي هو نقطة أقل من كل النقاط المحتملة التي تقع بالقرب منها. وفي حال حدوث تغير طفيف في متغيرات القرار قد يؤدي ذلك إلى أحد الاحتمالات إذا تم كسر الشروط، لكن التغيرات الطفيفة في الحد الأدنى المحلي التي تحتفظ بالاحتمالات يمكنها عمل دالة هدف أكبر. ولإيجاد الحد الأدنى العالمي نحتاج للمقارنة قيم دالة الهدف عند حد أدنى مختلف. نرى في هذا المثال أن أعلى نقطة على الحد تمثل الحد الأدنى العالمي، مثلما نرى من الخطوط الخارجية.

إذا كانت المسألة لها حد أمثل محلي واحد (وبالتالي فإنه أيضاً يمثل الحد الأمثل العالمي)، من ثم يصبح الوصول له معيارياً بشكل أكثر سهولة. يمكننا البدء بنقطة احتمال أولية (مجموعة من متغيرات القرار التي تكفي كل الشروط) ومن ثم نأخذ في الاعتبار التغيرات التي تحسن دالة الهدف دون كسر أي من الشروط. ما يعطينا نقطة احتمال جديدة ومتطورة، ثم نكرر عملية البحث عن التغير الذي يحسن الهدف. في واقع الأمر إننا نصل إلى الحد الأمثل المحلي عندما يكون التغير غير محتمل.

عندما يكون هناك عدد من الحدود القصوى المحلية تصبح المسألة أكثر صعوبة. ويمكننا إيجاد حد أقصى محلي باستخدام منهج التطورات المتكررة، لكن عندما نكتشف ذلك لن نعرف كم يوجد من الحدود القصوى المحلية. أحد الأفكار تتمثل في استخدام منهج التحسين

المتكرر مرة أخرى، لك لنبدأ عند نقطة جديدة: قد يؤدي بنا ذلك إلى نفس الحد الأمثل المحلي، أو إلى حد آخر. لكن عند التعامل مع مسألة معقدة قد نلجأ لتجربة المئات من نقاط البدء المختلفة، ويظل إيجاد كل الحدود المثلى المحلية أمر غير مؤكد.

لمعرفة آلية التعظيم، من الضروري تجربة الأفكار عملياً. وهناك عدد كبير من البرامج المتاحة والمناسبة لمختلف أنواع مسائل التعظيم. أحد الأدوات لحل مسائل التعظيم البسيطة أداة سولفر آد إن في برنامج إكسيل، حيث يعتبر حل مسألة تقليل دالة الهدف P 1 باستخدام سولفر تمرين جيد، ذلك ما تم عمله في جدول البيانات BRMch7-P1.xlsx. جرب بدء عملية التعظيم عند نقاط مختلفة، ولا يلزم أن تكون نقاط احتمالات، سيبدأ سولفر في إيجاد حل محتمل قبل تحسينها. ستجد أنه يمكن الحصول على ثلاثة من الحدود الدنيا المحلية بناءً على القيم الأولية التي يعطيها سولفر.

أحد الفئات المهمة لحل مسائل التعظيم يُدعى البرنامج الخطي، والتي تحدث عندما تكون الشروط ودالة الهدف خطية، ما ينتج عنه سهولة حل المسألة حيث تأخذ نقاط الاحتمالات شكل منحني محدب وتظهر منحنيات الهدف بشكل محدب ومقعر. للوهلة الأولى، قد يعتقد الفرد أن حل مثل هذه المسائل قد يكون شديد السهولة، لكن من الناحية العملية، عندما يمتلك البرنامج الخطي عدد كبير من المتغيرات وعدد كبير من الشروط، فالأمر يطلب حاسب آلي لإيجاد الحل الأمثل. أحد الأمثلة على البرنامج الخطي توضحه المسألة P2 بالأسفل.

$$P2 : \text{maximize } 6x + 7y + 2,$$

ووفقاً للشروط:

$$2x + 3y \leq 8,$$

$$4x - y \leq 6,$$

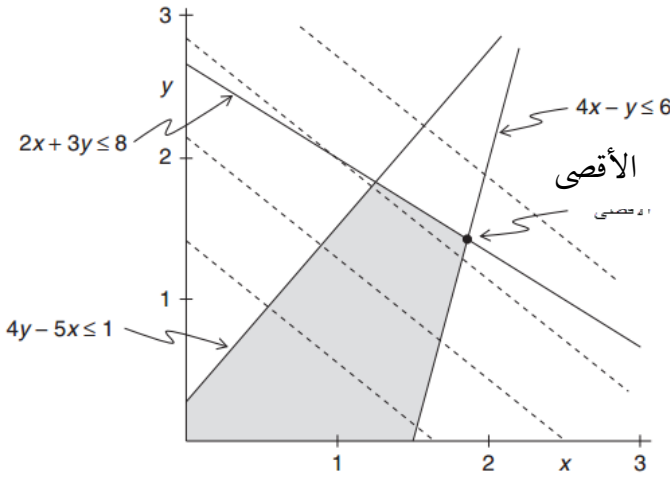
$$4y - 5x \leq 1,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0.$$

يوضح الشكل 3-7 نقاط الاحتمالات للمسألة P2. تشير الخطوط المنقطعة إلى حدود

دالة الهدف، ويحدث الحد الأقصى عند النقطة ($x = 1.857$ and $y = 1.429$)



الشكل 7.3 مجموعة مجدية والحل الأمثل للمشكلة p.2

الشكل 3-7 : مجموعة مجدية والحل الأمثل للمشكلة P.2

يمكن حل المسائل الخطية في حالة المسائل واسعة النطاق باستخدام برنامج مخصص لهذا الغرض. يحتوي إكسيل سولفر على إعداد "افتراض النموذج الخطي" وإعداد آخر "افتراض غير سلبي" حيث يمكن استخدامهما لحل المسائل الصغيرة مثل P.2. ويعطينا ملف BRMch7-P2.xlsx جدول بيانات لهذا النموذج.

2-1-7 المسائل ذات المرحلتين

نقطة البداية في التفكير بشأن آلية التحسين العشوائي هي النظر في المسألة ذات المرحلتين. في المرحلة الأولى، القرار الذي يتم اتخاذه ليس من شأنه معرفة ما سيحدث في المستقبل، بل معرفة عدد متنوع من الأحداث المحتملة. وبعد قرار المرحلة الأولى يحدث الحدث العشوائي ويتم حل الغموض. ثم في المرحلة الثانية، يتم صنع مزيد من القرارات التي تعتمد على ما حدث، ذلك ما يسمى "مسألة عشوائية ذات مرحلتين"، حيث يشير المصطلح إلى ما هو مطلوب عمله في المرحلة الثانية نتيجة الحدث العشوائي. ويشبه إطار العمل هنا لتحليل شجرة القرارات الذي استعرضناه في الفصل الخامس، بل أن الفارق

الأساسي أننا سوف نفكر بشأن القرارات، حيث نختار قيمة متغيرات القرار المستمرة بدلاً من الاختيار بين خيارات منفصلة.

ولتوضيح بعض الأفكار المهمة وتوضيح مدى الحاجة إلى الاهتمام بصيغة تلك المسائل، سوف نبدأ بتحليل نموذج بسيط.

مثال 1-7: شركة بارثينون للنفط

تعمل شركة بارثينون على بيع الوقود للمنازل مستخدمة تخطيط أفقي يتعلق بموسم البيع في فصل الشتاء، حيث يزداد الطلب في الفترة ما بين أكتوبر ومارس. تمتلك الشركة خزانات لتخزين زيت الوقود وتقوم بشرائه من شركات إنتاج النفط التي تباعه بسعر سوقي قد يتغير من شهر لآخر. بالتالي، تستطيع شركة بارثينون توفير طلبات العملاء إما من المخزون أو من خلال الشراء بالسعر السوقي، حيث تنص عقود العملاء مع الشركة على سرعة الاستجابة للطلب. لتبسيط الأمر ننظر إلى المشكلة التي واجهت الشركة في فبراير، حيث قامت بشراء النفط من السوق وتوصيل كمية إلى العملاء مباشرة وتخزين المتبقي للشهر التالي. من ثم تستطيع الشركة في شهر مارس تلبية الطلب من المخزون أو الشراء من السوق.

يجب أن نقرر كمية النفط المطلوب شراءها في فبراير (x_1) والكمية المطلوب شراءها في مارس (x_2)، واتخاذ قرار صحيح يعتمد على سعر النفط في فبراير ومارس، تكلفة التخزين، والطلب في كل منهما. يمكن صياغة المسألة على غرار مسألة التعظيم الخطية البسيطة مع الهدف لتقليل التكلفة الإجمالية. من الناحية العملية، لن يكون السعر في فبراير ومارس مستقرًا. نفترض أن الطلب في فبراير 1000 برميل والسعر 160 دولار. علاوة على ذلك، هناك ثلاثة احتمالات متساوية في فرصة الحدوث، إما أن يكون الجو عادي، أو بارد، أو بارد جداً. إذا كان الجو بارد فذلك يعني زيادة الطلب على الوقود لكن سعر شراء الوقود سيرتفع. يوضح الجدول في الشكل 1-7 الطلب وبيانات الأسعار وفقاً لكل سيناريو

حرف d يشير إلى الطلب في مارس، وحرف c يشير إلى التكلفة في مارس، وهم غير معروفين حتى تتخذ الشركة قرار بشأن x_1 ، أي كمية الوقود المطلوب شراءها في فبراير.

وبما أن الطلب في فبراير يبلغ 1000 برميل فإن المخزون بنهاية فبراير سيصبح $x_1 - 1000$ ، وتقوم الشركة بسداد 5 دولار للوحدة. إذن نحتاج لتقليل التكلفة الإجمالية:

$$\text{minimize } 160x_1 + 5(x_1 - 1000) + cx_2,$$

وفقاً للشروط:

$$x_1 \geq 1000 \quad (\text{مخزون كافٍ لتغطية الطلب في فبراير})،$$

$$x_1 - 1000 + x_2 \geq d \quad (\text{مخزون كافٍ لتغطية الطلب في مارس})،$$

$$x_2 \geq 0 \quad (\text{لا يمكن إعادة البيع للسوق إذا كان لدينا مخزون كبير}).$$

جدول 1-7: بيانات السيناريوهات المحتملة في شهر مارس

الطلب (وحدات)	تكلفة النفط (دولار)	الاحتمالية	السيناريو
1000	160	3 / 1	عادي
1200	164	3 / 1	بارد
1400	174	3 / 1	بارد جداً

نبحث في هذه المسألة عن d و c قبل x_2 الذي نحتاج لتحديده، لكننا بحاجة لاختيار x_1 قبل معرفة d و c .

إذا عرفنا مقدماً أي من هذه السيناريوهات سوف يحدث، نستطيع حل البرنامج الخطي لإيجاد الحل الأمثل (موضح في جدول بيانات BRMch7-Parthenon1.xlsx). يمكننا الحساب إذا كان الطقس في مارس عادياً، $x_1 = 1000$ ، $x_2 = 1000$. وإذا كان الطقس في مارس بارداً، $x_1 = 1000$ ، $x_2 = 1200$. وأخيراً إذا كان الطقس بارداً جداً، فالأمر يستحق شراء كمية الوقود المطلوبة في فبراير بالكامل، $x_1 = 2400$ ، $x_2 = 0$. لكن المسألة التي نحن بصدد حلها الآن تتطلب اختيار x_1 الآن. حيث أن هناك احتمالات متساوية أن يكون الطقس عادياً أو بارداً. وفي حال حدوث أحد السيناريوهين فالحل الأمثل هو شراء 1000 برميل وربما يكون ذلك الخيار الأفضل لـ x_1 ، ويمكننا تحديد x_2 بعد تحديد الطلب في شهر مارس.

مع ذلك، استخدام منهج آخر يمكن أن يؤدي إلى حل مختلف. حيث أن أحد الأفكار يتمثل في النظر إلى السلوك المتوسط بدلاً من النظر إلى سيناريوهات فردية. وغالباً ما يقترن ذلك باختبار الحساسية، الذي ننظر من خلاله إلى مدى حساسية القرار الأمثل بالنسبة إلى معاملات التغير. إذا كانت نتيجة التحليل تشير إلى الحساسية، علينا النظر بعين الاعتبار إلى عدد من الحلول المحتملة الموافقة لعدد من القيم المتوقعة، لكن إذا أشار التحليل إلى حساسية نسبية، قد يمكننا الالتزام بالسلوك "المتوسط".

في هذا المثال الخاص بشركة بارثينون، كل واحد من السيناريوهات الثلاثة له فرصة مساوية للحدوث. والقيم المتوسطة هي $c = 166$ and $d = 1200$.

بهذه القيم يمكننا حل البرنامج الخطي وإيجاد الحل الأمثل $x_1 = 2200$ and $x_2 = 0$. بالتالي، إذا استخدمنا الأرقام المتوسطة فمن المفترض أن نقوم بالشراء قبل فبراير وترك 1200 في المخازن بنهاية الشهر.

كلا المنهجين سابقين الذكر غير صحيح، بل أن المنهج المناسب لاتخاذ القرار يتمثل في عمل مسألة تعظيم وتضمين الصيغة الصحيحة للقرارات التي سوف نتخذها داخل هذه المسألة. هنا علينا السماح باختيار قيم مختلفة لـ x_2 بناءً على السيناريو المحتمل، ونطلق عليهم x_{2A} , x_{2B} , and x_{2C} . كذلك نرمز إلى سيناريوهات الطلب والتكاليف بـ d_A , d_B , and d_C ; c_A , c_B , and c_C . ومن ثم يمكننا صياغة المسألة كالتالي:

$$\text{minimize } 160x_1 + 5(x_1 - 1000) + (1/3)(c_A x_{2A} + c_B x_{2B} + c_C x_{2C}) \quad (1-7)$$

وفقاً للشروط:

$$x_1 \geq 1000 \quad (\text{كمية كافية للطلب في شهر فبراير})$$

$$x_1 - 1000 + x_{2A} \geq d_A \quad (\text{كمية كافية للطلب في شهر مارس في كل سيناريو})$$

$$x_1 - 1000 + x_{2B} \geq d_B$$

$$x_1 - 1000 + x_{2C} \geq d_C$$

$$x_{2A} \geq 0, x_{2B} \geq 0, x_{2C} \geq 0 \quad (\text{المشتريات كلها غير سلبية})$$

ما سبق برنامج خطي توصلنا من خلاله إلى الحل الأمثل باستخدام أداة سولفر في جدول البيانات. تم كتابة المسألة في جدول البيانات، BRMch7-Parthenon2.xlsx. وباستخدام أداة سولفر وجدنا أن الحل الأمثل هو $x_1 = 2000$. ما يعني أن هناك 1000 برميل في المخازن ببداية شهر مارس، لن يتم شراء المزيد إذا تحقق السيناريو A، بينما سيتم شراء 200 برميل إضافية إذا تحقق السيناريو B، في حين سيتم شراء 400 برميل إضافية في حال تحقق السيناريو C.

المثال الخاص بشركة بارثينون من المفترض أنه يمثل تحذير ضد المنهجين الشائعين لدى المخططين لفك الغموض. أحد الخيارات يبدأ بحساب حل أمثل لكل سيناريو على حدة، ثم يقارن الحلول ويختار القرار الأفضل قدر الإمكان لعدد من السيناريوهات. الحلول المرشحة لمسألة بارثينون هي إما تخزين 0 أو 1400 وحدة من الوقود للمرحلة القادمة، تتمثل السياسة المثلى الحقيقية (كما حصلنا عليها من خلال البرنامج العشوائي) في تخزين 1000 وحدة وذلك لن يتوافق مع الحل الأمثل في حال تحقق أي سيناريو. المنهج الشائع الثاني هو أخذ متوسط القيمة كالمتوقع وحل المسألة دون عنصر عشوائي، لكن في مثال بارثينون أدى ذلك إلى اختيار خاطئ x_1 ومن ثم تخزين كمية كبيرة جداً من النفط.

مثال بارثينون يقع تحت فئة المسائل متعددة المراحل، حيث يجب اتخاذ قرار في المرحلة الأولى، ثم بمرور الوقت، يتم فك غموض المسألة (في حالة بارثينون تم معرفة الطقس في شهر مارس)، ثم يتم اتخاذ القرار الثاني الذي سوف يعتمد على القرار الأول ونتيجة الحدث الغامض، فهناك نوع من التداخل في هذه المسألة.

سنوضح كيف يتم وضع هذا النوع من المسائل في إطار عمل عام، سنبدأ بالمرحلة الثانية حيث نحتاج إلى اختيار متغير القرار y (إذا كان هناك أكثر من متغير فإن y سيكون ناقلاً). سيتم اختيار المتغير y لتقليل التكاليف، مع معرفة قرار المرحلة الأولى، نفترض أنه x ، ونتيجة الحدث العشوائي. سنكتب $\tilde{y}$ للإشارة إلى العنصر العشوائي بهذه المسألة، إذن $\tilde{y}$ هو متغير عشوائي قيمته غير معروفة مقدماً. في مثال بارثينون y هي x_2 ، تشير إلى الكمية المطلوبة في مارس، و $\tilde{y}$ تشير إلى الطقس في مارس والتي قد تكون لها ثلاثة قيم مختلفة.

سوف ننظر في مسألة يكون عنصر المخاطرة فيها هو صانع القرار وتهدف إلى تعظيم الأرباح المتوقعة، أو تقليل التكاليف المتوقعة. بشكل عام، يمكن القول أنه يتم تحديد التكاليف إما في المرحلة الأولى أو الثانية. في المرحلة الأولى تعتمد على قرار المرحلة الأولى فقط، ومن ثم يمكننا كتابتها $C_1(x)$ ، لكن في المرحلة الثانية تعتمد على قرارات المرحلة الأولى والثانية وعلى نتيجة المتغير العشوائي ξ . ، بالتالي، نكتب دالة تكاليف المرحلة الثانية كالتالي $C_2(x, y, \xi)$.

الصيغة الكاملة للمسألة سوف تتضمن ليس فقط دوال التكلفة C_1 and C_2 ، لكن أيضاً نقاط احتمالات x لقرار المرحلة الأولى x ، ونقاط احتمالات y لقرار المرحلة الثانية y . بوجه عام، قد تعتمد y على قيم x و ξ ، رغم أننا لم نرى ذلك في ترميز المسألة.

$Q(x, \xi)$ تشير إلى أقل تكلفة في المرحلة الثانية بناءً على x و ξ .

إذن:

$$Q(x, \xi) = \min_{y \in Y} \{C_2(x, y, \xi)\}.$$

قرار المرحلة الأولى يتمثل في اختيار قيمة x التي تقلل التكاليف الإجمالية المتوقعة على افتراض اتخاذ قرار المرحلة الثانية على النحو الأمثل. وللوصول إلى قيمة المتغير العشوائي ξ ، نفترض أن التكلفة الإجمالية للخيار x هي $C_1(x) + Q(x, \xi)$. إذن، المسألة الشوائية التي نريد حلها هي:

$$\min_{x \in X} \{C_1(x) + E_{\xi}[Q(x, \xi)]\},$$

حيث نستخدم الرمز $E_{\xi}[\cdot]$ للإشارة إلى التوقعات فيما يتعلق بالمتغير العشوائي ξ .

مثال 7-1: (متابعة) شركة بارثينون للنفط

نعود مرة أخرى إلى مثال شركة بارثينون لكي نضعه في إطار العمل المذكور. علينا الاختيار بين تضمين تكلفة تخزين النفط إما في المرحلة الأولى أو المرحلة الثانية. نفترض اختيار المرحلة الأولى، إذن

$$C_1(x_1) = 160x_1 + 5(x_1 - 1000),$$

$$C_2(x_1, x_2, \xi) = c\xi x_2,$$

حيث يأخذ المتغير العشوائي ξ القيم A, B, C . وبالتالي

$$Q(x_1, \xi) = \min \{c\xi x_2 : x_2 \geq d\xi + x_1 - 1000, x_2 \geq 0\}.$$

وبما أن $c\xi$ (c_A, c_B or c_C) إيجابي، فإن الحد الأدنى لـ Q يحدث عند أقل قيمة محتملة لـ x_2 . ونلاحظ أن كل قيمة لـ x_2 يجب أن تكون صغيرة قدر الإمكان. سيتم تحديدها لتوافق الطلب في مارس، أو سيتم تصفيرها إذا كان مخزون النفط يكفي الطلب، إذن

$$x_{2A} = \max(0, d_A - x_1 + 1000),$$

$$x_{2B} = \max(0, d_B - x_1 + 1000),$$

$$x_{2C} = \max(0, d_C - x_1 + 1000).$$

ما يعني أن

$$Q(x_1, \xi) = c\xi \max(0, d\xi - x_1 + 1000).$$

وتشمل التوقعات متوسط $Q(x_1, \xi)$ في قيم ξ الثلاثة، ومن ثم فإن الصيغة التي

نحتاجها لتقليل (over x_1) هي

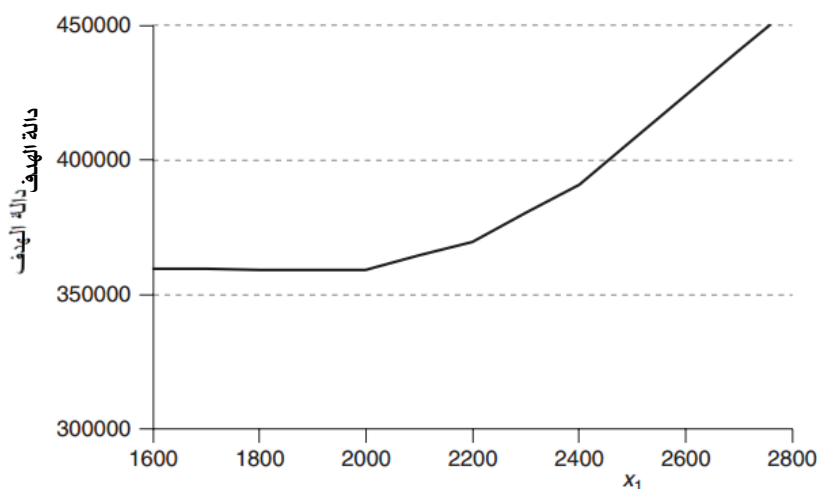
$$160x_1 + 5(x_1 - 1000) + (1/3)c_A \max(0, d_A - x_1 + 1000)$$

$$+ (1/3)c_B \max(0, d_B - x_1 + 1000) + (1/3)c_C \max(0, d_C - x_1 + 1000).$$

إذن قمنا بتغيير المسألة بحيث يكون لدينا متغير قرار واحد هو x_1 وأكثر من دالة هدف معقدة. ويمكن حلها من خلال تقييم دالة الهدف بناءً على قيم مختلفة لمتغير القرار x_1 ، وليس هناك حاجة لحل مسألة البرمجة الخطية. يوضح الشكل 4-7 الطريقة التي تعمل بها هذه الدالة (بقيم d و c من الجدول 1-7). كل قيمة من $\max(0, \cdot)$ (تتوافق مع أحد الأركان في الدالة). يتراجع الجزء الأولي بشكل طفيف ونستطيع أن نرى الوصول إلى نفس الحل الذي وصلنا إليه من قبل بالحد الأدنى المحقق عند $x_1 = 2000$.

نرى أن هناك منهجين مختلفين لحل المسألة. في المنهج الأول، نستخدم البرنامج الخطي لتعظيم القيم القليلة في كلا المرحلتين الأولى والثانية في خطوة واحدة. في المنهج الثاني، نجد أن الخيارات المثلى للمرحلة الثانية بديلة لتكاليف المرحلة الثانية.. وغالباً ما يؤدي المنهج الأول، الذي يقوم على جمع كل الأشياء في مسألة تعظيم واحدة، إلى صياغة

أكثر سهولة، وأرشح هذا المنهج في حالة الدوال الخطية والغموض المتعلق بمجموعة صغيرة من السيناريوهات.



الشكل 4-7: تكاليف شركة بارثينون النفطية كدالة x_1

3-1-7 الطلب في حالة الطلب العشوائي

الآن نريد النظر في الحالة التي تنطوي على شكل عشوائي مستمر، إضافة إلى متغيرات قرار مستمرة. إذن، بدلاً من عدد سيناريوهات محددة محتملة الحدوث، هناك عدد من المتغيرات العشوائية المستمرة، والتكاليف تتوقف على نتائجها. أحد الطرق الأكثر شيوعاً التي نرى فيها حدوث ذلك عندما تتوقف التكاليف على الطلب على بعض المنتجات التي تباعها شركة ما، ويكون الطلب متغير عشوائي.

نفترض أن الشركة تحتاج إلى تحديد كمية المشتريات التي تلي الطلب دون معرفة الطلب بالتحديد. على سبيل المثال، قد يحتاج بائع ملابس بالتجزئة إلى إجراء الطلب مقدماً قبل بداية الموسم. إذا كان الطلب أكثر من الكمية التي تم شراءها، فإن البائع يتمكن من بيع كل القطع. لكن إذا كان الطلب أقل من الكمية المطلوبة، سيتبقى مخزون حتى نهاية

الموسم. عادة ما يتم بيع هذا المخزون بأسعار منخفضة، وبعض الأحيان بأسعار أقل من سعر التكلفة. يتم تحديد الكمية الصحيحة للطلب بناءً على توزيع الطلب والفارق بين كم الأموال الناتجة عن البيع بالسعر كاملاً مقابل البيع بأسعار تخفيضات نهاية الموسم. تشيع هذه المشكلة بين إدارة العمليات وعادة ما تُعرف بإسم مشكلة بائع الصحف.

نصيغ ذلك في نموذج تعظيم عشوائي، حيث يمكن صنع القرار بشأن عدد القطع من منتج معين عند سعر c للقطعة من قبل بائع التجزئة يتم بيع القطعة بسعر p أثناء الموسم، والقطع المتبقية لنهاية الموسم يتم خفض سعرها إلى s ليتم بيعها في تخفيضات نهاية الموسم.

نفترض أن القطع x يتم شراءها من قبل بائع التجزئة، وبالتالي فإن تكاليف المرحلة الأولى هي cx . فإن أرباح المرحلة الثانية تعتمد على كل من x والطلب العشوائي D . قد يتمكن البائع من تحقيق أرباح px إذا كان x أقل من D ، إذا تم بيع كل المنتجات، وتحقيق أرباح $pD + s(x - D)$ if $x > D$ ، وبالتالي، تم خفض العناصر $x - D$ في نهاية الموسم.

في هذه المسألة يوجد قرار واحد فقط يجب صنعه. قبل ذلك، نظرنا إلى التكاليف وقمنا باستخدام الدالة $Q(x, \xi)$ للإشارة إلى أقل تكاليف في المرحلة الثانية، بناءً على قرار المرحلة الأولى x والقيمة المحددة للمتغير العشوائي ξ . الآن سوف ننظر إلى الأرباح ونستخدم $Q(x, D)$ للإشارة إلى أرباح بائع التجزئة، بناءً على كمية الطلب x (قرار المرحلة الأولى) والقيمة المحددة للطلب العشوائي D ، وننتقل من تقليل التكاليف إلى تعظيم الأرباح. إذن:

$$Q(x, D) = px - (p - s) \max(x - D, 0).$$

(يمكنك التأكد من أن هذه الصيغة صحيحة للحالتين سواء كانت x أقل أو أكبر من D). ويمكن إيجاد أقصى قيمة متوقعة للأرباح الإجمالية من خلال الدالة

$$\max_x \{-cx + E[Q(x, D)]\},$$

التي تعادل الصيغة في شكل (2-7)، لكن مع استبدال الأرباح بالتكاليف.

نفترض أن الطلب D يمكن أن يأخذ القيم بين 0 و M ويأخذ دالة الكثافة f . نشير إلى الأرباح المتوقعة في حالة طلب كمية x بـ $\Pi(x)$: تلك ما سوف نعظمها بالنسبة إلى x . إذن بعد استبدالها بـ Q ، يصبح لدينا

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= -cx + \int_0^M [px - (p-s) \max(x-z, 0)] f(z) dz \\ &= (p-c)x - \int_0^M (p-s) \max(x-z, 0) f(z) dz \\ &= (p-c)x - (p-s) \int_0^x (x-z) f(z) dz. \end{aligned} \quad (3-7)$$

هنا نستند إلى الحقيقة، $\int_0^M f(z) dz = 1$ ثم نصل إلى الخطوة النهائية من افتراض أن القيمة المتكاملة لـ $z > x$ هي صفر.

ولإيجاد الخيار الأفضل لـ x نريد الحصول على مشتق $\Pi(x)$ ، هنا نحتاج نتيجة عن كيفية الحصول على مشتق التكامل عندما يعتمد كلاهما والقيمة المتكاملة على المتغير المطلوب. ما سبق يُطلق عليه قاعدة إيبنتز وتقول أن

$$\frac{d}{dx} \int_0^{f(x)} g(x, z) dz = \int_0^{f(x)} \frac{\partial}{\partial x} g(x, z) dz + f'(x) g(x, f(x)).$$

بمعنى آخر، يمكننا الحصول على المشتق داخل التكامل المعطى حيث نضيف عبارة للسماح لنقطة النهاية بالتحرك بشكل صحيح. وعند إضافة العبارة يجب الأخذ في الاعتبار كل من السرعة التي تتحرك بها النقطة $f(x)$ ، وقيمة التكامل عند هذه النقطة.

نستنتج ما سبق أنه يتم الحصول على الخيار الأفضل لـ x عندما يكون ناتج المعادلة التالية صفر:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Pi(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ (p-c)x - (p-s) \int_0^x (x-z) f(z) dz \right\} \\ &= p-c - (p-s) \int_0^x f(z) dz. \end{aligned}$$

العبارة الإضافية (إيبنتز) هي صفر لأن التكامل، $\int_0^x (x-z) f(z) dz$ يأخذ القيمة صفر عندما تكون $z = x$.

$F(x)$ هي دالة التوزيع التراكمي لتوزيع الطلب، ومن ثم، يمكن كتابة شرط

الحصول على الحد الأقصى كالتالي

$$p - c - (p - s)F(x) = 0.$$

وبالتالي، يجب اختيار x ولذلك

$$F(x) = \frac{p - c}{p - s}. \quad (4-7)$$

حتى لو كنت تجد أن الأمر يتطلب براعة في علم التفاضل والتكامل والتخمين لفك الغموض، يمكننا أن نرى ما يحدث بشكل أكثر وضوحاً عند تطبيق مثال.

مثال 2-7: تروي فاشونز

تروي فاشونز المحدودة تباع نوع من المعاطف الشتوية بثمان 200 دولار، وتتعامل مع مصنع ملابس يقوم بتوريد القطعة بثمان 100 دولار. المعطف الذي لا يتم بيعه في فصل الشتاء سيتم خفض قيمته إلى 75 دولار. وبالتالي، $c = \$100$, $p = \$200$, and $s = \$75$. نفترض أن تروي فاشونز يواجه نسبة مخاطرة محايدة ويرغب في تعظيم الأرباح المتوقعة. إذا كان يتم توزيع الطلب بشكل موحد بين 0 و 200، ما الخيار الأنسب للكمية x^* وما الربح المتوقع إذا استخدمنا x^* .

الحل

بما أن الطلب غير موحد على $[0, 200]$ ، لدينا $F(x) = x/200$ for $0 \leq x \leq 200$. إذن بالاستبدال بالمعادلة (4-7)، نحصل على الخيار الأمثل للطلب x^* من

$$\frac{x^*}{200} = \frac{p - c}{p - s} = \frac{100}{125} = 0.8.$$

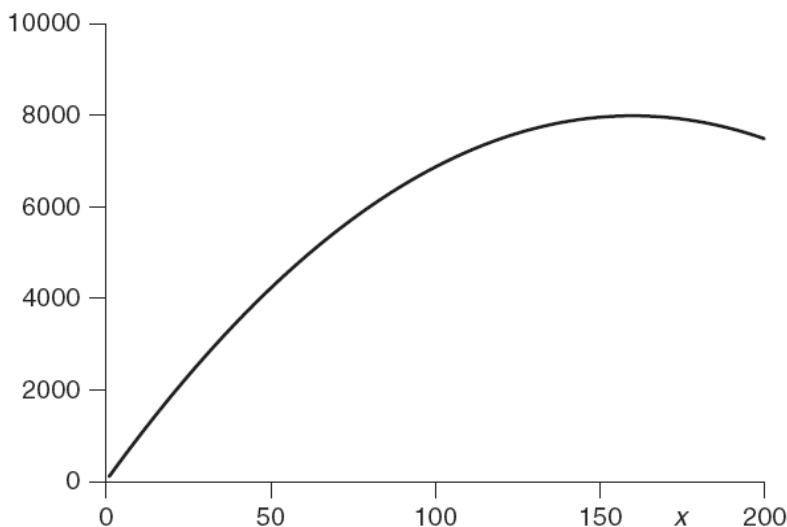
إذن $x^* = 200 \times 0.8 = 160$ ، وتحتاج تروي فاشونز المحدودة لطلب 160 معطف ببداية الموسم.

للتأكد من النتيجة وإيجاد الأرباح المتوقعة المثلى، ننظر إلى ما حدث للأرباح المتوقعة في الدالة x . وباستخدام المعادلة (7.3) نجد أن

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= (p - c)x - (p - s) \int_0^x (x - z) f(z) dz \\
&= (200 - 100)x - (200 - 75) \int_0^x (x - z) \frac{1}{200} dz \\
&= 100x - \frac{125}{200} \left[\left(xz - \frac{z^2}{2} \right) \right]_0^x \\
&= 100x - \frac{125}{200} \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

هذه الدالة موضحة في الشكل 5-7 حيث نستطيع أن نرى الوصول إلى الحد الأقصى عند النقطة 160. ونتوصل إلى الأرباح المتوقعة عندما تكون $x=160$ من خلال المعادلة التالية

$$100 \times 160 - \frac{125}{200} \frac{(160)^2}{2} = 8000.$$



الشكل 5-7: الربح المتوقع كدالة x

2-7 اختيار السيناريو

نظرنا في نوعين من التعظيم العشوائي حتى الآن، ولدينا نوعين مختلفين من الغموض. في المثال الخاص بشركة بارثينون كان هناك عدد صغير من السيناريوهات، بينما في مسألة بائع الصحف في مثال تروي فاشونز كان الطلب دائماً غير معروف أي أنه متغير عشوائي دائم. مسألة بائع الصحف عادة لا تسمح بحساب حل معين.

على سبيل المثال، مع الغموض الذي يحيط بمتغير عشوائي دائم أو أكثر يصعب الوصول إلى حل معين. نحتاج التعامل بشكل مختلف مع هذا النوع من المسائل ويعتبر المنهج الأفضل هو تقريب المتغيرات العشوائية الدائمة من خلال خلق عدد من السيناريوهات لتقدير الأرباح المتوقعة مع القرارات المختلفة. سنستعرض في هذه الجزئية محاكاة مونت كارلو كوسيلة لخلق السيناريوهات، ونستعرض في الجزئية التالية كيفية تطبيق هذه الأفكار على المسائل المعقدة متعددة المراحل.

لتوضيح الفكرة نعود إلى مسألة بائع الصحف مرة أخرى لنرى ماذا يحدث إذا كان هناك كمية محددة للطلب في سيناريوهات الطلب المختلفة التي يمكن حدوثها، بدلاً من وجود نطاق متغير للطلب. بالتالي فإن الأرباح المتوقعة في المرحلة الثانية $Q(x, D)$ تتحول إلى قيمة متوسطة في مختلف السيناريوهات المحتملة. إذا كان لدينا احتمالات $D_1, D_2, \dots, D_N$ للطلب N ، وكل منهم متساوي في فرصة الحدوث، فيمكن الوصول إلى الأرباح المتوقعة من خلال:

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= -cx + E_D[Q(x, D)] \\ &= -cx + \sum_{i=1}^N (1/N) Q(x, D_i).\end{aligned}$$

مثال 2-7: (متابعة) تروي فاشونز

عودة إلى مسثال تروي فاشونز، بدلاً من إجراء مسألة تعظيم كاملة، سننظر إلى الحل الأمثل عندما يكون كل سياريون من الأربعة متساوي في فرصة الحدوث: نفترض أن الطلب هو 30, 80, 120, 170، فتصبح المسألة كالتالي:

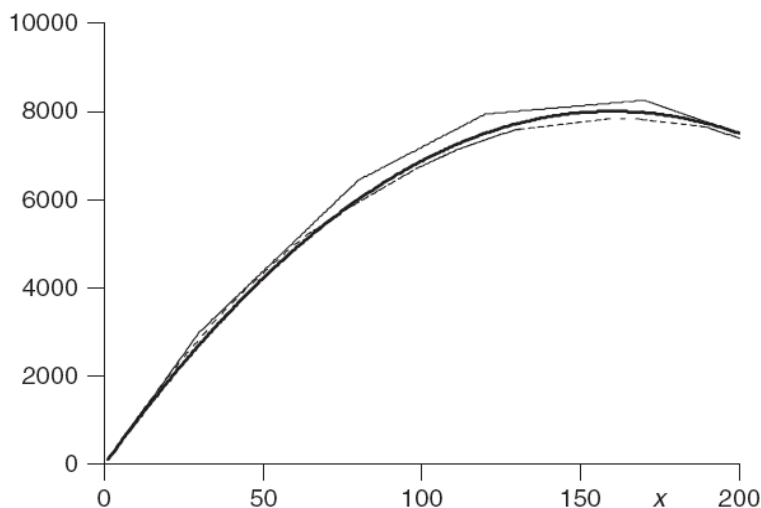
$$\max_x -100x + (1/4)Q(x, 30) + (1/4)Q(x, 80) + (1/4)Q(x, 120) \\ + (1/4)Q(x, 170)$$

مع

$$Q(x, D) = 200x - 125 \max(x - D, 0)$$

إذن يمكن كتابة المسألة

$$\max_x \left[100x - \frac{125}{4} (\max(x - 30, 0) + \max(x - 80, 0) + \max(x - 120, 0) \right. \\ \left. + \max(x - 170, 0)) \right].$$



الشكل 6-7: يوضح استخدام عدد من السيناريوهات المحتملة لتقريب قيمة الأرباح المتوقعة

يوضح الشكل 6-7 الهدف والهدف المقارب (الخط الرفيع المقسم).

وبإضافة مزيد من السيناريوهات وإعطائهم فرص متساوية للحدوث سنصل إلى أفضل المقاربات. أحد الطرق لخلق سيناريوهات هي اختيارهم بصورة عشوائية (تُعرف

فكرة خلق سيناريوهات عشوائية بإسم مونت كارلو وسوف نتحدث عنها أكثر في الجزئية القادمة). هنا تصبح أي قيمة بين 0 و 200 ذات فرصة متساوية الحدوث، من ثم قمنا باختيار الرقم 15 بشكل عشوائي (بالتقريب إلى أقرب رقمين عشريين): 110.59، 57.42، 168.24، 17.57، 98.77، 190.82، 130.29، 42.81، 188.80، 35.12، 158.13، 24.18، 72.81، 128.20، 62.61. بالتالي نجد أن الشكل المناسب لدالة الهدف:

$$100x - \frac{125}{15}(\max(x - 110.59, 0) + \max(x - 57.42, 0) + \dots + \max(x - 62.61, 0)).$$

يصبح الخط المقسم في شكل 6-7 أقرب إلى دالة الهدف كلما قمنا بتجربة مزيد من السيناريوهات.

1-2-7 كيف يمكن تنفيذ نموذج محاكاة مونت كارلو؟

يعتبر نموذج محاكاة مونت كارلو أحد النماذج المهمة في نمذجة المخاطر. حتى لو لم نستطيع كتابة فقرات ضمنية لتقييم الأداء المتوقع لقرار ما، فيمكننا عمل تقديرات باستخدام نموذج المحاكاة. فالطريقة التي يتم تنفيذ محاكاة مونت كارلو بها تستحق التفكير بعناية.

كل سيناريو يختار قيم للمتغيرات العشوائية التي توافق العملية العشوائية الحقيقية من خلال ما سيتم تحديده. إذن القيمة المتوسطة لعدد كبير من السيناريوهات، كل منهم تعادل التوزيع الاحتمالي المناسب، ستؤدي إلى قيمة متوقعة حقيقية. هذه هي نمذجة مونت كارلو.

في كل مسائل التعظيم العشوائي تقوم على بنية متعددة المراحل تنطوي على تطور عشوائي مع المتغيرات العشوائية التي تحدث في كل مرحلة وتغذي ما يحدث في المرحلة التالية، ومن ثم سيكون هناك متغيرات قرار نحتاج اختيارها عند كل مرحلة.

سنناقش ذلك في الجزئية التالية، لكن في الوقت الحالي نود التركيز على استخدام محاكاة مونت كارلو حيث هناك مرحلة واحدة فقط لن يظهر عندها أي احتمالات عشوائية.

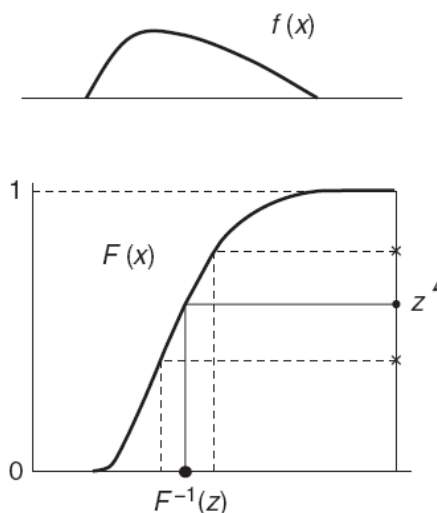
لدينا العديد من البرامج القائمة على جدول البيانات والتي تسمح بتنفيذ نموذج مونت كارلو بطريقة بسيطة وتلقائية، لكن بدلاً من تلك البرامج سوف نستخدم أبسط منهج

يمكن باستخدام الدوال المتاحة داخل برنامج إكسيل نفسه. قد يكون الأمر مرهق مع كبر حجم جدول البيانات، لكن ميزته البساطة والوضوح.

لكي نحصل على سيناريوهات عشوائية من داخل جدول البيانات سوف نستخدم دالة RAND، وتُكتب RAND(). تنتج المعادلة رقم عشوائي غير موحد موزع بين 0 و 1. وينتج رقم عشوائي جديد في كل مرة يتم فيها حساب البيانات أو الضغط على F9. إذن للحصول على الطلب مع رقم غير موحد موزع بين 0 و 100، يمكننا وضع الصيغة $\text{RAND()}\times 100$ في أحد الخانات.

عملياً، من النادر وجود رغبة في خلق سيناريوهات باستخدام توزيع غير موحد. من ثم فإننا نحتاج إلى وسيلة للحصول على توزيع غير موحد لبعض التوزيعات الأخرى، يتم ذلك باستخدام منهج التحويل العكسي كما هو موضح في الشكل 7-7.

نفترض أننا نريد رسم نموذج لأحد المتغيرات العشوائية بدالة الكثافة f ، مع دالة التوزيع التراكمي F . نبدأ بإيجاد رقم عشوائي z وهو غير موحد بين 0 و 1 ثم تحويل الرقم z إلى النقطة y بحيث $F(y) = z$. إذا كانت دالة الكثافة f إيجابية في النطاق الخاص بها



شكل 7-7: تحويل المتغير العشوائي الموحد z إلى توزيع معين من خلال $F^{-1}(z)$.

بالتالي سوف تتزايد F وسيتم تحديد نقطة واحدة Y من خلال هذا الإجراء. يمكن القول أن y تأتي من عكس الدالة f التي يتم تطبيقها على الرقم z ، نكتب الصيغة هكذا $y = F^{-1}(z)$. (لاحظ أن الدالة العكسية ليس لها علاقة بـ $(1/F)(z)$).

يوضح الشكل 7-7 أن هذا العملية من المحتمل أن تسفر عن رقم تصبح عنده الدالة F شديدة الانحدار، حيث تمتلك دالة الكثافة قيمة مرتفعة، وذلك بالضبط ما نريده. الآن نحن بصدد صيغة أكثر رسمية، حيث يؤدي التحويل العكسي إلى متغير عشوائي مع دالة التوزيع الصحيحة.

نفترض أن X تمتلك توزيع موحد على الامتداد $(0,1)$ وأن الحصول على المتغير العشوائي من خلال $F^{-1}(X)$. إذن نحصل على نموذج y بأخذ نموذج x من التوزيع X ثم نختار قيمة y وبالتالي $x = F(y)$. ولإيجاد توزيع y لاحظ أن

$$\begin{aligned}\Pr(y \leq a) &= \Pr(F(y) \leq F(a)) \\ &= \Pr(x \leq F(a)) \\ &= F(a).\end{aligned}$$

التكافؤ الأولي يرجع إلى أن F دالة تصاعدية، أما الباقي يرجع إلى الطريقة التي يتم بها اختيار y وحقيقة أن x يمثل نموذج من توزيع موحد. إذن احتمالية أن تكون y أقل من a تماشي مع قد يكون إذا أخذت y دالة التوزيع F . من ثم، نرى أن y تأخذ التوزيع الذي نرغب فيه.

مثال 3-7

نريد خلق سيناريو يتخذ فيه الطلب توزيع مع كثافة $f(x) = 2 - x$ في النطاق $0.5 \leq x \leq 1.5$. ما الصيغة التي من المفترض وضعها في خانة جدول البيانات للحصول على نموذج من هذا التوزيع؟

الحل

نحتاج أن نبدأ بإيجاد دالة التوزيع التراكمي لدالة الكثافة المذكورة. الدالة F تساوي صفر أدنى 0.5، F تساوي 1 أعلى 0.5 وبين هذه القيم نجد أن

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{0.5}^x f(z)dz \\
 &= \int_{0.5}^x (2-z)dz = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{0.5}^x \\
 &= 2x - \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{1}{8} \right).
 \end{aligned}$$

يمكننا التأكد من أن الوصول إلى النتيجة 1 عندما $x = 1.5$. حصلنا على النتيجة $2 \times$
 $1 = (7/8) - (9/8) - (3/2)$ كالمطلوب.

بناءً على القيمة z التي يتم توزيعها بشكل موحد على $[0,1]$ ، يمكننا الحصول على
 قيمة جديدة من عكس هذه الدالة. بالتالي نريد الحصول على قيمة x التي تؤدي إلى حل ما
 يلي:

$$2x - \frac{x^2}{2} - \frac{7}{8} = z.$$

وبالتالي

$$x^2 - 4x + \frac{7}{4} + 2z = 0$$

و

$$x^2 - 4x + \frac{7}{4} + 2z = 0$$

والآن نحتاج لاتخاذ قرار ما إذا كان الشق الأعلى أم الأسفل صحيحاً، هل يجب
 الجمع أم الطرح في هذه العبارة؟ نحن بحاجة للحصول على قيم x بين 0.5 و 1.5، ومن ثم
 نحتاج إلى الطرح (الشق الأسفل) بالتالي، نتوصل إلى العبارة التالية في خانة جدول
 البيانات

$$=2-0.5*\text{SQRT}(9-8*\text{RAND}())$$

مثال 4-7: تروى فاشونز في حالة الطلب الطبيعي

نعود مرة أخرى إلى مثال تروى فاشونز ، لكن نفترض أن توزيع الطلب طبيعياً بمعنى أن $\mu = 100$ وانحراف معياري لـ $\sigma = 20$ ، يمكننا استخدام المعادلة (7.4) لتحديد كمية الطلب المثلى التي تغطي الاحتياجات

$$F(x) = \frac{p - c}{p - s} = 0.8.$$

الدالة F هي دالة توزيع تراكمي عادية، غالباً ما تكتب Φ . ولحل هذه المعادلة للوصول إلى x يمكن استخدام جداول بتوزيع طبيعي، لكن سيكون الأمر أكثر سهولة مع استخدام دالة جدول البيانات NORMINV، المصممة لإيجاد قيمة x التي تعطينا احتمالية للتوزيع الطبيعي أدناها، وهي بالضبط المسألة التي نريد حلها. الدالة NORMINV(y, μ , σ)، تتوصل إلى القيمة x حيث يحقق التوزيع العادي للقيمة المحددة μ وانحراف معياري σ احتمالية أن تكون y أقل من x. بكتابة المعادلة =NORMINV(0.8,100,20) في جدول البيانات نحصل على القيمة 116.832، أ أن $x=117$ ، ما يعد الخيار الأمثل لـ x في هذه المسألة.

سنوضح محاكاة مونت كارلو باستخدام هذا المنهج لتقدير الأرباح المتوقعة عندما تكون $x=117$. تمثل هذه الفكرة متوسط عدد من السيناريوهات المختلفة للطلب، مع السيناريوهات المستمدة من الشريحة السكانية المستهدفة.

جدول البيانات BRMch7-TroyFashions.xlsx يحمل 1000 رسم عشوائي من التوزيع العادي للطلب لتقدير متوسط الأرباح. في كل صف من جدول البيانات سيناريو عشوائي مختلف للطلب. أنظر الخلية B4 التي تعطينا أحد سيناريوهات الطلب العشوائي مع صيغة المعادلة =NORMINV(RAND(),100,20). وكما قلنا من قبل، الدالة NORMINV(y, μ , σ) تأتي من عكس دالة التوزيع التراكمي

للحصول على توزيع عادي، ومن ثم هي الدالة التي نحتاجها لمنهج التحول العكسي من أجل الحصول على الطلبات مع توزيع عادي.

يبلغ متوسط الأرباح نحو 9300 دولار. حتى مع أخذ متوسط ما يزيد عن 1000 عملية متكررة، والذي من المتوقع أن يقترب من القيمة الحقيقية المتوقعة، مازال هناك كثير من المتغيرات (جرب الضغط على F9 بشكل متكرر ليعيد حساب كل الأرقام العشوائية، وقد ترى ارتفاع متوسط الأرباح من أقل من 9200 دولار إلى أكثر من 9400 دولار).

2-2-7 بدائل لنموذج مونت كارلو

في مثال تروي فاشونز نجد مدى تغير تقديرات الأرباح المتوقعة حتى مع 1000 سيناريو تم تحليله. يرجع السبب في ذلك إلى عشوائية النموذج. وبشكل أساسي، غالباً سوف ينتج عن الفرصة تجميع النموذج في مناطق الطلب حيث يوجد إما أعلى أو أدنى متوسط الأرباح.

هناك منهج بديل تنتشر نقاط النموذج بشكل منتظم، ويظهر في الجانب الأيمن من جدول البيانات `BRMch7-TroyFashions.xlsx`.

وبدلاً من عمل تقديرات بأخذ 1000 رقم عشوائي بين 0 و 1 واستخدام التحويل العكسي لهم للحصول على 1000 قيمة للطلب، هذه الطريقة الحسابية سوف تأخذ 98 قيمة 0.98, 0.99, ..., 0.03, 0.02, 0.01. ويتم استخدام هذه الأرقام بدلاً من الأرقام العشوائية للحصول على مجموعة من قيم الطلب ويتم تقدير الأرباح المتوقعة بإيجاد القيمة المتوسطة لهم.

وباستخدام منهج التحويل العكسي نحصل على قيم الطلب الموزعة بشكل غير موحد، في المقابل تصبح النقاط أقرب إلى بعضها عند قيم الطلب مع احتمالية عالية للحدوث (كثافة عالية). يعطينا هذا المنهج تقدير أكثر وضوحاً عن منهج مونت كارلو، ونصح باستخدامه دائماً عندما يكون هناك متغير عشوائي واحد أو اثنين في المحاكاة.

رغم ذلك، يظهر منهج مونت كارلو بشكل تلقائي عندما يكون هناك عدد مختلف من المتغيرات العشوائية كل منهم له توزيع (أو داخل توزيع مشترك). نفترض أن هناك ثلاثة متغيرات عشوائية مستقلة في هذه العملية الحسابية، فإن المنهج الذي يتخذ عدد من الأرقام العشوائية يتطلب الآن 1000 إعادة، لنحصل على 10 قيم مختلفة لكل متغير من الثلاثة.

بشكل أساسي، نحاول تقييم الأرباح المتوقعة من خلال الحصول على متوسط النتائج التي تحدث في شبكة ثلاثية الأبعاد، مع مبادعة الشبكة التي تم تحديدها بواسطة دالة الكثافة للمتغيرات العشوائية الفردية.

وبما أن عدد المتغيرات تصاعدي، يصبح العمل بمنهج قائم على الشبكة أمر أكثر صعوبة. على سبيل المثال، إذا كان هناك متغير عشوائي مختلف، كل منهم سيتم توزيعه بشكل موحد على $(0,1)$ ، إذن ربما نحتاج إلى نمذجة ذلك من خلال إعطاء كل متغير عشوائي 3 قيم: 0.25, 0.5 and 0.75. لكن مع 15 متغير سيصبح لدينا $14 \times 315 = 907$ سيناريو وهو عدد كبير للوصول إلى حل دقيق.

بالتالي، إذا كانت المسألة متعددة الأبعاد فإننا مضطرين لاستخدام منهج مونت كارلو، الذي قد يكون الطريقة الوحيدة للتقدم في الحل. في واقع الأمر، يعمل منهج مونت كارلو بشكل جيد في معظم الحالات مع دقة الحلول المحددة عن طريق عدد من السيناريوهات بناءً على عدد من المتغيرات العشوائية.

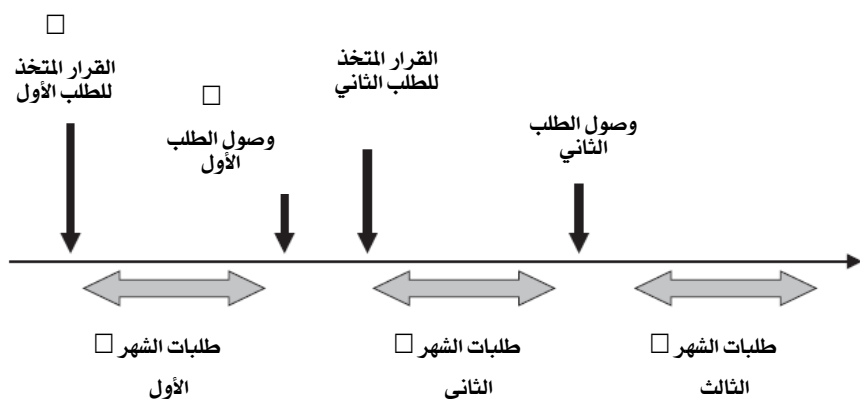
3-7 التعظيم العشوائي متعدد المراحل

الآن نعود مرة أخرى إلى حل مسائل التعظيم العشوائي حيث يجب على صانع القرار صنع سلسلة من القرارات المتعاقبة في ظل زيادة المعلومات المتاحة مع مرور الوقت. نهدف إلى استخدام محاكاة مونت كارلو في هذه البيئة متعددة المراحل. إعطاء وصف للمسألة داخل إطار عمل عام قد يكون محيراً، ومن ثم سوف نستخدم نموذج بسيط للتوضيح.

مثال 5-7 اليكسندر باتو للتوريدات

يستخدم الفريق الإداري لألكسندر باتو خطة أفقية $T = 3 \text{ months}$. في بداية كل شهر، تقوم الشركة بعمل طلب لكراسي الحديقة من المورد ثم يصل في بداية الشهر التالي. يتم عمل الطلب خلال الشهر، وإذا كان الطلب أكبر من المخزون المتاح فإن العملاء سوف يذهبوا لمكان آخر (لذلك فإن الطلب الزائد خسارة). يوضح الشكل 7-8 التسلسل الزمني.

تهتم الشركة بسياسة الطلب لنوع معين من كراسي الحديقة. يخضع الطلب في كل شهر على توزيع عادي بمتوسط 50 وانحراف معياري 10، والطلب في الشهور المتعاقبة مستقل. يتم شراء الكراسي بسعر 100 دولار للكرسي ويتم بيعه بسعر 140 دولار. ولكي تحتفظ بكرسي من شهر للشهر التالي سيكون الأمر عالي التكلفة - تصل تكلفته 10 دولار. نفترض أن لدينا مخزون بمبلغ $y_1 = 50$ في بداية الفترة الأولى، سيكون الخيار الأول هو اختيار x_1 ، عدد الكراسي المطلوبة في أول شهر. وإذا كان الطلب في أول شهر D_1 إذن يتم بيع $\min(y_1, D_1)$ والاحتفاظ بكمية $\max(y_1 - D_1, 0)$. ونبدأ المرحلة الثانية بكمية $y_2 = \max(y_1 - D_1, 0) + x_1$. ويتم تكرار كل العملية. نسمح بإضافة تكلفة الاحتفاظ بالمخزون في نهاية الأشهر الثلاثة ولكننا لا ننظر إلى أي تكاليف أخرى.



الشكل 8-7: الجدول الزمني للوازم اليسكاندرباتي

نجد في جدول البيانات الخاص بمحاكاة مونت كارلو في ملف BRMch7-Alexander.xlsx، أن كل صف في جدول البيانات يمثل سيناريو مختلف، وكل سيناريو ينطوي على ثلاثة طلبات عشوائية مختلفة. هناك 1000 سيناريو مختلف، وتم إنشاء جدول البيانات على أساس مخزون أولي 50 وطلب 55 في بداية الأسبوع الأول، وطلب 40 في بداية الأسبوع الثاني.

تحتوي الخلية B6 على الصيغة (ROUND (NORMINV (RAND(),Mu,Sigma), 0)، حيث أن الدالة NORMINV تعمل على تحويل الرقم العشوائي الموزع بشكل موحد (RAND) إلى توزيع طبيعي بمتوسط من الخلية التي تحمل إسم Mu وانحراف معياري من الخلية التي تحمل إسم Sigma. قامت الدالة ROUND(.,0) بتحويل الناتج إلى أقرب رقم صحيح. ثم تكررت نفس الصيغة في طلبات الشهور الأخرى في العواميد E و H. ويتم الحصول على كمية المبيعات الشهرية (عواميد C، F، I) من خلال الحد الأدنى للمخزون في بداية الشهر والطلب. كان المخزون في بداية الشهر 2 في الخانة D6 هو $=Inv\_S + Order1 - C6$ ، الذي يمثل المخزون الأولي (من الخانة التي تحمل إسم Inv_S) إضافة إلى طلب الشهر 1 (من الخانة التي تحمل إسم Order1) بطرح مبيعات الشهر 1 من الخانة C6. كما يحتوي العمود G على صيغة مشابهة.

نحصل على التكاليف من العمود J والذي يتكون من التكلفة الإجمالية للمنتجات المطلوبة بسعر 100 دولار للكرسي وتكلفة المخزون بسعر 10 دولار $\times$ (المخزون الأولي - المبيعات) في كل شهر من الشهور الثلاثة. ونحصل على الأرباح من مبيعات 3 شهور بسعر 140 دولار $\times$ (المبيعات) - التكاليف الإجمالية.

لاحظ أن الأرباح الناتجة عن السيناريوهات المختلفة تتنوع بشكل كبير، حتى بعد الحصول على متوسط 1000 إعادة، ما قد يقترب من القيمة الحقيقية المتوقعة، مازال هناك كثير من المتغيرات (يمكنك الضغط على F9 ورؤية ما يحدث لمتوسط الأرباح).

الآن نتساءل عن أفضل القيم لطلبات الشهر 1 والشهر 2؟ هذه المسألة تشبه قليلاً مثال شركة بارثينون حيث يمكننا إنشاء برنامج خطي بمتغيرات القرار x_1 و x_2 . يمكننا استخدام سولفر كأسهل طريقة للوصول إلى الحد الأقصى لمتوسط الأرباح في ملف BRMch7-Alexander.xlsx. ولكن من أجل عمل ذلك علينا تحديد قيم الطلب للحصول على نتائج محددة لـ 1000 سيناريو بعد تقييم التغيرات في كمية الطلب. ونستخدم دالة "لصق القيم" التي تم استخدامها في كتاب الأعمال الثانية في ملف BRMch7-Alexander.xlsx. حاول استخدام سولفر لإيجاد الخيار الأفضل من الطلبين، ينتج عن ذلك عدد من

السيناريوهات، ونحصل على الخيار الأفضل بكتابة $x_1 = 49$ and $x_2 = 36$.

نظراً لأحجام الطلبات المثلّي الخاصة بمسألة ألكسندر باتيو، نحن بحاجة إلى استخدام دوال مثل الحد الأدنى (المخزون، الطلب) لحساب المبيعات. ما يظهر في أركان الدوال (الأمكان التي ترتفع عندها المشتقات) ويجعل حل مسألة التعظيم أكثر صعوبة. وتكمن هذه الصعوبة فيما يحدث "بعيداً عن الأنظار" في سولفر.

هناك عدد من الطرق لإنشاء المسألة لتجنب هذه الدوال الصعبة. بوجه عام، مسألة التعظيم التي تظهر فيها عبارة مثل $\min(x, y)$ لكن ما زال منحنى نقاط الاحتمال محدب (وإذا كنا نريد الحصول على الحد الأقصى) منحنى دالة الهدف مقعر، يمكن أن يحل محلها نسخة من نفس الشيء دون الدوال غير السلسلة. حيث يمكن استبدال الشرط $A \leq \min(x, y)$ بإثنين من الشروط $A \leq x$ و $A \leq y$. لاحظ أن إذا كان لدينا شرط مثل $A \geq \min(x, y)$ إذن فمنطقة الاحتمال لن تظل محدبة وتفقد المسألة التي تمتلك حد أقصى محل واحد خواصها. إذا كان الهدف ينطوي على الحصول على الحد الأقصى لـ $\min(x, y)$ ، فنحن بحاجة إلى خلق متغير جديد v ومن ثم الحصول على الحد الأقصى لـ v وفقاً للشروط الأصلية إضافة شرطين جديدين: $v \leq x$ and $v \leq y$.

محاولات حل هذه المسألة تساعدنا على تذكر قواعد العمل مع $\min$ and $\max$ (نحتاج إلى هذه القواعد في فصل 9 عند مناقشة الخيارات الحقيقية).

$$\max(x, y) = -\min(-x, -y)$$

$$a \min(x, y) = \min(ax, ay) \text{ if } a \geq 0$$

$$\min(\min(x, y), z) = \min(x, y, z)$$

$$z + \min(x, y) = \min(z + x, z + y).$$

1-3-7 الشروط غير قابلة للتوقع

أثناء الحديث عن مسائل التعظيم العشوائي متعددة المراحل لم ننظر بعد إلى المعلومات التي تصبح متاحة بمرور الوقت. بشكل أساسي، نرى صعوبة المسألة ترجع إلى الحاجة لاختيار متغيرات القرار في بداية الحل، لكن لا يبدو ذلك صحيحاً. على سبيل المثال في المسألة

الخاصة بـ ألكسندر باتيو، من الجدير بالإدراك أن عندما يتم اختيار القيمة x_2 (الطلب الذي تم تحديده في بداية الشهر 2)، فالشركة لديها معلومات بالفعل عن الطلب أثناء الشهر الأول. إذا كان الطلب قوي ما أدى إلى بيع المخزون بالكامل، فمن المعقول أن يتم طلب المزيد، لكن إذا كان الطلب ضعيف وهناك مخزون كبير نسبياً متبقي في بداية الشهر 2، فمن الأفضل تقليل الطلب.

نحتاج إلى إنشاء نموذج لمسألة متعددة المراحل مع الانتباه إلى المعلومات الدقيقة التي قد يتم استخدامها في حال اختيار أي قرار. الجدير بالذكر أن الصيغة التي تجربنا على اختيار متغيرات القرار في البداية تمنحنا القليل من المرونة، لكن كما نرى، من السهل عمل أخطاء في الصياغة بسبب زيادة المرونة.

قد يسمح لنا النموذج القائم على عدد من القرارات بالاستجابة إلى سيناريوهات مختلفة متضمنة أحداث مختلفة. رغم ذلك، يمكننا الاستجابة فقط إلى ما يحدث بالفعل، وذلك يعني احتمالاً على شرط قد يمنعنا من النظر في الكرة الكريستالية لتحديد القرار الأفضل. ما سبق يُعرف بـ "الشرط غير المتوقع" ولاحظ أننا نريد استخدام أي معلومة نعرفها عما قد يحدث في المستقبل، على سبيل المثال، من خلال فهم توزيع متغير عشوائي غير معلوم. رغم ذلك، لا يمكن توقع القيمة الدقيقة للمتغير العشوائي، ولمعرفة المزيد حول هذه الفكرة نعود إلى مثال ألكسندر باتيو.

مثال 6-7: (متابعة) ألكسندر باتيو للتوريدات

نفترض حدوث أو ثلاثة سيناريوهات في الجدول الثاني من كتاب الأعمال BRMch7-Alexander.xlsx. من ثم، يوضح الجدول التالي قيم الطلب في الثلاث سيناريوهات التيتم اختيارها:

Scenario:	A	B	C
d_1	60	41	52
d_2	48	58	36
d_3	34	66	53

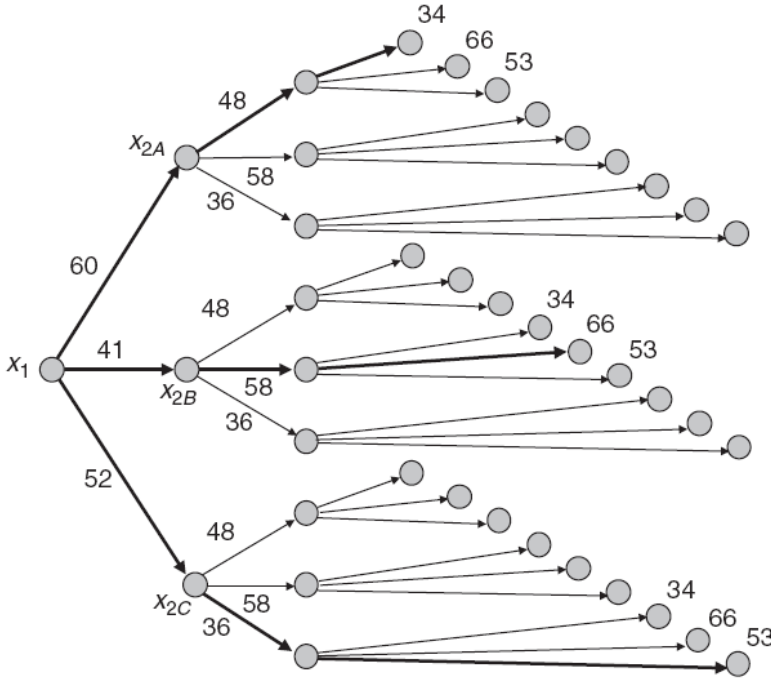
الصيغة الطبيعية تتضمن اختيار قيم مختلفة لـ x_2 في سيناريوهات مختلفة. السيناريو الأول يحتوي على قيمة عالية للطلب في الشهر الأول من ثم قد تكون قيمة x_2 أعلى من سيناريو B حيث يبلغ الطلب في الشهر الأول 41، ويظهر ذلك في الجدول الثالث من كتاب الأعمال. حاول استخدام سولفر لإيجاد الخيار الأفضل بين أربعة متغيرات مختلفة لـ x_1 وقيم x_2 في الثلاث سيناريوهات (x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}) ، قد تجد أن القيم المثلى هي $x_1 = 49$ ، $x_{2A} = 33$ ، $x_{2B} = 66$ ، $x_{2C} = 40$. تبدو النتيجة مثيرة للدهشة، بدلاً من زيادة الطلب في الشهر الثاني في السيناريو A، نجد أن الطلب أقل مع إيجاد أن x_{2A} أصغر من x_{2B} و x_{2C} . يرجع ذلك إلى أن الطلب في الشهر الثاني مطلوب للشهر الثالث، أي أن انخفاض قيمة d_3 في السيناريو A ما يجعل القيمة المثلى للطلب هي كمية صغيرة في الشهر الثاني.

نستطيع أن نرى ذلك من خلال السماح لقيمة المتغير x_2 بالاعتماد على السيناريو A, B, or C، بالتالي تخضع قيمة x_2 لتأثير d_1 و d_2 و d_3 ، والتي تكون المعلومات عنها غير متاحة وقت اتخاذ القرار. وباختيار سيناريو بعينه فإننا نحدد المتغيرات المستقبلية أيضاً. لذلك، من خلال الوضوح في المنهج المستخدم يمكن القول أن القرار في نهاية الشهر 1 يعتمد على أحداث لم تحدث بعد، وذلك يكسر الشرط غير المتوقع.

ربما تتضمن صيغة مسألة التعظيم العشوائي شرط غير متوقع ما يجعل القرارات التي يتم اتخاذها بناءً على نفس المعلومات المتاحة متشابهة. بالتالي، إذا بدأ كلا السيناريوهين بطلب 60 في الفترة الأولى، إذن فإن الشرط سيؤدي إلى نفس كمية الطلب في بداية الفترة الثانية. مع ذلك، وكما نرى في مثال ألكسندر باتيو في السيناريوهات الثلاثة، مازالت هناك احتمالية للخروج بصيغة خاطئة بسبب اختيار السيناريوهات التي تتيح المعلومات المستقبلية من ملاحظة الطلب العشوائي في الفترة الأولى. عادة ما يكون بناء الشرط غير المتوقع بشكل مباشر في المسألة أكثر أماناً.

وبالتالي، أفضل منهج هو العمل مع "شجرة سيناريوهات" بدلاً من تحديد عدد من السيناريوهات، ما يسمح لنا بتجنب إدخال الاعتماد الضمني عندما لا نرغب في ذلك. فالعمل وفق نظام "شجرة السيناريوهات" يؤدي إلى قيم متعددة للمتغير العشوائي في المرحلة

2، بناءً على ما حدث في المرحلة 1، وهكذا. عندما تكون الأحداث في المراحل المختلفة مستقلة، يمكننا تمثيل ذلك في "شجرة السيناريوهات" من خلال فصل نتائج المجموعة 2 عن الفرع الحالي. (فصل نتائج المرحلة 1).



شكل 9-7: مثال على شجرة السيناريوهات

يوضح الشكل 9-7 مسألة ألكسندر باتيو، حيث يتم تحديد احتمالات الطلب، لكل شهر ثلاثة قيم محتملة. بالطبع يعمل ذلك على تبسيط الاحتمالات بشكل شديد، بما أن القيمة المحتملة لكل شهر بين 30 و70.

تشير الأسهم السميكة في الشكل 9-7 إلى كمية الطلب في كل من السيناريوهات A، B، C التي تم اختيارها من بين 27 سيناريو محتمل. باستخدام مجموعة الـ 27 سيناريو يمكن إنشاء نموذج مناسب تصبح فيه قيمة x_2 مختلفة في نقاط الالتقاء الثلاثة الأولى إذا كان الطلب 60، 41، أو 52.

في نموذج "شجرة السيناريوهات" كالمثال الموضح، كلما كان المكون العشوائي دقيق كلما زادت السيناريوهات الفرعية في كل مرحلة. الأمر الذي قد يؤدي إلى شجرة هائلة من السيناريوهات وبالتالي صعوبات حسابية في إيجاد الحلول المثلى. أحد الخيارات المتاحة يتمثل في تقليل دقة النموذج لتقليل الخطوات المستقبلية بتقليل عدد الأفرع مع ارتفاع مستويات الشجرة.

هناك بحث دائم على كيفية حل هذا النوع من المسائل عددياً. يمتد هذا البحث إلى نطاق أوسع مما يتم تقديمه في هذا الكتاب، لكن يمكننا تقديم فكرتين، الأولى تدور حول تقسيم المسألة إلى مسائل فرعية منفصلة لكل نتيجة من نتائج المرحلة الأولى، وقد يكون ذلك ممثلاً في الشجرة الفرعية الثالثة في شكل 9-7.

إذا استطعنا تخمين قيمة x_1 فيمكننا إيجاد القيم المثلى لـ x_{2A} , x_{2B} , x_{2C} بسهولة. غالباً ما ستؤدي طريقة الحل إلى توليد معلومات الحساسية (خاصة عندما تكون المسألة خطية)، لذلك يمكن اختبار نتيجة حدوث تغيرات صغيرة في x_1 لكل شجرة فرعية. يمكن استخدام هذه المعلومات لإيجاد التغير في x_1 الناتج عن تحسن الأرباح المتوقعة. في المسائل الخطية يمكن تحويل هذه الفكرة إلى عملية توليد شروط إضافية في المسألة الأساسية والتي تستطيع أن تكون فعالة عددياً.

فكرة مهمة أخرى على المستوى العملي هي استخدام أشجار السيناريوهات حيث تؤدي السيناريوهات المختلفة إلى احتمالات مختلفة للحدوث بدلاً من احتمالات الحدوث المتساوية. هذه الفكرة تتعلق بالطريقة التي يتم بها توليد محاكاة مونت كارلو - فمن الممكن الحصول على تقديرات الكميات عن طريق التأكد أن مجموعة النماذج المستمدة من التوزيعات العشوائية ذات خصائص محددة.

يجب أيضاً ذكر نقطتين مهمتين فيما يتعلق بمسائل التعظيم العشوائي متعددة المراحل. النقطة الأولى نلاحظ أن عادة ما يكون قرار المرحلة الأولى هو ما نريد الوصول إليه. من الناحية العملية، يمكننا توقع أن مسألة التعظيم العشوائي التي يتم حلها على أساس متجدد. على سبيل المثال، في مسألة ألكسندر باتيو يشمل الحل قرار حجم الطلب في الشهر

1، إضافة إلى القرارات المتخذة للشهر 2 بناءً على الطلب في الشهر 1. التنفيذ المتجدد هنا يستخدم الحل لتحديد الطلب في الشهر 1، لكنه غير ملتزم بما يحدث في الشهر 2. بالتالي، في نهاية الشهر عندما يكون الطلب لذلك الشهر معلوم، يمكن حل المسألة مرة أخرى، لكن هذه المرة يتم تقديم شهر.

النقطة الثانية تتمثل في أن هناك علاقة وثيقة بين هذا النوع من المسائل والنوع الذي يتم حله باستخدام "البرمجة الديناميكية". ينطوي هذا المنهج على النظر عن كُتب لما قد يؤثر على القرارات المتخذة عند أي نقطة في الوقت المناسب. بهذه الطريقة يعتبر القرار دالة الظروف في الوقت المناسب t . على سبيل المثال، في مسألة ألكسندر باتيو قد يعتمد قرار حجم الطلب في بداية الشهر الثاني على كمية المخزون المتبقي من الشهر الأول، إذا افترضنا أن الطلب الذي نلاحظه في كل شهر مستقل عن الطلب في الشهور السابقة.

يرجع ذلك إلى أن في الوقت الذي نتخذ فيه القرار قد نتجاهل التكاليف والأرباح المحققة وننظر إلى تعظيم الأرباح المتبقية. هذه الأرباح المتبقية قد تعتمد فقط على حالة النظام ما يعني الاعتماد فقط على مستوى المخزون الحالي. إذا استطعنا إيجاد صيغة المسألة بحيث تكون القرارات عند كل مرحلة ممثلة في دالة الحالة عند هذه المرحلة، إذن ربط ما سبق بطريقة الحل من خلال بعض أنواع البرمجة الديناميكية المتكررة غالباً سيكون جدير بالاهتمام.

الآن نعود إلى المسألة التي تحدثنا عنها في بداية الفصل، حيث تساءلنا حول أفضل طريقة لتشغيل مرفق تخزين ضخّي مثل الذي يقع على جبل الراكون. العنصر العشوائي هنا يتعلق بغموض الأسعار، ومن ثم فإن شجرة السيناريوهات تتوافق مع احتمالات مختلفة للأسعار والتي قد تتغير مع مرور الوقت. سنجد ترابط معقد في سلسلة الأسعار، حيث تعتمد الأسعار على الطلب، والطلب يعتمد على درجات الحرارة. نريد تفريغ الخزان عند ارتفاع الأسعار وملاؤه عند انخفاضها، ومن ثم هناك حدين للأسعار، حد أعلى إذا صعد السعر أعلاه نستطيع توليد الطاقة، وحد أدنى يشير إلى استخدام الطاقة لملاؤ الخزان.

رغم ذلك، يمكننا أن نتوقع تغير هذه الحدود مع تغير كمية المياه في الخزان. إذا قاربت مياه الخزان على الانتهاء في بداية اليوم، قد نحتاج إلى أسعار مرتفعة لتشغيل

المولدات، كذلك، إذا كان هناك كمية كبيرة من المياه متبقية في الخزان في بداية اليوم قد نتظر انخفاض الأسعار قبل بدء ضخ المياه إلى الخزان. ومن ثم ربما تساعدنا هذه الأفكار على تحديد سياسة معاملات التغير التي يمكن تعظيمها باستخدام محاكاة مونت كارلو الخاص بأسعار الكهرباء.

4-7 القيمة عند شروط المخاطرة

حتى الآن نفترض أنه يمكن طرح المسألة كمسألة تعظيم (أو تقليل) القيمة المتوقعة لدالة الهدف. يمكن استخدام نفس المنهج للتعامل مع حالة يتم اتخاذ القرار فيها بناءً على عنصر تجنب المخاطرة. في هذه الحالة، نحدد دالة المنفعة المقعرة لصانع القرار ونربط بين دالة المنفعة ودالة الهدف. لكن في بعض الأحيان قد يكون استخدام مختلف أكثر نفعاً.

نفترض أن صنع القرار يتوقف على المخاطرة وخاصة الرغبة في تجنب النتائج السلبية. إذا كان هناك مستوى محدد للخسارة غير مقبول إذن أحد الخيارات يتمثل في تعظيم الأرباح المتوقعة كما سبق لكن الإصرار على أي حل يتم اختياره يجنب احتمالية حدوث خسارة أكبر من القيمة المختارة. على سبيل المثال، إذا حاولنا حل مسألة متعددة المراحل بالشكل التالي:

$$\min\{C_1(x) + E_{\xi}[Q(x, \xi)]\},$$

ثم يمكن إضافة شرط

$$C_1(x) + Q(x, \xi) < M \text{ for all } \xi.$$

بما أننا بصدد مسألة تعظيم، نحصل على قيم كبيرة للتكاليف من الصيغة $Q(x, \xi)$ والتي يجب تجنبها. مع ذلك، في عدد من المسائل يكون من الضروري تجنب احتمالية التكاليف الكبيرة بالكامل فقط للتأكد من قوة احتمالية تكبد تكاليف كبيرة. بالتالي نصل إلى الشرط

$$\Pr\{C_1(x) + Q(x, \xi) > M\} \leq \alpha$$

ما يُعرف بـ "شرط الفرصة"

سوف نناقش نسخة من المسألة حيث نحاول تعظيم الأرباح المتوقعة $E_{\xi}[\Pi(x, \xi)]$ من القرار x بسلوك عشوائي نصفه بالتغير العشوائي ξ . إذن، يمكن كتابة شرط الفرصة المعادل كالتالي

$$\Pr\{\Pi(x, \xi) < -M\} \leq \alpha.$$

لاحظ أننا مازلنا نستخدم دالة الهدف ذاتها لكن مع إضافة شرط. من ثم، إذا كانت α and $M = \$1\,000\,000$ and $0.01 =$ إذن يمكن التعبير عن الشرط بقول أن تعظيم الأرباح المتوقعة تخضع لشرط أن القرار x لا يعطينا أكثر من 1٪ فرصة لخسارة مليون أو أكثر.

ولكي نتمكن من حل هذه المسألة نحتاج إلى الحصول على معلومات حول توزيع الأرباح. $\Pi(x, \xi)$. إذا كمنا نعلم أن دالة التوزيع التراكمي لـ Π يتم الحصول عليها من خلال دالة $F_x(\cdot)$ التي تعتمد على x ، إذن يمكننا إعادة كتابة الشرط كالتالي

$$F_x(-M) \leq \alpha.$$

يرتبط ذلك بمقاييس القيمة عند المخاطرة التي ناقشناها في الفصل الثالث. على سبيل المثال، نفترض أن الشركة تريد تعظيم الأرباح المتوقعة لكن يجب أن تعمل تحت شروط المخاطرة التي تفرض حد 500000 دولار على 95٪ من قيمة المخاطرة. بالتالي يمكن وصف ذلك كمسألة ذات شرط فرصة واحتمالية أن تتجاوز الخسائر 500000 دولار أقل من 5٪.

$$\begin{aligned} &\text{maximize } E_{\xi}[\Pi(x, \xi)] \\ &\text{subject to } \Pr\{\Pi(x, \xi) < -500\,000\} \leq 0.05. \end{aligned}$$

مثال 7-7: تعظيم المحفظة مع شرط القيمة المعرضة للخطر

نعود إلى مسألة تعظيم المحفظة التي طرحناها في الفصل الثاني، نفترض أن هناك اثنين من الاستثمارات، كل منهما حصل على توزيع طبيعي للأرباح بعد عام واحد. الاستثمار الأول بقيمة 1000 دولار وتبلغ أرباحه المتوقعة 1000 دولار بانحراف معياري 400 دولار، في حين أن الاستثمار الثاني بنفس القيمة بينما تبلغ الأرباح المتوقعة منه 600 دولار بانحراف معياري 200 دولار. من خلال مسألة تعظيم عشوائي مع شرط فرصة يفترض أن لدينا 1000 دولار لاستثمارهم والرغبة في تعظيم العائد المتوقع وفقاً لاحتمالية فقدان الأموال بأقل من 5٪. بدلاً من ذلك، يمكن القول أن 99.5٪ من القيمة المعرضة للخطر أقل من 0 دولار.

نفترض أننا نستثمر w_1 1000 في الاستثمار الأول و w_2 1000 في الثاني. إذا افترضنا أن أداء

الاستثمارات مستقل، إذن الأرباح تتبع توزيع عادي بمتوسط $1000w_1 + 600w_2$ ، ومن ثم يمكن كتابة المسألة

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && 1000w_1 + 600w_2 \\ &\text{subject to} && \Pr\{w_1X_1 + w_2X_2 < 0\} \leq 0.005 \\ &&& w_1 + w_2 = 1, \\ &&& w_1 \geq 0, w_2 \geq 0. \end{aligned}$$

حيث أن X_1 و X_2 هم المتغيرات العشوائية التي تعطينا العائدات المتوقعة لكل من الاستثمارات. والتغير في إجمالي العائد نحصل عليه من $(400w_1)^2 + (200w_2)^2$ ونحصل على الانحراف المعياري من الجذر التربيعي لما سبق.

ويمكن حساب احتمالية حدوث خسارة من قيمة z مما يعطينا عدد من الانحرافات المعيارية بمتوسط أعلى الصفر، حيث لدينا

$$z = \frac{1000w_1 + 600w_2}{\sqrt{(400w_1)^2 + (200w_2)^2}}.$$

ويمكن استخدام جداول التوزيع العادي أو دالة norminv في جدول بيانات لإظهار أن $z \geq 2.5758$ لكي نتأكد أن احتمالية أن القيمة أقل من صفر لا تتجاوز 0.005. بالتالي، يصبح الشرط

$$\frac{1000w_1 + 600w_2}{\sqrt{(400w_1)^2 + (200w_2)^2}} \leq 2.5758.$$

نستطيع القسمة على 100 وتربيع هذا التباين لنرى أن المسألة يمكن كتابتها كالتالي

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && 1000w_1 + 600w_2 \\ &\text{subject to} && (10w_1 + 6w_2)^2 \geq (2.5758)^2(16w_1^2 + 4w_2^2), \\ &&& w_1 + w_2 = 1, \\ &&& w_1 \geq 0, w_2 \geq 0. \end{aligned}$$

وبما أن الهدف خطي، فنصل إلى الحل الأمثل عند حد منطقة الاحتمالات، ما يعني أن شرط عدم التكافؤ سيكون ملزماً (مع الاحتفاظ بالتكافؤ) وبما أن يمكننا استبداله باستخدام $w_2 = 1 - w_1$ ، نتوصل إلى

$$a(16w_2^2 + 4(1 - w_1)^2) - (10w_1 + 6(1 - w_1))^2 = 0$$

حيث أن $a = (2.5758)^2 = 6.6349$ وبضرب ذلك نستنتج أن

$$(20a - 16)w_2^2 - (48 + 8a)w_1 + 4a - 36 = 0$$

يتم تحقيق الحد الأقصى أعلى جذور المعادلة التربيعية، لذلك

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{5a - 4} (a + 6 + \sqrt{a(61 - 4a)}) \\ &= \frac{1}{29.1745} (12.6349 + \sqrt{228.6413}) \\ &= 0.95137 \end{aligned}$$

إذا قسمنا قيمة الاستثمارات إلى 951 دولار في الاستثمار الأول والمتبقي 49 دولار في الاستثمار الثاني. في هذه الحالة، أي وزن أقل من 951 دولار في الاستثمار الأول سيحقق 99.5٪ قيمة معرضة للخطر أقل من الصفر (احتمالية أقل من 0.5%).

يمكن استخدام نفس المنهج عندما يكون لدينا أكثر من سهمين. نفترض أن لدينا استثمار ثالث بمتوسط أرباح 1200 دولار وانحراف معياري 600. تصبح المسألة كالتالي

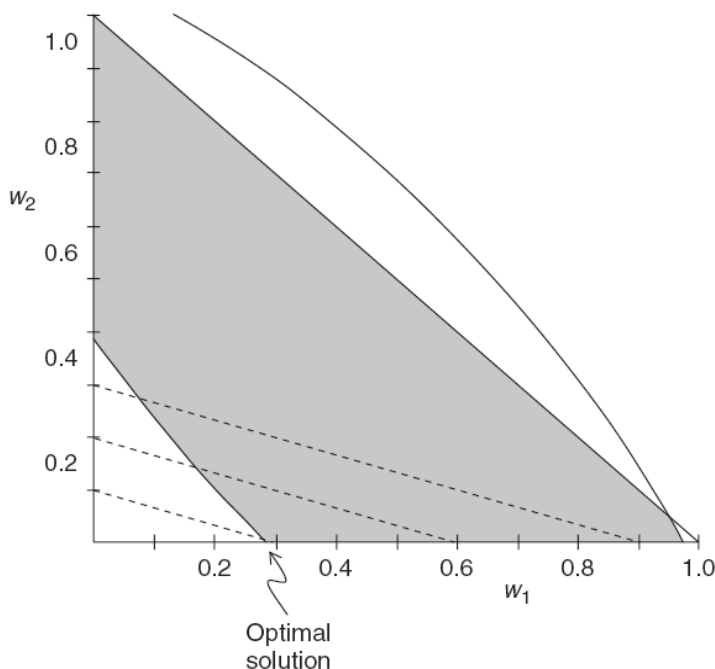
$$\text{maximize } 1000w_1 + 600w_2 + 1200w_3,$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & (10w_1 + 6w_2 + 12w_3)^2 \geq (2.5758)^2 (16w_1^2 + 4w_2^2 + 36w_3^2), \\ & w_1 + w_2 + w_3 = 1, \\ & w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0. \end{aligned}$$

يمكننا الاستبدال بين $w_3 = 1 - w_1 - w_2$ لإعادة صياغة ذلك كمسألة تعظيم في منطقة ثنائية الأبعاد كالموضح في شكل 10-7.

لتصبح دالة الهدف

$$1000w_1 + 600w_2 + 1200(1 - w_1 - w_2) = 1200 - 200w_1 - 600w_2$$



شكل 10-7: تعظيم محفظة تضم ثلاثة مشاريع استثمارية مع شرط القيمة المعرضة للخطر

وتشير الخطوط المقسمة في هذا الشكل إلى حدود الدالة، والجزء المظلل يشير إلى منطقة الاحتمالات، والخط المستقيم العلوي ينتج عن الشرط $w_3 \geq 0$ ، ما يتم ترجمته إلى $w_1 + w_2 \leq 1$. وجدير بالذكر أن المنحنيات ناتجة عن شرط القيمة المعرضة للخطر، فهم جزء من قطع كبير لأن الشرط تربيعي في w_1 و w_2 . ومن ثم فإن الحل الأمثل هو $w_1 = 0.2854, w_2 = 0, w_3 = 0.7146$.

ملاحظات

مثال شركة بارثينون يعتمد على مثال يظهر على صفحات "ويكي" على موقع "NEOS" الإلكتروني ([http://wiki.mcs.anl.gov/NEOS/index.php/Stochastic Programming](http://wiki.mcs.anl.gov/NEOS/index.php/Stochastic_Programming))، حيث تقيم جامعة وينكونسين ماديسون مشروع على سرفر NEOS يسمح لأي شخص بتقديم مسائل التعظيم وإتاحتها للحل من قبل محبي هذا الفن.

هناك عدد من الكتب التي تناقش التحسين العشوائي على مستويات مختلفة في إطار النمذجة. كتاب "بيرج ولوفوكس" الصادر عام 2011 يحتوي على معالجة شاملة للنظرة إلى المناهج التي يمكن استخدامها لحل مسائل التعظيم العشوائي.

يأتي المصطلح الكلاسيكي "مسألة بائع الصحف" في الإدارة التشغيلية من الطريقة التي يتم بها الصياغة في سياق محل بيع الصحف. فالصحيفة غير المباعة حتى نهاية اليوم يتم إرجاعها إلى دار النشر، من ثم يجب اتخاذ قرار بشأن عدد الصحف المطلوب لتغطية الطلب اليومي الغير معلوم. يتم مناقشة هذه المسألة من خلال الورقة العلمية المقدمة من شابيرو وفليبوت (2007).

مراجع

- Birge, J. and Louveaux, F. (2011) Introduction to Stochastic Programming. Springer.
- King, A. and Wallace, S. (2012) Modeling with Stochastic Programming. Springer.
- Shapiro, A. and Philpott, A. (2007). A Tutorial on Stochastic Programming. Manuscript available at <http://www2.isye.gatech.edu/ashapiro/publications.html>.

تمارين

7-1 بارثينون للنفت واتباع سلوك تجنب المخاطر

- نفترض أن الإدارة تستخدم دالة المنفعة $u(x) = \sqrt{x}$. قم بعمل التعديلات المناسبة على جدول البيانات BRMch7-Parthenon1.xlsx للاستفادة من الدالة. لاحظ أن:
- (أ) دالة الهدف معرفة على إجمالي الأرباح المتوقعة من قبل بارثينون (ويجب أن تكون إيجابية لهذه الدالة) – مع افتراض أن سعر النفط 200 دولار للبرميل.
- (ب) افترض أن بارثينون ترغب في تعظيم المنفعة المتوقعة، من ثم يجب الحصول على متوسط السيناريوهات الثلاثة. ستصبح المسألة غير خطية ، وبالتالي يجب اختيار الخيارات على سولفر بشكل مناسب.

هل تغير الخيار الأمثل لمشتريات النفط في فبراير (x_1) بأي شكل من الأشكال؟ (بما أن دالة المنفعة غير معرفة في حالة حدوث خسارة، عليك التأكد من أن كل سيناريوهات نقطة بداية التعظيم مربحة).

2-7 أياكس لايتس

تبيع شركة أياكس لايتس لمبات ليد، وترى أن هناك اتصال خطي بين الطلب والسعر. كان سعر اللبة فيما قبل 10 دولار وإجمالي المبيعات 50000 شهرياً. بعد حدوث تقدم تقني انخفضت التكلفة وبالتالي انخفضت أسعار اللمبات ليصبح سعر اللبة 5 دولار. مر ثلاثة شهور قبل حدوث تغيرات في السوق مع دخول مورد جديد. تقوم الشركة باستيراد وتعبئة اللمبات لكن هذه اللمبات يتم الحصول عليها من مورد والذي بدوره سوف يورد كمية ثابتة شهرياً بمهلة لمدة شهر واحد. تمتلك شركة أياكس 100000 لمبة ليد في المخازن وقامت بتحديد سعر اللبة عند 8 دولار في الشهر المقبل. يتمثل القرار الأول في الكمية الإجمالية التي يجب طلبها للاستخدام خلال الشهور 2 و3، الفترة التي نطلق عليها y ، يجب اتخاذ القرار على الفور. بعد مراجعة المبيعات في شهر 1، سوف تقوم الشركة بخفض متغيرات الطلب في المعادلة وتحديد الأسعار في شهري 2 و3، ومن ثم يتم استخدام المخزون بالكامل في شهر 3. نكتب Y للإشارة إلى الكمية المطلوبة و S إلى الطلب غير المعلوم في شهر 1، وبالتالي يمكن صياغة المسألة كالتالي

$$\max_Y (500\,000 + 5Y + E_S(Q(Y, S)))$$

حيث أن

$$Q(Y, S) = (100\,000 - S + Y) \left(10 - \frac{S}{5000} + \frac{Y}{50\,000} \right) + 8S.$$

إذن أثبت أن أياكس يجب أن تقوم بعمل طلب يتناسب مع السياسة المثلى لمتوسط الطلب S .

3-7 توليد متغيرات عشوائية

نفترض أن الطلب عشوائي وله دالة كثافة كالتالي

$$f(x) = 0 \text{ for } x \leq 10$$

$$f(x) = (x/2) - 5 \text{ for } x \in (10, 11)$$

$$f(x) = 0.5 \text{ for } x \in [11, 12]$$

$$f(x) = 6.5 - (x/2) \text{ for } x \in (12, 13)$$

$$f(x) = 0 \text{ for } x \geq 13.$$

أحصل على خمس نماذج لمتغيرات عشوائية باستخدام المنهج الذي تم مناقشته في هذا الفصل لتوليد خمسة متغيرات عشوائية من هذا التوزيع باستخدام النماذج العشوائية التالية من التوزيع الموحد على 0.476, 0.789, [0,1]: 0.543, 0.860, 0.172.

4-7 الشروط غير المتوقعة في مثال ألكسندر باتيو

نفترض أن المسألة تم حلها في كتاب الأعمال الثالث في ملف BRMch7-Alexander.xlsx على أساس أن $x_{2A} = 33$, $x_{2B} = 66$, and $x_{2C} = 40$ ، وضح لماذا يكون الحل غير المتوقع للمسألة $x_{2A} = x_{2C}$.

5-7 سولستاييس انتربرايزيس

سولستاييس انتربرايزيس متخصصة في إدارة البارات في الأحداث الرياضية، يجب اتخاذ قرار بشأن حجم الخيمة المطلوب حجزها وعدد العاملين في البار لاستضافة نهائي بطولة الدولة للكريكيت للنساء تحت 21 سنة. ستقام النهائيات في سيدني، إذا قامت نيو ساوث ويلز بعمل النهائي، فعدد الجمهور المتوقع سوف يكون أكبر، كما أن المبيعات الإجمالية تعتمد على الطقي في هذا اليوم ($W = \text{رطب}$ ، $d = \text{جاف لكنه لطيف}$ ، $h = \text{حار}$). إذا لعب فريق نيو ساوث سيتي ويلز في النهائي، فالمبيعات المحتملة بالدولار قد تتبع توزيع عادي بانحراف معياري $= 2000$ ومتوسط 8000 دولار، 16000 دولار، أو 24000 دولار بناءً على الطقس. لكن إذا لم يلعب في النهائي فإنها ستتبع توزيع عادي بانحراف معياري 1000 ومتوسط 4000 دولار، 8000 دولار أو 12000 دولار بناءً على الطقس. مع ذلك، فإن إجمالي المبيعات يخضع إلى عدد الأشخاص المقدم لهم الخدمة، بقيمة مقدرة 5000

دولار للفرد محدوداً بحجم الخيمة. لدينا خمسة أحجام خيمات متاحة لعدد 2، 3، 4 أو 5 أشخاص. من ثم فإن ترتيب الأحداث كالتالي: أولاً يجب أن تقرر سولستاييس حجم الخيمة وتقوم بحجزها، ثم لعب مباراة نصف النهائي والتي ستحدد ما إذا كان فريق نيو ساوث ويلز سيشارك في النهائي أم لا - حيث هناك احتمالية بنسبة 50٪ لحدوث ذلك - ثم يجب على سولستاييس التنسيق مع طاقم العاملين في البار ومن ثم تحديد عدد الأفراد المطلوب توظيفهم. أخيراً، تُلعب المباراة وسط طلب على المشروبات التي تعد متغير عشوائي يعتمد على الطقس. لا تستعين سولستاييس بتوقعات الطقس في اتخاذ قراراتها. يبلغ إيجار الخيمة التي تتسع لعدد x من عاملي البار 2500 دولار. يحصل كل فرد من العاملين في البار على 500 دولار مقابل يوم عمل ومتوسط ربح على المشروب المباع 1.50 دولار.

باستخدام منهج مونت كارلو تم الحصول على السيناريوهات الموضحة في جدول 2-7.

الجدول 2-7: عشرة سيناريوهات لشركة Solstice Enterprises.

الطلب di	الطقس	نيو ساوث ويلز في النهائي	السيناريو
5214	رطب	نعم	1
8479	جاف	لا	2
8531	جاف	لا	3
7473	رطب	نعم	4
22578	حار	نعم	5
18192	جاف	نعم	6
11456	حار	لا	7
16921	جاف	نعم	8
11439	حار	لا	9
8477	جاف	لا	10

النموذج المقترح كالتالي. اختر x (حجم الخيمة: 2، 3، 4 أو 5)، y_i (عدد العاملين في السيناريو i : 2، 3، 4 أو 5) و s_i (المبيعات في السيناريو i) إلى

$$\text{maximize } \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (1.5s_i - 500y_i - 2500x)$$

$$\text{subject to } s_i \leq d_i,$$

$$y_i \leq x,$$

$$s_i \leq 5000y_i.$$

اشرح لماذا لا يفي هذا النموذج بالشروط غير المتوقعة، وبالتالي فإنها مصاغ بشكل خاطئ. أعد صياغة النموذج ليفي بالشروط غير المتوقعة.

6-7 القيمة المعرضة للخطر

يملك المستثمر سهمين وسند خزانة خالي من المخاطرة. كل 1000 دولار يتم استثمارها في السند سيكون لها عائدات 1200 دولار في ثلاثة سنوات. البدائل هي سهم A، حيث أن استثمار 1000 دولار سينتج عنه متوسط عائد 1250 دولار بعد ثلاثة سنوات بانحفاً معياري 100 دولار، وسهم B، حيث أن استثمار 1000 دولار سينتج عنه متوسط عائد 1300 دولار بانحراف معياري 150 دولار. يرغب المستثمر في إيجاد أفضل أوزان للمحفظة المالية لتعظيم الأرباح المتوقعة وفقاً لشرط أن 99٪ من القيمة المعرضة للخطر هي صفر أو خسارة (أي أن هناك فرصة بنسبة 1٪ أو أقل لخسارة الأموال). احسب العائدات التي تم توزيعها بطريقة عادية على مدار الثلاث سنوات وعائدات A و B المستقلة. حاول صياغة مسألة التعظيم وحلها.

الفصل الثامن

التحسين القوي

إدارة المخاطرة من خلال التلاعب

روجر ريلبي المدير التنفيذي لشركة سيفتي فرست، يريد زيادة شعبية شركته. هنا يظهر الغموض في الجانب المتعلق بالطلب على مختلف منتجات الأمان، بينما يرجع الغموض المتعلق بأحجام التصنيع إلى الفحص الصارم لكل خطوط الإنتاج. في بعض الأحيان يتم رفض أكثر من 10٪ من الإنتاج الأسبوعي بسبب الجودة. يتبع روجر منهج غير تقليدي لإدارة المخاطر بالعمل مع ويدني موريس التي تعمل كمدير إدارة المخاطر، يتمثل الدور الذي تلعبه وديني في تحليل السيناريوهات المحتملة من حيث الطلب وعائد التصنيع. الأمر ليس سهلاً بالشكل الذي يبدو عليه، حيث أن قرارات التصنيع قد تكون خاطئة في كلا الاتجاهين: فزيادة تصنيع أحد المنتجات التي لا تحقق مبيعات جيدة قد يؤدي إلى فائض، وتقليل تصنيع أحد المنتجات التي تحقق مبيعات جيدة يعني زيادة طلبات التصنيع واللجوء إلى ورديات إضافية بتكلفة أعلى ما قد يؤدي أيضاً إلى خسارة للشركة.

روجر عادة ما يمتلك وجهة نظر متشائمة ويرى أن عملية إدارة المخاطر عبارة عن لعبة بينه وبين ويديني. سيصل إلى خطة إنتاج، ثم يصل ويديني إلى لعب دوراً ما من "قانون مورفي" لخلق مجموعة من سيناريوهات الإنتاج التي اختارها روجر. بعد ذلك، يستخدم روجر ويديني جدول بيانات بسيط خاص بالخطة للتوصل إلى كم الأرباح (أو الخسائر) المتوقع في أسوأ السيناريوهات. ثم تأتي الخطوة الأخيرة بالنسبة لروجر وهي تعديل كميات التصنيع في محاولة لتحسين الأداء العام للشركة، لكن مع كل مجموعة جديدة من قرارات التصنيع التي تقوم ويديني بإعادة تصميمها في أسوأ السيناريوهات المحتملة. في الغالب، سيقوم روجر ويديني بعمل أربعة أو خمسة إعدادات قبل أن يقرر روجر أنه ليس بحاجة إلى تجربة المزيد من الاختلافات.

يجب على روجر ويديني الموافقة المشتركة على نطاق الأرقام الذي سيتم الاختيار منه إلى جانب الموافقة على تقديرات التكاليف المطلوبة في جدول البيانات الخاص بالخطة قبل إقرار الخطة. الآن هما يمتلكان الإجراءات التي سيتم اتباعها ويستمتعون بالتحدي الذي يواجههم أثناء اللعب. تقول ويديني أنها تستدعي الموهبة الماكرا لديها ، في حين أن روجر مقتنع أنه توصل إلى خطط إنتاج قوية: "هذه الخطط الإنتاجية قد تبدو محافظة جداً، لكنني أعلم أن بعد محاولات ويديني بتفنيدها لن يتم إلقاءها بسبب مجموعة من بيانات الطلب والتصنيع غير المتوقعة - وذلك يمثل الكثير بالنسبة لي".

1-8 غموض حقيقي: خلف الاحتمالات

الآن الوقت مناسب للنظر مرة أخرى في إحدى الموضوعات التي قمنا بعرضها سريعاً في الفصول السابقة، حيث ناقشنا فكرة الاحتمالات فيما يتعلق بالمخاطرة كأمر مفروغ منه. وجدير بالذكر أن المخاطر التي ناقشناها من قبل تتعلق بالخسائر التي يمكن أن نتكبدها أو الاحتمالات المتعلقة بذلك. في بعض الأحيان يمكننا الثقة في الاحتمالات ("ما احتمالية ظهور ورقة الآس عندما نختار بشكل عشوائي بين مجموعة كاملة من أوراق اللعب؟"). وفي بعض الأحيان يتم استنتاج الاحتمالات من النظر إلى تكرار حدوث شيء ما في الماضي ("ما احتمالية أن يتم اختيار شخص أشول في مدينة نيويورك عشوائياً؟") وفي أحيان أخرى نصل إلى حكم

قائم على التجربة الشخصية، ربما نستجمع ما تعلمناه في بيئات مختلفة ("ما احتمالية أن يرتفع سعر الذهب خلال العامين المقبلين؟").

أحد كبار المتكلمين في القرن العشرين، فرانك نايت، يحذرنا من الخروج برقم محدد عند النظر إلى احتمالية وقوع حدث في المستقبل. عمل نايت بالتدريس في شيكاغو منذ عام 1928 حتى وفاته في عام 1972 عن عمر 87 عام. لكن الفكرة الأكثر تأثيراً طرحها في رسالة الدكتوراة عام 1916، حيث ناقش نايت وجود نوع من الغموض غير قابل للقياس من خلال الاحتمالات:

"يجب تحديد الغموض بحس مختلف جذرياً عن المفهوم التقليدي للمخاطرة وإن كان غير منفصل عنه الحقيقة أن "المخاطرة" تعني في بعض الحالات كمية يمكن قياسها، لكنها في أحيان أخرى تعتبر شيء لا يحمل هذه الخاصية، وهناك فوارق مهمة وبعيدة المدى في التعامل مع ظاهرة تعتمد على واحدة من حقيقتين كلاهما حقيقي".

على جانب آخر، قدم لورد كيلفن تعليق مشهور عن أهمية القياس قائلاً إذا كنت لا تستطيع قياس شيء ما إذن فالسبب هو "نقص معلوماتك وضعف قابلية القياس"، اعتقد كيلفن أن علماء الاقتصاد وغيرهم من علماء الاجتماع فسروا تصريح كيلفن كالتالي "إذا لم تستطع القياس على أية حال". شعر كيلفن بالغضب تجاه من يحاولون تحويل علم الاقتصاد على علم مبني على السلوك العقلي مثل الفيزياء.

يرى نايت أن الحياة مليئة بمحاولة الوصول إلى أحكام فردية عن الأحداث المستقبلية، وغالباً قد يصل الفرد إلى درجة محددة من الثقة حول حكمه، ولا يمكن الحكم على احتمالية ما بأنها صحيحة إذا كانت "دون معنى ومضللة".

أكد مينارد كينيس في كتابته عام 1937 على الفارق بين ما يمكن حسابه كاحتمالية وعدم اليقين المحيط بشيء ما مثل تقادم اختراع جديد. "فيما يتعلق بهذه المسائل لا يوجد أساس علمي يتم على أساسه حساب احتمالية، ببساطة نحن لا نعلم. وجدير بالذكر أن

الحاجة لاتخاذ إجراء أو قرار يجبرنا كممارسين على بذل قصارى جهدنا لتجاهل هذه الحقيقة الخاطئة..."

وفي مواجهة ضرورة اتخاذ قرارات عند وجود غموض، هناك منهجين واسعي النطاق: المنهج الأول يتمثل في الدفع القوي لتقييم واحد على الأقل للاحتتمالات حتى وإن كان يخضع لشروط نظرية نابت عن الغموض حيث نشعر بعدم الارتياح لإثبات ذلك. تتمثل الفكرة في النقطة التي يختار فيها صانع القرار بين عدد متنوع من الخيارات المحتملة، من ثم فإن القرار المتخذ سيتضمن عدد من القيم للاحتتمالات المفقودة. من الناحية المنطقية، يُفضل ترجمة الغموض إلى احتمالية قائمة على الخبرة الشخصية ما يغذي القرار الذي يجب اتخاذه، بدلاً من ظهوره كقرار فرعي. وبالنظر للأمر من هذه الزاوية، يتحول الأمر إلى البحث في أعماق الفرد وربما اعتقاداته غير الواعية فيما يتعلق بالاحتمالات المختلفة. تم بذل جهد كبير لإيجاد أفضل طريقة لاستنباط اعتقادات صناع القرار بشأن قيم النتائج المختلفة واحتمالات هذه النتائج.

المنهج الثاني يتمثل في البحث عن مقدار الضرر الناتج عن قرار خاطئ بدلاً من التعظيم الكامل لدالة الهدف؛ هذه هي الفكرة التي تكمن خلف التحسين القوي؛ الموضوع الذي سوف نناقشه في هذا الفصل. أحد الدوافع يتمثل في الميل إلى المبالغة في تقدير قناعاتنا، لكن منهج التعظيم القوي سيجنبنا حدوث ذلك.

يقتبس برنشتاين من جي كي تشيسترتون الذي قال عن الحياة "تبدو بشكل حسابي ومنتظم أكثر مما هي عليه، دقتها ظاهرة، لكن عدم الدقة غير ظاهر، ويكمن طابعها البرئ في الانتظار". من خلال التحسين القوي نحاول التعامل مع الطابع البري للحياة.

2-8 تجنب الكارثة عند وجود الغموض

القرار القوي هو الذي يضمن عدم كارثة النتيجة، فمعظم جوانب المسألة غامضة وهناك على الأقل احتمالية للخروج بنتيجة سيئة؛ من ثم يجب علينا محو أو تقليل هذه الاحتمالية. الجدير بالذكر أن النتائج السالبة تعزز أهمية المعرفة بنطاق القيم التي من الممكن أن

تكون الكمية الغامضة من بينها، وذلك النطاق سيحل محل بيانات أكثر دقة عن الاحتمالات. في أحيان كثيرة نتعامل مع متغيرات الغموض المتعدد، ومن ثم نحتاج إلى اتخاذ قرار ما إذا كان من المفترض تحديد نطاقات لكل متغير على نحو مستقل أو النظر في مجموعة القيم المحددة للنطاق.

المسألة الأولى التي سنتناولها تتمثل في محاولة صانع القرار لتعظيم الهدف الذي يخضع لمجموعة من الشروط، لكن معاملات الشروط غير معلومة. في هذه الحالة، تكون النتيجة السالبة (التي نحاول تجنبها) واحدة من الشروط المنتهكة، ويوضح المثال التالي هذا النوع من المسائل.

مثال 8-1: خطة إنتاج MRB في ظل وجود غموض

نفترض أن MRB المحدودة شركة تصنيع تحتاج إلى تلبية الطلب بإنتاج 10000 وحدة من المنتج A وتمتلك مصنعين يمكن استخدامهم في ذلك، لكن هناك متغيرات في التكاليف وعناصر الكفاءة. يتحمل المصنع 1 تكاليف عمالة 30 دولار في الساعة، بينما يتحمل المصنع 2 تكاليف عمالة 26 دولار في الساعة. تستطيع الميكنة في المصنع 1 إنتاج 130 وحدة من المنتج A في الساعة، بينما يستطيع المصنع 2 إنتاج 110 وحدة في نفس المدة الزمنية. يمكننا صياغة قرار شركة MRB على هيئة مسألة تعظيم لتقليل التكاليف المتعلقة بتلبية الطلب. إذا كان x_1 و x_2 يمثلان الساعات المستغرقة في مصنع 1 ومصنع 2 على التوالي، إذن فنحن نريد

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && 30x_1 + 26x_2 \\ &\text{subject to} && 130x_1 + 110x_2 \geq 10\,000 \\ &&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

لكن إذا أردنا عمل جدول مقدماً، من ثم فإننا قادرون على تلبية الطلب، وبالتالي ربما نريد مزيد من الأمان. ما مدى الثقة في أن يتطابق معدل الإنتاج مع التوقعات؟ فمن الممكن أن تتعطل الميكنة أو يتغير العاملين أو عدد الوحدات المنتجة ربما لا يظل 130

و110. من ثم، فالأفضل حل المسألة حيث يكون الشرط.

$$(130 - \Delta_1)x_1 + (110 - \Delta_2)x_2 \geq 10\,000$$

كافياً لبعض القيم التي يتم اختيارها لـ Δ_1 و Δ_2 .

يمكننا أيضاً تخيل نسخ من نفس المسألة أكثر تعقيداً. على سبيل المثال، نفترض أن MRP بحاجة إلى تلبية طلب 5000 وحدة من المنتج B، بينما يبلغ معدل إنتاج مصنع 1 ومصنع 2 من هذا المنتج 90 وحدة و80 وحدة في الساعة على الترتيب. إضافة إلى ذلك، هناك شرط متعلق بالوقت المتاح، فكل مصنع من الإثنين لديه 90 ساعة قبل تاريخ تسليم الطلب. إذن بكتابة y_1 و y_2 للرمز إلى الساعات المستغرقة في إنتاج المنتج B في المصنعين، تصبح مسألة تقليل التكاليف كالتالي:

$$\text{minimize } 30(x_1 + y_1) + 26(x_2 + y_2)$$

$$\text{subject to } (130 - \Delta_1)x_1 + (110 - \Delta_2)x_2 \geq 10\,000$$

$$(90 - \Delta_3)y_1 + (80 - \Delta_4)y_2 \geq 5000$$

$$x_1 + y_1 \leq 90$$

$$x_2 + y_2 \leq 90$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

الآن لدينا أربعة من عناصر الأمان $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ للاختيار من بينهم. إضافة إلى ذلك، ماذا لو كان هناك اتصال بين معدلات إنتاج كلا المنتجين في مصنع 1؟ ربما تصبح الأشياء أكثر تعقيداً وقد يصبح رسمها بالتفصيل سهلاً.

وبدلاً من الدخول سريعاً في التفاصيل، سنعود خطوة إلى الخلف، حيث نهدف إلى تعظيم هدف يخضع لمجموعة من الشروط لكل من القيم الحقيقية للمعاملات محتملة الحدوث. مجموعة قيم المعاملات المحتملة بالغة الأهمية، ونفترض أنه يمكننا تحديد هذه المجموعة في الوقت الراهن. فالتكوين المسألة العام (برمجة خطية قوية) مع إثنين من المتغيرات وإثنين من الشروط كالتالي

$$RLP : \text{ maximize } c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \text{ for all } (a_{11}, a_{12}) \text{ in } A_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \text{ for all } (a_{21}, a_{22}) \text{ in } A_2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

وقد يمتد ذلك إلى أي عدد من المتغيرات والشروط. لاحظ أن خيار عمل مسألة تعظيم باستخدام الشروط " $\leq$ " اعتباطي إلى حد ما - يمكننا تحويل مسألة التعظيم إلى مسألة تقليل بالنظر إلى سالبة الهدف، ويمكن تغيير التباينات المحيطة بالضرب في -1.

نطلق على مجموعة القيم المحتملة للمعاملات في شرط ما "المجموعة غير المعلومة" لهذا الشرط. أول ما نلاحظه أنه يمكننا تحديد المجموعة غير المعلومة بشكل منفصل لكل من الشروط المختلفة. قد نجد بعض العلاقات المعقدة بين القيم a_{11} و a_{12} للشرط الأول والقيم a_{21} و a_{22} للشرط الثاني لنصل إلى مجموعة غير معلومة مكونة من $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in A$ ، لكن بما أننا في حاجة إلى استيفاء الشروط لكل مجموعة من المعاملات المحتملة، لن تصنع هذه العمليات فارق في نهاية الأمر. يجب أن تفني متغيرات القرار x_1 و x_2 بالشرط الأول لأي قيم محتملة من a_{11} و a_{12} كزوج في المجموعة A ، ويجب أيضاً استيفاء الشرك الثاني لأي قيم محتملة من a_{21} و a_{22} . بالتالي، يمكننا تقسيم المجموعة A إلى عناصر منفصلة لكل شرط، كما حدث في صيغة RLP.

طبيعة حل هذه المسألة يتوقف على تركيب المجموعات الغامضة. نفترض أن أحد الشروط يأخذ الشكل التالي

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \text{ for all } (a_1, a_2) \in A.$$

كل عنصر (a_1, a_2) من المجموعة A ينتج شرط مختلف وكل منهم يتم استيفاءه من خلال (x_1, x_2) .

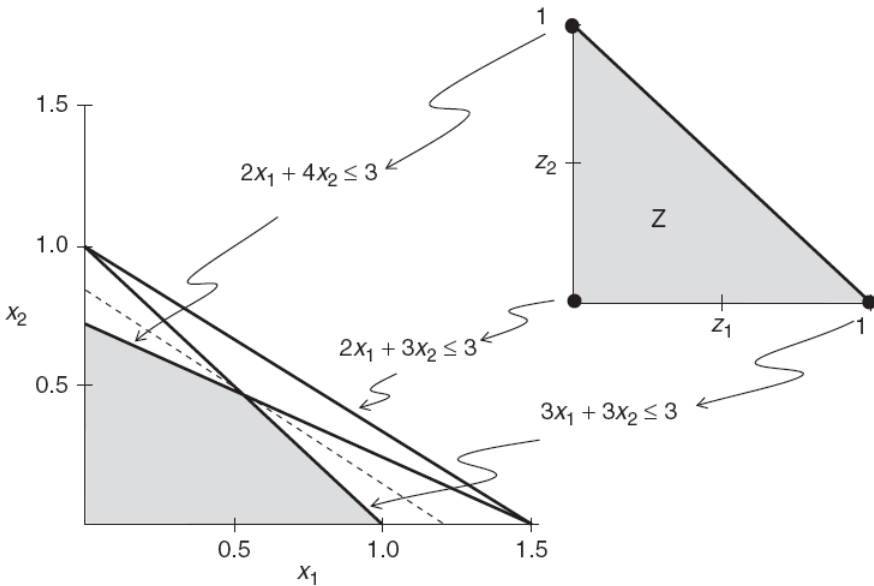
الموقف موضح بالشكل رقم 1-8 الذي يُظهر منطقة الاحتمالات المتعلقة بالشروط

$$(2 + z_1)x_1 + (3 + z_2)x_2 \leq 3, \text{ for all } (z_1, z_2) \in Z = \{z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_1 + z_2 \leq 1\}.$$

تشير المجموعة Z هنا إلى مجموعة الانحرافات المحتملة للقيم الأساسية $a_1 = 2$ و $a_2 = 3$

للولصول إلى مجموعة المعاملات المسموح بها A.

يوضح الشكل أن مجموعة الاحتمالات التي حصلنا عليها من النظر إلى الشروط المولدة من نقطتين الزاوية Z، حيث النقطتين $z_1=0, z_2=1$ ، وحيث $z_1=1, z_2=0$. ونقطة الزاوية الثالثة عند $z_1=z_2=0$ ، تعطينا الشرط الأساسي، وهو أعلى من النقاط الأخرى ولا يساهم في تحديد منطقة الاحتمالات. في حين أن كل النقاط الأخرى في Z تولد شروط قد تكون كافية داخل منطقة الاحتمالات (المظللة).



شكل 1-8: منطقة احتمالات الشرط $2x_1 + 3x_2 \leq 3$ تخضع المعاملات إلى الاضطرابات في الزاوية Z.

يمثل الخط المقسم مثال لشرط مولد من نقطة واحدة في الزاوية Z، والحقيقة أنه يمر من خلال النقطة $x_1 = 0.5, x_2 = 0.5$ ما يشير إلى أنها تأتي من نقطة ما على الحد العلوي لـ Z حيث $z_1 + z_2 = 1$.

وتجربنا زوايا المجموعة غير المعلومة عن كل ما نريد معرفته، إذا كانت المجموعة A

مرتبطة بشرط معين فإنها تكون متعددة المقام مع مجموعة الزوايا K (المعروفة فنياً بأقصى نقاط A)، ومن ثم يمكننا استبدال الشرط الوحيد بنسخ K المعرفة من خلال نقاط الزاوية A ، وبالمثل بالنسبة لشرط كل نقاط A .

من ثم، يمكننا أخذ مثال RLP بالأعلى ونستبدل الشرط الأول بمجموعة النسخ المشتقة من نقاط الزاوية A ، وعلى نحو مشابه، نستبدل الشرط الثاني بمجموعة النسخ المشتقة من نقاط الزاوية A_2 ، وهكذا. الأمر الذي يزيد حجم المسألة لكنها تظل محتفظة بنفس التركيب، وفي حالة البرنامج الخطي تظل سهلة الحل.

هكذا، نستقر على مبدأ أن البرامج الخطية مع مجموعات المعاملات غير المعلومة متعددة البسط تظل برامج خطية. لكن لنجعل هذا المنهج أكثر إفادة من الناحية العملية ما يساعدنا على العمل بشكل مباشر مع الشروط التي تعرف المجموعة متعددة البسط في A بدلاً من زوايا A . وعندما تتزايد أبعاد المجموعة A ، قد يصبح عدد نقاط الزاوية أكبر قليلاً حتى مع الشروط البسيطة.

بالتالي، لدينا منهج ثاني للتعامل مع نفس المسألة، بداية من الشرط الذي يجب استيفاءه وقتما كانت المعاملات تقع في المجموعة A المعرفة بمجموعة التباينات، سنوضح كيف نعيد كتابة الشرط كمجموعة من الشروط الجديدة متضمنة بعض المتغيرات الإضافية ومن ثم تصبح مسألة التعظيم الكاملة معرفة بشكل صحيح. ولكي نصل إلى وصف رسمي لهذا المنهج نحتاج إلى التعبير عن كل شيء من حيث المصفوفات، لكن يمكننا فهم هذه العملية بالنظر في مثال بسيط، وسوف نتناول مثال لمسألة RLP. نفترض أن الشرط الأول $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ لكل من (a_{11}, a_{12}) في المجموعة A_1 ونفترض أن المجموعة A_1 معرفة بقول أن القيم a_{11} و a_{12} تفي مجموعة الشروط:

$$d_{11}a_{11} + d_{12}a_{12} \leq h_1$$

$$d_{21}a_{11} + d_{22}a_{12} \leq h_2$$

$$d_{31}a_{11} + d_{32}a_{12} \leq h_3$$

$$a_{11} \geq 0, a_{12} \geq 0$$

قد نتوقع أن المجموعة A_1 متعددة المقام لديها خمسة نقاط زاوية. لكن بدلاً من عمل ذلك، سنعمل مباشرة مع المعاملات d_{ij} التي تظهر في الشروط التي تعرف المجموعة A_1 .

يمكننا إعادة صياغة الشرط الأصلي في ثلاثة شروط جديدة:

$$h_1y_1 + h_2y_2 + h_3y_3 \leq b_1, \quad (1-8)$$

$$d_{11}y_1 + d_{21}y_2 + d_{31}y_3 \geq x_1, \quad (2-8)$$

$$d_{12}y_1 + d_{22}y_2 + d_{32}y_3 \geq x_2. \quad (3-8)$$

أدخلنا ثلاثة متغيرات جدد y_1, y_2, y_3 (كل واحد من الثلاثة شروط يعرف المجموعة A_1) $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$. الشرط الأصلي يتضمن تغيير عناصر المجموعة b_1 من كونها المتغيرات الأصلية إلى متغيرات جديدة. أضفنا شرطين جديدين إلى التباينات (2-8) و (3-8)، شرط لكل متغير أصلي x_1 و x_2 . كل معاملات d_{ij} تعود للظهور في الشروط الجديدة، لكنها تحولت. أحد المعاملات مثل d_{21} المضروب في a_{21} في الشرط الثاني المعروف A_1 ، الآن يصبح معامل الضرب للمتغير الثاني الجديد في الشرط المرتبط بـ x_1 . ونلاحظ استمرارية في هذا النموذج الذي يجب فحصه لتفهم أنه يمكنك تطبيقه بشكل مناسب.

بشكل عام، إذا كانت المجموعة غير المعلومة لشرط ما معرفة بشروط m على المعاملات، وهناك معاملات n غير معلومة (بالتماشي مع المتغيرات الأصلية n) إذن فإننا نحتاج إلى متغيرات m جديدة وشروط $n+1$ لتمثل الشرط الأصلي مع مجموعته غير المعلومة.

تقوم إعادة الصياغة على ثنائية نتيجة البرمجة الخطية التي نناقشها بمزيد من التفصيل في الجزئية التالية. الجدير بالذكر أن تطبيق القواعد بسيط للغاية نظراً لأننا بدأنا بوضع المسألة في صيغة حيث تسير التباينات في اتجاه صحيح وتمتلك المجموعة A كل متغيراتها الموجبة. يمكننا اكتشاف ذلك عملياً من خلال المثال التالي.

مثال 2-8: شرط وجود البروتين في تغذية الماشية

لصياغة خليط غذاء الماشية الذي تستخدمه إحدى الشركات من ثلاثة حبوب مختلفة B, C, D بتكاليف مختلفة، ترغب الشركة في اختيار كميات هذه المكونات W_B, W_C, W_D

لتقليل التكلفة الإجمالية والتي تخضع لبعض الشروط المتعلقة بالمحتوى الغذائي للخليط. هناك شرط متعلق بمحتوى البروتين في الخليط النهائي يمكن التعبير عنه بالشكل التالي

$$b_{wB} + c_{wC} + d_{wD} \geq 2$$

لكن يختلف محتوى البروتين في كل مكون على حدة، ما يمكن قوله أن كل من b, c, d إيجابي والشروط التالية مستوفاة:

$$b + c \geq 3, c + d \geq 4, c - (b + d)/2 \leq 1.$$

(ربما يظهر نموذج الترابط المعقد هذا بسبب تنوع الحبوب التي يتم الحصول عليها من نفس المزارعين). كيف يمكن إعادة صياغة شرط البروتين بشكل مناسب؟

الحل

نبدأ بعكس الشرط لنحصل على التباين في الاتجاه القياسي:

$$b(-w_B) + c(-w_C) + d(-w_D) \leq -2$$

هذه الطريقة في كتابة المعادلة تحافظ على موجبة b, c, d . أيضاً نصيغ شروط b, c, d مع التباينات في الاتجاه الصحيح:

$$-b - c \leq -3,$$

$$-c - d \leq -4,$$

$$-(1/2)b + c - (1/2)d \leq 1.$$

من ثم لدينا ثلاثة متغيرات جديدة $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ (متغير لكل شرط)، ونحصل على أربعة شروط كالتالي:

$$-3y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -2,$$

$$-y_1 - (1/2)y_3 \geq -w_B,$$

$$-y_1 - y_2 + y_3 \geq -w_C,$$

$$-y_2 - (1/2)y_3 \geq -w_D.$$

نضرب كل شرط من هذه الشروط في -1 لتتخلص من معظم القيم السالبة ونصل إلى

$$3y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 2,$$

$$y_1 + (1/2)y_3 \leq w_B,$$

$$y_1 + y_2 - y_3 \leq w_C,$$

$$y_2 + (1/2)y_3 \leq w_D.$$

1-2-8 مزيد من التفاصيل حول إعادة صياغة الشرط

أدخلنا منهجين مختلفين لناخذ في الاعتبار مجموعة المعاملات غير المعلومة في الشرط. نريد إضافة مزيد من التفاصيل لكلا المنهجين. نفترض أن الشرط الأصلي كالتالي:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m \leq b$$

حيث نعلم أن المتجه $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ في مجموعة A غير المعلومة.

نبدأ بالنظر في كيفية إعادة صياغة هذا المصطلح الخاص بنقط الزاوية A . نفترض أن A لديها نقاط زاوية k ، ونجعل $(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_m^{(j)})$ نقاط الزاوية j th حيث أن $j = 1, 2, \dots, k$. من ثم يمكن الحصول على أي نقطة من $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in A$ من مجموعة الأوزان غير السالبة $w_1, w_2, \dots, w_k$ مع تطبيق $\sum_{j=1}^k w_j = 1$ على الزوايا، و

$a_i = \sum_{j=1}^k w_j a_i^{(j)}$ for $i = 1, 2, \dots, m$ بمعنى آخر، يمكن الحصول على نقاط A كمنحنى (محدد) لنقاط الزاوية.

وبما أن نقطة الاحتمال $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ تفي بالشروط لكل من $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in A$ ، يجب فعل ذلك في زوايا A . نفترض أن كل ذلك ما حصلنا عليه، إذن

$$a_1^{(j)} x_1 + a_2^{(j)} x_2 + \dots + a_m^{(j)} x_m \leq b \text{ for } j = 1, 2, \dots, k. \quad (4-8)$$

من ثم نرى أن نقطة اعتباطية $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ تم اختيارها من مكان ما داخل A ، إذن

$$\begin{aligned} & a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m \\ &= \sum_{j=1}^k w_j a_1^{(j)} x_1 + \sum_{j=1}^k w_j a_2^{(j)} x_2 + \dots + \sum_{j=1}^k w_j a_m^{(j)} x_m \\ &= \sum_{j=1}^k w_j \left(a_1^{(j)} x_1 + a_2^{(j)} x_2 + \dots + a_m^{(j)} x_m \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^k w_j b = b, \end{aligned}$$

وكذلك النقطة $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ أيضاً تفي بالشرط المولد من $(a_1, a_2, \dots, a_m)$. بالتالي،

أظهرنا أن الشروط (8.4) هو المطلوب ليمثل المجموعة A غير المعلومة.

بعد ذلك، نريد إيجاد منهج بديل عندما تكون المجموعة A غير المعلومة معرفة بمجموعة من الشروط. وذكرنا بالفعل في التباينات (3-8) - (8-1) كيفية كتابة الشرط الأصلي ليكون متصلاً بالمعلومات حول المجموعة A. الآن نريد توضيح كيفية التعامل مع مجموعة التباينات الجديدة، لفعل ذلك نحتاج على أخذ جولة قصيرة في نظرية الازدواجية المرتبطة بالبرامج الخطية. يتميز البرنامج المزدوج الخطي بأنه مدهش، ولا ضرر من قضاء بعض الوقت للنظر في هذه الجزئية.

النتيجة المزدوجة التي نريد الحصول عليها عامة، لكي نجعل قراءتها أسهل سنصف نتيجة المسألة باستخدام متغيرين فقط x_1, x_2 وثلاثة شروط. وتقول نظرية الازدواجية للبرامج الخطية أنه يتم الحصول على القيمة (الأولية) للبرنامج الخطي من خلال

$$LP: \text{ maximize } g_1x_1 + g_2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & d_{11}x_1 + d_{12}x_2 \leq h_1, \\ & d_{21}x_1 + d_{22}x_2 \leq h_2, \\ & d_{31}x_1 + d_{32}x_2 \leq h_3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

وبالمثل للحصول على القيمة المزدوجة للبرنامج الخطي

$$DLP: \text{ minimize } h_1y_1 + h_2y_2 + h_3y_3$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & d_{11}y_1 + d_{21}y_2 + d_{31}y_3 \geq g_1 \\ & d_{12}y_1 + d_{22}y_2 + d_{32}y_3 \geq g_2 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

إذا كنت لم ترى ذلك من قبل، فأنت بحاجة للتوقف والنظر لرؤية ما يحدث في الانتقال من مسألة إلى أخرى. البرنامج الخطي المزدوج لديه شرط لكل متغير في LP الأصلي، ولديه متغير لكل شرط في المسألة الأصلية. أيضاً، المعاملات في دالة الهدف يتم نقلها إلى شروط

الجانِب الأيمن والعكس. لم يتبادل المتغيرات والشروط أماكنهم فقط، لكننا قمنا بتغيير مسألة التعظيم بشروط " $\leq$ " إلى مسألة تقليل بشروط " $\geq$ ". وفي كلا المسألتين كل المتغيرات موجبة. في واقع الأمر، العلاقة المزدوجة تظل صحيحة دون شرط موجبة المتغير (متغير حر)، في هذه الحالة يجب أن يكون الشرط متعادل. على سبيل المثال، إذا كانت المسألة الأصلية دون شرط $x_2 \geq 0$ ، إذن الشرط الثاني في الازدواج قد يصبح

$$.2d_{12}y_1 + d_{22}y_2 + d_{32}y_3 = g$$

لاحظ أن ما نقوله هنا: أدنى قيمة لدالة الهدف في الازدواج DLP متساوية مع أعلى قيمة للهدف في مسألة LP الأصلية، ومن المثير للاهتمام معرفة السبب في الحصول على نفس القيمة في كلا المسألتين. يمكنك تجربة، على سبيل المثال، وضع أرقام حقيقية بدلاً من الرموز الجبرية للتأكد من النتيجة. لكن احذر أن يكون السبب وراء القيمة المزدوجة عميق إلى حد كبير (يرجع إلى حجة منفصلة؛ بمعنى آخر، تعميم لأبعاد متعددة بناءً على حقيقة أن عدم تقاطع مجموعة من المنحنيات المحدبة على المستوى قد ينتج عنه خط مستقيم بينهم). الأمر ليس صعباً لنرى أن الحد الأدنى في DLP أكبر من الحد الأقصى LP لكن لنرى أن هذه القيم هي نفسها لكنها أكثر صعوبة.

وهناك شكلين آخرين للازدواج يمكن كتابتهم وإن كانت هذه الصيغة هي الأسهل للتذكر، وما نقوله هنا سيكون كافياً للحصول على النتائج التي نرغب بها. ما هي الروابط بين مسألة التعظيم القوي لدينا؟

نفترض أن المجموعة A_1 غير المعلومة في المسألة RLP المرتبطة بالشرط الأول هي مقام مُعرف من خلال التباينات التالية على القيم a_{11} و a_{12} :

$$\begin{aligned} d_{11}a_{11} + d_{12}a_{12} &\leq h_1, \\ d_{21}a_{11} + d_{22}a_{12} &\leq h_2, \\ d_{31}a_{11} + d_{32}a_{12} &\leq h_3, \\ a_{11} &\geq 0, a_{12} \geq 0. \end{aligned}$$

إذن يمكننا كتابة الشرط الأول في مسألة RLP أن $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ لكل (a_{11}, a_{12}) في المجموعة A_1 كالقول أن أعلى قيمة $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ يمكن أخذها لـ $(a_{11}, a_{12}) \in A_1$ أقل

من b_1 . ومن ثم، يمكن التعبير عن ذلك بقول أن حل البرنامج الخطي

$$\text{maximize } a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & d_{11}a_{11} + d_{12}a_{12} \leq h_1 \\ & d_{21}a_{11} + d_{22}a_{12} \leq h_2 \\ & d_{31}a_{11} + d_{32}a_{12} \leq h_3 \\ & a_{11} \geq 0, a_{12} \geq 0 \end{aligned}$$

يجب أن يكون أقل من أو مساوي لـ b_1 . هذه هي النقطة حيث نستخدم ازدواجية البرمجة الخطية. ومن نتيجة الازدواج نجد أن هذا التعبير هو ذاته المستخدم في حل البرنامج الخطي المزدوج.

$$\text{DLP1 : minimize } h_1y_1 + h_2y_2 + h_3y_3$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & d_{11}y_1 + d_{21}y_2 + d_{31}y_3 \geq x_1, \\ & d_{12}y_1 + d_{22}y_2 + d_{32}y_3 \geq x_2, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, \end{aligned}$$

ويجب أن يكون أقل أو مساوي لـ b_1 . بالتفكير في هذا التعبير جيداً نجد أن القيم x_1 و x_2 تفي بالشرط الأول لـ RLP مع مجموعة A_1 غير المعلومة إذا كان هناك بعض القيم $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ الذي يفي بالتباين

$$h_1y_1 + h_2y_2 + h_3y_3 \leq b_1$$

مع شروط DLP1. بمعنى آخر، نريد استيفاء مجموعة التباينات (1-8) - (3-8).

2-2-8 الميزانية في وجود عناصر غير معلومة

إنه أمر متكرر الحدوث أن نضع نطاق محتمل لقيم معامل غير معلوم. إذن، بالنسبة للمعامل a_1 ، ما يحدث في أغلب الأحيان أننا لا نعلم القيمة الدقيقة لكننا واثقين أن قيمته يقع في نطاق محدد. فمن المناسب تحديد نقطة في منتصف النطاق كأساس للقيمة a_1 ثم يتم تحديد δ_1 المسافة من a_1 إلى حدي النطاق. بالتالي، يتم الحصول على المجموعة غير المعلومة لـ a_1

من خلال $a_1 - \delta_1 \leq a_1 \leq a_1 + \delta_1$

عندما يحتوي الشرط على عدد مختلف من المعاملات غير المعلومة $a_1, a_2, \dots, a_n$ مثلاً، إذن سيحدد ذلك المجموعة A غير المعلومة بالبحث عن كل a_i لاستيفاء نطاق الشروط $a_i - \delta_i \leq a_i \leq a_i + \delta_i$.

وبهذا الترتيب تصبح المجموعة A مستطيل أبعاده n متمركز حول $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. من الناحية العملية، تعتبر هذه النتيجة مجموعة غير معلومة متحفظة للغاية، حيث سمحنا لكل المعاملات غير المعلومة بأخذ أكبر قيم لها في وقت واحد.

إذا لم تكن المتغيرات مترابطة للغاية فمن الأفضل التحفظ في اختيار طول مسافات δ_i كل على حدة، وتعويض ذلك بقليل من التحفظ في النقاط التي تصبح فيها المعاملات قريبة من أعلى قيم لها في نفس الوقت.

الأمر الذي يؤدي إلى تحديد ميزانية من المجموعة B غير المعلومة. إذا كان هناك 10 متغيرات ولدينا ميزانية غير معلومة من 5 متغيرات، يعني ذلك أن مجموع النسب $a_i - \delta_i$ أقل من 5. قد يتحقق ذلك على سبيل المثال بتحديد خمسة متغيرات عند $a_i + \delta_i$ والخمسة متغيرات الأخرى عند a_i ، أو بتحديد خمسة متغيرات عند $a_1 + \delta_1/2$ وخمسة آخرين عند $a_1 - \delta_1$. لنرى ما يبدو عليه هذا المثال، يوضح الشكل (8-2) الموقف عندما يكون هناك ثلاثة معاملات غير معلومة ويقارن ما يحدث عندما $B = 1.5$ و $B = 2.5$. وجدير بالذكر أن الشكل المتمركز حول النقطة تم الحصول عليه من متجه القيم الأساسية (a_1, a_2, a_3) .

حينها يكون الغموض المحيط بمعاملات مختلفة مستقل، فإن افترض أنه يمكننا عزل الزوايا بهذه الطريقة آمن للغاية. في واقع الأمر سنعرض في الجزئية التالية أن إذا معاملات n غير المعلومة متماثلة ومستقلة فإن احتمالية أن يكون الحل الأمثل لمسألة من هذا النوع يتبين أنه غير ممكن أقل من $1 - \phi(B/\sqrt{n})$ على سبيل المثال إذا كانت $n = 36$ إذن فأكبر قيمة محتملة لـ B هي 36، لكن عندما تكون B تساوي نصف الحجم،

إذن $B = 18$ ، وبالتالي احتمالية أن يكون الحل الأمثل غير ممكن هي

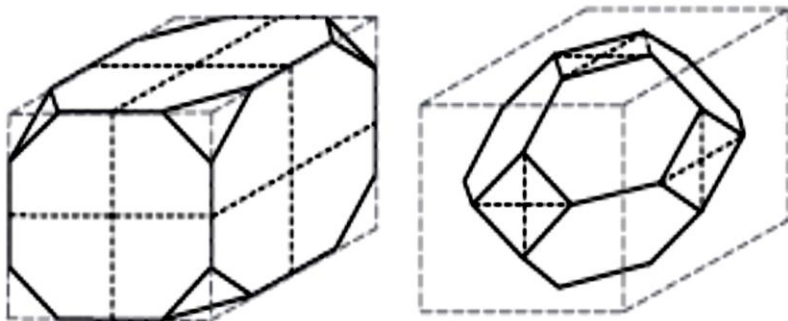
$$1 - \Phi\left(18/\sqrt{36}\right) = 1 - \Phi(3) = 0.00135,$$

أي أن أقل من 2 من 1000.

ثم نفحص طبيعة البرنامج الخطي المعدل الذي نريد حله عندما يكون هناك مجموعة غير معلومة بهذا الشكل. نبدأ بالنظر إلى مثال بسيط حيث أن هناك شرط $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ لكل $(a_1, a_2) \in A$ ، حيث أن A المعرفة a_1, a_2 تفي

$$a_1 = \bar{a}_1 + z_1\delta_1, a_2 = \bar{a}_2 + z_2\delta_2,$$

with $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$, and $|z_1| + |z_2| \leq B$.



الشكل (2-8): هناك ثلاثة متغيرات: يبين الرسم البياني على اليسار ميزانية عدم التيقن تبلغ 2.5، ويظهر الرسم البياني على اليمين ميزانية عدم التيقن وتبلغ 1.5

نظراً لعلامات المعامل، يبلغ إجمالي عدد الشروط على القيم (a_1, a_2) ثمانية. وإذا كنا نتبع المناقشة السابقة، إذن سنستبدل الشرط الوحيد بثلاثة شروط، لكن الشروط الجديدة تنطوي على ثمانية متغيرات جدد. هناك طريقة لتبسيط ذلك والوصول إلى نتيجة التباينات الثلاثة والمتغيرات الثلاثة الجدد، كالتالي:

$$\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + w_1 + w_2 + Bt \leq b \quad (5-8)$$

$$w_1 + t \geq \delta_1 |x_1|, \quad (6-8)$$

$$w_2 + t \geq \delta_2 |x_2|, \quad (7-8)$$

$$w_i \geq 0, t \geq 0.$$

(سنرى في الجزئية القادمة كيف يتم الحصول على مجموعة معينة من التباينات)، ما يعطينا دليل على كيفية صياغة مسألة عامة بميزانية غير معلومة. نفترض أن لدينا متغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ للقرار n ، وأن المسألة الأصلية تتمثل في تعظيم $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ الخاضعة لبعض الشروط، أحدهم هو $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq b$ لكل معاملات $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ حيث

$$A = \{(\bar{a}_1 + z_1 \delta_1, \bar{a}_2 + z_2 \delta_2, \dots, \bar{a}_n + z_n \delta_n)\}$$

$$\text{for } |z_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \text{ and } |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \leq B.$$

إذن كل متغير من المتغيرات الجديدة لـ $n+1$ هي $w_1, w_2, \dots, w_n, t$ يخضع لشرط أن يكون غير سلبى، والشرط يمكن استبداله بشروط $n+1$ الجديدة.

$$\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \dots + \bar{a}_n x_n + w_1 + w_2 + \dots + w_n + Bt \leq b, \quad (8-8)$$

$$w_i + t \geq \delta_i |x_i|, i = 1, 2, \dots, n. \quad (9-8)$$

للعودة مرة أخرى إلى البرنامج الخطي نستبدل كل من الشروط $w_i + t \geq \delta_i |x_i|$ بشرطين $w_i + t \geq -\delta_i x_i$ و $w_i + t \geq \delta_i x_i$.

ويمكن التأكد أن هناك متغيرات w_i, x_i و t التي تفي بهذه الشروط، إذن يفى التباين الأصلي مع b لكل من $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$. نختار نقطة في A مع $a_i = \bar{a}_i + z_i \delta_i$ حيث $|z_i| \leq 1$ and $|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \leq B$. بالتالي

$$\begin{aligned} & a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \\ &= \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \dots + \bar{a}_n x_n + z_1 \delta_1 x_1 + \dots + z_n \delta_n x_n \\ &\leq \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \dots + \bar{a}_n x_n + |z_1| (w_1 + t) + \dots + |z_n| (w_n + t) \\ &\leq \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \dots + \bar{a}_n x_n + w_1 + \dots + w_n + Bt \\ &\leq b. \end{aligned}$$

قمنا باستخدام تباينات مثل $|z_1| \delta_1 x_1 \leq |z_1|$ ونستخدم حقيقة أن $|z_i| \leq 1$ و $\sum |z_i| \leq B$. يعتبر ذلك أحد اتجاهات الازدواجية، لكن الأمر أكثر صعوبة عند السير في اتجاه آخر، ونجد أن مجموعة الشروط الجديدة ليس إلا شروط أكثر تقيداً من المجموعة الأصلية.

مثال عملي 3-8: أفيجنون للاستيراد

يجب أن تقوم أفيجنون للاستيراد بتحديد الطلب لاختيار المنتجات A, B, C. الطلب بالكامل على الثلاث منتجات يشترط التوصيل معاً ما يقتضي أن يكون الوزن الإجمالي للشحنة أقل من 5000 كيلوجرام. تزن شحنة منتجات A, B, C 5 كيلو، لكن هناك غموض حول طريقة تعبئة المنتجات وبالتالي وزن التغليف الذي يستخدمه الموردين. يقدر تغليف المنتج A و C بمقدار 0.2 كيلوجرام للشحنة، لكنه مجرد تقدير، كما أنه من المتوقع أن يتراوح وزنه بين 0.1 و 0.3 كيلوجرام. في حين أن المنتج B أكثر تعقيداً وتُقدر قيمة التعبئة بنحو 0.5 كيلوجرام للشحنة، حيث يتراوح وزنه بين 0.2 و 0.8 كيلوجرام. وتبلغ التكلفة الإجمالية للشحنة 100 دولار. بعد استيراد الشحنة سوف تعرض الشركة المنتجات للمزاد. السعر المتوقع لبيع المنتج A هو 200 دولار للشحنة، مع إمكانية تحقيق سعر أعلى أو أقل بـ 50 دولار. السعر المتوقع لبيع المنتج B هو 205 دولار مع إمكانية تغير السعر بقيمة 60 دولار للأعلى أو الأسفل للشحنة. بينما يبلغ السعر المتوقع للمنتج C 195 دولار مع إمكانية لتغير السعر بقيمة 70 دولار. هناك شرط يتمثل في تحقيق أرباح للشركة بقيمة 50000 دولار على الأقل من الصفقة. ترغب أفيجنون في تعظيم الأرباح المتوقعة والتي تخضع لشروط وزن النقل والحد الأدنى للأرباح المحققة. قم بصياغة مسألة التحسين القوي باستخدام ميزانية غير معلومة حيث $B = 2$ لكل من الشرطين، وقم بحل المسألة في جدول البيانات.

الحل

نفترض أن x_A, x_B, x_C الكميات المطلوبة من كل منتج، ونرمز لوزن الشحنة بـ a_A, a_B, a_C ونرمز لسعر البيع بـ s_A, s_B, s_C . تبلغ الأرباح المتوقعة 100 دولار، 105 دولار، 95 دولار للمنتجات الثلاثة، بالتالي يصبح لدينا مسألة التعظيم التالية

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad 100x_A + 105x_B + 95x_C \\ &\text{subject to} \quad a_A x_A + a_B x_B + a_C x_C \leq 5000 \text{ for } (a_A, a_B, a_C) \in A \\ &\quad \quad \quad -s_A x_A - s_B x_B - s_C x_C \leq -50\,000 \text{ for } (s_A, s_B, s_C) \in S \\ &\quad \quad \quad x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0, \end{aligned}$$

مع الحصول على مجموعات غير معلومة من خلال:

$$\begin{aligned} A = \{(a_A, a_B, a_C) : a_A = 5.2 + 0.1z_A, a_B = 5.5 + 0.3z_B, a_C = 5.2 + 0.1z_C \\ \text{for } (z_A, z_B, z_C) \in Z\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S = \{(s_A, s_B, s_C) : s_A = 100 + 50q_A, s_B = 105 + 60q_B, s_C = 95 + 70q_C \\ \text{for } (q_A, q_B, q_C) \in Z\}, \end{aligned}$$

حيث

$$Z = \{(z_A, z_B, z_C) : |z_A| \leq 1, |z_B| \leq 1, |z_C| \leq 1, |z_A| + |z_B| + |z_C| \leq 2\}.$$

لاحظ أن الشرط S على الحد الأدنى للأرباح تم ضربه في -1 ليوافق الشكل المعياري. الحقيقة أن كلا الميزانيتين غير المعلومتين لهم نفس المتوسط الذي يمكن أن نستخدمه في المجموعة Z للشرطين المختلفين. الآن يمكننا استخدام القواعد التي قمنا بتطويرها من قبل لإضافة الشروط كما في التباينات (8-8) و (9-8)؛ وفي الصيغة الناتجة يتم استبدال الشروط الكائنة بأربعة شروط جديدة (مع أربعة متغيرات جدد). ما يعطينا

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad 100x_A + 105x_B + 95x_C \\ &\text{subject to} \quad 5.2x_A + 5.5x_B + 5.2x_C + w_A + w_B + w_C + 2t_1 \leq 5000 \\ &\quad \quad \quad w_A + t_1 \geq 0.1x_A \\ &\quad \quad \quad w_B + t_1 \geq 0.3x_B \\ &\quad \quad \quad w_C + t_1 \geq 0.1x_C \\ &\quad \quad \quad -100x_A - 105x_B - 95x_C + u_A + u_B + u_C + 2t_2 \leq -50\,000 \\ &\quad \quad \quad u_A + t_2 \geq 50x_A \\ &\quad \quad \quad u_B + t_2 \geq 60x_B \\ &\quad \quad \quad u_C + t_2 \geq 70x_C \end{aligned}$$

وكل المتغيرات سالبة

في هذه الصيغة نستطيع تغيير $|x_A|$, $|x_B|$, $|x_C|$ إلى x_A , x_B , x_C إذا كان جميعهم موجبا.

حل هذه المسألة في جدول بيانات BRMch8-Avignon.xlsx. حيث لدينا

$$x_A = 785.38, x_B = 81.65, x_C = 69.98, \\ w_A = 54.04, t_1 = 24.49, u_A = 34\ 370.14, t_2 = 4898.91$$

وكل المتغيرات الأخرى صفر، من الناحية العملية، نحتاج إلى تحويل المتغيرات إلى أعداد صحيحة (أو الأفضل استخدام إجراء للتعظيم يبحث بين الحلول الصحيحة).

3-2-8 مزيد من التفاصيل حول الميزانية ذات العناصر الغامضة

في هذه الجزئية نريد عمل شيئين: الأول يتمثل في كيفية الحصول على الشرطين (5-8) - (7-8) من الازدواج، والثاني يتمثل في استنتاج الشرط على احتمالية أن يكون الحل الأمثل يقع خارج الميزانية الغامضة (على افتراض أن الأخطاء مستقلة ومتماثلة).

نبدأ بالنظر في الشرط $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ حيث أن قيم (a_1, a_2) لديهم قيم أساسية (a_1, a_2) وانحرافات قصوى δ_1, δ_2 ، ويمكنهم فك غموض ميزانية B غير المعلومة. بالتالي يمكن الحصول على النتيجة من خلال

$$a_1 = \bar{a}_1 + z_1\delta_1, a_2 = \bar{a}_2 + z_2\delta_2, \\ \text{with } |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1, \text{ and } |z_1| + |z_2| \leq B.$$

في الشرط الأصلي لكل من $(a_1, a_2) \in A$ ، من ثم يمكن إعادة صياغة الشرط بقول أن البرنامج الخطي التالي يتضمن متغير قرار a_1 و a_2 بقيمة أقل من أو تساوي b:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } a_1x_1 + a_2x_2 \\ &\text{subject to } a_i - \delta_i u_i + \delta_i v_i = a_i, i = 1, 2 \\ &\quad u_i + v_i \leq 1, i = 1, 2 \\ &\quad (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \leq B \\ &\quad u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0 \end{aligned}$$

قمنا بكتابة u_1 و v_1 للأجزاء الموجبة والسالبة من z_1 ، أي أن $u_1 = \max(z_1, 0)$ و $v_1 = \max(-z_1, 0)$. (على نحو مشابه، u_2 و v_2 يمثلون الأجزاء الموجبة والسالبة من z_2). ما يعني أن $|z_1| = u_1 + v_1$ و $|z_2| = u_2 + v_2$. هنا تظهر خدعة، تعريف المتغيرات على هذا النحو يعني أن واحد فقط منهم غير صفري، حيث أن عند صياغة البرنامج الخطي قد يحتوي على كل من u_1 و v_1 > 0 رغم ذلك، أَل حل تكون فيه المتغيرات غير صفرية يمكن استبداله بحل آخر

يتم فيه طرح نفس القيمة من u_1 و v_1 لنجعل القيمة الأصغر تساوي صفر. سيظل شرط التكافؤ وشروط التباين كما هي، حيث تم تقليل $u_1 + v_1$.

بالتالي، باستخدام نظرية الازدواجية للبرامج الخطية، نجد أن الشروط تتضمن أن البرنامج الخطي التالي قيمته أقل من b :

$$\text{minimize } \bar{a}_1 y_1 + \bar{a}_2 y_2 + w_1 + w_2 + Bt$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & y_1 = x_1 \\ & y_2 = x_2 \\ & -\delta_1 y_1 + w_1 + t \geq 0 \\ & -\delta_2 y_2 + w_2 + t \geq 0 \\ & \delta_1 y_1 + w_1 + t \geq 0 \\ & \delta_2 y_2 + w_2 + t \geq 0 \\ & w_i \geq 0, t \geq 0. \end{aligned}$$

نلاحظ أن التكافؤ $y_i = x_i$ حدث (بدلاً من التباين) بسبب عدم وجود شروط أن $a_i \geq 0$. هنا يمكننا استبدال أول شرطين x_1 و x_2 بالشرطين y_1 و y_2 . ويمكن أيضاً جمع الشرطين بما يتضمن w_1 : أكبر من $\delta_1 x_1$ و $\delta_1 x_1$ ليصبح لدينا $w_1 + t \geq \delta_1 |x_1|$. من ثم، نتوصل إلى مسألة التعظيم التالية، التي تمتلك قيمة $\geq b$.

$$\text{minimize } \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + w_1 + w_2 + Bt$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & w_1 + t \geq \delta_1 |x_1| \\ & w_2 + t \geq \delta_2 |x_2| \\ & w_i \geq 0, t \geq 0. \end{aligned}$$

بالتالي، أوضحنا أن الشرط الأصلي يمكن كتابته في شكل الشروط (5-8)-(7-8).

الآن، نرغب في معرفة مدى احتمالية زيادة الميزانية غير المعلومة عندما يكون كل معامل مجهول متماثل ومستقل. بدلاً من ذلك نساءل عن احتمالية زيادة الميزانية غير المعلومة، حيث نهتم باحتمالية أن يكون الحل الأمثل الذي توصلنا له يفشل في استيفاء شروط المسألة. لنكون أكثر دقة، نفترض أن قيمة B تستخدم لتعريف المجموعة A المجهولة، ثم نرغب في

معرفة ما احتمالية أن يكون الحل الأمثل الذي توصلنا إليه بناءً على المجموعة المجهولة غير ممكن، ونفترض أن النطاقات الأصلية دقيقة. من المحتمل أن تقع القيم الحقيقية للمعاملات المجهولة في تلك الأجزاء من المكعب المقطوع بسبب شرط الميزانية المجهول، وهنا نطرح سؤال حول احتمالية أن يؤدي ذلك إلى حل غير ممكن.

نفترض أن x^* الحل الأمثل للمسألة مع وجود الميزانية المجهولة، مع العلم أن الحل x^* يفي الشرط مع أي خيار من z_i ما يزيل غموض الميزانية، وأنا سوف نصل إلى خيار معين لـ z .

نفعل ذلك من خلال إعادة ترتيب المتغيرات ومن ثم تأتي أعلى قيم $\delta_i |x_i^*|$ أولاً، ثم نختار $z_i = 1$ or -1 بناءً على العلامة x_i^* لـ $|B|$ لتلك المتغيرات، و $z_{L+1} = B - L + L$ للمتغيرات التالية (لتوافق العلامة $x_{L+1}^* + 1$ ، ويتم تعيين باقي z_i كلها عند صفر. مع اختيار z_i يصبح لدينا $\sum_{i=1}^n |z_i| = B$ وسوف تصبح المعاملات $a_1, a_2, \dots, a_n$ في مجموعة A المجهولة. ومن ثم، يتم استيفاء الشرط ونستنتج أن

$$\sum_{i=1}^L \bar{a}_i x_i^* + \sum_{i=1}^L \delta_i |x_i^*| + (B - |L|) \delta_{L+1} |x_{L+1}^*| \leq b. \quad (10-8)$$

الآن، نفترض عدم بقاء الشرط عند الحل الأمثل x^* لبعض من قيم المجموعة a_1 في النطاق المعطى. إذن هناك مجموعة من قيم z_i تأخذ الصيغة

$$\sum \bar{a}_i x_i^* + \sum z_i \delta_i |x_i^*| > b,$$

وبالتالي، من التباين (10-8)

$$\sum \bar{a}_i x_i^* + \sum z_i \delta_i |x_i^*| > \sum \bar{a}_i x_i^* + \sum_{i=1}^L \delta_i |x_i^*| + (B - L) \delta_{L+1} |x_{L+1}^*|.$$

يمكن كتابة هذا التباين

$$\sum_{i=L+1}^n z_i \delta_i |x_i^*| > \sum_{i=1}^L (1 - z_i) \delta_i |x_i^*| + (B - L) \delta_{L+1} |x_{L+1}^*|$$

نظراً لترتيب $\delta_i |x_i^*|$ (واستخدام الحقيقة أن $1 - z_i \geq 0$) يتضمن ذلك

$$\sum_{i=L+1}^n z_i \delta_i |x_i^*| \geq \delta_{L+1} |x_{L+1}^*| \left(\sum_{i=1}^L (1 - z_i) + (B - L) \right).$$

إذن

$$\sum_{i=1}^L z_i + \sum_{i=L+1}^n z_i \frac{\delta_i |x_i^*|}{\delta_{L+1} |x_{L+1}^*|} > B.$$

والتباين يأخذ الشكل

$$\sum_{i=1}^n z_i h_i > B \quad (11-8)$$

مع $0 \leq h_i \leq 1$ لكل i .

الآن نسأل ما احتمالية ألا تفي قيم z_i الشرط (إذا كانت كل z_i يتم اختيارها بطريقة مستقلة ومتماثلة قرابة الصفر)؟ وبما أن التباين (11-8) تم استيفاءه إذا تم كسر الشرط ، فإن احتمالية استمرار التباين يجب أن تكون أكبر من احتمالية كسر الشرط.

يمكن استخدام الحد النظري الأوسط للحصول على شرط على هذا الاحتمال في حالة زيادة n . يبلغ متوسط المتغير العشوائي $\sum_{i=1}^n z_i h_i$ صفر (حيث أن كل z_i له متوسط صفري) والمتغير $V = \sum_{i=1}^n h_i^2 V_i$ حيث أن V_i هو التغير في المتغير z_i . وبما أن z_i يقع في النطاق -1 إلى 1، لا يمكن أن يكون التغير أكبر من 1 و h_2 أيضاً أقل من 1. ومن ثم التغير $V \leq n$. في النهاية نصل إلى

$$\Pr \left(\sum_{i=1}^n z_i h_i > B \right) \approx \Pr(N(0, \sqrt{V}) > B) \leq 1 - \Phi \left(\frac{B}{\sqrt{n}} \right)$$

بالتالي، نستقر على زيادة n وأي توزيع متماثل لأخطاء المعامل قرابة المستويات الأساسية، نظراً لأن هذه الأخطاء مستقلة ، وتستخدم غموض الميزانية B في حل مسألة التعظيم سوف نحصل على احتمالية كسر الشرط عند الحل الأمثل ليس أكثر من $1 - \Phi(B/\sqrt{n})$.

3-8 تحسين قوي ومنهج قاعدة الحد الأقصى

أحد الأنواع المهمة من الغموض فيما يتعلق بدالة الهدف في مسألة التعظيم. في هذا السياق، يبحث التحسين العشوائي عن القيمة المتوقعة لهدف تحت نموذج ما واصفاً احتمالات المعاملات المختلفة في دالة الهدف. لكننا نهتم بالبيئة التي يوجد فيها توزيع غير معلوم لتلك المعاملات، وفي الغالب يكون لدينا مجموعة من القيم المحتملة. تنتمي معاملات دالة الهدف إلى المجموعة المجهولة A . وفي هذا السياق، من الطبيعي أن نستخدم منهج قاعدة الحد الأقصى الذي يفترض الأسوأ ويصنع القرارات من أجل ألا يكون الأسوأ بهذا السوء.

لتطبيق هذا المنهج سوف نبدأ بإعادة كتابة المسألة مع متغير إضافي يمثل دالة الهدف. وبالتالي، يمكن كتابة مسألة تعظيم قياسية كالتالي

$$\text{maximize } f(x) \text{ subject to } x \in X,$$

حيث أن f تمثل دالة الهدف و X تمثل مجموعة الاحتمالات المعرفة بالشروط. يمكن إعادة كتابة هذه المسألة القياسية بإضافة متغير غير مشروط v كالتالي:

$$\text{maximize } v$$

$$\text{subject to } v \leq f(x) \\ x \in X.$$

تكمن ميزة هذا الترتيب في أن غموض دالة الهدف يتحول إلى غموض في الشروط على النحو الذي تعاملنا به في الجزئية السابقة.

الآن نفترض أن دالة الهدف في حالة خطية، فلدينا $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ ونفترض أننا نعلم أن $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ تقع في مجموعة A المجهولة، إذن تصبح المسألة كالتالي

$$\text{PZ: maximize } v$$

$$\text{subject to } v - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n \leq 0 \text{ for all } (c_1, c_2, \dots, c_n) \in A \\ x \in X.$$

تسمح هذه الصيغة بتطبيق كل الآليات المقدمة في الجزئية السابقة. لاحظ أن بالبحث عن شرط لتطبيقه على كل خيارات المعاملات في المجموعة A ، نستنتج أن مع القيمة v التي تساوي أصغر قيمة للهدف المحتمل $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in A$. من ثم، فإن الصيغة PZ تساوي

$$\max_{x \in X} \left(\min_{(c_1, c_2, \dots, c_n) \in A} \{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n\} \right)$$

نجد أن مع هذه الصيغة نعظم دالة الهدف إلى أقصى افتراض سلبي لقيم المعاملات المجهولة. يمكن اعتبار ذلك كلعبة بيننا وبين طرف منافس، مثل اللعبة التي رأينا روجر ريلي يلعبها في السيناريو ببداية هذا الفصل. نختار قيم متغيرات القرار $x_1, x_2, \dots, x_n$ ثم يختار اللاعب الآخر القيم $c_1, c_2, \dots, c_n$. لكن اللاعب الآخر هنا يتمتع بالمكر حيث يستهدف حصولنا على أسوأ نتيجة ممكنة. في بعض الأحيان يتحدث الناس عن اللعب ضد قوانين الطبيعة، وإن كان ذلك يتضمن نظرة ارتياب من العالم! نعتبر هذه المسألة واحدة من النتائج المضمونة حين تلقي بها لنا الطبيعة.

وهناك علاقة وصل مع فكرة اختبار الضغط العكسي المطروحة في الفصل الثالث. رغم ذلك، اختبار الضغط العكسي يقوم بتنفيذ التقليل الداخلي (إيجاد أسوأ سيناريو محتمل)؛ حيث نقوم باختيار متغيرات القرار أيضاً. ومن ثم فنحن لا نحاول فقط إيجاد أسوأ سيناريو محتمل، لكن نحاول أيضاً تجنب أن يكون شيء لدرجة كبيرة.

وبوجه عام، يمكننا التفكير في دالة الأرباح Π التي تعتمد ليس فقط على إجراء اتنا x بل أيضاً على قيم بعض المعاملات المجهولة التي حصلنا عليها من المنتج a والمعلومة الوحيدة لدينا هي $a \in A$ ، المجموعة المجهولة في المسألة. ومن ثم، أفضل شيء يمكن فعله لضمان مستوى محدد من الأرباح هو تعظيم أدنى قيمة للأرباح L ، $a \in A$ ، أي أن

$$\max_{x \in X} \left\{ \min_{a \in A} \Pi(x, a) \right\}. \quad (12-8)$$

تصبح المسألة أكثر أهمية عندما تكون دالة الأرباح Π دالة a مقعرة لكل قيمة من x و A متعددة المقام مع زوايا $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}$. كل واحدة من هذه الزوايا تمثل متجه، وبالتالي يمكن كتابة $\left(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_m^{(j)}\right)$ لزاوية j th للنقطة A حيث $j = 1, 2, \dots, k$. في هذه الحالة يصبح المعادل للصيغة PZ:

$$\text{PZ1: maximize } v$$

$$\text{subject to } v - \Pi(x, a) \leq 0 \text{ for all } (a_1, a_2, \dots, a_m) \in A \\ x \in X.$$

وباستخدام نفس المنهج الذي استخدمناه من قبل، تصبح الخطوة التالية هي استبدال الشرط الوحيد مع نسخ k : واحد لكل نقطة قصوى من A . إذن نحصل على التالي

$$\text{PZ2: maximize } v$$

$$\text{subject to } v - \Pi(x, a^{(1)}) \leq 0 \\ v - \Pi(x, a^{(2)}) \leq 0 \\ \dots \\ v - \Pi(x, a^{(k)}) \leq 0 \\ x \in X.$$

إذا كانت v و x محتملين لـ PZI فيلزم استيفاء الشروط لكل نقاط الزاوية A وبالتالي فإنها محتملة لـ PZ2. يمكن أن نستخدم الافتراض الخاص بمنحنى الدالة Π المقعرة لإظهار أن كل من شروط PZ2 مستوفاة، إذن شرط PZ1 سيتم استيفاءه أيضاً. البرهان هو ذاته الذي حصلنا عليه من قبل فيما يتعلق بالتباين (4-8) وتمرين 5-8. وبالتالي، فإن النتيجة النهائية عندما تكون دالة الأرباح مقعرة في المعامل المجهول وتكون المجموعة المجهولة متعددة المقام، ويمكن استبدال المسألة (8-12) بمسألة التعظيم PZ2.

مثال عملي 4-8: سينتيل انتربرايزيس

تبيع شركة سينتيل انتربرايزيس أجهزة الكمبيوتر اللوحي والقارئ الإلكتروني. تطرح الشركة منتج جديد "فليكس ريدر" الذي حصل على حملة إعلانية جيدة. تلقت الشركة طلبات بمقدار 5000 فليكس ريدر مقدماً. حصل العملاء على كود تأميني يمكنهم استخدامه للشراء عبر الإنترنت في تاريخ الإصدار، وهو قبل أسبوعين من تاريخ الطرح في المتاجر. يتم طرح فليكس ريدر بحجمين للشاشة (كبير وصغير)، وبسبب خطأ ما لم يحدد العملاء الحجم المطلوب مقدماً. وما جعل الأمر أسوأ أن المصنعين واجهوا بعض المشاكل المتعلقة بتاريخ الإصدار ما سوف يتسبب في زيادة تكلفة شراء فليكس ريدر عبر الإنترنت. سوف تتحمل الشركة 550 دولار للأجهزة كبيرة الحجم و520 دولار للأجهزة صغيرة الحجم ل طرحها في المعاد المقرر، بينما في حالة تأخير الموعد لمدة أسبوعين ستخفض التكلفة بمقدار 70 دولار. يتم بيع أجهزة فليكس ريدر الكبيرة مقابل 640 دولار والصغيرة مقابل 590 دولار. من المحتمل أن يتراجع العملاء الذين قاموا بعمل الطلب مقدماً لكنهم لا يستطيعون الحصول على الحجم المفضل عن الشراء. الأجهزة التي استلمتها الشركة والأجهزة غير المطلوبة للطلبات المقدمة من العملاء سوف يتم بيعها لاحقاً. كم عدد الأجهزة التي تحتاجها الشركة من الحجمين ل طرحها في الموعد المقرر؟

الحل

الهدف يتمثل في استخدام منهج قوي للتعامل مع الغموض حول عدد طلب العملاء مقدماً كم يريدون الحجم الكبير وكم يريدون الحجم الصغير. سيكون لذلك تأثير تعظيم أرباح سينتيل على افتراض أسوأ سيناريو لتقسيم الطلبات.

نريد تحديد حجم الطلب x_L للأجهزة كبيرة الحجم و x_S للأجهزة صغيرة الحجم المطلوبة لتسليم المنتج في الموعد المقرر. وإذا أشرنا إلى إجمالي الطلبات المقسمة d_L للحجم الكبير و d_S للحجم الصغير، إذن فإن طلبات البيع مقدماً هي $z_L = \min(x_L, d_L)$ and $z_S = \min(x_S, d_S)$.

نشير إلى المبيعات العادية لكلا الحجمين بـ w_L و w_S . من ثم تصبح صيغة تكلفة شراء الحجم الكبير هي

$$550x_L + 480(w_L - x_L + z_L)$$

حيث أن الشرط الثاني يرجع لوجود $x_L - z_L$ مخزون متبقي من طلبات الشراء مقدماً. على نحو مشابه، تصبح صيغة تكاليف شراء الأجهزة صغيرة الحجم:

$$520x_S + 450(w_S - x_S + z_S)$$

وبالتالي، فإن الأرباح النهائية هي

$$\begin{aligned}\Pi &= 640(z_L + w_L) + 590(z_S + w_S) - 550x_L - 480(w_L - x_L + z_L) \\ &\quad - 520x_S - 450(w_S - x_S + z_S) \\ &= 160z_L + 140z_S - 70(x_L + x_S) + 160w_L + 140w_S.\end{aligned}$$

لتعظيم الأرباح يجب الاختيار من x_S و x_L ولأن

$$\text{maximize } 160 \min(x_L, d_L) + 140 \min(x_S, d_S) - 70(x_L + x_S)$$

لكن الطبيعة سوف تختار d_L و d_S من المجموعة المجهولة

$$A = \{(d_L, d_S) : d_L \geq 0, d_S \geq 0, d_L + d_S = 5000\}$$

يمكن صياغة ذلك كمسألة تعظيم v وفقاً للشروط

$$\begin{aligned}v - 160 \min(x_L, d_L) - 140 \min(x_S, d_S) + 70(x_L + x_S) &\leq 0 \text{ for all } (d_L, d_S) \in A \\ x_L &\geq 0, x_S \geq 0.\end{aligned}$$

وبما أن الحد الأدنى للمعاملات مقعر، فإن ذلك يفي بالشروط التي نحتاجها لاستبدال المجموعة المجهولة بنسخ الشرط عن أقصى نقطتين في A ؛ وهما $d_L = 5000, d_S = 0$ and $d_L = 0, d_S = 5000$.

نفترض أن $x_L \leq 5000$ and $x_S \leq 5000$ ، حيث لا يمكن أن يوجد سبب لطلب أكثر من الحد الأقصى للطلب. إذن، فإن الشروط عند أقصى نقطتين يمكن تبسيطها والحصول على

maximize v

$$\begin{aligned} \text{subject to } & v - 160x_L + 70(x_L + x_S) \leq 0 \\ & v - 140x_S + 70(x_L + x_S) \leq 0 \\ & 0 \leq x_L \leq 5000, \quad 0 \leq x_S \leq 5000. \end{aligned}$$

جدول البيانات BRMch8-Sentinel.xlsx مخصص لحل هذه المسألة، لنحصل على الحل $x_L = 4375$ and $x_S = 5000$ ، ما يعطينا قيمة v تساوي 43750 دولار. بمعنى آخر، إذا كانت هذه هي قيم x_L و x_S يمكن تحقيق أرباح بقيمة 43750 دولار، وذلك أفضل قيمة مضمونة للأرباح.

1-3-8 * التعظيم القوي من حيث التوزيع

حتى الآن نعتبر الموقف يتعلق الغموض بأرقام معينة في صيغة المسألة. بدلاً من ذلك نفترض أننا نعلم توزيع هذه المعاملات، ونفترض أننا نعلم المجموعة المجهولة المتضمن لها. رغم ذلك هناك حالات عديدة نعلم فيها أكثر من مجموعة للقيم التي يجب أن يأخذها المعامل لكن أقل من توزيعها الكامل. عندما يحدث ذلك يعني أننا نستخدم نموذج تعظيم قوي من حيث التوزيع، والذي من خلاله لا نحدد فقط مجموعة من النقاط ولكن أيضاً مجموعة من التوزيعات كالمجموعة المجهولة. على سبيل المثال، إذا كانت أسعار سلعة معينة غداً تتبع توزيع طبيعي بمتوسط مماثل لسعر اليوم، لكن الانحراف المعياري غير معلوم.

في هذه الحالة، سوف نكتب المجموعة الغامضة A بخط سكريبت (A) لتذكر أنها مجموعة توزيعات. وإذا كانت ξ المعامل في المسألة و $\Pi(x, \xi)$ تمثل الأرباح باستخدام متغير قرار ξ مع العلم بتوزيع ξ ، إذن (إذا كنا قادرين على المخاطرة) نريد تعظيم القيمة المتوقعة لـ $\Pi(x, \xi)$. وبما أننا نعلم تغيرات التوزيع، فننصح بكتابة التوقعات من حيث التوزيع. نستخدم الرموز $EF[\Pi(x, \xi)]$ لتوقعات $\Pi(x, \xi)$ عندما تأخذ ξ التوزيع F .

نركز على المسألة حيث يحدث الغموض في الهدف بدلاً من الشروط. وبالتالي يصبح الهدف من مسألة التعظيم القوي من حيث التوزيع هو إيجاد أفضل قيمة متوقعة للأرباح

التي يمكن تحقيقها إذا علمنا أن توزيع ξ يقع في المجموعة المجهولة A . يمكن كتابة ذلك كالتالي

$$\max_x \left\{ \min_{F \in \mathcal{A}} E_F [\Pi(x, \xi)] \right\}$$

إذا كان يمكن تمثيل الغموض في التوزيع من خلال مجموعة صغيرة من المعاملات المعرفة، فيمكن إعادة هذه المسألة إلى صيغة قوية "قائمة على نقطة" بالحصول على القيمة المتوقعة من حيث قيم المعامل. في هذا المثال حول سعر السلعة غداً يمكن أن نحدد الانحرافات المعيارية المحتملة بين $\sigma_{\min}$ and $\sigma_{\max}$ ، ومن ثم $A = \{N(0, \sigma) : \sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}\}$. الآن نفترض أنه يمكن حساب الأرباح المتوقعة للانحراف المعياري σ ، ومتغير القرار x ، لنقل أنه $\Pi(x, \sigma)$. ومن ثم يمكن إعادة كتابة مسألة التعظيم القوي من حيث التوزيع بالشكل التالي

$$\max_x \left\{ \min_{\sigma \in A} \bar{\Pi}(x, \sigma) \right\}$$

حيث أن $A = \{\sigma : \sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}\}$

في مسألة التعظيم القوي من حيث التوزيع، إذا كانت مجموعة A المجهولة تتضمن التوزيعات التي تأخذ السلوك الأقصى لوضع كل الاحتمالات في قيمة وحيدة هي ξ ، فنفترض أن الطبيعة سوف تختار أحد هذه التوزيعات القصوى، والسبب بسيط، فالقيمة المتوقعة لـ Π في ظل التوزيع F يجب أن تكون أكبر من أدنى قيمة قد تأخذها، بمعنى آخر، إذا كانت دالة الكثافة F هي f وهي غير صفيرية في المجموعة $[a, b]$ إذن

$$\begin{aligned} E_F [\Pi(x, \xi)] &= \int_a^b \Pi(x, s) f(s) ds \\ &\geq \int_a^b \left(\min_{a \leq z \leq b} \Pi(x, z) \right) f(s) ds = \min_{a \leq z \leq b} \Pi(x, z). \end{aligned}$$

نكتب δ_z رمزاً للتوزيع الذي يضع كل وزنه على نقطة وحيدة هي Z (في بعض الأحيان يسمى توزيع دلتا ديراك). أيضاً نكتب $R(A)$ لرمز إلى مجموعة القيم التي قد تنتج في ظل

توزيع A . وبالتالي، في الحالة الخاصة التي تكون كل قيمة $z \in R(A)$ ومن ثم δ_z أيضاً في A ، نستطيع أن نستنتج

$$\max_x \left\{ \min_{F \in \mathcal{A}} E_F [\Pi(x, \xi)] \right\} = \max_x \left\{ \min_{z \in R(\mathcal{A})} \Pi(x, z) \right\}$$

ومن ثم نعود إلى مسألة التعظيم القوي عند كل نقطة.

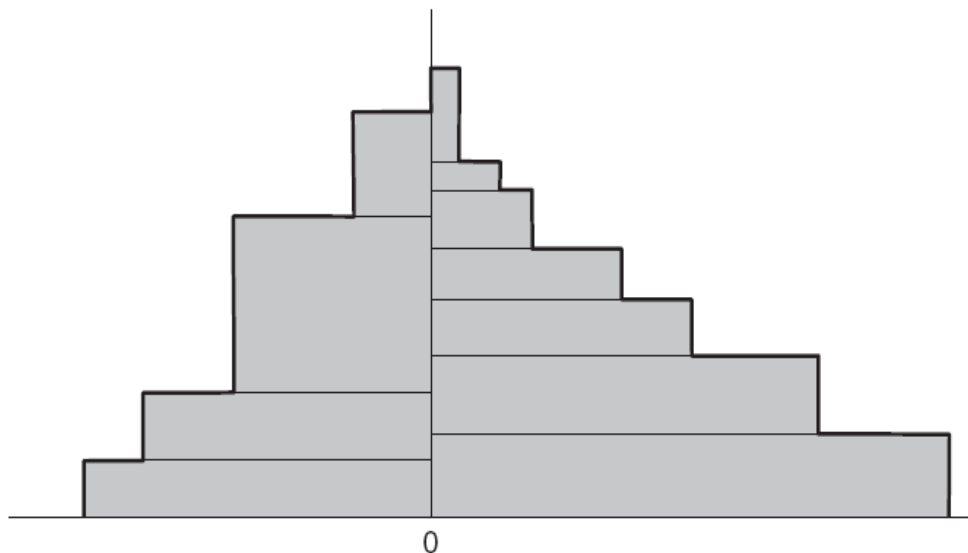
في بعض السياقات من الطبيعي اعتبار مجموعة A المجهولة تحتوي على كل التوزيعات أحادية النمط وبالتالي تتزايد الكثافات إلى الحد الأقصى ثم تتقلص. على سبيل المثال، عند مراعاة توزيع الطلب لمنتج ما له علاقة بالطقس، قد نميل إلى تقييد التوزيع بنموذج نمطي واحد - حتى لو لم يكن أي شيء آخر معلوم.

سوف ننظر في مجموعة مجهولة تتكون من كل التوزيعات بدوال كثافة أحادية النمط معرفة على نطاق، لكننا نضيف شرط أن يكون الوسط الحسابي معلوماً مقدماً. ويمكننا تحويل المسألة ليصبح الوسط الحسابي صفر. على سبيل المثال، قد نصل إلى أن القيمة المحتملة لسعر النفط في فترة أسبوع هو سعر اليوم، ويعتبر هذا السعر عشوائي بتوزيع أحادي النمط، حيث يمكن الحصول على هذا التوزيع من خلال أخذ توزيع أحادي النمط بمتوسط صفري ثم نضيف له سعر النفط اليوم.

من الجدير بالملاحظة أن أي توزيع أحادي النمط ذو دعم في نطاق $[-a, b]$ ووسط حسابي 0 يمكن الحصول عليه من خلال اختيار رقم من توزيع G على $[-a, b]$ ثم يتم ضربه في رقم يتم اختياره عشوائياً من المسافة $[0, 1]$. يمكن القول أن أي توزيع أحادي النمط يمكن الحصول عليه كنتاج نموذجين مستقلين، أحدهم من G والآخر من $U(0,1)$ ، والتوزيع الموحد على $(0,1)$. وجدير بالذكر أن هذه النتيجة تعرف بنظرية Khintchine. طريقة أخرى للحصول على ذلك هي القول أنه يمكن الحصول على التوزيع من الجمع بين توزيعات موحدة كل منهم له نطاق بالشكل $[0, x]$ ، أو بالشكل $[-x, 0]$.

يوضح الشكل 3-8 التوزيع حيث تكون دالة الكثافة تصاعدية لـ $x < 0$ ودالة تنازلية لـ x

0. >. نرى كيف أن الكثافة تنقسم إلى مستطيلات أفقية، كل منهم يمثل توزيع موحد بين نقاط النهاية الأفقية لهذه المجموعة (سواء المجموعة $[-x, 0]$ أو المجموعة $[0, x]$). نفترض أننا قمنا باختيار كل مستطيل مع احتمالية أن يكون مساوي لمنطقته (هذه القيمة تصل إلى 1 حيث أنها تساوي تكامل دالة الكثافة الأصلية f) ثم نختار نموذج من المستطيل غير الموحد داخل المجموعة الأفقية. ويمكن أن نرى احتمالية الوصول إلى أي نقطة توافق ذلك من التوزيع الأصلي.



الشكل 3-8: مثال لتوزيع غير متجانس كمزيج بين التوزيعات الموحدة

نفترض مراعاة التقليل الداخلي، هذه هي طبيعة المسألة: بناءً على القرار x الذي تم اتخاذه من قبل صانع القرار، كيف يجب أن يتم اختيار توزيع $\pi(x)$ لتقليل القيمة المتوقعة لـ $\pi(x)$ ؟ التوزيعات المتاحة أحادية النمط (بوسط حساب صفر). وأي كان التوزيع الذي تم اختياره، هناك بديل يعطينا نفس النتيجة من خلال تقسيم ذلك على عناصره الموحدة (المستطيلات الأفقية) كما في الشكل 3-8، ثم نختار أحدهم باحتمالية مناسبة. بالتالي، على سبيل المثال، إذا كان التوزيع F مكون من ثلاثة توزيعات موحدة U_A, U_B, U_C مع احتمالات P_A, P_B, P_C إذن

$$E_F[\Pi(x, \xi)] = p_A E_{U_A}[\Pi(x, \xi)] + p_B E_{U_B}[\Pi(x, \xi)] + p_C E_{U_C}[\Pi(x, \xi)].$$

ما سبق تكوين محدب لتوقعات التوزيعات الموحدة، ومن ثم يجب أن يأخذ واحد من الثلاثة القيمة $E_F[\Pi(x, \xi)]$ أو أقل. إذا كانت التوزيعات الثلاثة لها قيم أكبر من $E_F[\Pi(x, \xi)]$ إذن فنتيجة اختيارهم مع احتمالات معينة قد تكون أيضاً أكبر من $E_F[\Pi(x, \xi)]$.

هذا مثال لنوع من الحجاج التي رأيناها بالفعل عندما قمنا بتقليل دالة خطية على مقامات متعددة، يمكننا فقط مراعاة النقاط القصوى للمقامات المتعددة. كذلك، إذا قمنا بتقليل التوقعات بشأن مجموعة التوزيعات A ، يمكننا مراعاة النقاط القصوى للمجموعة A .

في الحقيقة، نستطيع عمل هذه الحجة كاملة في شكل مجرد وعام أكثر، فالمجموعة A من التوزيعات أحادية النمط بوسط حسابي صفر وتدعم النطاق $-a$ إلى b هي نفسها مجموعة محدبة، بحيث إذا أخذنا تكوين محدب من هذين التوزيعين ستظل النتيجة هي توزيع أحادي النمط بوسط حسابي صفر. علاوة على ذلك، التوزيعات الموحدة على $[0, y] \cup [y, a]$ for $0 \leq y \leq a$ هي النقاط القصوى لـ A (حيث لا يمكن الحصول عليهم من خلال تكوين محدب من توزيعين آخرين في A). عند تقليل دالة خطية على توزيعات، نحتاج إلى مراعاة النقاط القصوى (أي هذه التوزيعات الموحدة).

ومن ثم، لإيجاد التوزيع أحادي النمط لـ ξ (بوسط حسابي صفر) الذي يقلل $E[\Pi(x, \xi)]$ نحتاج فقط إلى مراعاة التوزيعات الموحدة سواء على $(-y, 0)$ أو على $(0, y)$. في حالة أن $\Pi(x, \xi)$ دالة مقعرة لـ ξ ، يمكن أن نرى أن الحد الأدنى لـ $E[\Pi(x, \xi)]$ على التوزيعات $F \in A$ = {توزيعات موحدة مع دعم في نطاق $[-a, b]$ ووسط حسابي صفر} يمكن الحصول عليه سواء كانت F موحدة على $(-a, 0)$ أو موحدة على $(0, b)$.

سنبرهن على هذه النتيجة بتوضيح أن أحد هذه التوزيعات الموحدة يعطينا قيمة متوقعة لـ $\Pi(x, \xi)$ أصغر من التوزيع الموحد على $(0, y)$ لـ $0 < y < b$. (يمكن استخدام نفس المنهج لتوضيح أن أحد التوزيعات له قيمة متوقعة أصغر من التوزيع الموحد على $(-y, 0)$ for $0 < y < a$.)

قيمة x في $\Pi(x, \xi)$ لا يلعب دوراً في هذه المناقشة، ومن ثم نكتب $\Pi(x, \xi)$ for $\Pi(\xi)$. ونلاحظ أن عندما تتم توزيع ξ على $(-a, 0)$

$$E(\Pi(\xi)) = \frac{1}{a} \int_{-a}^0 \Pi(u) du$$

أي متوسط قيمة Π على $(-a, 0)$ ، وهناك تعبيرات مشابهة لتوقعات Π عندما يتم توزيع ξ على $(0, y)$ or $(0, b)$. نختار y اعتباطية مع $0 < y < b$: والهدف إظهار أن إذا كانت

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^0 \Pi(u) du > \frac{1}{y} \int_0^y \Pi(u) du,$$

إذن

$$\frac{1}{y} \int_0^y \Pi(u) du > \frac{1}{b} \int_0^b \Pi(u) du.$$

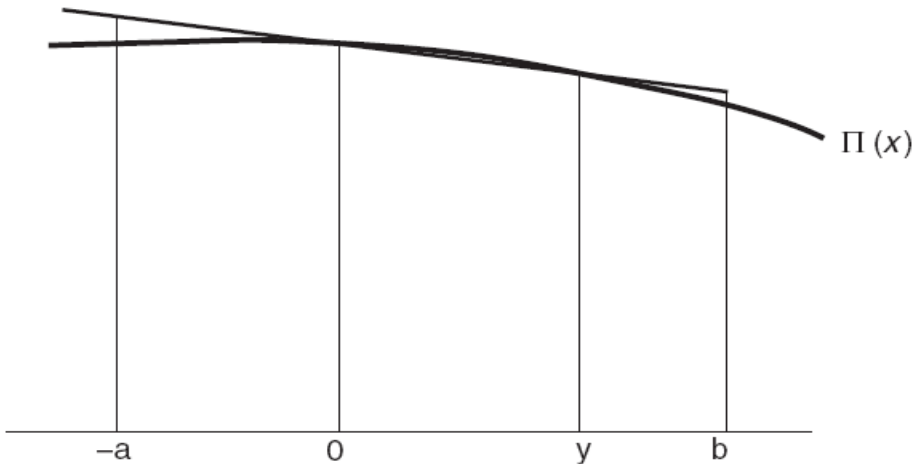
وبما أن Π مقعرة، يمكن رسم خط مستقيم بين النقاط على الرسم البياني لـ Π عند صفر و y وقيم Π أعلى الخط بين 0 و y وأدنى هذا الخط خارج النقاط، يظهر ذلك في الشكل 4-8. الآن، إذا كان الخط المستقيم أفقي عند ارتفاع h ، يمكن استنتاج أن متوسط قيمة Π على $(0, a)$ قد يكون أكبر من المتوسط على $(-a, 0)$. وبما أننا نفترض أن متوسط قيمة Π على $(-a, 0)$ أكبر من النطاق $(0, y)$ ، نرى أن الخط سوف يكون مائل للأسفل. بالتالي، نرى أن قيمة Π في النطاق (y, b) أقل من القيم في النطاق $(0, y)$. وبالتالي

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \int_0^b \Pi(u) du &= \frac{1}{b} \int_0^y \Pi(u) du + \frac{1}{b} \int_y^b \Pi(u) du \\ &< \frac{1}{b} \int_0^y \Pi(u) du + \frac{(b-y)}{b} \Pi(y) \\ &< \frac{1}{b} \int_0^y \Pi(u) du + \frac{(b-y)}{b} \frac{1}{y} \int_0^y \Pi(u) du = \frac{1}{y} \int_0^y \Pi(u) du \end{aligned}$$

ذلك يكمل ما نريد تأسيسه: حيث يجب أن يكون واحد من $(1/a) \int_{-a}^0 \Pi(u) du$ أو $(1/b) \int_0^b \Pi(u) du$ أقل من أو مساوي لـ $(1/y) \int_0^y \Pi(u) du$. وهكذا توصلنا إلى أن

الحد الأدنى يحدث عند أحد هذه القيم

يمكن استبدال الوسط الحسابي صفر بقيمة اعتباطية w_0 . ومن ثم نفعل ذلك عندما نرغب في تقليل القيمة المتوقعة لدالة مقعرة $\Pi(x)$ على خيارات توزيع أحادية النمط، ذات دعم عند (w_L, w_U) ، ووسطها الحسابي عند w_0 ، بعد ذلك نحتاج فقط إلى مراعاة خيارين: التوزيع الموحد على (w_L, w_0) والتوزيع الموحد على (w_0, w_U) . ونوضح كيفية استخدام هذه النتيجة في حساب الحل القوي في المثال العملي بالأسفل.



الشكل 4-8: رسم بياني لتوضيح الحجة حول متوسطات دالة مقعرة Π

مثال عملي 5-8: تولوز للأجهزة الطبية

تريد شركة تولوز للأجهزة الطبية عمل طلب بأجهزة مراقبة القلب ليوافق الطلب غير المعلوم، توزيع الطلب مجهول بالنسبة للشركة لكنها تعتقد أن التوزيع أحادي النمط، حيث يبلغ أقل مستوى للطلب صفر وأعلى مستوى 200. القيمة ذات الاحتمال الأقوى هي 100. تبلغ تكلفة الوحدات 4000 دولار ويتم بيعها مقابل 10000 دولار. وهناك تكاليف مرتبطة بالوحدات غير المباعة وبعدم القدرة على تلبية الطلب. تقدر الشركة أن إذا كانت الطلبات x والطلب d ، فإن تكاليف "عدم تلبية الطلب" هي $50(x - d)^2$. بالتالي، تصبح

دالة الأرباح (1000s دولار) هي

$$\Pi(x, d) = 10 \min(x, d) - 4x - 0.05(x - d)^2. \quad (13-8)$$

تدرك الشركة أن في بعض الحالات قد تتكبد خسارة، لكنها ترغب في تعظيم الأرباح المتوقعة في حالة أسوأ توزيع محتمل للطلب.

الحل

دالة الأرباح في المعادلة (13-8) دالة مقعرة لـ d بمجرد تحديد x ، حيث أن المكونات الثلاثة كلها مقعرة. وبناءً على النتيجة بالأعلى، نحتاج فقط لتقييم الأرباح المتوقعة لإثنين من التوزيعات المحددة لـ d : سواء كانت d موحدة على $(0, 100)$ أو d موحدة على $(100, 200)$.

$$E_{U(100,200)}[\Pi(x, d)] = \frac{1}{100} \int_{100}^{200} (10 \min(x, u) - 4x - \frac{1}{20}(x - u)^2) du.$$

بشكل واضح تعتمد قيمة هذا التكامل على قيمة x إذا كانت $x \leq 100$

وإذا كانت $x > 100$

$$\begin{aligned} E_{U(100,200)}[\Pi(x, d)] &= \frac{1}{100} \int_{100}^x (10u - 4x) du + \frac{1}{100} \int_x^{200} 6x du - \frac{1}{100} \int_{100}^{200} \frac{1}{20}(x - u)^2 du \\ &= -4x \frac{x - 100}{100} + \frac{1}{100} [5u^2]_{100}^x + 6x \frac{200 - x}{100} + \frac{1}{2000} [(x - u)^3/3]_x^{200} \\ &= \frac{x}{10} (160 - x) + \frac{1}{20} (x^2 - 100^2) + \frac{1}{6000} ((x - 200)^3 - (x - 100)^3). \end{aligned}$$

ويمكن تقييم التوزيع الآخر على نحو مشابه

$$E_{U(0,100)}[\Pi(x, d)] = \frac{1}{100} \int_0^{100} (10 \min(x, u) - 4x - \frac{1}{20}(x - u)^2) du.$$

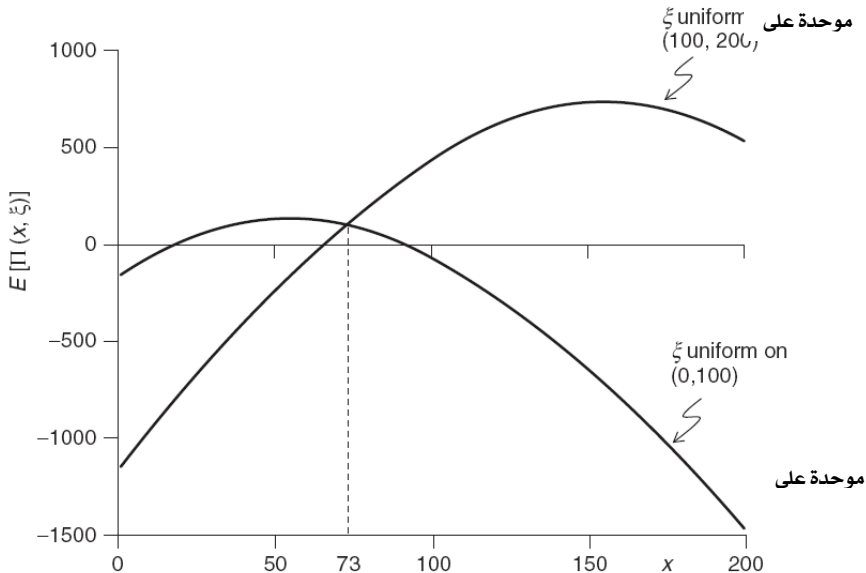
إذا كانت $x \leq 100$

$$\begin{aligned}
 E_{U(0,100)}[\Pi(x, d)] &= \frac{1}{100} \int_0^x (10u - 4x) du + \frac{1}{100} \int_x^{100} 6x du - \frac{1}{2000} \int_0^{100} (x - u)^2 du \\
 &= -4x \frac{x}{100} + \frac{1}{100} [5u^2]_0^x + 6x \frac{100 - x}{100} + \frac{1}{2000} [(x - u)^3 / 3]_0^{100} \\
 &= \frac{1}{10} x (60 - x) + \frac{x^2}{20} + \frac{1}{6000} ((x - 100)^3 - x^3),
 \end{aligned}$$

وإذا كانت $x > 100$

$$\begin{aligned}
 E_{U(0,100)}[\Pi(x, d)] &= \frac{1}{100} \int_0^{100} (10u - 4x) du - \frac{1}{100} \int_0^{100} \frac{1}{20} (x - u)^2 du \\
 &= -4x + \frac{1}{100} [5u^2]_0^{100} + \frac{1}{2000} [(x - u)^3 / 3]_0^{100} \\
 &= -4x + 500 + \frac{1}{6000} ((x - 100)^3 - x^3).
 \end{aligned}$$

يوضح جدول البيانات BRMch8-Toulouse.xlsx قيم $EU(0,100)[\Pi(x, d)]$ مع تغير x ، كما تم توضيحها أيضاً في الشكل 5-8.



الشكل 5-8: الربح المتوقع لـ TMD كدالة x لتوزيعين بحد أقصى موحدين للطلب

وجدير بالذكر أن قيمة x المثلى القوية هي التي تعظم الحد الأدنى للأرباح. والحجم الأمثل للطلب هو $x = 73$ ، الذي يضمن حد أدنى للأرباح بقيمة 99883 دولار. نستطيع أن نرى قيم متعددة لـ x ، وقد تكون الأرباح المتوقعة سالبة إذا كان خيار توزيع الطلب سيئاً.

ملاحظات

المعلومات حول نظرية فرانك نايت عن الغموض مأخوذة من كتاب برنشتاين. أثار التحسين القوي الكاملة اهتمام كبير في السنوات القليلة الماضية وهناك عدد كبير من الأبحاث التي تتناول جوانب التحسين القوي. وتقدم المقالة النقدية لبرنشتاين، براون أند كرامانيس (2011) فكرة جيدة عن ثقافة التحسين القوي المكثفة.

بينما نتناول هنا مبادئ التحسين القوي مع التركيز على المسائل صغيرة الحجم نسبياً ذات مجموعات مجهولة بسيطة. مناقشة الميزانية المجهولة في الجزئية 8-2 من أعمال ديمتريس بريستاس بالتعاون مع كتاب آخري (بريستا وسيم، 2004). في تلك الجزئية نستخدم خصائص الازدواجية لعمل نفس المسألة وحلها - ذلك المنهج في الازدواجية يمكن أن يمتد إلى تنوع كامل لمزيد من مسائل التحسين القوي المعقدة.

كذلك، قد يمتد تناول التحسين القوي من حيث التوزيع إلى طرق عدة، حيث أن المجموعات الغامضة التي بحثناها حتى أدق التفاصيل كانت دوال أحادية النمط بوسط حسابي معلوم، على وجه التحديد سهل التحليل. يمكن إيجاد بعض النظريات ذات الصلة لكن في سياق توزيعات متعددة الأبعاد في شيبارو (2006).

كما أن هناك أعمال تبحث في حساب الحلول المثلى لعدد متنوع من المسائل، على سبيل المثال، المسائل ذات الخصائص الديناميكية التي تتوافق مع التحسين العشوائي الذي تمت مناقشته في الفصل السابع. لمزيد من المناقشان الشاملة حول المادة ننصح القارئ بالرجوع إلى كتاب (Ben-Tal, El Ghaoui and Nemirovski (2009).

المراجع

- Ben-Tal, A., El Ghaoui, L. and Nemirovski, A. (2009) *Robust Optimization*. Princeton University Press.
- Bernstein, P. (1996) *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*. John Wiley & Sons.
- Bertsimas, D., Brown, D. and Caramanis, C. (2011) Theory and applications of robust optimization. *SIAM Review*, 53, 464–501.
- Bertsimas, D. and Sim, M. (2004) The price of robustness. *Operations Research*, 52, 35–53.
- Shapiro, A. (2006) Worst-case distribution analysis of stochastic programs. *Mathematical Programming Ser. B*, 107, 91–96.

تمارين

1-8 أعد كتابة الشروط

نفترض أن المسألة تتمثل في اختيار كمية من منتج x_i ، للمنتجات $i=1,2,3,4$ حيث أن معدلات الفشل مرتفعة وغامضة. الوقت المستغرق لإنتاج وحدة من المنتج هي دقيقة واحدة. لكن نظراً لمعدلات الفشل، إنتاج كمية x_i من المنتج i يتطلب $a_i x_i$ دقائق، حيث $a_i \geq 1$. ومعدلات الإنتاج a_i غامضة. نفترض أننا على يقين أن $a_1 \leq 1.1$, $a_3 \leq 1.1$. علاوة على ذلك، معدلات الفشل مترابطة بشكل معقد. يرى الخبير أنه يمكن فرض الشروط التالية:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &\leq 4.3, \\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 &\leq 0.1. \end{aligned}$$

قم بصياغة الشرط على كميات المنتج لكل من المنتجات الأربعة إذا كان من الضروري ضمان صنع هذه المنتجات في أقل من 40 ساعة إجمالاً (2400 دقيقة).

2-8 معاملات غير متعلقة

مسألة تعظيم قوي تحتوي على الشرط

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \leq b$$

الذي يجب أن يخضع له كل من $(a_1, a_2, a_3) \in A$ حيث أن A تمثل المجموعة حيث $a_i \in$

$|x_1|$ ، وليس هناك علاقة بين قيم a_i . وضح ذلك باستخدام قيم مجردة $|x_2|$ ، $|x_3|$ بحيث يمكن إعادة كتابة ذلك بشرط وحيد.

3-8 تأثير الميزانية المجهولة

(أ) قم بحل مثال أفيجنون للاستيراد في ظل وجود ميزانية مجهولة $B = 1.5$ وقارن دوال الهدف بحالة أن $B = 2$ لترى كم الزيادة في الأرباح المتوقعة مع أخذ أقل المناهج تحفظاً.

(ب) وضح ما إذا كان لا يوجد ميزانية مجهولة (وكل متغير يمكن أن يأخذ أي قيمة في مجموعته)، والتي تعادل الوضع $B = 3$ ، وبالتالي لا يوجد حل محتمل.

4-8 التعظيم القوي لستينل

في مثال ستينل، استخدم جدول البيانات لتوضيح ما إذا كان قد تم تخفيض أسعار البيع إلى 600 دولار و 550 دولار للأجهزة كبيرة وصغيرة الحجم، وبالتالي فإن الحل الأمثل يتضمن $x_L = x_S = 0$. اشرح سبب حدوث ذلك.

5-8 مجموعات مجهولة بدوال مقعرة

نفترض أن A متعدد المقام وله زوايا $a(1), a(2), \dots, a(k)$ (كل منهم يمثل متجه في R^n). إذا كانت (x, a) دالة a مقعرة لكل x محددة و k ، $v \leq (x, a(i))$ for $i = 1, 2, \dots, k$ (إذن s أقل من $(x, a(i))$ عن كل نقطة زاوية)، أثبت أن $v \leq (x, a)$ لكل $a \in A$.

6-8 بروفينس ريتالز

تمتلك بروفينس ريتالز أسطول مكون من 100 سيارة تؤجرهم باليوم، تفكر الشركة بالاستثمار في أنظمة GPS للسيارات وسوف يكلفهم ذلك 4 دولار إضافية يومياً على إيجار أنظمة GPS. تبلغ تكلفة شراء أنظمة GPS 500 دولار وتتطلب أيضاً تركيب حامل آمان بتكلفة 250 دولار للسيارة. تتمكن بروفينس من بيع سياراتها بعد 500 يوم وهي أيضاً

مدة عمر أنظمة GPS. ومن ثم، السيارة التي تحتوي على النظام لها قيمة إضافية بعد هذه الفترة مقارنة بالسيارة دون النظام. فور إعلان بروفينس ريتالز عن هذه الخدمة سوف تكون غالية الثمن من حيث عدم القدرة على توفيرها. تعتقد بروفينس ريتالز أنها ستتحمل 10 دولار إذا كان العميل غير قادر على الحصول على النظام لكنه قام بطلبه.

(أ) قم بصياغة ما سبق كمسألة تعظيم قوي بناءً على الافتراضات التالية: (أ) يتم ايجار كل السيارات كل يوم. (ب) يجب أن تتخذ بروفينس ريتالز قرار في بداية الـ 500 يوم حول كيف يتم تركيب أنظمة GPS ولا يمكن تركيب مزيد من الأنظمة على مدار فترة 500 يوم. (ج) نفس الفئة من العملاء تطلب أنظمة GPS كل يوم (لكن لا تستطيع بروفينس ريتالز التنبؤ بهذه الفئة).

(ب) أثبت أن إذا اتخذت بروفينس ريتالز قرار بعدد الأنظمة التي سيتم تركيبها، ثم يتم اختيار قيمة p ، فئة العملاء التي قامت بطلب الأنظمة، ومن ثم تحقق الشركة أقل أرباح، بعد ذلك يتم اختيار p عند 0 أو 1.

(ج) استخدم المعطيات في النقطة السابقة لحل مسألة التعظيم القوي.

7-8 تولوس للأجهزة الطبية

في مثال تولوس للأجهزة الطبية نفترض أن الشركة تعلم أن توزيع الطلب أحادي النمط لكنها غير قادرة على تحديد قيمة الوسط الحسابي (مع وجود جوانب أخرى من المسألة غير معلومة). اشرح لماذا يتراجع القرار إلى مسألة تعظيم قوي عادية؟ واحسب أفضل خيار للطلب x .

الفصل التاسع

الخيارات الحقيقية

القلق من الالتزام: جيد أو سيء؟

"لماذا تكون في عجلة من أمرك؟" كان هذا تعليق "داراي" عندما تسمع ما يقترحه رئيسها "كانديس"، الذي يعد الرئيس التنفيذي لشركة أناليتيكس وهي شركة رسوم متحركة تعمل في المقام الأول في الإعلانات القصيرة وأشرطة الفيديو والموسيقى، و"داراي" هي المدير المالي. وكانوا يبحثون لأكثر من عام عن فرصة لبدء إجراء تقسيم جديد لشركتهم العاملة في مجال ألعاب الكمبيوتر. وقد قامت شركة كيميت المتخصصة في ألعاب الكمبيوتر باستثمار أموالها في شركة أناليتيكس، وتعد أصول كيميت الرئيسة، باستثناء موظفيها العشرة، هي عبارة عن 20/1 من عائدات مبيعات لعبة الكمبيوتر الجديدة التي كانت تعمل عليها الشركة، وتم إطلاقها في غضون ثلاثة أشهر. ومن المقرر أن يتم دفع أول دفعة من الرسوم لشركة كيميت بموجب هذا العقد في غضون ستة أشهر، ولكن هناك قدر كبير من عدم اليقين بشأن مدى نجاح اللعبة، وبالتالي هذا سيحدد تكلفة الرسوم التي سيتم استلامها. ويتفق كل من كانديس وداراي على أن العمل مع كيميت هي فكرة جيدة. وأكثر ما يهتم به كانديس

هو شراء حصة مسيطرة في كيميت بأسرع وقت، بينما تبحث داراي في إمكانية شراء حصة أصغر في الشركة، مع نية شراء حصة أكبر في حالة إذا كانت لعبة الكمبيوتر الجديدة تحقق نتائج جيدة. ففي بعض الأحيان، قد تستغرق اللعبة الجديدة بعض الوقت لتحقيق النجاح، لذا فإن أناليتيكس تريد أن يكون لديها خيار في زيادة مشتريات الأسهم لفترة سنتين على الأقل. ويرى كانديس أن هذا الأمر أكثر تكلفة، إذ أن حصة 20٪ في كيميت ستكلف مليوني دولار (مع خيار شراء 40٪ أخرى في أي وقت خلال العامين المقبلين بتكلفة 4 ملايين دولار)، في حين يمكن شراء حصة فورية بنسبة 60٪ مقابل 4.8 مليون دولار. بينما لا يعد هذا منطقياً بالنسبة لـ كانديس، فهي ترى أنه: لماذا تدفع 6 مليون دولار في حين يمكنك دفع 4.8 مليون دولار مقابل شيء يمكنك الحصول عليه على الفور؟ وتشعر داراي بالقلق بشأن المراهنة على مثل هذا المبلغ الكبير من المال على نجاح لعبة كمبيوتر واحدة؛ فإذا جرت الأمور بشكل سيء، فإن الاستثمار في كيميت لن يكون مجدياً. ويجب أن يكون هناك فائدة في تأخير التعهد بهذا الالتزام، ولكن هل يستحق الثمن الإضافي الذي سيدفعونه في النهاية؟

1-9 مقدمة في الخيارات الحقيقية

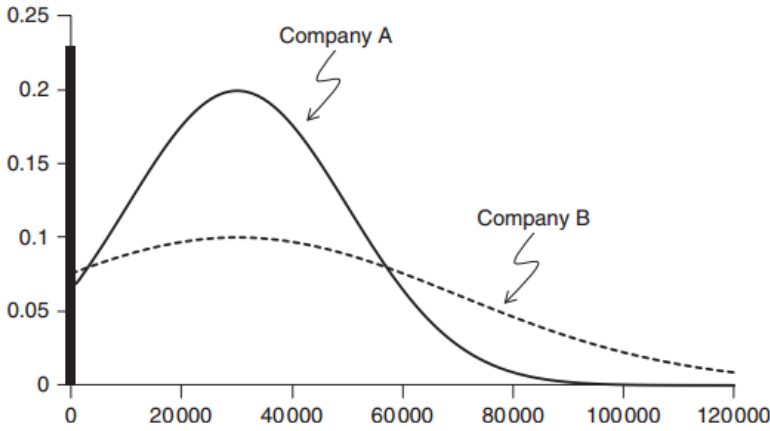
في معظم الحالات يعتبر عدم اليقين المتزايد في النتائج هو أمر غير مرغوب فيه. وتؤكد مناقشتنا في الفصل السادس حول الطريقة التي يتخذ بها الأفراد القرارات أن هذا هو الحال بالنسبة للأفراد عند التعامل مع الأرباح غير المؤكدة: فنحن نفضل أن نربح 80,000 دولار بشكل مؤكد، من أن يكون هناك احتمال 80٪ لربح 100,000 دولار واحتمال 20٪ بعدم ربح أي شيء. كما شاهدنا نفس الفكرة في الفصل الثاني الذي يناقش نظرية المحفظة، حيث نتوقع عوائد أعلى عندما يكون الخطر (أي التباين) أكبر. ومع ذلك، هناك ظروف تكون فيها التغيرات الكبيرة أو التباين الكبير أمراً مفيداً. ويحدث هذا كلما كان هناك خيار ضمني، وتأثير الحد من أي هبوط مرتبط بالتغير. وهذا التأثير المفيد ليس نتيجة لهيكل تفضيل معين يستخدمه صانع القرار: فهو يحدث عندما يكون صانع القرار محايداً تجاه المخاطر. فقد يبدو غريباً أن حدوث زيادة في التباين قد تجعل الأمور أفضل، وهناك طريقة جيدة لفهم هذا من خلال النظر في مثال.

مثال 9-1: الاستثمار في شركات التكنولوجيا الحيوية

لنفترض أنك تفكر في الاستثمار في إحدى شركتين من شركات التكنولوجيا الحيوية، وكلاهما يقوم بأعمال بحث وتطوير مماثلة. وعادةً ما تنتج الشركة A فكرة تصميم جديدة كل ثلاثة أشهر، وفي المتوسط، فإن الربحية المحتملة لأفكار هذه المنتجات، إذا كانت ستدخل حيز الإنتاج هي 30 000 دولار في السنة مع انحراف معياري قدره 20 000 دولار في السنة. (هناك إمكانية خسارة المال إذا دخلت تصاميم المنتجات الأقل نجاحاً في حيز الإنتاج، لذلك يتم وضع هذه التصاميم على الرفوف) وأيضاً تنتج الشركة الثانية B فكرة تصميم جديدة كل ثلاثة أشهر والربحية المحتملة لأفكار هذه المنتجات هي 30 000 دولار، ولكن الانحراف المعياري هو أعلى، إذ يبلغ 40 000 دولار في السنة. ما هي الشركة الأفضل للاستثمار فيها؟

وبطبيعة الحال فنحن نرغب في الحد من المخاطر، وهاتين الشركتين تمتلكان نفس الخصائص باستثناء التباين في العائدات على أفكار التصميم الجديد. لذلك، في البداية قد نتوقع أن الشركة A ذات التباين الأصغر من العائدات سوف توفر استثمار أفضل. ولكن في الواقع، فإن الشركة B ذات التباين الأعلى من العائدات سوف تعطي عائد متوقع أعلى وتمثل فرصة أفضل للاستثمار. وأنه لن يتم إنتاج المنتجات التي تحقق خسائر بأي شكل من الأشكال. وبالتالي فإن التصاميم الأقل نجاحاً قيمتها صفر وليس قيمة سلبية. وبالتالي، هناك ربح من التغيرات الإيجابية الأكبر في الربحية التي لا يقابلها الاختلافات السلبية الأكبر.

ويوضح الشكل 9-1 الفكرة التي يتم فيها توزيع ربحية المنتج للشركتين بافتراض أن المنتجات غير المربحة لها قيمة صفر. ويمثل الشريط عند الصفر احتمال أي من الأرباح يأخذ القيمة صفر. وتبلغ القيمة المتوسطة لربحية المنتج في حالة التباين المنخفض 31 052 دولاراً، أما الفرق الكبير (الخط المقطع) فهو 99 33 دولاراً. وكلما زادت نسبة التوزيع المقطوعة، زادت القيمة المتوقعة للربح. وإذا كان علينا أن ننظر في انحراف معياري أصغر من ذلك، فإننا لن نجد احتمالاً لربحية سلبية - مما يؤدي إلى ربح متوقع يساوي المتوسط البالغ 30 ألف دولار، وهو مبلغ أقل من الشركة A.



الشكل 1-9: توزيع الأرباح المقتطعة عند الصفر يعطي نتائج مختلفة حسب التباين.

يوضح هذا المثال أنه عندما يتم قطع منحنى في الأسفل وجعل التباين أصغر، من شأنه أن يجعل الربح المتوقع أسوأ. هذه هي الظاهرة الكامنة التي نستكشفها في هذا الفصل. ومن المهم بالنسبة للمديرين أن يكون لديهم فهم جيد لماذا اختيار خيار معين (في هذه الحالة خيار عدم تطوير منتج) يجعل التغير المتزايد ذات قيمة. هناك أدوات بسيطة من شأنها أن تساعدنا في الحسابات اللازمة لوضع قيمة الدولار من ضمن 'الاختيارية'، وهذا هو ما سنتقل إليه.

2-9 حساب القيم مع الخيارات الحقيقية

لنفترض أن نتيجة بعض المشاريع أو الاستثمارات غير مؤكدة ولكن هناك ضمان بأن النتيجة لن تكون أقل من قيمة معينة A. ربما يكون لدينا خيار عدم المضي قدما في المشروع، وفي هذه الحالة لا يمكن أن تكون النتيجة أقل من الصفر، أو ربما يمكننا دائما بيع استثمارنا بمبلغ معين A نظرا لأننا نحتفظ بخيار بيع هذا المبلغ (سوف نقدم مناقشة أشمل حول الخيارات المالية في وقت لاحق). على أية حال، إذا كان X متغيرا عشوائيا يعطي الربح في غياب الخيار، فإن الربح المتوقع لدينا:

$$E(\max(X, a)) = E(\max(X - a, 0)) + a.$$

ويذكر هذا التعبير بمناقشتنا حول التوزيع الزائد والمتوسط الزائد الذي قدمناه في الفصل الرابع، وهناك بالفعل علاقة بين الاثنين. ولكن يختلف تعريف التوزيع الزائد لأنه مشروط بأن تكون $X > a$ (بالنسبة لقيمة الهدف a). بالإضافة إلى، في مناقشتنا حول الزيادة المتوقعة كنا قلقين حول توزيع الخسارة، في حين سيكون تركيزنا في الخيارات الحقيقية على الربح. وسيكون أساس الحسابات التي نقوم بها هو التعبير $E(\max(X - a, 0))$ الذي سنشير إليه على أنه الفائض المتوقع عن a (استخدام مصطلح مختلف بدلا من "فائض" قد يساعد على تجنب الارتباك). ويمكننا كتابة الفائض المتوقع عن a ، كما يلي:

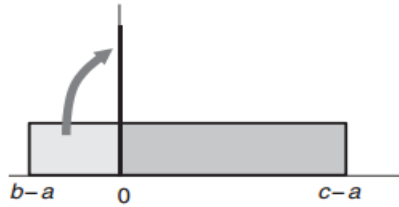
$$E(\max(X - a, 0)) = \Pr(X > a)E(X - a | X > a)$$

وبالتالي فإن الفائض المتوقع هو ببساطة الزيادة المتوسطة المضروبة في احتمال تجاوز الهدف. وسوف نعطي بعض التعبيرات المختلفة للفائض المتوقع اعتمادا على توزيع المتغير العشوائي. وأبسط حالة هي عندما يكون X موحدًا على مدى (b, c) ويكون $b < a < c$. ويتضح الوضع في الشكل 2-9. إن احتمال أن يكون $X - a$ أقل من الصفر هو المنطقة المظللة بشكل طفيف في الشكل 2-9، حيث أن هناك احتمال $(c - b) / (c - a)$ في الصيغة $\max(X - a, 0)$ هذه الكتلة الاحتمالية التي يتم ضبطها على الصفر، ويشار إليها بواسطة الشريط الصلب عند الصفر. وفي حالة أن $X - a$ لا تقل عن الصفر، فمن المرجح أيضا أن تأخذ أي قيمة بين 0 و $c - a$. لذا، في هذه الحالة يكون متوسط القيمة $(c - a) / 2$ (وهذا هو متوسط الزيادة للهدف a). وبالتالي، فإن الفائض المتوقع لـ a هو

$$\begin{aligned} E(\max(X - a, 0)) &= \frac{(a - b)}{(c - b)} \times 0 + \left(1 - \frac{(a - b)}{(c - b)}\right) \times \frac{(c - a)}{2} \\ &= \frac{(c - a)^2}{2(c - b)} \end{aligned}$$

يمكننا استخلاص نفس التعبير باستخدام التكامل. فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}
 E(\max(X - a, 0)) &= \int_b^c \max(u - a, 0) \frac{1}{c - b} du \\
 &= \frac{1}{c - b} \int_a^c (u - a) du \\
 &= \frac{1}{c - b} \left(\frac{c^2}{2} - ca - \frac{a^2}{2} + a^2 \right) \\
 &= \frac{(c - a)^2}{2(c - b)}.
 \end{aligned}$$



الشكل 2-9: الرسم البياني لإظهار حساب الفائض المتوقع عن a للتوزيع الموحد على (b, c) .

وأيضاً من المفيد الحصول على صيغة لـ $E(\max(a - X, 0))$ ويمكن استخلاص ذلك بطريقة مماثلة:

$$\begin{aligned}
 E(\max(a - X, 0)) &= \int_b^c \max(a - u, 0) \frac{1}{c - b} du \\
 &= \frac{1}{c - b} \int_b^a (a - u) du \\
 &= \frac{1}{c - b} \left(a^2 - \frac{a^2}{2} - ba + \frac{b^2}{2} \right) \\
 &= \frac{(a - b)^2}{2(c - b)}.
 \end{aligned}$$

المثال العملي 2-9: عمليات الإنقاذ في المياه العميقة

قد طلب من شركة إنقاذ أن تنظر في تنفيذ عملية إنقاذ صعبة في عمق المياه وتبلغ قيمة قارب الإنقاذ 3 ملايين دولار (وتبلغ القيمة المؤمن عليها 20/1 من مبلغ 15 مليون دولار).

وستكون هناك تكلفة قدرها 300 000 دولار لإجراء تحقيق أولي يحدد التكلفة الفعلية لعملية الإنقاذ. وتقدر هذه التكلفة بما يتراوح بين مليونين و4 ملايين دولار، وتعتبر الشركة أي مبلغ بين هذه الأرقام متساويا. وإذا كانت التكلفة كبيرة جداً فإن الشركة لن المضي قدما في عملية الإنقاذ، ولكنها لن تسترد التكلفة الأولية البالغة 300 ألف دولار. ما القيمة المتوقعة لهذا المشروع بالنسبة لشركة الإنقاذ؟

الحل

بمجرد إنفاق مبلغ 300 ألف دولار، سنتساءل ما إذا كنا سنمضي قدما في عملية الإنقاذ أم لا، وهذا سيكون مجديا إذا لم تتجاوز التكلفة 3 ملايين دولار. وبالتالي، فإن الربح المتوقع بالملايين هو:

$$-0.3 + E(\max(3 - X, 0))$$

حيث X موحدة على الفاصل الزمني بين 2 و4 (مليون). باستخدام الصيغة أعلاه، لدينا $a=3, b=2, c=4$ والربح المتوقع هو:

$$-0.3 + \frac{(3 - 2)^2}{2(4 - 2)} = -0.05.$$

وبالتالي، هذا المشروع لا يستحق المضي قدما فيه. ويمكننا الحصول على نفس النتيجة دون استخدام الصيغة حيث أن الأرقام كلها سهلة جدا. وبنسبة 50٪ تكون التكاليف أكثر من 3 ملايين، وأن عملية الإنقاذ لا تستحق القيام بها. مما ينتج عنه خسارة قدرها 0.3 مليون. من ناحية أخرى، إذا كان الإنقاذ جدير بالاهتمام (كما يحدث بنسبة 50٪)، فإنه يتم توزيع التكاليف بشكل موحد على نطاق يتراوح بين 2 و3 ملايين، مما يعطي متوسط تكلفة إنقاذ بقيمة 2.5 مليون دولار، وهذا يعني ربح 0.2 مليون فقط بعد دفع التكاليف مقدما. ومع وجود احتمالات متساوية بخسارة 300 000 دولار أو ربح 200 000 دولار، يجب على الشركة المتضررة أن تتخلص من هذه الصفقة.

إن حل المشاكل التي تنطوي على خيارات حقيقية يتطلب دائما نفس النموذج الأساسي

للأحداث التي تجري ، لذلك فمن الجدير محاولة شرح هذا بمزيد من التفاصيل .

1- تحديد ما يجري تقييمه . الهيكل الأساسي لحسابات الخيارات الحقيقية هو أحد التقييمات . نريد أن نعرف قيمة هذا المشروع أو الاستثمار المحتمل ، أو ما يعادل مقدار الربح المتوقع ؟ فإن معرفة القيمة سوف تجربنا عن الحد الأقصى للمبلغ الذي يجب أن ندفعه (ومتى يجب أن نصرف نظر عن المشروع إذا كانت القيمة الصافية سلبية) . ففي مثال عملية الإنقاذ ، نريد أن نقيم المشروع بأكمله .

2- تحديد نقطة القرار والمعلومات التي سيتم استخدامها . الفكرة الأساسية للخيارات الحقيقية هي أننا يمكن أن نتخذ قراراً في مرحلة ما في المستقبل بين الخيارات المختلفة على أساس المعلومات التي سوف تكون متاحة بعد ذلك ، ولكنها لا تكون متوفرة عندما نقوم بإجراء التقييم مقدماً . وللقيام بهذا بشكل بسيط ، نفترض أن هناك خيارين فقط يجري النظر فيهم (غالباً ما يكون إما "المضي قدماً" أو "الرجوع عن الفكرة") . ففي مثال الإنقاذ ، تحدث نقطة القرار بعد معرفة تكلفة عملية الإنقاذ ، والخيار ببساطة هو إما المضي قدماً أم لا .

3- حساب الأرباح لخيارات مختلفة بناء على المعلومات المتاحة . إذا قمنا بكتابة المعلومات التي سوف يستند عليها قرارنا ، مثلاً X (الذي نتخذه كمتغير عشوائي في البداية عندما نقوم بالتقييم ، ومن ثم فإننا بحاجة إلى مقارنة الخيارين من حيث الأرباح نظراً لـ X إذا كانت الخيارات A و B قد نكتب $\Pi_A(X)$ ، ونكتب $\Pi_B(X)$ لدالتي الربح . في مثال الإنقاذ ، X هو تكلفة عملية الإنقاذ ، وتمثل A "المضي قدماً" وتمثل B "عدم المضي قدماً" ، والأرباح هي (بالملايين) :

$$\Pi_A(X) = 3 - X - 0.3$$

$$\Pi_B(X) = -0.3.$$

4- تحديد نقطة القطع بين الخيارات المختلفة : ستحدد قيمة X الخيار الذي سيتم اتخاذه وسيكون هناك نقطة قطع عند X عندما نقوم بتحويل الخيارات . فإذا كانت $X < a$ للهدف a ، فسيكون خيارنا هو A ، وإذا كانت $X > a$ نختار الخيار B ، أما إذا كانت $X = a$ سنكون حائرين بين الخيارين . ففي مثال الإنقاذ ، يكون الخيار A هو الأفضل (المضي قدماً)

إذا كانت $X < 3$ ، في حين إذا كانت $X > 3$ ، يكون الخيار الأنسب هو B (الانسحاب).

5- التعبير عن قيمة المشروع من خلال $\max(a - X, 0)$ ، فنحن نحن بحاجة إلى إيجاد وسيلة للتعبير عن الربح الإجمالي من خلال صيغة $\max(a - X, 0)$ (استخدام صيغة $\max(X - a, 0)$ هو أكثر ملائمة في بعض الأحيان). وعند هذه النقطة نكون ما زلنا نعمل على الربح كدالة لمتغير "المعلومات" X . ويكون الربح الكلي هو أكبر من الاحتمالين، لذلك:

$$\begin{aligned}\Pi(X) &= \max(\Pi_A(X), \Pi_B(X)) \\ &= \Pi_B(X) + \max(\Pi_A(X) - \Pi_B(X), 0).\end{aligned}\quad (1-9)$$

وعادة ما نستطيع استخدام المصطلح الثاني في النموذج المطلوب (ونحن نعلم بالفعل أن $X = a$ هي النقطة التي عندها يكون $\Pi_A(X) - \Pi_B(X) = 0$ وفي مثال الإنقاذ، يمكن كتابة المعادلة (1-9) كما يلي:

$$\Pi(X) = -0.3 + \max(3 - X, 0).$$

6- استخدم توزيع X للعثور على القيمة المتوقعة النهائية: الخطوة الأخيرة هي تقييم الربح المتوقع باستخدام المعلومات المتاحة على توزيع X ، وإيجاد صيغة مناسبة لـ $E(\max(a - X, 0))$ في مثال الإنقاذ، هذه هي النقطة التي نستخدم فيها الصيغة المستمدة من واقع أن X لديها توزيع موحد.

نحن الآن نريد أن نقدم صيغة للفائض المتوقع باستخدام التوزيع الطبيعي. سنتكلم عن الاشتقاق في القسم التالي، ولكن عند هذه النقطة نقبس الصيغتين التي يتم التعبير عنها من حيث الكثافة ودالة التوزيع التراكمي لعمل للتوزيع الطبيعي، إذا كان X متغيراً عشوائياً عادياً بمتوسط μ وانحراف معياري σ ، فإن:

$$E[\max(a - X, 0)] = (a - \mu)\Phi_{\mu,\sigma}(a) + \sigma^2\phi_{\mu,\sigma}(a) \quad (2-9)$$

و

$$E[\max(X - a, 0)] = (\mu - a)(1 - \Phi_{\mu,\sigma}(a)) + \sigma^2\phi_{\mu,\sigma}(a), \quad (3-9)$$

حيث أن: $\Phi_{\mu,\sigma}(\cdot)$ هي دالة التوزيع التراكمي لـ x ، و $\Phi_{\mu,\sigma}(\cdot)$ هي دالة الكثافة لـ x ، أي:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

حيث نستخدم المصطلح $\exp(x)$ للدلالة على e^x .

يمكننا الآن العودة إلى المثال 9-1 ونرى من أين تأتي أرقام التقييم. نحصل على الربح المتوقع للشركة A الذي يقدر بـ 1000 دولار من خلال $E(\max(X, 0))$ حيث أن توزيع x هو $N(30, 20)$ وبوضع $a=0$ في المعادلة (9-3)، نحصل على:

$$\begin{aligned} E(\max(X, 0)) &= 30(1 - \Phi_{30,20}(0)) + 20^2 \varphi_{30,20}(0) \\ &= 30(1 - \Phi_{30,20}(0)) + 400 \frac{1}{\sqrt{800\pi}} \exp\left(-\frac{900}{800}\right). \end{aligned}$$

يمكن تقييم المدى الأول من جداول التوزيع الطبيعي، ولكن من الأسهل استخدام جدول بيانات لتقييم الصيغة الكاملة.

$$= 30 * (1 - \text{NORMDIST}(0, 30, 20, 1)) + 400 * \text{NORMDIST}(0, 30, 20, 0).$$

حيث يستخدم صيغة جدول البيانات $\text{NORMDIST}(x, \mu, \sigma, \cdot)$ الذي يعطينا إما دالة التوزيع التراكمي $\Phi_{30,20}(x)$ أو دالة الكثافة $\varphi_{30,20}(x)$ حسب ما إذا كانت الحجة النهائية 1 أو 0. وباستخدام هذه الصيغة نحصل على القيمة 30586.14 دولار. ويمكن بعد ذلك تكرار هذا باستخدام $\sigma = 40$ للحصول على قيمة الربح 35246.68 دولار.

وهناك طريقة أخرى للتفكير في ما يجري في هذا المثال هو استخدام لغة الخيارات. لنفترض أننا ننظر في الفوائد المتوقعة لفكرة منتج واحد للشركة B. يمكننا أن نعتبر قيمة فكرة منتج واحد كخيار لشراء براءة اختراع المنتج، وبعبارة أخرى فإنه يعطي "الحق ولكن ليس الالتزام" (لاستخدام العبارة القياسية) لشراء براءة اختراع المنتج. وبمجرد أن تنجح فكرة المنتج بالكامل ويصبح لدينا منتج فعلى، يتضح أن المنتج هو الذي يصنع الخسارة، وفي هذه الحالة لن نستمر في هذه التجربة، بمعنى، إننا لن نطرح المنتج في السوق. الفكرة الرئيسة

هنا هي أنه على الرغم من أننا ندفع المال مقدماً، فإنه يأتي وقت حيث يتوفر لدينا المزيد من المعلومات، وبعد ذلك نقرر إذا سئمضي قدماً أم لا.

1-2-9 * اشتقاق صيغة الفائض باستخدام التوزيع الطبيعي

هدفنا في هذا القسم هو اشتقاق المعادلتين (2-9) و (3-9). وسنقوم بذلك عن طريق إنشاء الصيغتين المتوسطتين التاليتين للتكاملات التي تتضمن دالة الكثافة الطبيعية $\varphi_{\mu,\sigma}$

$$\int_{-\infty}^a x \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx = \mu \Phi_{\mu,\sigma}(a) - \sigma^2 \varphi_{\mu,\sigma}(a), \quad (4-9)$$

$$\int_a^{\infty} x \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx = \mu(1 - \Phi_{\mu,\sigma}(a)) + \sigma^2 \varphi_{\mu,\sigma}(a). \quad (5-9)$$

وكما فعلنا من قبل، نكتب $\Phi_{\mu,\sigma}$ لدالة الكثافة التراكمية للمتغير العشوائي الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ . وبالتالي فإن $\Phi_{\mu,\sigma}$ هي جزء لا يتجزأ من $\varphi_{\mu,\sigma}$:

$$d\Phi_{\mu,\sigma}(x)/dx = \varphi_{\mu,\sigma}(x).$$

ويمكن اشتقاق المعادلة (4-9) بالإشارة إلى

$$d\varphi(x)/dx = \left(-\frac{(x - \mu)}{\sigma^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) = -\frac{(x - \mu)\varphi(x)}{\sigma^2}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \int_{-\infty}^a [d\varphi(x)/dx] dx = \int_{-\infty}^a -\frac{(x - \mu)\varphi(x)}{\sigma^2} dx \\ &= \frac{\mu}{\sigma^2} \Phi(a) - \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^a x \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

ونحصل على المعادلة (4-9) ببساطة عن طريق ضرب σ^2 وإعادة ترتيب هذه المعادلة.

نحصل على المعادلة (5-9) من:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^a x \varphi(x) dx + \int_a^{\infty} x \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx$$

وبالتالي

$$\int_a^{\infty} x\varphi_{\mu,\sigma}(x)dx = \mu - \int_{-\infty}^a x\varphi_{\mu,\sigma}(x)dx$$

وبالاستعاضة عن المعادلة (4-9) نحصل على النتيجة التي نبحث عنها. وهكذا، عندما يكون للمتغير العشوائي X توزيع $N(\mu, \sigma)$ ، نحصل على:

$$\begin{aligned} E[\max(a - X, 0)] &= \int_{-\infty}^a (a - x)\varphi_{\mu,\sigma}(x)dx \\ &= a \int_{-\infty}^a \varphi_{\mu,\sigma}(x)dx - \int_{-\infty}^a x\varphi_{\mu,\sigma}(x)dx \\ &= (a - \mu)\Phi_{\mu,\sigma}(a) + \sigma^2\varphi_{\mu,\sigma}(a) \end{aligned}$$

وهذه هي النتيجة المطلوبة.

وبالمثل، يمكننا استخلاص الصيغة الأخرى:

$$\begin{aligned} E[\max(X - a, 0)] &= \int_a^{\infty} (x - a)\varphi_{\mu,\sigma}(x)dx \\ &= \int_a^{\infty} x\varphi_{\mu,\sigma}(x)dx - a \int_a^{\infty} \varphi_{\mu,\sigma}(x)dx \\ &= \int_a^{\infty} x\varphi_{\mu,\sigma}(x)dx - a(1 - \Phi_{\mu,\sigma}(a)) \\ &= (\mu - a)(1 - \Phi_{\mu,\sigma}(a)) + \sigma^2\varphi_{\mu,\sigma}(a). \end{aligned}$$

3-9 الجمع بين الخيارات الحقيقية وصافي القيمة الحالية

عادة ما ينطوي تطبيق نهج الخيار الحقيقي على قرار استثماري على مراعاة الخيار الذي سيتخذ لاحقاً. وبالتالي، سيتعين علينا النظر في تدفقات الأموال بمرور الوقت، ومن الناحية العملية، نحتاج إلى القيام بهذه الحسابات باستخدام خصم مناسب للعائدات مع مرور الوقت.

وبعبارة أخرى، نحتاج إلى إضافة خيارات حقيقية إلى حساب صافي القيمة الحالية (NPV). فنحن نريد أن نقارن بين الخيارات المختلفة المتاحة لنا، والافتراض الذي نقوم به هو أن الخيارات المختلفة تؤدي إلى حصولنا على مبالغ مختلفة من المال، ولكن يتم دفع هذه المبالغ

في أوقات مختلفة، لذلك فنحن لا نقارن بين المبالغ النقدية ولكن نقارن جدول المدفوعات النقدية مع مرور الوقت (يمكننا أن نسمي هذا تيار التدفق النقدي). ولإجراء هذه المقارنات يتعين علينا السماح بأسعار الفائدة وبذلك نحصل على مفهوم صافي القيمة الحالية (غالبا ما يسمى تحليل التدفقات النقدية المخصومة).

نقطة البداية هي تقسيم الوقت إلى فترات: في معظم الأحيان تكون سنوات، ولكن يمكننا استخدام أشهر أو فترات ربعية. سوف نفترض وجود سعر فائدة لكل فترة، ونكتبها كالتالي r : وهذا يمثل المال الذي نجنيه إذا وضع في حساب مصرفي (أو قد نستخدم بعض الأدوات الأخرى الحالية من المخاطر). ويسمح بوضع مبلغ x في المصرف في بداية فترة تسمح للمبلغ $x(1+r)$ قابل للسحب في نهاية الفترة. ويصبح هذا المبلغ $x(1+r)^2$ بعد فترتين، وهلم جرا. وللمقارنة بين تدفقين مختلفين من التدفقات النقدية، يمكننا افتراض أن النقد المستلم يتم وضعه في البنك وتجميده حتى نهاية أفق التخطيط. وستكون القيمة المستقبلية لتدفق التدفقات النقدية هي المبلغ النقدي الذي يمكن سحبه في نهاية أفق التخطيط. وسيتم تفضيل التدفق النقدي الذي له أعلى قيمة مستقبلية ولتطبيق هذه الطريقة نحن بحاجة إلى الحرص على تتبع متى يصبح المال النقدي متاح.

ولتبسيط هذا نكتب x_0 للإشارة إلى المال الذي ندفعه في الفترة 0 (والذي يمكن أن نفكر به على أنه بداية الفترة 1)، ونكتب x_1 للإشارة إلى المبلغ الذي نتلقاه في نهاية الفترة 1 (أو بداية الفترة 2) وما إلى ذلك. وبطبيعة الحال، فإن المشاريع لا تنطوي فقط على تلقي المال، بل تنطوي أيضا على المدفوعات. ويمكننا التعامل مع ذلك بنفس الطريقة، بشرط أن يكون لدينا بنك مثالي لا يحقق أموالا من مودعيه، وبالتالي يتقاضى نفس سعر الفائدة r على القروض التي يقدمها للودائع. لذلك، إذا اقترضنا مبلغ x لتسديد دفعة في الوقت المحدد 0، سيكون علينا أن نرد إلى البنك مبلغ $x(1+r)$ في نهاية الفترة 1، وبشكل عام، دفع مبلغ $x(1+r)^k$ في نهاية الفترة k . وبالتالي، فإن القيمة المستقبلية في نهاية الفترة n لتيار التدفق النقدي $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. ونحصل عليه من خلال:

$$FV = x_0(1+r)^n + x_1(1+r)^{n-1} + \dots + x_{n-1}(1+r) + x_n.$$

وفي هذا التعبير تمثل القيم الموجبة x استلام النقد والأخرى السلبية تمثل إجراء الدفع. مما يعطينا فرصة لمقارنة مجموعتي التدفقات النقدية المختلفة.

إذا كان هناك اثنين من التدفقات النقدية لهما نفس القيمة المستقبلية، فإننا سنكون حائرين بينهما في هذا النموذج. ويمكننا أيضا أن ننظر إلى القيمة العادلة التي سيتم وضعها على التدفق النقدي في الفترة 0. ويكون هذا هو المبلغ الذي سنحصل عليه والذي من شأنه أن يجعلنا حائرين بين أخذ المال مقدما أو الحصول على تيار التدفق النقدي. وبعبارة أخرى، هو المبلغ المدفوع في الفترة 0 والذي له نفس القيمة المستقبلية للتدفقات النقدية. وتعد هذه هي القيمة الحالية (يطلق عليها PV)، وبناء على هذا:

$$PV(1+r)^n = x_0(1+r)^n + x_1(1+r)^{n-1} + \dots + x_{n-1}(1+r) + x_n,$$

والتي يمكننا إعادة كتابتها كالتالي:

$$PV = x_0 + \frac{x_1}{(1+r)} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+r)^n}.$$

ويمكننا أن نرى أنه يتم خصم مبالغ أكبر من المدفوعات والإيصالات المستقبلية. ولا يتم إجراء أي خصم على الأموال التي يتم استلامها في الفترة 0. ويتم إجراء خصم على الأموال المستلمة في نهاية الفترة 1 بعامل $(1+r)$ ، وكثيرا ما نسمي القيمة الحالية بالقيمة الحالية الصافية للتأكيد على أننا ندرج مبالغ نقدية إيجابية وسلبية على حد سواء.

المثال العملي 3-9 مقارنة تيارات التدفق النقدي

هناك فرصتان استثماريتان متاحتان. حيث يتطلب الاستثمار A دفع مبلغ 5000 دولار بعائد 2000 دولار سنويا على مدى الثلاث سنوات المقبلة. في حين يتطلب الاستثمار B دفع مبلغ 6000 دولار بعائد 1500 دولار بنهاية العام الأول و2500 دولار في نهاية العام الثاني و3200 دولار في نهاية العام الثالث. قارن بين قيمتي القيمة الحالية باستخدام معدل خصم 5%.

الحل

التيار منخفض لـ A (في الألف دولار) هو (2, 2, 2, -5) مما يعطي صافي القيمة الحالية:

$$V_A = -5 + \frac{2}{1.05} + \frac{2}{(1.05)^2} + \frac{2}{(1.05)^3} = 0.4465$$

القيام بنفس الحساب لـ B يعطينا:

$$V_A = -5 + \frac{2}{1.05} + \frac{2}{(1.05)^2} + \frac{2}{(1.05)^3} = 0.4465$$

لذلك، من خلال هذا الحساب نجد أن صافي القيمة الحالية لكل من الاستثمارات إيجابية والاستثمار B هو المفضل.

فعند تقييم صافي القيم الحالية فإنه من الضروري التعامل مع الوضع الذي يكون فيه تدفق نقدي مستمر كل فترة. وبالطبع، فإنه من الصعب التفكير في مثال نقوم فيه بتسديد المدفوعات للأبد. ولكن، على أية حال، فإنه من المفيد أن نحدد قيمة هذا التدفق النقدي، وهو ما يسمى بالمعاش السنوي. وإذا تم خصم القيمة الحالية للمبلغ x المستلمة بعد عام من الآن، ونفس المبلغ المدفوع لنا كل سنة اعتباراً من ذلك الحين بمعدل r ، سيكون المبلغ اللانهائي هو:

$$PV = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(1+r)^k} = \frac{1}{r}x.$$

استخدمنا هنا صيغة قياسية لتقييم المبلغ اللانهائي. لاحظ أن هذه هي المدفوعات التي تبدأ في نهاية الفترة الأولى: إذا كان هناك مدفوعات مستلمة للمبلغ x في الفترة 0 أيضاً، إذن فتصبح الصيغة:

$$PV = x + \frac{x}{r} = \frac{1+r}{r}x. \quad (6-9)$$

الآن حان الوقت للاستفادة من أفكار صافي القيمة الحالية سياق خيار حقيقي ينطوي على التدفقات النقدية مع مرور الوقت. وسنقوم بذلك من خلال مثال.

مثال 4-9 تطويرات فوكستروت

تدرس شركة فوكستروت شراء قطعة من الأرض للتنمية. إذا قامت بالشراء الآن (الفترة 0) في بداية السنة الأولى. فمن المتوقع أن يتم الانتهاء من موافقات التطوير بعد عامين (نهاية العام الثاني) وسوف يستغرق تطوير البناء سنة كاملة، حيث سيتم الانتهاء من التطوير بالكامل مع بداية العام الرابع. وفي الوقت الراهن، يحقق البناء أرباحاً تقدر بـ 50,000 دولار سنوياً، وإذا تم تطوير المبنى لأغراض تجارية وتحسب فوكستروت بأنها سوف تجني دخلاً قدره 200,000 دولار سنوياً. ومع ذلك، هناك تساؤل حول تكاليف البناء في السنة الثالثة. وعادة ما تختلف تكاليف البناء بشكل عشوائي من سنة إلى أخرى إلا أن فوكستروت تقيم أنه إذا تم بناء المبنى الآن، ستكون التكاليف 2,800,000 دولار. والسؤال هو، كم هو الحد الأقصى الذي يجب أن تدفعه فوكستروت مقابل هذا التطور بافتراض معدل خصم قدره 5%؟ لنفترض أولاً أن فوكستروت تحسب هذه التكلفة ببساطة عن طريق التخمين أن تكاليف البناء ستبقى كما هي الآن. ويوضح الجدول 1-9 تدفق الدخل الذي تستلمه الشركة حيث تحدث التدفقات النقدية في عمود "العام k" في نهاية السنة. وهو نفس بداية السنة $k + 1$ (جميع المبالغ هي بالآلاف الدولارات الأمريكية، وقد عملنا بقيم ثابتة للدولار في عام 2010 - بحيث تظهر تدفقات الدخل على أنها ذات قيمة ثابتة حتى لو كان من المتوقع أن تزيد مع التضخم).

الجدول 1-9: صافي حساب القيمة الحالية لتطويرات فوكستروت

	العام 0	العام الأول	العام الثاني	العام الثالث	العام الرابع	القيمة الطرفية
التدفق النقدي	50	50	2800-	200	200	4200
معامل الخصم $\times$	1	1.05/1	1.052/1	1.053/1	1.054/1	1.055/1
القيمة الحالية =	50	47.6	2539.7-	172.8	164.5	3290.8

لقد اخترنا أن نفترض أن مدفوعات الإيجار لفوكستروت تدفع سنوياً مقدماً وتكاليف المبنى المتكبدة في السنة الثالثة يجب أن تدفع مقدماً في نهاية العام الثاني. والقيمة النهائية هنا

هي القيمة في نهاية العام الخامس لدفق دخل قدره 200 000 دولار. وبما أن الدفعة الأولى هي في نهاية العام 5، يمكننا استخدام المعادلة (9-6) بمعدل خصم قدره $r = 0.05$ للحصول على القيمة الحالية بنهاية العام الخامس من $21x = (1.05/0.05)x$ حيث أن $x = 200$ ، في هذه الحالة نحصل على قيمة طرفية بقيمة 4200.

ويمكننا تجميع القيم الحالية للحصول على قيمة المشروع:

$$50 + 47.6 - 2539.7 + 172.8 + 164.5 + 3290.8 = 1186.$$

ويتعين مقارنة هذه النتيجة بالقيمة إذا لم يكن هناك تطور في الموقع. وفي هذه الحالة، تكون القيمة مساوية لتدفق دخل قدره 50 000 دولار في السنة، وفي هذه الحالة يكون صافي القيمة الحالية (بالآلاف الدولارات): $1050 = 50 \times 21$. وقد ألغت تكاليف البناء المرتفعة نسبياً معظم فوائد إيرادات الإيجار الإضافية. الآن نحن نريد تقييم الخيارات الحقيقية، مع الأخذ بعين الاعتبار عدم اليقين حول تكاليف البناء، وأيضاً خيار إمكانية عدم المضي قدماً في التنمية. وسوف نرى أن القيمة الفعلية للاستثمار بالنسبة لـ فوكستروت هي أكثر من 1186000 دولار وهذا ما تم استنباطه من الجدول 9-1. وتحدث نقطة القرار في بداية العام الثالث، عندما تقرر فوكستروت ما إذا كان ستم عملية البناء أم لا. وسيتم اتخاذ هذا القرار على أساس المعلومات المتوفرة حول تكلفة أعمال البناء. لنفترض أن فوكستروت تحصل على مناقصة معينة x ، حيث أصبح الاختيار بين الاستمرار بجني 50,000 دولار سنوياً أو دفع المبلغ x هذا العام وجني 200,000 دولار سنوياً. أكتب A لاختيار "المضي قدماً في عملية البناء" و B لاختيار "عدم المضي قدماً في عملية البناء". التدفقات النقدية لـ A هي $(50, 50, 50, 50, \dots)$ بينما التدفقات النقدية لـ B هي $(50, 50, -x, 20, 200, \dots)$ وبالفعل قمنا بحساب $\Pi_B = 1050$ ويمكن الحصول على الربح A من الجدول 9-1 من خلال x بدلا من التكلفة 2800. ونحصل على:

$$\Pi_A = 50 + 47.6 - \frac{x}{1.05^2} + 172.8 + 164.5 + 3290.8 = 3725.7 - \frac{x}{1.05^2}.$$

الخطوة التالية، نحن بحاجة إلى العمل على نقطة التعادل لـ x ، وستكون النتيجة هي

قيمة x ، لذلك فإننا حائرين بين الخيارين - بمعنى أن أي قيمة أعلى لتكاليف البناء من شأنها أن تجعل فوكستروت تتراجع عن المضي قدماً، ويمكننا القيام بذلك من خلال حل:

$$3725.7 - \frac{x}{1.05^2} = 1050.$$

وبدلاً من ذلك، يمكننا أن نتحقق من الوضع في بداية العام الثالث (تقييم كل شيء في تلك المرحلة). ثم يكون الاختيار بين القيمة الحالية $50 \times 21 = 1050$ والقيمة الحالية لـ

$$-x + 4200/(1.05) = 4000 - x.$$

وتكون هذه القيم متساوية عند $x = 2950$ ، فهذا يخبرنا كيف سيتم اتخاذ القرار: سوف تتخذ فوكستروت قرار البناء إذا كان السعر أقل من 2,950,000 دولار، الآن نريد أن نكتب صيغة واحدة لقيمة المشروع:

$$\begin{aligned}\Pi &= \Pi_B + \max(\Pi_A - \Pi_B, 0) \\ &= 1050 + \max(2675.7 - \frac{x}{1.05^2}, 0) \\ &= 1050 + \frac{1}{1.05^2} \max(2950 - x, 0).\end{aligned}$$

دعنا نتوقف عند هذه النقطة وننظر في هذه الصيغة، فبمجرد أن نعرف أن نقطة التعادل لخيار "المضي قدماً" هي عند $x = 2950$ ، فأنا نعلم أن أي قيمة أعلى من x سوف تعطينا صافي القيمة الحالية الأساسية وهي 1050، ومن ناحية أخرى، فإن وجود قيمة أقل من x أيضاً ستعطينا صافي القيمة الحالية الأساسية 1050، بالإضافة إلى مدفوعات السنة الثالثة من الادخار 2950 دولار - x ، وبهذا يكون الجزء المتبقي من اللغز هو تقدير تغير تكاليف البناء. لنفترض أن فوكستروت تعتقد أنه من المرجح أن تتحرك تكاليف البناء صعوداً أو هبوطاً من القيمة الحالية التي تقدر بـ 2.8 مليون دولار، ويتم توزيع النتيجة عادة بمتوسط 2.8 مليون دولار وانحراف معياري قدره 200000 دولار. وتعطى القيمة الحالية المتوقعة للاستثمار (بآلاف الدولارات) من خلال:

$$E(\Pi) = 1050 + \frac{1}{1.05^2} E(\max(2950 - x, 0)).$$

الآن يمكننا استخدام الصيغة السابقة المعادلة، (2.9)، لتوضيح:

$$E(\max(2950 - x, 0)) = 150\Phi_{\mu,\sigma}(2950) + 200^2\varphi_{\mu,\sigma}(2950) = 176.23.$$

وبالتالي فإن التقييم النهائي هو:

$$= 1050 + \frac{1}{1.05^2} 176.23 = 1209.827,$$

أو 1 209 827 دولار، أي بزيادة قدرها 23 827 دولار عن الرقم السابق. لذلك، في هذا المثال، فإن الخيار الحقيقي يستحق 2٪ إضافية في قيمة الاستثمار.

4-9 التعامل مع الخيارات المالية

هناك نوعين من الخيارات في العالم المالي: خيار تنفيذ العقد يعطي الحق (وليس الالتزام) لشراء أداة مالية أساسية في مرحلة ما في المستقبل بسعر معين "ممارسة". وإذا كان تاريخ ممارسة الخيار محددًا، يطلق عليه الخيار الأوروبي؛ وإذا كان الخيار يمكن أن يمارس في أي وقت حتى تاريخ انتهاء صلاحية الخيار، يسمى خيار أمريكي. ويكون خيار الشراء مماثل إلا أنه يعطي الحق (وليس الالتزام) لبيع الأداة المالية الأساسية بسعر معين.

على سبيل المثال، كان سعر التداول لسهم أبل في 21 مارس 2013 هو 452.73 دولار. وكان خيار تنفيذ العقد الأمريكي وسعر الممارسة بقيمة 430 دولار على أن يتم ممارسته بحلول 17 مايو 2013، وكان يباع مقابل 35.25 دولار، وتم تسعير خيار تنفيذ العقد عند 460 دولار بقيمة 18.70 دولار. وكان خيار البيع عند 450 دولار بسعر 22.00 دولار.

ويمكننا أن نراجع ما تعنيه هذه الأرقام: بالنسبة لنفقة قدرها 35.25 دولار، يحصل المستثمر على فرصة لشراء السهم مقابل 430 دولار في 17 مايو أو قبل ذلك. وإذا كانت قيمة السهم في ذلك التاريخ أقل من 430 دولار، فإن الخيار لا قيمة له، ولكن إذا كانت أبل تبيع مقابل 430.50 دولار، فإن الخيار يقدر بـ 0.50 دولار، وإذا كان السعر أعلى، فإن الخيار سيقدّر بأكثر من ذلك.

أما بالنسبة لخيار البيع فهو العكس: بالنسبة لنفقة قدرها 22 دولار، يحصل المستثمر على فرصة لبيع السهم مقابل 450 دولار، فإذا كان سعر السهم فوق هذا المستوى يوم 17 مايو، فيكون خيار البيع لا قيمة له. على سبيل المثال، إذا أنخفض سعر سهم أبل إلى 420 دولار، فستكون قيمة خيار البيع 30 دولار.

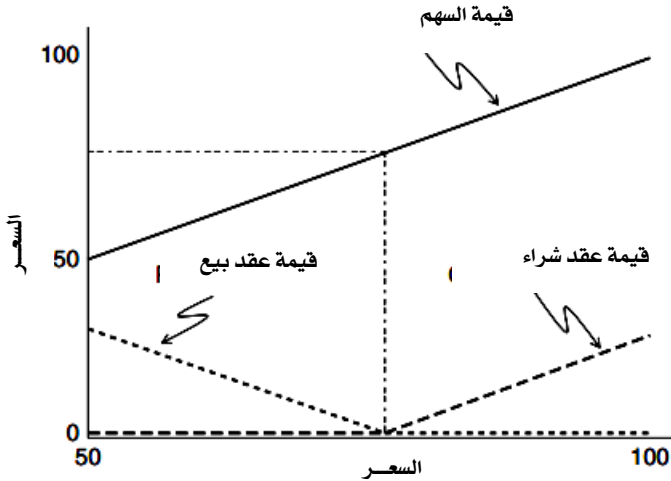
وفضلاً عن شراء خيارات الشراء أو البيع في الكثير من أسعار الممارسة وعدد من تواريخ انتهاء الصلاحية المختلفة، هناك أيضاً فرصة لبيع هذه الخيارات (توصف أحياناً بأنها "بيع" خيار). لذلك هناك عدد كبير جداً من المواقف المختلفة التي قد يتخذها المستثمر، ويقرر المستثمرين في كثير من الأحيان الاحتفاظ بمجموعة من الخيارات في الأسهم من أجل تعديل خصائص الأرباح أو الخسائر المحتملة التي يمكن أن يواجهوها.

قد يرغب المستثمر المتجنب للمخاطر في شراء حصة كبيرة في أسهم أبل، وفي الوقت نفسه، شراء خيارات الشراء بسعر ممارسة 410 دولار على سبيل المثال، توفير نوع من التأمين في حالة حدوث انخفاض كبير في سعر الأسهم. وإذا أراد المستثمر نفسه بيع خيار البيع بسعر ممارسة أعلى، مثلاً 480 دولار، فإنه سيحد من احتمال حصوله على أرباح كبيرة، ولكن الأموال التي يحصل عليها من خيار الشراء يمكن أن توضع مقابل تكلفة شراء خيار البيع.

ومع ذلك، لاحظ أنه لا يوجد شيء يمنع المستثمر من شراء وبيع الخيارات دون أن يكون لديه أي أسهم. ففي الواقع، هذا هو المعيار. قد يحدد عقد الخيار التسليم الفعلي (على سبيل المثال، سهم في أبل) عند نقطة التسوية، ولكن في كثير من الأحيان هذا لن يحدث في الواقع وبدلاً من ذلك سيتم إلغاء الخيار من خلال عمليات التغطية. وتحدد بعض عقود الخيارات (على سبيل المثال، تلك التي يكون فيها الضمان الأساسي هو مؤشر، مثل داو جونز) التسوية النقدية بحيث يتم الدفع ولكن لا يتم تسليم الأسهم. وعادة ما يكون ذلك أفضل من التفكير في خيار البيع لأسهم أبل من حيث الحق في شراء أسهم أبل، إن النظر في الخيار باعتباره كعقد مالي يتضمن اتفاقاً للبائع بأن يدفع للمشتري الفرق بين سعر سهم أبل وسعر الممارسة إذا كان هذا هو المسار الصحيح.

ويبين الشكل 3-9 كيف تعتمد قيمة خيار الشراء أو البيع على سعر السهم الأساسي في وقت الممارسة وسعر الممارسة.

الآن نعود إلى مثال القسم السابق، إذا كنا نفكر في تكاليف البناء وسعر السهم، فإن القيمة المنخفضة تعتبر أمر جيد بالنسبة لـ فوكستروت - حيث كلما انخفضت تكاليف البناء كلما زادت قيمة الاستثمار. ولكن بمجرد أن ترتفع تكلفة البناء فوق 2.95 مليون، فلا يعد يهم ما هي التكلفة، حيث أن المبنى لن يكون جدير بالاهتمام. وبالتالي فإن الاستثمار لديه خصائص خيار البيع مع سعر ممارسة 2.95 مليون.



الشكل 3-9: مدفوعات خيارات الشراء والبيع كدالة لسعر السهم.

لنفترض أن قيمة تكاليف البناء هي 2.95 مليون، ففي هذه الحالة ستكون فوكستروت حائزة بين المضي قدما في المشروع أم لا. لذلك أي تكلفة أقل بالنسبة لـ فوكستروت تعادل الحصول على الفرق في السنة الثالثة، ولكن أي تكلفة أعلى لن تحدث أي تغيير. لذلك هذا يطابق خيار البيع حيث لدينا الحق في البيع بسعر ممارسة، بحيث عندما ينخفض السعر

أقل من سعر الممارسة، سيمكننا شراء بسعر أقل والبيع بسعر أعلى، وجني الربح من هذا الفرق. ويمكننا أن نرى في مثال فوكستروت، أن الشراء له جزأين: أولاً نشترى العقار في حالته غير المتطورة مقابل قيمة معينة، بالإضافة إلى أننا نشترى خيار البيع على مؤشر سعر المبنى. هذا هو الخيار الأوروبي أن يمارس في بداية العام الثالث مع سعر ممارسة 2.95 مليون للمبنى. ومن الطبيعي إنه إذا كان مؤشر سعر المبنى على أساس متر مربع فسيتم تقسيم سعر الممارسة على حجم المبنى.

ويتعلق السؤال النهائي بحجم الخيار الذي سيتم شراؤه. وهنا نحن بحاجة إلى النظر في منحدر خيار البيع في الشكل 9-3 ومقارنته بمبلغ زيادة الربح إذا انخفض السعر إلى أقل من 2.95 مليون. وفيما يتعلق بالقيمة الإضافية للخيار في وقت ممارسته، كل دولار أقل يعد زيادة في أرباح شركة فوكستروت، وبالتالي يحدث التكافؤ عند اختيار خيار البيع للقيمة الكاملة لتكلفة المبنى.

يلاحظ أنه في هذه الحسابات تكون التعقيدات المرتبطة بفرض فجوة في الإيرادات لمدة عام واحد ثم استبدال مبلغ سنوي قدره 50 000 دولار بمبلغ سنوي قدره 200 000 دولار، يتم التعامل معها جميعاً من خلال الرقم الوحيد البالغ 2.95 مليون دولار، وهو سعر ممارسة الخيار. ولقد أعطينا نهجاً مباشراً لتقدير خيار حيث يمكن تمثيل عدم اليقين على أنه توزيع طبيعي بمتوسط معروف وانحراف معياري في تاريخ ممارسة الخيار. ومع ذلك، فإن النهج الأكثر شهرة لتقييم الخيارات هو صيغة بلاك سكولز. وهذا يعطينا سعر الخيار الأوروبي من حيث خمسة كميات:

- أ- سعر السهم الأساسي الآن هو S_0 .
- ب- التغير في سعر السهم σ .
- ج- الفترة حتى ممارسة الخيار T .
- د- سعر الممارسة K .
- هـ- معدل الخصم الواجب تطبيقه (معدل العائد الخالي من المخاطر) r .

عندما لا يكون هناك عائد توزيعات أرباح، فإن صيغة بلاك سكولز تعطي سعر خيار البيع الأوروبي (الحق في شراء السهم بسعر K في الوقت T):

$$S_0 \Phi_{0,1}(d_+) - e^{-rT} K \Phi_{0,1}(d_-)$$

حيث:

$$d_+ = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right],$$

$$d_- = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right].$$

وستحدد المتغيرات الثلاثة الأولى (S_0 و σ و T) توزيع أسعار الأسهم في تاريخ الممارسة.

إن الفرق الكبير بين نهج بلاك سكولز والأمثلة التي قدمناها للخيارات الحقيقية هو أن أسعار الأسهم في الأسواق المالية تتحرك بطريقة متعددة - لذلك، بدلاً من أن يكون من المرجح أن يتحرك سعر السهم بقيمة 100 دولار ليصل إلى 110 دولارات أو 90 دولاراً (مثلاً)، فإن التحرك صعوداً بمعامل 1.1 سينطوي على التحرك هبوطاً بنفس القدر بنسبة 1 / 1.1، وبالتالي يكون من المرجح حدوث زيادة من 100 دولار إلى 110 دولار وأيضاً حدوث انخفاض من 100 دولار إلى 90.91 دولار بنفس الدرجة.

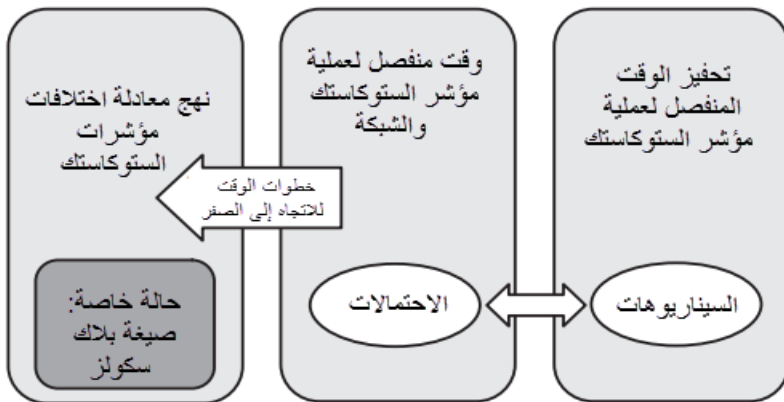
هذا السلوك المضاعف يعني أنه من المرجح أن يظهر السعر اللوغاريتمي للسهم توزيعاً طبيعياً بدلاً من سعر السهم نفسه. ومع ذلك، فإن صيغة بلاك سكولز ليست مشتقة فقط بالنظر إلى القيمة المتوقعة في وقت الممارسة. فإنها تعد نهج أكثر تطوراً وتنطوي على بناء أداة اصطناعية خالية من المخاطر والتي يجب أن تتطابق بعد ذلك مع معدل العائد الخالي من المخاطر من خلال حجة "لا مراجحة" وهذا يسمح للحساب أن يحدث دون النظر في الانجراف مع مرور الوقت: فإن التغير وحده يكفي لإجراء الحسابات.

والفكرة هي أنه إذا كان الخيار يتعلق بالأصول التي يتم تداولها، فإن سعر الأصل الآن ليس مستقلاً عن السلوك المستقبلي المتوقع لسعر الأصول: إذا كان السعر الآن يتعارض مع ما سيحدث في المستقبل، فسوف يغتنم شخص ما الفرصة للشراء أو البيع وكسب المال من

التجارة. وبعبارة أخرى، لا يمكننا فصل الانجراف في قيمة الأصول ومعدل العائد الخالي من المخاطر، ويتم اختيار هذين الأمرين بشكل مستقل.

وفي الحالات الأكثر تعقيدا هناك مجموعة من النهج الممكنة المختلفة لتقييم خيار حقيقي: يمكننا استخدام صيغة بلاك سكولز ويمكننا حل مجموعة من المعادلات التفاضلية العشوائية مع الظروف الحدودية المناسبة وأيضاً يمكننا إجراء التقييم باستخدام نوع من الحدين (أو ثلاثي الحدود) أو يمكننا استخدام نهج محاكاة مونت كارلو. ويوضح الشكل 4-9 مختلف الاحتمالات.

وينشأ نهج المعادلات التفاضلية العشوائية بافتراض شكل من أشكال الحركة البراونية أو العملية العشوائية ذات الصلة بالأسعار غير المؤكدة (أو العوائد). تعد صيغة بلاك سكولز حالة خاصة متاحة للأصول المتداولة في إطار بعض الافتراضات. وبشكل عام، يمكن اعتبار المعادلات التفاضلية العشوائية بأنها الحد من عملية عشوائية في وقت منفصل حيث تصبح الزيادات الوقتية أصغر وأصغر. وتعمل الحسابات الشبكية بشكل مباشر مباشرة مع هذه العمليات العشوائية في وقت منفصل وتسمح بمرونة إضافية في النمذجة باستخدام حالة منفصلة أيضاً. والفكرة هنا هي حساب الاحتمالات التي تجري في حالات مختلفة وتكون مرتبة على شبكة ثنائية الأبعاد، ويوجد الوقت على بعد والسعر على بعد آخر.



الشكل 4-9: أساليب مختلفة لتقييم الخيارات الحقيقية.

وأخيراً، فإن نهج مونت كارلو يحل محل حساب الاحتمالات في نهج الشبكة من خلال استخدام المحاكاة. ويعد نهج مونت كارلو هو أبسط وقد يكون الأكثر فائدة لتقييم الخيارات الحقيقية في الممارسة العملية: سوف نناقش هذه الطريقة بمزيد من التفصيل في القسم التالي.

وأخيراً، يجدر التعليق على بعض المزايا في الربط بين الخيارات الحقيقية والخيارات المالية:

- يحتوي عالم الأعمال الآن على العديد من الناس التي لديها معرفة بالخيارات: لا توجد صعوبة في فهم نهج الخيار، ويمكن أن يكون مفيداً في تقدير الهيكل المالي للاستثمارات المحتملة (وكذلك شرح لماذا يمكن أن يؤدي التغيير الكبير إلى نتيجة أكثر ربحية).
- إن وجود خريطة للاستثمار في مجموعة من الخيارات يصبح من الممكن استخدام تقنيات راسخة وبرمجيات لتقييم الخيارات. ولقد ذكرنا صيغة بلاك سكولز التي تنطبق على الخيارات الأوروبية حيث يمكن توضيح تحركات الأسعار من خلال الحركة البراونية. ولكن هناك تقنيات أخرى من قبل أولئك الذين يحتاجون إلى تقييم أنواع مختلفة من الخيارات. وعادة ما يتم تقييم الخيارات الأمريكية باستخدام نوع من عملية المحاكاة. ففي هذا المثال، قمنا باستخدام الخيار الأوروبي ولكن يمكن أن تؤدي أنواع مختلفة من سيناريوهات الخيارات الحقيقية إلى خيارات أوروبية أو أمريكية. سنعرض كيف يمكن استخدام تقنية محاكاة مونت كارلو في إطار الخيارات الحقيقية في القسم التالي.
- إذا كان عدم التيقن الكامن يتعلق بأداة متداولة (مثل سعر السلعة)، فإن قيمة الخيار قد لا تعتمد على أي نوع من الحسابات وربما يمكن إيجادها ببساطة من خلال النظر في أسعار السوق.
- في حالة وجود سوق للخيارات التي ترتبط ارتباطاً وثيقاً بالخيارات التي تحدث في الاستثمار، سيكون هناك أيضاً إمكانية شراء أو بيع الخيارات لإلغاء عدم اليقين تماماً فيما يتعلق بممارسة الخيار الضمني (مما يعطي تحوطاً دقيقاً). وهناك عدد من الأرقام القياسية لأسعار المباني المتاحة في أنحاء مختلفة من العالم. على حد علمي، لا توجد خيارات تداول في أي من هذه المؤشرات.

- ومع ذلك، لنفترض أنه كان يوجد خيارات للتداول. وبالتالي سوف يكون لفوكستروت خيار بيع سعر الممارسة في نفس وقت شراء العقار. وقد يؤدي القيام بذلك بعناية إلى نفس القيمة الحالية الصافية تقريبا، بغض النظر عما إذا كانت عملية إعادة البناء ستتم أم لا. ولن تحدث التغيرات في صافي القيمة الحالية إلا إذا التي يتم الحصول عليها لها قيم مختلفة جدا عما هو متوقع بناء على التغيرات في مؤشر أسعار المباني.

5-9 استخدام محاكاة مونت كارلو لتقييم الخيارات الحقيقية

الغرض الرئيسي من الخيارات الحقيقية هي الاستفادة من فرصة لتأخير قرار حتى يتوفر المزيد من المعلومات وغالبا ما يستند القرار على شيء يختلف بطريقة عشوائية. ومن الطبيعي استخدام نهج مونت كارلو في هذا السياق، وهذا سيوفر لنا المرونة لتمثيل جوانب مختلفة حول ما يجري. وميزة استخدام هذه الطريقة هي أننا يمكن أن نرى توزيع النتائج المحتملة بسهولة حتى تتمكن من الحصول على مقاييس المخاطر مثل القيمة المعرضة للخطر من نفس الحسابات. وسنوضح هذا من خلال مثال بسيط.

مثال 5-9 الزيت السريع

تنظر شركة زيت السريع في تطوير مشروع نفطي صخري بتكاليف عالية، حيث يرتبط قرار عدم المضي قدما بسعر النفط في المستقبل. ويتعلق القرار الأول بها إذا كان يجب على الشركة شراء حقوق المورد أم لا. في حالة الشراء ستحتاج الشركة إلى بناء سعة معالجة إضافية وبنية تحتية، ولكن يمكن تأجيل ذلك إلى أن تكون الأسعار أعلى من قيمتها الحالية. وسوف تستغرق عملية البناء عام واحد (مع ارتفاع تكاليف البناء خلال هذه الفترة). وبمجرد بدء التشغيل، هناك تكلفة كبيرة (ثابتة) لكل سنة من العمليات، بالإضافة إلى المزيد من التكاليف التي تعتمد على حجم النفط المنتج. نفترض أن سعر النفط الخام حسب عملية عشوائية يتضمن السعر الأساسي الذي يتبع حركة براونية هندسية مع الانجراف صعودا، وهذا بالإضافة إلى أن العملية تخضع للتقلبات بسبب التغيرات قصيرة الأجل في العرض والطلب التي ندرسها من خلال عملية عائد متوسط. ونشير للسعر اللوغاريتمي للنفط بـ

w_t ، إذن $w_t = y_t + \theta_t$ ، حيث تمثل y_t المستوى الأساسي وتمثل θ_t عنصر عائد قصير الأجل (متوسط θ_t هو صفر). ويمكننا تعريف المكونين من خلال العودية (الاستدعاء الذاتي):

$$y_t = y_{t-1} + \alpha + \varepsilon_t,$$

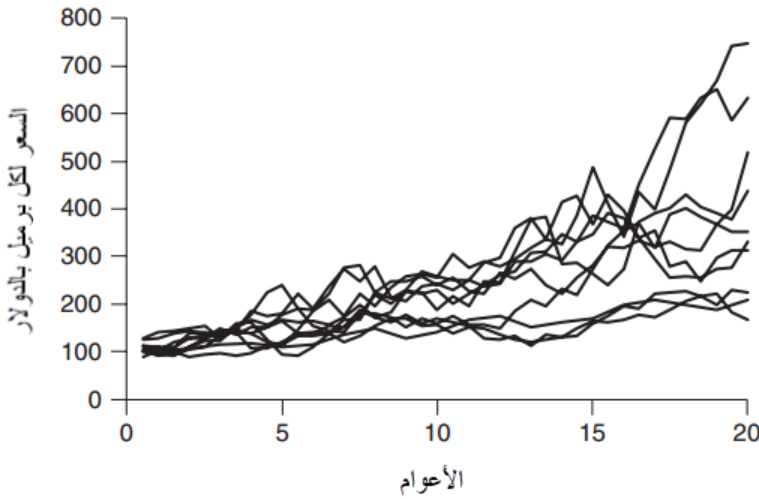
$$\theta_t = \beta\theta_{t-1} + \delta_t,$$

حيث تحدد a الانجراف وتوضح $\beta < 1$ مدى سرعة حركة θ_t نحو الصفر). وتعتبر كل من ε_t و δ_t ضوضاء عشوائية. وسواء كان هذا نموذجاً جيداً لأسعار النفط أم لا، فإنه يوضح الطريقة التي لا تقيد بها منهجية مونت كارلو في عمليات السعر التي يمكن النظر فيها.

والواقع أنه ليس من السهل اتخاذ قرار بشأن النموذج الصحيح لأسعار النفط على مدى أفق طويل: إذ بدت الأسعار مستقرة جداً قبل بداية العقد الأول من القرن الحادي والعشرين، ثم بدأت تسجل ارتفاعاً مطرداً خلال الفترة منذ عام 2002، حيث بلغت أكثر من 130 دولاراً للبرميل في منتصف عام 2008، قبل أن ينخفض إلى ما دون 50 دولاراً في نهاية ذلك العام، ومن ثم بدأ بالارتفاع بشكل مطرد مرة أخرى.

ولنفترض أن سعر النفط الحالي هو 100 دولار للبرميل الواحد وأنها سنعمل مع وحدة لمدة ستة أشهر، وقمنا بتعيين $\alpha=0.04, \beta=0.75$ و ε_t هو متغير متوسطه صفر، والانحراف المعياري 0.07، و δ_t هو متغير متوسطه صفر والانحراف المعياري 0.09. ويبين الشكل 5-9 عينة من عشرة تحقيقات سعرية على مدى فترة 20 عاماً وتوضح لنا هذه المعايير.

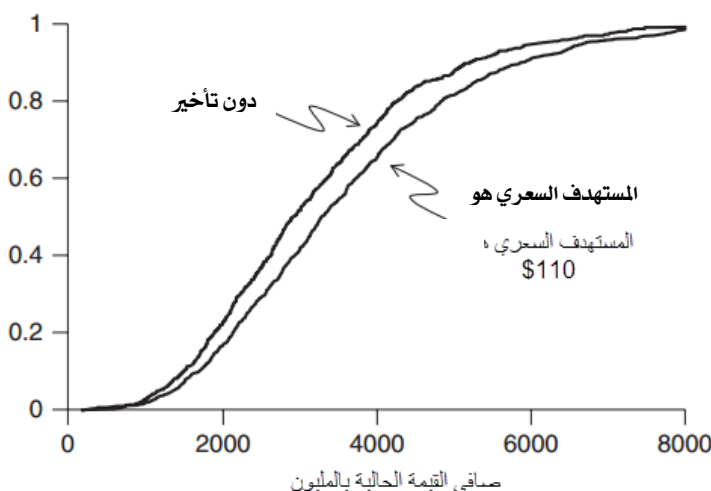
تكلفة تأمين الموقع بشكل صحيح وإيقاف تشغيل بعض المحطات القائمة (الأعمال التي تحتاج إلى القيام بها على الفور عند الشراء) هو 25 مليون دولار. وتبلغ تكلفة بناء المحطة (التي ستستغرق سنة) 400 مليون دولار. ويمكن أن ينتج عن تشغيل المحطة 2 مليون برميل سنوياً. وتبلغ تكلفة التشغيل الثابتة في السنة 80 مليون دولار، وتبلغ تكاليف الإنتاج (المتغير) 70 دولاراً للبرميل الواحد.



الشكل 5-9: عينة لعشرة سلاسل أسعار لمثال الزيت السريع.

وتستخدم الشركة معدل خصم للمشاريع الرأسمالية بنسبة 7٪ (عندما يتم تحويل جميع المبالغ بالدولار إلى قيم ثابتة للدولار لعام 2013). وتعتبر الاحتياطات كافية لتشغيل المحطة لمدة 20 عاما، وسوف نتجاهل ما يحدث في نهاية هذه الفترة (لذلك نحن ننظر للقيمة المتبقية من معدات الإنتاج، ولا تكلفة تنظيف الموقع). وبالنظر إلى هذا الترتيب، فإن جدول البيانات BRMch9-Quickstep.xlsx يستخدم محاكاة مونتي كارلو. ولكنه يعد غير عملي بشكل كبير لأنه يتضمن 1000 محاكاة، حيث يصل مدى كل محاكاة إلى 40 عاما. وتتضمن كل محاكاة أربعة صفوف: السلسلتان الزمنية y_t و θ_t المستخدمة لتوليد الأسعار، والأسعار نفسها وخط التدفق النقدي الذي ينطوي على بعض الصيغ الفوضوية التي لها تأثير لضمان بدء تشغيل محطة الإنتاج عندما يصل السعر إلى المستوى المطلوب. وبسبب التأخير في بناء المحطة فلن تتمكن المحطة من بدأ العمل إلا بعد 18 شهرا بعد عملية الشراء. وسيزيد متوسط السعر عند هذه النقطة عن 110 دولارات للبرميل، الأمر الذي يجعل كل شيء اقتصاديا (خلال 18 شهرا سيزداد السعر اللوغاريتمي بمقدار $3a=0.12$ مما يعني زيادة في سعر النفط بعامل $\exp(0.12)=1.1275$) نقطة البداية هي

استخدام محاكاة مونت كارلو لحساب صافي القيمة الحالية المتوقعة للمشروع نظرا لعدم وجود تأخير في بناء المصنع - وهذا يمكن أن يتحقق عن طريق تحديد عتبة السعر بأقل من 100، وسوف تعتمد النتيجة على الأرقام العشوائية المحددة التي تظهر في المحاكاة، وحتى مع وجود ألف سيناريو سيكون هناك اختلاف بسيط (والذي يمكننا أن نراه عن طريق الضغط على "F9" للحصول على "صيغة" أخرى للأرقام العشوائية). ويبلغ متوسط القيمة الصافية الحالية حوالي 3190 مليون دولار، ولكن بالنسبة لمجموعة مكونة من ألف سيناريو فردي، فيمكن أن يكون لها قيمة متوسطة في نطاق يتراوح بين 3110 مليون دولار وحوالي 3250 مليون دولار. والخطوة التالية هي محاولة مراعاة المرونة المتاحة للشركة "كويك ستب" إذا انخفض سعر النفط في البداية، فمن المنطقي الانتظار قبل الالتزام بإنفاق 400 مليون دولار لبناء المحطة.



الشكل 6-9: تحسين خواص القيمة الحالية للمخاطرة لخيار كويك ستب بالتأجيل

وإذا أردنا اتباع نهج محافظ فسيكون علينا الانتظار حتى يصل السعر فوق مستوى التعادل التي يبلغ 110 دولار قبل البدء. ولكن هذا لن يكون ضماناً ضد انخفاض

الأسعار في وقت لاحق، ولكن لأنه عادة ما يكون هناك انحراف صعودي في عملية السعر، ومن المؤكد أن فرصة خسارة المال هي منخفضة. وعند استخدام هذا النهج، فإن محاكاة مونت كارلو تعطي متوسط قيمة صافية حالية تبلغ حوالي 3550 مليون دولار، ولكن يمكن أن تتراوح قيمة مجموعة من السيناريوهات الفردية بين 3430 مليون دولار و3620 مليون دولار. ويبلغ متوسط التحسن في صافي القيمة الحالية الناجمة عن المرونة في تأخير بدء البناء حوالي 365 مليون دولار في هذا المثال.

ويبين الشكل 9-6 مقارنة بين التوزيع التراكمي لصافي القيمة الحالية الناتجة من مجموعتين من المحاكاة - واحدة مع عدم وجود أي تأخير وواحدة مع عتبة سعر يبلغ 110. ولأن هذه المجموعات تستند إلى بيانات أشواط متعددة من المحاكاة، فبالتالي تكون دالات التوزيع التراكمي غير سلسة. وأن عتبة السعر التي تبلغ 110 دولار هي تعسفية قليلاً ويمكننا أن نقوم بعمليات محاكاة ذات عتبات مختلفة لمعرفة ما هو أفضل. وعلى أي حال، لاحظ أنه، لن نتمكن من حساب نوع نقطة التعادل الواضحة التي رأيناها في الأمثلة الأخرى من هذا الفصل. لاحظ أيضاً أن هذا المثال يختلف عن المثال السابق لأن ممارسة الخيار (البدا) يمكن أن يتم في نقاط زمنية مختلفة، اعتماداً على الوقت الذي يرتفع فيه السعر فوق قيمة العتبة.

9-6 بعض المشاكل المحتملة عند استخدام الخيارات الحقيقية

وعندما نوقشت الخيارات الحقيقية لأول مرة، كان هناك قدر كبير من الإثارة بشأن تطبيقها كأداة استراتيجية في تقييم الاستثمارات وقرارات الإدارة الأخرى. وسيكون من الإنصاف القول بأن استخدام نظرية الخيارات الحقيقية تنتج "أرقام صعبة" لتقييمها.

ويناقش وبومان وموسكويتز (2001) بعض الأسباب التي أدت إلى محدودية استخدام نظرية الخيارات الحقيقية من جانب المديرين. إن الطريقة الأكثر مباشرة لاستخدام الخيارات الحقيقية هي ببساطة للاستفادة من أداة تقييم الخيار مثل صيغة بلاك سكولز. ومع ذلك، فإن هذا ينطوي على العديد من الافتراضات، على سبيل المثال، المخزون الأساسي في التوزيع اللوغاريتمي. وغالباً ما يكون ذلك غير مناسب بالنسبة لخيار استراتيجي. وبصفة عامة،

عندما يتعلق عدم التيقن بالأسعار وقيم الدولار، فإن الحركات صعوداً أو هبوطاً تكون عادة مضاعفة، مما يؤدي إلى التوزيعات اللوغاريتمية المحدود ((من خلال تطبيق نظرية الحد المركزي)، ولكن عندما يتعلق عدم اليقين بشيء آخر (على سبيل المثال، مبيعات منتج جديد قصير العمر)، فمن غير المرجح أن يكون هذا النموذج جيد باستخدام التوزيع اللوغاريتمي، وهناك مشكلة ثانية عند استخدام أداة تقييم الخيارات الجاهزة هي أن هناك افتراض وجود أصول قابلة للتداول حيث تكون إمكانية المراجعة لها تأثير كبير على حركة الأسعار.

وبالتالي، على سبيل المثال، يسهل خيار التبادل التجاري ملاحظة أسعار الأسهم بسهولة ويمكن لحامل خيار شراء أو بيع الأسهم عند هذا السعر تحقيق الربح من (أو خفض الخسارة) موقف الخيار. وفي المقابل، بالنسبة للخيارات الحقيقية، غالباً ما يكون من الصعب جداً التحقق من سعر السهم المماثل، وقد يكون من الصعب أيضاً تداول السعر الضمني.

وهناك أيضاً مشاكل تتعلق بوقت انتهاء الصلاحية، أما بالنسبة للخيارات الحقيقية الإستراتيجية، فغالباً لا يوجد وقت محدد للانتهاء، فعلى سبيل المثال، يمكن تمديد المشروع البحثي لفترة أطول من الزمن، ويحتفظ الاستثمار في نظام جديد لتوزيع المنتجات إلى أجل غير مسمى بخيار إضافة منتجات إضافية. لذلك هناك عدد من المشاكل مع تطبيق منهجية مباشرة من تحليل الخيارات المالية، وأنه قد يكون من الأفضل أن نفكر في بناء نموذج تقييم أكثر تطوراً، ولكن هذا يجلب معه بعض المخاطر، فإن خلق مثل هذا النموذج يعتبر تحدي تقني، ولن يكون من السهل التعامل معه من قبل المديرين الذين سوف يعتمدون على نتائجه.

وعلاوة على ذلك، فإن تعقيد نهج الخيارات يمكن أيضاً أن يجعل من الصعب العثور على أخطاء في التحليل، أو اكتشاف الافتراضات الطموحة بشكل مفرط التي يستخدمها مديرون المشروع المتفائلون. وتفسر هذه القائمة من المشاكل لماذا أعطينا الكثير من الاهتمام لنهج غير متطور نسبياً مثل محاكاة مونت كارلو. ومن المهم أيضاً أن ندرك أن الكثير من قيمة تحليل الخيارات تتم في مرحلة تصميم المشروع. وقد نكون قادرين على خلق قيمة ضافية من خلال الأخذ في الاعتبار توقيت القرارات، وخاصة تلك الخيارات البديهة (مثل قرار المضي قدماً أو تأجيل بعض النفقات). ومن خلال فهم هذه الحالات، قد لا يكون

من الضروري وجود نموذج عددي دقيق جدا، لأن عدم دقة نموذج صغير في هذه الحالات من غير المرجح أن يغير القرار الذي نتخذه. وكما يشير بومان وموسكوفيتز (2001): "في حين أن الانحرافات الصغيرة تستحق ثروة كبيرة في الأسواق المالية، فهي غير متكافئة إلى حد ما في أسواق المنتجات".

ملاحظات

ركز نهجنا في الخيارات الحقيقية على أساسيات كيفية استخدام المرونة والحسابات المطلوبة في أمثلة محددة لتقييم المشاريع التي توجد فيها مرونة. لأننا نعتقد أن هناك مشاكل مع تطبيقها في بيئة الخيارات الحقيقية، لقد أعطينا القليل من الاهتمام لمعادلة بلاك سكولز، والتي شكلت في بعض الأحيان الأساس لهذه التقييمات (انظر، على سبيل المثال، لورمان، 1998). إن النهج الذي نتبعه يتماشى بشكل عام مع التوصيات الواردة في كوبلاند وتوفانو (2004) وأيضاً مع النهج المقترح في الكتاب الذي يدور حول المرونة في التصميم لـ دي نيوفيل وشولتس (2011). لقد قدمنا فقط مقدمة موجزة جدا في هذا المجال، ولكن في الحقيقة هناك الكثير مما ينبغي قوله. يقدم كتاب سميث وماكاردل (1999) شرح دقيق ومفيد لبعض القضايا التي تحتاج إلى معالجة في الممارسة العملية. وهناك العديد من الكتب التي تتعامل مع الخيارات الحقيقية، بدءاً من المناقشة الأصلية لديكسيت وبينديك (1994) إلى الكتب الأحدث من قبل مون (2005) وغوثري (2009).

مراجع

- Bowman, E. and Moskowitz, G. (2001) Real options analysis and strategic decision making. *Organization Science*, 12, 772–777.
- Copeland, T. and Tufano, P. (2004) A real-world way to manage real options. *Harvard Business Review*, 82, 90–99.
- De Neufville, R. and Scholtes, S. (2011) *Flexibility in Engineering Design*. MIT Press.
- Dixit, A. and Pindyck, R. (1994) *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press.
- Guthrie, G. (2009) *Real Options in Theory and Practice*. Oxford University Press.

- Luehrman, T. (1998) Investment opportunities as real options: Getting started on the numbers, Harvard Business Review, 76, 3–15.
- Mun, J. (2005) Real Options Analysis: Tools and techniques for valuing strategic investment decisions, 2nd edition. John Wiley & Sons.
- Smith, J. and McCardle, K. (1999) Options in the real world: Lessons learned in evaluating oil and gas investments. Operations Research, 47, 1–15.

تمارين

9-1 موزع معجون الأسنان

تطلق شركة نوعاً جديداً من موزع معجون الأسنان في المملكة المتحدة، وسوف تقوم باختبار المنتج في السوق من خلال الإعلانات المحلية في جنوب ويلز، حيث تم عمل اختبار تسويقي لمنتجات أخرى من قبل في نفس المنطقة. ويتم بيع الموزع بسعر الجملة مقابل 2.50 جنيه إسترليني، وتبلغ وتكلفة التصنيع 2.40 جنيه إسترليني، ويقدر الربح بالنسبة للمصنع 10 بنس لكل وحدة. في المتوسط، كانت المبيعات في المملكة المتحدة أكبر بمائة مرة المبيعات في السوق التجريبي، ويكون من الصعب التنبؤ بحجم المبيعات لأنه يعد من المنتجات الغير اعتيادية.

ومن المتوقع أن تكون مبيعات السوق التجريبي بين 500 و 2500 شهرياً، وستكون تكاليف الإعلانات المحلية لهذا الشهر 2000 جنيه إسترليني. وبعد شهر واحد سيتم اتخاذ قرار ما إذا كان سيتم إنتاج على نطاق واسع أو وقف المنتج. ومن أجل زيادة الإنتاج سوف يتطلب الأمر إنفاق 20,000 جنيه إسترليني لإنشاء خط إنتاج جديد، ولكن هذا سيؤدي إلى انخفاض تكلفة الإنتاج لكل وحدة إلى 1.50 جنيه إسترليني، مما يؤدي إلى خلق هامش قدره 1 جنيه إسترليني. وسوف يكون متوسط تكاليف الإعلانات المحلية 5000 جنيه إسترليني في الشهر. وقد أنفقت الشركة بالفعل 20,000 جنيه إسترليني من أجل أن تجهز المنتج ليطرح في السوق. استخدام تحليل الخيارات الحقيقية لحساب الربح المتوقع من هذا المنتج على مدى عامين (تجاهل أي خصم من الأرباح المستقبلية).

2-9 حفلات البوب

هناك استثماران متوفران في حفلات البوب. واحد منهم ينطوي دفع مبلغ مقدما قدره 10,000 دولار وبعد ذلك الحصول على 10٪ من مبيعات التذاكر الصافية، والتي تعتبر غير مؤكدة ولكن من المتوقع أن تبلغ 120,000 دولار مع انحراف معياري قدره 20,000 دولار. المشروع الآخر هو أكثر مضاربة وسوف يمول سلسلة مكونة من ثلاثة عروض. وتبلغ المبيعات المتوقعة للتذاكر 230 000 دولار وانحراف معياري قدره 80 000 دولار. وتبلغ التكلفة الثابتة لعرضها 190 000 دولار. وقد طلب من تسعة عشر مستثمرا أن يدفعوا 10,000 دولار لتغطية هذه التكاليف الثابتة. وهناك احتمال أن تبلغ أرباح العروض أقل من 171,000 دولار، وفي هذه الحالة تم الاتفاق على أن كل مستثمر سوف يحصل على 9000 دولار. وسيتم تعويض أي نقص من قبل منتجي العرض. وفي حالة إذا حققت العروض مبيعات تذاكر صافية بأكثر من 171,000 دولار، فإن كل من المستثمرين التسعة عشر سوف يحصل على 9000 دولار مرة أخرى بالإضافة إلى 20 / 1 من الربح الزائد عن 171,000 دولار. (عند النقطة التي تبلغ فيها مبيعات التذاكر 191 ألف دولار، سيحصل المستثمرون على حصتهم كاملة مرة أخرى "10 آلاف دولار"). وسيتم دفع الحصة المتبقية (20 / 1) للمنتجين. احسب القيمة المتوقعة لكل من الاستثمارات. ما هو الاستثمار المفضل؟

3-9 استخراج الذهب

تدرس شركة تشارلستون للتعدين شراء ترخيص يسمح باستخراج الذهب من مخلفات المناجم لمدة ثلاث سنوات. الاستخراج هو عملية باهظة الثمن وتكون فقط جديرة بالاهتمام وتستحق إذا كان ثمن الذهب مرتفع بما فيه الكفاية. ويبلغ متوسط تكلفة العملية 1000 دولار لاستخراج أونصة من الذهب، ومن المتوقع أن تنتج العملية 500 أونصة في الشهر. وكما نعرف، فإن سعر الذهب متغير ويبلغ حاليا 1200 دولار لكل أونصة. وإذا انخفض السعر إلى أقل من 1000 دولار للأونصة، فسيتم إيقاف العملية إلى أن يرتفع السعر فوق تلك العتبة.

- (أ) إذا كان سعر الذهب في يناير سيكون له توزيع طبيعي بمتوسط قدره 1200 دولار، وانحراف معياري قدره 200 دولار، ما هو العائد المتوقع من العملية لشهر يناير؟
- (ب) ما هي الخيارات التي ستتيحها التدفقات النقدية للعملية في يناير من العام المقبل؟ (إذا تم تكرار ذلك عن كل شهر من الرخصة فإنه سيتيح الفرصة لتقييم الترخيص دون الحاجة إلى تقدير التغيرات في أسعار الذهب).

4-9 سامبافارم

شركة لديها خيار لشراء شركة صغيرة تسمى سامبافارم، الأصول الرئيسة لهذه الشركة هي براءة اختراع منتج صيدلاني يخضع حالياً لاختبارات سريرية. وسيستغرق الاختبار ثلاث سنوات أخرى بتكلفة قدرها 60 000 دولار في السنة. وسوف تعتمد ربحية الدواء على المدى الطويل على نتائج هذه التجارب السريرية. أفضل العلاجات المتاحة حالياً تعد فعالة بالنسبة لـ 40٪ من المرضى. وترتبط المبيعات النهائية للمنتج بعدد المرضى الذين سوف يجدون هذا الدواء فعال بالنسبة لهم أو أنه يعادل فعالية العقاقير الموجودة حالياً، ولكن فقط لكل 10٪ إضافية من المرضى الذين يرون أن الدواء فعال بالنسبة لهم. فإن الدخل السنوي الصافي (بعد تكاليف الإنتاج) سيزيد بمقدار 50.000 دولار أمريكي. وأفضل تخمين هو أنه من المرجح أن تتراوح قيمة الفعالية بين 0 و 80٪. وبالتالي، هناك احتمال 0.5 أن الدواء سيكون أقل فعالية من أفضل العلاجات الحالية ولن يتم إنتاجه. ولكن بمجرد أن يتم إنتاجه، سوف يتم تقييمه لمدة خمسة أعوام قبل إطلاق المجموعة التالية من عائلة هذا العقار، وستنخفض الأرباح إلى الصفر (أو ما يقرب من الصفر). ولكن لمدة خمس سنوات، ابتداء من العام الرابع مباشرة بعد انتهاء التجارب السريرية، سيكون من المرجح أن تكون أرباح الدواء مستقرة، مع الأخذ بعين الاعتبار الخيار الحقيقي الضمني، ما هي قيمة الشركة التي تبني براءة الاختراع إذا تم خصم الأرباح المستقبلية بمعدل 8٪ سنوياً؟

5-9 المعارض التجارية

يجب أن تنفق إلكترونيات تانجو 12 مليون دولار في عام 2014 و 15 مليون دولار

في عام 2015 من أجل تطوير منتج جديد. إذا كانت الشركة هي الأولى في السوق التي تنتج هذا المنتج فسوف تكسب 60 مليون دولار في عام 2016. أما إذا كانت الشركة ليست الأولى في السوق فإنها سوف تربح ما يغطي تكاليفها فقط. وتعتقد الشركة أن لديها فرصة 50٪ لتكون الأولى في السوق. واعتباراً من عام 2017 فصاعداً سيكون هناك عدد من الشركات الأخرى التي ستدخل السوق، وعلى الرغم من تانجو قد تستمر بشكل جيد بالإنتاج، فإنه يتوقع أن تجني ما يغطي التكاليف التي دفعتها فقط وليس أكثر. وتبلغ تكلفة رأس المال الشركة 12٪، ويجب عليك استخدام هذا الرقم لخصم الأرباح المستقبلية.

(أ) هل يجب أن تبدأ الشركة في تطوير المنتج؟

(ب) نفترض الآن أنه سيكون هناك معرض تجاري في 1 يناير 2015، حيث ستعرض جميع الشركات التي يتوقع دخولها في السوق جميع منتجاتها.

سوف تجري شركة تانجو تقييم جديد بعد انتهاء المعرض التجاري لترى احتمالية أن تكون الشركة الأولى في السوق. افترض أنه في تلك المرحلة ستمكن من الإعلان بشكل واضح وصريح احتمالية أن تكون الأولى في السوق، ويفترض كذلك أن هذه الاحتمالية من المرجح أن تتراوح قيمتها بين 0 و1. هل يجب أن تبدأ الشركة في تطوير المنتج؟

9-6 تنطوي أسعار الخيارات على معلومات التوزيع

لنفترض أن خيار عقد البيع الأوروبي على أسهم أبل بسعر ممارسة يقدر بـ 430 دولار يباع مقابل 35.25 دولار؛ وخيار عقد الشراء بسعر ممارسة 460 دولار يباع مقابل 18.70 دولار. أفترض أن سعر أسهم أبل في تاريخ الممارسة كان متغير عشوائي له توزيع طبيعي (بدلاً من توزيع لوغاريتمي). استخدم جدول البيانات والصيغة $E(\max(X-a,0))$ لتقدير المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي. استخدم هذا التوزيع الطبيعي لإيجاد سعر خيار عقد البيع عند سعر ممارسة 450 دولار.

الفصل العاشر

مخاطر الائتمان

سجل التصنيف الائتماني لشركة أثناء الأوقات العصيبة

كانت ليز كليبورن مصممة أزياء أمريكية، ولدت في مدينة بروكسل في 1929. وفي عام 1976، كانت واحدة من الشركاء المؤسسين لشركة ليز كليبورن، مما جعلها تدخل ضمن قائمة مجلة فورتشن لأعلى 500 شركة في عام 1986. كانت أول امرأة تتولى منصب المدير التنفيذي في قائمة مجلة فورتشن لأعلى 500 شركة، وكان لها تأثيرًا كبيرًا على الطريقة التي تُباع من خلالها الأزياء، فقد أصرت على جمع الملابس في مجموعتها معًا في المتجر عند عرضها بدلاً من وضع تنورات ليز كليبورن مع التنورات الأخرى في مكان منفصل عن القمصان. واستقالت كليبورن من الإدارة النشطة في عام 1989 وتوفت في عام 2007.

كانت مبيعات شركة ليز كليبورن السنوية 2 مليار دولار في بدايات تسعينيات القرن الماضي وتوسعت عبر عمليات استحواذ على مدار التسعينيات وبدايات الألفية الجديدة، فقد استحوذت على لاكي براند جينز ومكس وجوسي كوتور، ولكنها في النهاية بدأت المشاكل تتوالى عليها. ربما كانت عمليات الاستحواذ كثيرة للغاية ولكن كانت هناك أيضًا

صعوبات في إدارة العلاقات مع كبار شركات التجزئة مثل مايسيز وجي سي بيني. تولى ويليام ماكونب منصب المدير التنفيذي للشركة في 2006 وارتفعت أسهم الشركة في بدايات 2007 إلى 46.64 دولارًا، ولكن كانت هناك مشاكل واضحة بحاجة إلى معالجتها: مجموعة من العملاء المسنين والصورة السيئة المتراجعة للعلامة التجارية في الصحف. ثم ازدادت الأمور سوءًا زيادة كبيرة، حيث بدأت الشركة تسجل خسائر في الربع الأخير من عام 2007 واستمرت هكذا حتى عام 2012، وانخفض سعر السهم انخفاضًا جذريًا مسجلًا أقل من دولارين في 2009 عندما كانت الشركة تُسرح عمالاً وتغلق مراكز توزيع. وفي عام 2011، سجلت الشركة خسارة فادحة (بقيمة 172 مليار دولار) ولكن استمر سعر السهم في تعافيه البطيء وبلغ في 2013 (بينما أكتب هذه السطور) حوالي 19 دولارًا.

من جهة أخرى، تملك الشركة - ولمدة طويلة - تصنيفًا ائتمانيًا من شركة ستاندرد آند بورز. وعند النظر إلى تاريخ الشركة منذ 2000 سنرى أن تصنيف شركة ليز كليبورن الائتماني كان عند الدرجة الاستثمارية (أي BBB بمصطلحات ستاندرد آند بورز) حتى 3 يونيو 2008، عندما انخفض تصنيفها إلى درجة BB، وهي درجة أدنى من درجة الاستثمار (المعروفة باسم الدرجة الرديئة). في ذلك الوقت، ذكرت ستاندرد آند بورز أن السبب وراء هذا التخفيض هو الارتفاع الهائل في مستويات الديون والتحديات في بيئة البيع بالتجزئة في هذا المجال. ثم انخفض تصنيف شركة ليز كليبورن الائتماني مجددًا في 17 أغسطس 2009 إلى درجة B ومرة أخرى في مارس 2010 إلى درجة CC. ويعني هذا التصنيف أن ستاندرد آند بورز ترى الشركة "ضعيفة للغاية" وهو أيضًا إشارة تحذير هائلة. تلقت الشركة الإهانة الأخيرة في 11 إبريل 2011 عندما تم تصنيف الشركة عند درجة العجز الانتقائي. وعندما تختار ستاندرد آند بورز تصنيف مقدم عطاء بغرض الحصول على إعادة تمويل "متعثرًا" ومساويًا للعجز الانتقائي فغالبًا ما يكون هذا قرارًا فنيًا ومغاييرًا تمامًا عن التخلف العادي عن الديون. وفي الواقع، أعيد تصنيف الشركة في اليوم التالي مباشرة إلى درجة B. ومنذ ذلك الوقت والشركة (التي غيرت اسمها التجاري إلى مجموعة شركات فيث آند باسيفيك) في وضع أفضل بكثير على الرغم من بقاء التحديات، فقد تم

بيع بعض العلامات التجارية لسداد الديون وركزت الشركة على علاماتها التجارية الثلاثة الأساسية: كاي سبايد وجوسي كوتور ولاكي براند.

تمثل التصنيفات الائتمانية بالنسبة لشركة مثل ليز كليورن بحاجة إلى اقتراض المال أهمية جوهرية. والهدف من وجود وكالات التصنيف الائتماني هو تقديم مؤشر على احتمالية عدم قدرة الشركات على الوفاء بالتزاماتها مستحقة السداد. ولكن إلى أي مدى تختلف المعلومات التي يوفرها التصنيف الائتماني عن تقييم سوق الأسهم؟ وما مدى موثوقية التصنيفات.

1-10 مقدمة عن مخاطر الائتمان

في هذا الفصل، سوف نعطي مقدمة عن خطر الائتمان بما يشمل مناقشة حول الائتمان الاستهلاكي (وهو موضوع من المرجح أن يكون ذا صلة بالمديرين العاملين خارج القطاع المالي). قد نكون مهتمين للغاية بخطر الائتمان لأنها تؤثر علينا نحن الأفراد، فيما أن ظروفنا الخاصة وتاريخنا الائتماني سيؤثر في قدرتنا على أموال وفي معدلات الفائدة التي ندفعها.

وكما ناقشنا في الفصل الأول، يُقصد بخطر الائتمان احتمالية أن يصبح عقدًا قابلاً للتنفيذ القانوني منعدم القيمة (أو على الأقل خفض قيمته خفضاً جوهرياً، لأن الطرف الآخر تخلف عن السداد وخرج من السوق. مع الأفراد، قد يصبح دين مستحق السداد غير قابل للحصول حتى بدون أن يصبح الشخص المعني مفلساً، ويمكن تصنيف هذا أيضاً على أنه خطر ائتمان.

ستقوم مناقشتنا في هذا الفصل بمعالجة جانبيين من مخاطر الائتمان، الجانب الأول هو امتلاك خطر الائتمان خصائص محددة، أي إما نعم أو لا مثل أن يكون هناك تخلف في السداد أو لا يكون. لم يعد التحليل التفصيلي لخطوط التوزيع والنتائج المحتملة ذا صلة بالسوق الحالي. والجانب الثاني هو ارتباط خطر الائتمان بما يحدث بالطرف الآخر، وبالتالي فنحن نملك معلومات أقل عن أعمالنا. نحن بحاجة إلى بذل مجهود أكبر للحصول على أقصى استفادة من أي معلومات متوفرة لدينا. ينبغي علينا النظر فيما يحدث مع مرور الوقت (هل تنتقل الشركة إلى وضع أقل استقراراً؟، وينبغي علينا الاستفادة من المؤشرات غير المباشرة المتوفرة لدينا) هل يُعد إصدار هذا الفرد 4 بطاقات ائتمان جديدة خلال الأشهر الستة الماضية إشارة سلبية؟).

صممت اتفاقية بازل 2 للبنوك. وسترتبط خطر الائتمان في هذا السياق بعدد كبير من القروض متنوعة الأشكال، سواء قروض الشركات أو القروض الشخصية. وتمثل الرهون العقارية أحد المكونات الكبيرة لإقراض الأفراد. في هذه الحالة، توفر قيمة العقار نفسه بعض الأمان للبنك ولكن قد يظل هناك خطر ائتمان كبير إذا انخفضت أسعار العقارات انخفاضاً كبيراً بدرجة تجعل الدين المستحق أكبر من قيمة المنزل (كما حدث في الولايات المتحدة خلال الأزمة العقارية).

ومن منظور مؤسسي، يرتبط خطر الائتمان بالتصنيفات الائتمانية التي تقدمها واحدة من وكالات التصنيف الائتماني الكبيرة الثلاثة: ستاندرد آند بورز وموديز وفيتش. ويستحسن عند الدخول في عقد مع شركة - وخاصة عند إقراضها مالياً - منخفضة التصنيف الائتماني وبالتالي يزداد خطر تخلفها عن السداد التمهّل والتفكر في الأمر ملياً. فمن الحكمة - على أقل تقدير - طلب فائدة أعلى على القروض الممنوحة للشركات التي ينظر إلى تصنيفها الائتماني على أنه خطر. وعن طريق قصر الترتيبات التعاقدية مع الشركات منخفضة التصنيف الائتماني، سيستطيع المديرون تقليل خطر الائتمان الذي يتعرضون له.

تملك كل وكالة تصنيف ائتماني مصطلحاتها أكوادها الخاصة بها، ووفيا يلي أكواد ستاندرد آند بورز:

الدرجة الاستثمارية

AAA : أفضل المقترضين، يتمتعون بالثقة والاستقرار (العديد منهم من الحكومات).
 AA : قدرة قوية للغاية على الوفاء بالالتزامات المالية ومخاطر أعلى قليلاً من التصنيف AAA.
 A : قدرة قوية على الوفاء بالالتزامات المالية ولكن مع احتمالية التأثير بسهولة من الأوضاع الاقتصادية السيئة.
 BBB : مقترض متوسط يملك قدرة معتدلة على الوفاء بالالتزامات ووضعه اللحظي مناسب الدرجة غير الاستثمارية.

BB : غير ضعيف على المدى القريب ولكنه يواجه مشاكل كبرى قائمة.

- B : يملك حالياً القدرة على الوفاء بالالتزامات ولكنه ضعيفاً أمام الظروف المعاكسة.
- CCC : ضعيف حالياً ويعتمد على الأعمال التفضيلية والظروف الاقتصادية.
- CC : ضعيف للغاية حالياً وتواجه سندات أعمل مضاربة شديدة.
- C : مفلس تقريباً ولكنه مستمر في سداد الالتزامات المالية.

يشمل نظام وكالة موديز الأكواد Aaa و Aa و A و Baa إلخ، ولكنها متشابهة مع التصنيف السابق كثيراً. فشلت وكالات التصنيف الائتماني فشلاً ذريعاً عند بداية الأزمة المالية العالمية وحيث استمرت في إعطاء بعض التزامات الديون المضمونة (CDOs) أعلى الدرجات بعد فترة قصيرة من الإعلان عن "خطرها الشديد". ولكن نظراً لعدم تفوق أحد الوكالات على الأخرتين ونظراً للدور المهم الذي تلعبه تلك الوكالات في النظام المالي، استمرت في عملها.

10-2 استخدام درجات الائتمان لمخاطر الائتمان

يتم استخدام درجات الائتمان من أجل تقديم توجيهات حول مخاطر تخلف الشركة عن دفع الديون. وسوف تختلف المنهجية الدقيقة المستخدمة: فعند تقييم المخاطر المرتبطة بالسندات الحكومية، ستتخذ الشركة نهجاً مختلفاً عن ذلك الذي تستخدمه عند تصنيف الشركات، وتتبع نفس الطريقة فيما يتعلق بمخاطر الشركات. وستطلب الشركة التي ترغب في اقتراض المال عن طريق إصدار السندات من إحدى وكالات التصنيف أن يقومون بتصنيفهم، وستقوم بالدفع لهم مقابل هذه الخدمة. في الواقع، فإن أكبر وكاليتين وهما ستاندرد آند بورز وموديز، سوف يقومون بتقييم جميع سندات الشركات الكبيرة الصادرة في الولايات المتحدة، سواء طلب ذلك أم لا.

وعلى أية حال يجوز للمصدر أن يدفع الرسوم ويشرع في مشاركة أكثر جدية مع شركة التصنيف لتجنب الوضع الذي يتم فيه التقييم دون معرفة كاملة بالوقائع.

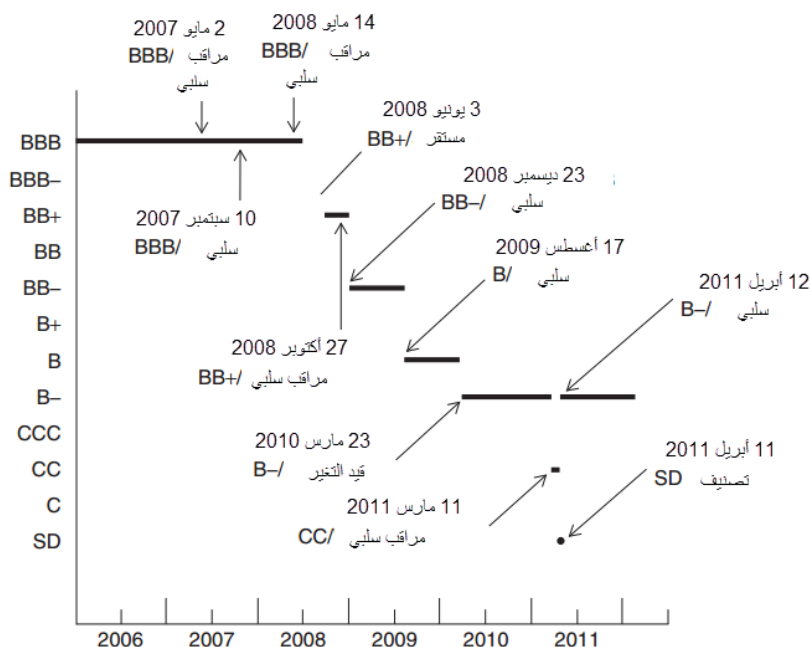
فإن المستثمرين المؤسسيين يفضلون أن يكون إصدار السندات مصنفاً من قبل أكثر من شركة، وستنظر شركة التصنيف في أمرين: مخاطر الأعمال والمخاطر المالية.

إن تقييم مخاطر الأعمال ينطوي على النظر في شروط التداول، وتوقعات القطاع، ونوعية فريق الإدارة. ويتم تقييم المخاطر المالية بطريقة أكثر كمية باستخدام البيانات المحاسبية التي تبحث في الربحية ومستويات الدين والقوة المالية ومرونة الشركة. وبعد ذلك سيتم زيارة الشركة من قبل المحللين المعنيين، وستجتمع لجنة للنظر في توصيات المحللين والتصويت على الدرجة النهائية. ويتم إعلام الشركة بالتوصية والتعليق الذي سوف يتم نشره عنها، ومن ثم إعطاء فرصة أخيرة لتقديم معلومات إضافية (أو طلب حذف معلومات سرية للشركة من التعليق) قبل تأكيد التصنيف ونشره.

وإذا كانت الشركة تقوم بإصدار سندات ذات خصائص مختلفة، فيتم تصنيفها بالرجوع إلى التصنيف العام للشركة ومن خلال الديون العليا التي لها أولوية في الدفع، فسيكون من المرجح أن تعطي تصنيفاً أعلى من الديون الفرعية. وفي حالة المنتجات عالية التنظيم مثل منتجات CDO يتم دمج الديون من مصادر مختلفة وتقسيمها، ومن ثم تكون العملية أكثر تعقيداً، لأن المستوى العام للمخاطر ينطوي على النظر في الأجزاء المكونة للمنتج المنظم. وبمجرد إعطاء التقييم، تتحول العملية إلى وضع المراقبة حيث يتم تكليف فريق مستقل ضمن وكالة التصنيف بمراقبة التطورات داخل الشركة من أجل أن يكون هناك تغيير في التصنيف في الوقت المناسب (إما أعلى أو أقل) إذا اقتضت الظروف ذلك. وتصدر التصنيفات الفعلية مع علامات زائد أو ناقص ويتم إرفاقها لجميع الدرجات التي تتراوح بين AA و CCC.

وعلاوة على ذلك، تقدم ستاندرد آند بورز ما تصفه ببيان التوقعات الذي يشير إلى اتجاه التغيير إذا كانوا يتوقعون حدوث تغيير خلال العام أو العامين التاليين (بعنوان "التطوير" إذا كان التغيير محتملاً ولكن يمكن أن يكون في أي من الاتجاهين). وإذا دخلت الشركة مرحلة حيث تعتقد شركة التصنيف أن هناك فرصة كبيرة لحدوث تغيير في إطار زمني أقصر مدته ثلاثة أشهر أو نحو ذلك، ثم يتم وضع الشركة على حالة "مراقبة الائتمان". ويمكننا أن نرى كيفية تطبيق هذا في مثال ليز كليبورن في الجدول الزمني المبين في الشكل 1-10. ويلاحظ أنه كان هناك تصريحات في مايو 2007، سبتمبر 2007 ومايو 2008 تعكس

إمكانية انخفاض التصنيف بسبب تراكم المشاكل على الشركة ولكن لم يحدث أول انخفاض حتى يونيو 2008.



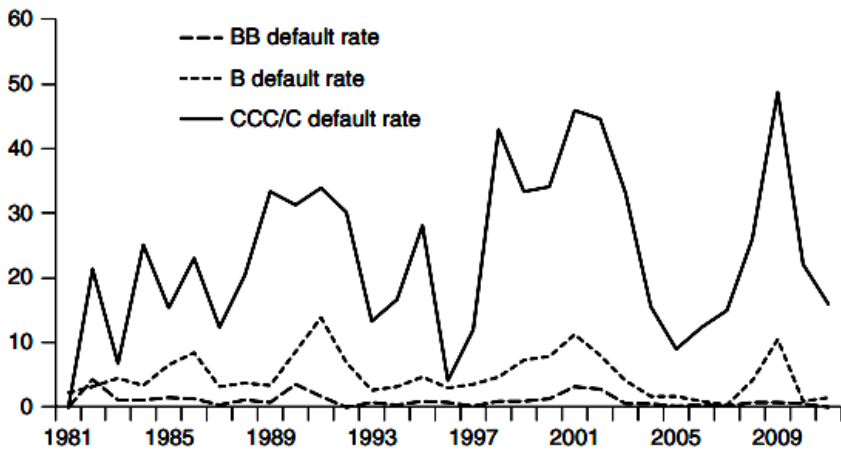
الشكل 10.1 الجدول الزمني لإعلان وكالة ستاندرد آند بورز التصنيفات الائتمانية لشركة Liz Claiborne Inc

الشكل 10-1: الجدول الزمني للتصريحات الصادرة عن مؤسسة ستاندرد آند بورز للتصنيف الائتماني لشركة ليز كلايبورن.

وتؤدي شركات التصنيف الائتماني مهمة حيوية في سوق رأس المال حيث لديهم خبرة في مهمة تقييم المخاطر وهم مستقلون عن الشركات الفردية. وإن المعلومات الإضافية التي تقدمها للمستثمرين والمشاركين في السوق يكون هدفها في نهاية المطاف أنه يمكن للشركات أن تزيد أرباحها بتكاليف أقل حيث أن التقييمات توفر وسيلة فعالة للمستثمرين للحد من عدم اليقين. وفي الوقت نفسه، فإن شركات التصنيف تقوم بوظيفة مهمة بالنسبة للمنظمين الذين يرغبون في الحد من المخاطر التي يمكن أن تتخذها الشركات المالية ويمكن استخدام التصنيفات ضمن القواعد التي وضعوها. ومن الواضح أن احتمالية التخلف أو

التعسف في السداد تختلف باختلاف عوامل الاقتصاد الكلي: فقد أدت أزمة الائتمان العالمية في الفترة 2008-2009 إلى حدوث الكثير من حالات التخلف عن السداد. ولا يتعين على شركات التصنيف أن تعطي تصنيفات تتماشى مع احتمالات التخلف عن السداد، لأن ذلك سيتطلب إعادة تصنيف كامل مع تغير المناخ الاقتصادي من سنة إلى أخرى. وعوضاً عن ذلك، فإن شركات التقييم تهتم بالاحتمالات النسبية: إذا كانت هناك شركة مصنفة بدرجة استثمار فسوف تكون أقل عرضة أن تتخلف عن الدفع بالمقارنة مع شركة مصنفة بدرجة BB والتي بدورها تكون أقل عرضة للتخلف عن شركة مصنفة بدرجة B وهكذا.

ويوضح الشكل 2-10 كيف تتفاوت النسبة المئوية للتخلف عن السداد في السنة مع مرور الوقت بالنسبة للدرجات الثلاثة غير الاستثمارية التي قدمتها شركة ستاندرد آند بورز. وكما تتوقع ستاندرد آند بورز فإن المعدلات الافتراضية لدرجات C هي أعلى من درجات B، والتي بدورها أعلى من درجات BB. ولكن من المثير للاهتمام أيضاً أن نرى مدى التباين بينهما. أما بالنسبة للسندات بدرجة C في الأعوام مثل 2005 و1996، كان هناك احتمالية بنسبة 10٪ أن يحدث تخلف عن السداد، ولكن في عامي 2001 و2009، إذا تم بدأ العام بدرجة C فإن هذا يعني وجود احتمال بنسبة 40٪ أن يحدث تخلف عن السداد قبل نهاية العام.



الشكل 2-10: نسبة الشركات المتعثرة خلال السنة لثلاث درجات مختلفة (غير استثمارية)

10-2-1 تحليل سلسلة ماركوف للافتراضات.

ولكي نفهم المخاطر المرتبطة بدرجة معينة فإنه يجب أن نحدد الأفق الزمني المعني. هناك فرصة ضئيلة جدا بالنسبة لشركة بدرجة AA أن تتخلف عن السداد هذه السنة.

ولكن إذا تراجع تصنيف الشركة إلى درجة BB في غضون خمس سنوات، فستزيد احتمالية التخلف عن السداد بشكل كبير.

وتقوم مؤسسة ستاندارد & بور بنشر تقريراً يتضمن احتمالات حدوث التغيرات المختلفة الممكنة. ويبين الجدول 10-1 متوسط معدلات التغيرات على مدى 30 عام.

وبالتالي، على سبيل المثال، في المتوسط هناك 8.7٪ من الشركات المصنفة بدرجة AAA تراجعت إلى الدرجة AA خلال العام. ويوضح العمود NR في الجدول النسب الغير مقيمة. وفي بعض الأحيان قد تخرج شركة من التقييمات قبل وقت قصير من التخلف عن السداد، ولكن قد يكون هذا قرار الشركة عندما ترى أنه ليس هناك ضرورة للتصنيف. وستقوم شركة التصنيف بتتبع الشركات التي تخرج من التصنيفات في منتصف العام ثم تتخلف عن السداد خلال ذلك العام، حتى تكون الأرقام المتعلقة بالتخلف السنوي صحيحة.

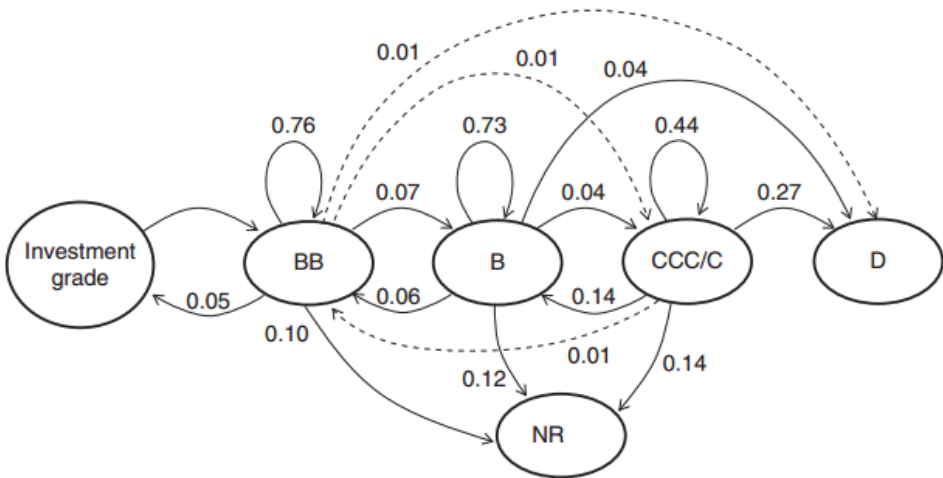
الجدول 10-1: متوسط معدلات التغير في الشركات العالمية للفترة 198-2011 (%)

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	87.2	8.7	0.5	0.1	0.1	0	0.1	0	3.4
AA	0.6	86.3	8.3	0.5	0.1	0.1	0	0	4.1
A	0	1.9	87.3	5.4	0.4	0.2	0	0.1	4.7
BBB	0	0	3.6	84.9	3.9	0.6	0.2	0.2	6.4
BB	0	0	0.2	5.2	75.9	7.2	0.8	0.9	9.8
B	0	0	0.1	0.2	5.6	73.4	4.4	4.5	11.7
CCC/C	0	0	0.2	0.3	0.8	13.7	43.9	26.8	14.4

ومن الصعب عمل رسم بياني يوضح جميع التغيرات الممكنة - وفي الشكل 3-10 أظهرنا التغيرات السنوية بين الدرجات "الغير استثمارية"، وقمنا بتحويل النسب المئوية

إلى احتمالات وتم حذف التغيرات التي لها احتمال أقل من 0.01 أما تلك التي لها احتمال أقل من 0.02 فقمنا بإظهارها بشكل متقطع.

وبالنظر إلى المعلومات المتعلقة بفرص التخلف عن السداد أو إجراء عملية انتقالية في سنة واحدة، فما الذي يعنيه ذلك عن فرصة التخلف عن السداد خلال فترة زمنية مدتها ثلاث أو خمس سنوات؟ إحدى الطرق البسيطة للتعامل مع هذه المشكلة هي تحليل نموذج سلسلة ماركوف لهذه العملية. ويفترض ماركوف أن التغيرات في التصنيف يعتمد فقط على النتيجة الحالية. فإن الشركة التي لديها تصنيف AA لمدة 15 عام، ليست أكثر أو أقل عرضة للانتقال إلى A بالمقارنة مع شركة حققت درجة AA العام الماضي. وأن الشركة التي انخفض تصنيفها من A إلى BBB ومن ثم إلى BB ليست أكثر أو أقل عرضة للانتقال إلى B مرة أخرى بالمقارنة مع شركة تحرك تصنيفها في الاتجاه المعاكس، بعد أن تم تصنيفها بدرجة B العام الماضي ولكنها انتقلت إلى BB.



الشكل 3-10: الاحتمالات السنوية للتغير بين الدرجات غير الاستثمارية. لا تظهر التغيرات مع احتمال أقل من 0.01، وتظهر التغيرات مع احتمال أقل من 0.02 بشكل متقطع.

واحدة من الحقائق الأساسية لسلسلة ماركوف هو أن القوة العاشرة من مصفوفة الانتقال تعطي فرصة إجراء فواصل انتقالية. ولإظهار سبب حدوث ذلك، سنقوم بتحليل

احتمال أن تكون الشركة التي بدأت بتصنيف B هي معرضة للتخلف خلال سنتين باستخدام المعلومات الواردة في الشكل 10-3. (لتبسيط الحسابات نستخدم هذه الأرقام التقريبية بدلا من الأرقام الأكثر دقة الواردة في الجدول 10-1). سنقوم بكتابة $p(X, Y)$ لاحتمال الانتقال من الحالة X إلى الحالة Y. ثم يمكننا أن ننظر في جميع المسارات الممكنة من B إلى D، حيث يمكن أن يحدث انتقال خلال سنة واحدة أو يمكننا الوقوف عند B في السنة الأولى ومن ثم الانتقال إلى D في السنة الثانية، أو يمكننا الانتقال إلى C في السنة الأولى والانتقال من C إلى D في السنة التالية، وهكذا. فنحصل على:

Pr (من B إلى D خلال عامين)

$$= p(B, D) + p(B, B)p(B, D) + p(B, C)p(C, D) + p(B, BB)p(BB, D) \\ = 0.04 + 0.73 \times 0.04 + 0.04 \times 0.27 + 0.06 \times 0.01 = 0.08. \quad (1-10)$$

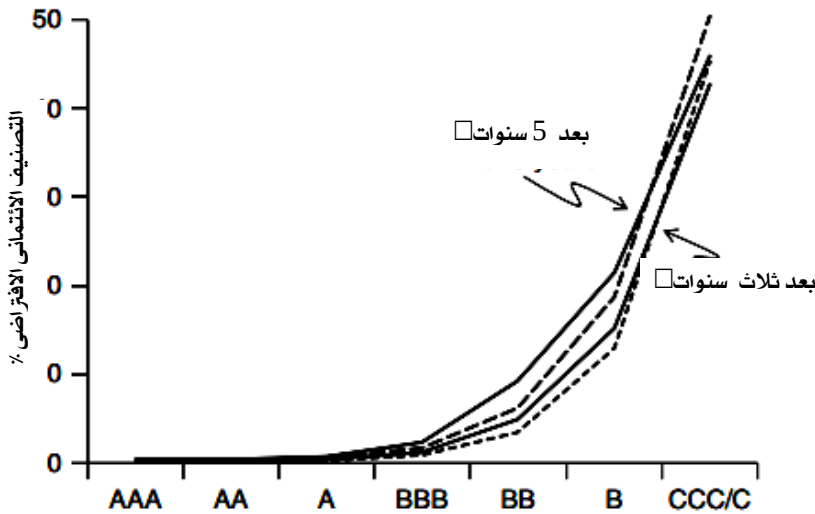
نحن مهتمون باحتمال التخلف عن السداد في وقت ما خلال العامين المقبلين، وبالتالي يمكننا أن ننهي الحسابات بمجرد أن نصل إلى D. مما يجعل من المعقول تحديد $p(D, D) = 1$ ومن ثم يمكننا أن نرى أن الصيغة لديها النموذج:

$$Pr(x \text{ to } y \text{ in } 2 \text{ steps}) = \sum_i p(x, i)p(i, y), \quad (2-10)$$

حيث تشير i إلى كل من الحالات التي يمكننا الحصول عليها من خلال x. في المعادلة (1-10) أخذنا مصطلحات مثل $p(B, NR)$ حيث تكون الاحتمالية في الخطوة الثانية هي صفر. لنفترض أن P تشير إلى المصفوفة المربعة في الجدول 10-1، وتضاف للصفتين D و NR حيث في كل حالة هناك احتمال بنسبة 100٪ للبقاء في نفس الحالة. وبالتالي، P هو مصفوفة مربع وسيكون من المناسب لتقسيم كل عنصر بمقدار 100 للتعبير عن احتمالات الانتقال بشكل مباشر بدلا من تمثيله بنسب مئوية. ثم يمكننا كتابة العنصر في الصف i th والعمود j th بالرمز P_{ij} : هو احتمال القفز من الحالة i إلى الحالة j. وتوضح قواعد ضرب المصفوفة أن العنصر في الصف i th والعمود j th P^2 يعطى بواسطة $\sum_k P_{ik}P_{kj}$ الذي يطابق تماما المعادلة (2-10). وبالتالي، توضح P^2 كل احتمالات الانتقال المكونة من خطوتين،

وتوضح P^3 احتمالات الانتقال المكونة من ثلاثة خطوات وهكذا.

وبما أن شركة ستاندرد آند بورز تقدم تقارير عن التغيرات التي تحدث على مدار ثلاثة سنوات. فيمكننا مقارنة توقعاتنا لمعدلات التخلف عن السداد باستخدام نموذج سلسلة ماركوف للسلوك الفعلي. يتم توضيح مقارنات سلسلة ماركوف الكاملة في جدول البيانات BRMch10-Markov.xlsx ودالة المصفوفة المستخدمة لتنفيذ منتج المصفوفة. ويقارن الشكل 4-10 معدلات التخلف الفعلية والمتوقعة لمدة ثلاث سنوات وخمس سنوات. ويمكننا أن نرى من خلال هذا النموذج أن ماركوف لا يقوم بعمل ممتاز في التنبؤ بهذه المعدلات. ويعد نموذج سلسلة ماركوف وسيلة جيدة للتفكير في حركات التصنيف الائتماني، ولكن يبسط السلوك الحقيقي بشكل كبير. ويمكننا أن نحدد عددا من الأسباب المحتملة للتنبؤات الفقيرة لمدة ثلاث سنوات وخمس سنوات من خلال نموذج ماركوف.



الشكل 4-10: معدلات التخلف الفعلية (الخط الثابت) والمتوقعة (خط متقطع) لمختلف درجات البدء على مدى ثلاث سنوات وخمس سنوات.

1- تجميع الحالات معاً. يتم وضع التصنيفات الفعلية بعلامات زائد وناقص، مما يوفر المزيد من الحالات في المجلد. وعندما يتم تجميع الحالات معاً في سلسلة ماركوف، فلا يتم التعامل معها باعتبارها سلسلة ماركوف حيث تتغير خصائصها. على سبيل المثال، إذا تحركت الشركات ببطء من خلال التقييمات على سبيل المثال، $BB+$ إلى BB إلى $BB-$ ، إذا كانت الشركة تقع ضمن مجموعة BB لبعض الوقت، فإن هذا قد يزيد من فرصة أن تنتقل إلى المستوى الأدنى $BB-$ ، وبالتالي زيادة فرصة القفز إلى المستوى B وكسر افتراض ماركوف.

2- أنواع مختلفة من الشركات تتصرف بشكل مختلف. لنفرض أن هناك أنواع مختلفة من الشركات تتبع سلاسل ماركوف المختلفة. فإن هذا لا يعني بالضرورة أن أحد أنواع الشركات هي أكثر خطورة من النوع الآخر (بنفس التصنيف). وربما من خصائص الشركات في القطاع المالي أن تكون أكثر عرضة للتخلف الفوري، بينما يكون الأمر متوازناً بالنسبة للشركات في القطاع غير المالي حيث يوجد خطر أكبر للانتقال إلى الدرجة التالية الأقل. على أية حال، فإن وجود أنواع مختلفة من الشركة يمكن أن يفسد افتراض ماركوف. ويعطي التمرين 10-2 مثالا على ذلك.

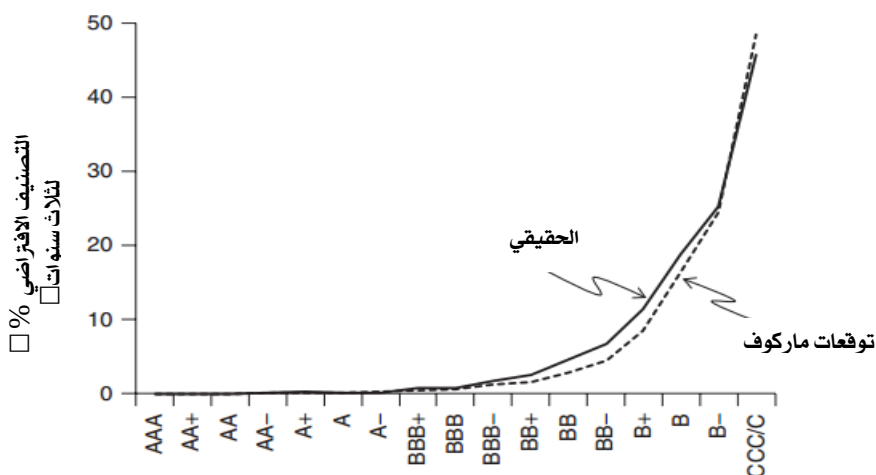
3- تجميع السنوات السيئة معاً. وقد لاحظنا بالفعل أن معدلات التخلف عن السداد (والانتقال إلى الدرجات الأقل) تختلف اختلافاً كبيراً من سنة إلى أخرى. وهذا يعني أن النموذج الأنسب قد يكون نموذجاً يعتمد فيه احتمال حدوث أي انتقال حسب السنة المعنية. ومن ثم يجب أن نستبدل المعادلات كما في المعادلة (10-2)

$$\Pr(x \text{ at time } n \text{ to } y \text{ at time } n + 2) = \sum_i p_n(x, i) p_{n+1}(i, y)$$

حيث يمثل الجزء الفرعي الفترة الزمنية. إذا كان الاحتمال الكلي لحدوث انخفاض في الدرجات في سنة واحدة يرتبط ارتباطاً إيجابياً باحتمالية التراجع في السنة التالية، فإن ذلك يمكن أن يزيد من الاحتمال الكلي لتراجعين متعاقبين عند مقارنتهما بالحالة عندما تكون الاحتمالات في سنة واحدة مستقلة عن الاحتمالات في السنة التالية.

4- القرارات الموضوعية التي تتخذها شركة التصنيف. هناك الكثير من النقاش حول المدى الذي قد تلعب فيه العوامل الذاتية دورا في التصنيف الائتماني. ومن الواضح أن شركات التصنيف نفسها تدعي أن تصنيفاتها موضوعية، ولكن كثيرا ما طرحت أسئلة حول ما إذا كانت التقييمات الأولية سخية جدا، ولأن هناك رغبة كامنة من قبل شركات التصنيف في كسب تجارة مصدري الديون الجديدة إلا أنه قد يكون هناك تردد في إصدار قرار التراجع بسرعة كبيرة، وتنتظر شركة التصنيف حتى تكون على يقين من أنه القرار الصحيح. قد تكون هذه هي الحالة التي تكون فيها أوضاع ديون المصدر مرتبطة بالدرجات. فالتراجع من BBB إلى BB قد يؤدي إلى تسريع سداد الديون، وهذا بدوره قد يؤدي إلى أن تواجه الشركة المزيد من الصعوبات. ومن ناحية أخرى، قد تكون شركات التصنيف متحفظة في تصنيفاتها عمداً، وتحفظ بالتعديل الذي سيكون ملائماً. هذا النوع من السلوك من قبل شركات التصنيف يمكن أن يفسر توقعات مضللة حول افتراض ماركوف.

ويمكننا على الأقل أن نعالج القضيتين الأوليين بشكل أولي باستخدام بيانات ستاندرد آند بورز مقسمة إلى تقييمات أكثر دقة ومقسمة بين الشركات غير المالية والتأمينية والمالية. ويقارن جدول البيانات الثاني في المصنف BRMch10-Markov.xlsx نتائج معدلات التخلف لثلاث سنوات والتي نتجت عن نموذج ماركوف المقتصر على الشركات غير المالية والمعدلات الملاحظة بالفعل، وتظهر النتائج في الشكل 10-5 ويبدو أن تنبؤات ماركوف هي أكثر دقة قليلاً، ولكن لا تزال تنطوي على أخطاء كبيرة؛ على سبيل المثال، نموذج ماركوف يتنبأ بمعدل التخلف لمدة ثلاث سنوات بدءاً من BB بنسبة 2.8٪ في حين أن الرقم الفعلي الذي لوحظ هو 4.7٪. لاحظ أننا لم ندرج في هذا التحليل أي اعتراف ببيان التوقعات الذي يرافق التصنيف. أحد التفسيرات للمعدلات المرتفعة نسبياً للتخلف عن السداد (التي تم التنبؤ بها من خلال تحليل سلسلة ماركوف) هو أن الشركات التي تم تخفيض تصنيفاتها من المرجح أن تعطى توقعات سلبية (بمعنى آخر، لديهم مخاطر أكبر للتخلف عن السداد من الشركات الأخرى التي لها نفس تصنيف الدرجات).



الشكل 5-10: التوقعات الافتراضية لمدة ثلاث سنوات للشركات غير المالية مقارنة بالأرقام الفعلية المتوسطة.

3-10 الائتمان الاستهلاكي

سوف نركز على الائتمان الاستهلاكي في ما تبقى من هذا الفصل. وهنا يتم تصنيف الفرد بدلا من الشركة. وكان سبب ظهور أول تطبيقات واسعة النطاق للطرق المؤتمتة لتقييم الائتمان هو بسبب طفرة بطاقات الائتمان الذي حدثت في الستينات والسبعينيات. وأدى ذلك إلى قيام المقرضين بالنظر إلى تاريخ الائتمان ومكاتب الائتمان بهدف تجميع البيانات من مختلف الجهات المقرضة حتى يتسنى للمستهلك الذي فشل في سداد بطاقة المتجر، على سبيل المثال، سوف تجد أن المعلومات أصبحت متاحة للمقرضين المحتملين الآخرين (ربما شركة تمويل السيارات).

وتعمل مكاتب الائتمان المختلفة (التي تسمى أحيانا الوكالات المرجعية الائتمانية) في بلدان مختلفة، حيث تقوم مكاتب الائتمان بتجميع معلومات الائتمان من مصادر مختلفة، ويمكنها تقديم تقرير ائتماني عن الفرد عند الطلب، وتصدر الملايين من هذه التقارير كل يوم في جميع أنحاء العالم (أكثر من مليوني يوميا في الولايات المتحدة وحدها). وتعد العملية ببساطة عبارة عن استجواب آلي لقاعدة البيانات. وتختلف البيانات التي تحتفظ بها مكاتب الائتمان

من بلد إلى أخرى وتتأثر بقوانين حماية البيانات. ويتم الاحتفاظ بكمية هائلة من المعلومات في الولايات المتحدة ، في حين أنها تقتصر في بعض البلدان الأوروبية على المعلومات المتاحة للجمهور بشكل رئيسي (على سبيل المثال، سجلات المحكمة للإفلاس). وعادة ما يبقى الدين في السجل فقط إلى أن يتم تسديده، أو حتى انقضاء مهلة محددة (ربما 10 سنوات). وفي العديد من البلدان، يحق للمستهلكين الحصول على نسخة مجانية من سجل الائتمان الخاص بهم.

وتعد أحد التقنيات المستخدمة على نطاق واسع هي دراسة المتقدمين للحصول على القروض ومحاولة الحكم على أساس خصائصهم ومدى احتمال أن يتخلفوا عن السداد. إن مقياس التخلف عن السداد الذي يتم استخدامه عادةً هو احتمال أن يتأخر المتقدم عن السداد لمدة 90 يوماً في غضون الأثنى عشر شهراً المقبلين. ومع ذلك، يعد هذا الإجراء غير مهم لأنه في نهاية المطاف يتم تقييم الأفراد ويتم رفض الأفراد الأقل جاذبية (أي الأكثر احتمالاً للتخلف عن السداد) أو تحويلهم إلى نوع مختلف من قروض الائتمان. وتستخدم طريقة مباشرة لتسجيل الائتمان، ويهتم المقرض بما إذا كان سيتم منح الائتمان للفرد، ومن أجل اتخاذ هذا القرار يتم التحقق من عدد من المتغيرات (مثل عدد بطاقات الائتمان التي يتم الاحتفاظ بها، وما إذا كان الفرد مستأجر لمنزله أم مالك) وتستخدم هذه المتغيرات لإعطاء "درجة"، وتستخدم هذه الدرجة أو التقييم للتنبؤ باحتمال تخلف الفرد عن دفع القرض. ويتم أخذ التقييمات من وثيقة التقييم التي تتضمن مكونات التقييم لمختلف الصفات التي يمتلكها الفرد. على سبيل المثال، حقيقة أن مقدم طلب الائتمان قد عاش في نفس العنوان لأكثر من خمس سنوات قد تكون قيمتها 15 نقطة. ويستند تطوير وثيقة التقييم على تاريخ الائتمان لآلاف الأشخاص الآخرين. وإذا كنت مهتما بنتائج التقييم الخاص بك، يمكنك إلقاء نظرة على الموقع: www.myfico.com/ficocreditscoreestimator.

وعادة ما تسمى درجة الائتمان في الولايات المتحدة بـ "تقييم فيكو" (FICO) وفي المملكة المتحدة، هناك موقع آخر على شبكة الإنترنت هو www.checkmyfile.com من خلاله تتمكن من تقييم درجة الائتمان. (والموقع الذي يعادله في أستراليا هو

(checkmyfile.com.au). ولم يتم الكشف عن أساليب التقييم بالضبط، ولكن هناك بعض المعلومات المتاحة (على سبيل المثال، 35٪ من نتيجة فيكو ترتبط بتاريخ الدفع). والهدف بالنسبة للمقرض هو ببساطة اتخاذ هذا القرار بأكبر قدر ممكن من الدقة.

وسوف يتم النظر في أي معلومات يمكن استخدامها قانونياً والتي لها تأثير على الجدارة الائتمانية للفرد. ما الذي يعد غير قانوني؟ ولا يجوز التمييز على أساس العرق أو الجنس أو النوع أو الدين، ولذلك لا يمكن طرح هذه الأسئلة. ومع ذلك، فإنه من الجيد النظر في الرمز البريدي للفرد عند تنفيذ الاختيار. وتعد القواعد المتعلقة بالسن والحالة الاجتماعية أكثر تعقيداً وتختلف في البلدان المختلفة. ففي الولايات المتحدة لا يمكن لمصدري البطاقات رفض الائتمان أو تقديم شروط أقل موثقة على أساس الحالة الاجتماعية.

10-3-1 الاحتمالية، الاحتمالات وتسجيل الاحتمالات

بالنسبة لنوع معين من الأفراد يمكننا استخدام البيانات السابقة للتنبؤ بما إذا كانوا أشخاص جيدة أم لا، أي إذا كانوا سوف يسددون القرض. كتب P_i لهذا الاحتمال لفرد من النوع i . والبديل هو النظر في احتمالات كونها جيدة بدلاً من كونها سيئة. هذا قد يكون مألوفاً من سياق الرهان: إذا قلنا أن احتمالات فوز الحصان هي 1-2، فإننا نعني أن احتمالية فوز الحصان هي ضعف احتمالية عدم فوزه. الاحتمالات o_i هي ببساطة احتمال كونها جيدة مقسومة على احتمال كونها سيئة، أي

$$o_i = \frac{P_i}{1 - P_i}.$$

احتمالية كونها جيدة تتراوح بين 0 و 1. ولكن احتمالات كونها جيدة يمكن أن تختلف من 0 إلى أي قيمة إيجابية. ومن المفيد أيضاً أن ننظر إلى لوجستية الاحتمالات.

$$\log(o_i) = \log\left(\frac{P_i}{1 - P_i}\right).$$

هذه هي اللوغاريتمات الطبيعية التي اتخذت لقاعدة e ويمكن للوغاريتمية الاحتمالات أن تأخذ أي قيمة، سواء إيجابية وسلبية. لاحظ أن كل من الاحتمالات والاحتمالات اللوغاريتمية

يزيدون من دالات الاحتمال. لنفترض أننا نفكر في منح الائتمان إلى فرد. من خلال القيام بذلك سوف نحقق ربحاً، ربما من الفائدة التي نتحملها أو ربما لأننا نجني ربحاً من منتج لن يتم بيعه إلا إذا قدمنا الائتمان. ومع ذلك، هناك احتمالية حدوث خسارة والتي عادة تكون أكبر بكثير من الربح التي سيحدث إذا كان الفرد لا يسدد الدين. لنفترض أننا نرمز للخسارة بـ L و R للربح، ومن ثم تكون القيمة المتوقعة من القرض بالنسبة لنا هي:

$$p_i R - (1 - p_i) L.$$

هذا يعد أمر إيجابي (بمعنى أننا يجب أن نمضي قدماً في القرض) إذا

$$p_i > \frac{L}{L + R},$$

أو ما يعادلها إذا كانت $o_i < (L/R)$ ، وهو شرط يمكن أن يكون مكتوباً فيما يتعلق بالاحتمالات اللوغاريتمية.

$$\log(o_i) > \log\left(\frac{L}{R}\right).$$

استناداً إلى جميع البيانات التي لدينا، يمكننا تقدير الاحتمالات للفرد المختار بشكل تعسفي. ونقوم بتعريف احتمالات السكان كما يلي:

$$o_{\text{Pop}} = \frac{\text{Pr}(G)}{\text{Pr}(B)}.$$

هذه هي احتمالات أن يكون الفرد جيداً إذا تم اختياره عشوائياً من بين جميع السكان. ونحن نقدر الاحتمالات $\text{Pr}(G)$ و $\text{Pr}(B)$ ببساطة من خلال النظر في النسب الجيدة والسيئة لجميع السكان الذين لدينا بياناتهم.

ونبدأ الآن مناقشة مثال سنواصل استخدامه لتوضيح مناقشتنا في بقية هذا الفصل.

مثال 1-10: بنك سيدني

لنفترض أن بنك سيدني لديه 1200 عميل تم إقراضهم المال على أساس قصير الأجل. وقد استمر معظمهم في تسديد القروض: هؤلاء يسمون "جيدة" أو G ، ولم

يستمر بعضهم بالتسديد، ويصنف أي شخص يتخلف عن التسديد لأكثر من 90 يوما بـ "سيء" أو B إلى جانب البيانات المتعلقة بالعمر في وقت اتفاقية القرض، حيث يصنف العمر كما يلي 30، 30-39، 40-49 وأكثر من 50 عام، ويحتفظ بنك سيدني بالبيانات عما إذا كان الأفراد هم ملاك أو مستأجرين، أم لديهم تصنيف آخر فيما يتعلق بمنزلهم، وأيضا ما إذا كان لديهم بطاقة ائتمان أم لا. يتم توضيح البيانات الخاصة بهذا المثال في جدول البيانات BRMch10-BankofSydney.xlsx.

ويمكن تقديم بيانات بنك سيدني بطرق مختلفة. ويبين الجدول 2-10 عدد الأفراد الجيدة والسيئة في كل فئة من الفئات الفرعية التي تم الحصول عليها من "حالة بطاقة الائتمان (2) 'x' حالة السكن (3) 'x' الفئة العمرية (4) 'x'". في هذه البيانات عدد الأفراد الجيدة هو 1070 وعدد الأفراد السيئة هو 130. وهكذا، بالنسبة لبنك سيدني فإن احتمالات السكان هي $Opop = 1070/130 = 8.23$. وإذا نظرنا إلى فئة واحدة من الأفراد نجد أن الاحتمالات مختلفة. على سبيل المثال، نظرا لأن الفرد يقل عمره عن 30 عاما، يظهر العمود الأول في بيانات بنك سيدني أن الاحتمالات هي

$$\frac{59 + 47 + 63 + 19 + 18 + 12}{5 + 10 + 6 + 2 + 9 + 2} = \frac{218}{34} = 6.412.$$

لذلك، من المرجح أن يكون المقترضون في هذه الفئة أكثر سوءا من السكان ككل. ويمكننا أيضا إجراء حسابات احتمالات لكل فئة من الفئات الفرعية في الجدول 2-10. وهذا يعطي الأرقام المبينة في الجدول 3-10.

الآن نريد أن نركز على نوع معين من الأفراد، على سبيل المثال، فرد من الفئة A. وتعطى احتمالات الفئة (أ) من خلال:

$$o_A = \frac{\Pr(G | A)}{\Pr(B | A)}.$$

ويمكن تقدير هذه الاحتمالات من خلال النظر في البيانات، ولكن الآن نركز فقط على الأفراد في الفئة A: نحن ببساطة ننظر في النسب الجيدة والسيئة لهذه المجموعة الفرعية لجميع السكان. وترتبط احتمالات فئة A باحتمالات السكان ككل من خلال شيء يسمى

احتمالات المعلومات 1_A ، للفئة A والتي تعرف بأنها:

$$I_A = \frac{\Pr(A | G)}{\Pr(A | B)}.$$

الجدول 2-10: بيانات عن بنك سيدني: عدد الأفراد الجيدين والسيئين

	Under 30	30-39	40-49	Over 50
مالك بكارث ائتماني	$G = 59$ $B = 5$	$G = 111$ $B = 9$	$G = 118$ $B = 5$	$G = 232$ $B = 11$
مستأجر بكارث ائتماني	$G = 47$ $B = 10$	$G = 16$ $B = 5$	$G = 22$ $B = 4$	$G = 64$ $B = 18$
آخر بكارث ائتماني	$G = 63$ $B = 6$	$G = 21$ $B = 2$	$G = 16$ $B = 3$	$G = 91$ $B = 5$
مالك بدون كارث ائتماني	$G = 19$ $B = 2$	$G = 13$ $B = 3$	$G = 44$ $B = 4$	$G = 31$ $B = 2$
مستأجر بدون كارث ائتماني	$G = 18$ $B = 9$	$G = 14$ $B = 10$	$G = 5$ $B = 1$	$G = 10$ $B = 3$
آخر بدون كارث ائتماني	$G = 12$ $B = 2$	$G = 26$ $B = 8$	$G = 6$ $B = 2$	$G = 12$ $B = 1$

الجدول 3-10: بيانات عن بنك سيدني: الاحتمالات.

	30 تحت	30-39	40-49	50 فوق
مالك بكارث ائتماني	11.80	12.33	23.60	21.09
مستأجر بكارث ائتماني	4.70	3.20	5.50	3.56
آخر بكارث ائتماني	10.50	10.50	5.33	18.20
مالك بدون كارث ائتماني	9.50	4.33	11.00	15.50
مستأجر بدون كارث ائتماني	2.00	1.40	5.00	3.33
آخر بدون كارث ائتماني	6.00	3.25	3.00	12.00

وبناء على مبرهنة بايز $\Pr(G|A) = \Pr(A|G)\Pr(G)/\Pr(A)$ وبالمثل بالنسبة لـ $\Pr(B|A)$

ومن ثم يمكننا إعادة كتابة الاحتمالات للفئة (A) على النحو التالي:

$$o_A = \frac{\Pr(G | A)}{\Pr(B | A)} = \frac{\Pr(A | G)}{\Pr(A | B)} \times \frac{\Pr(G)}{\Pr(B)} = I_A \times o_{\text{Pop}}.$$

هنا قمنا بإلغاء المصطلحين $\Pr(A)$ للحصول على الصيغة. لذلك، لقد أظهرنا أن تضاعف احتمالات المعلومات لفئة معينة من خلال احتمالات السكان يعطي احتمالات للفئة. توفر احتمالات المعلومات نوع من التعديل لاحتمالات السكان للوصول إلى احتمالات في فئة معينة. إن ترجيح الأدلة (WoE) لفئة هو مجرد اللوغاريتم الطبيعي لاحتمالات المعلومات لهذه الفئة:

$$w_A = \log(I_A) = \log\left(\frac{\Pr(A | G)}{\Pr(A | B)}\right),$$

ومن الطبيعي أن نستخدم هذا التعريف لأنه يتيح لنا العثور على الاحتمالات اللوغاريتمية لفئة معينة ببساطة عن طريق إضافة ترجيحات الأدلة والاحتمالات اللوغاريتمية للسكان.

$$\begin{aligned}\log(o_A) &= \log(I_A \times o_{\text{Pop}}) = \log(I_A) + \log(o_{\text{Pop}}) \\ &= w_A + \log(o_{\text{Pop}}).\end{aligned}$$

مثال 10-1 (متابعة) بنك سيدني

وسوف نستمر في النظر إلى الأفراد الذين تقل أعمارهم عن 30 عاماً، وهو ما يقابل العمود الأول في الجدول 10-2. وكما رأينا من قبل، فإن احتمالات هذه الفئة هي $6.412 = 34/218$. ويمكننا أيضاً حساب احتمالات المعلومات لهذه الفئة.

وتجدر الإشارة إلى أنه من بين 1070 شخصاً جيداً، يوجد 218 شخص في هذه الشريحة العمرية، ومن أصل 130 شخصاً سيئاً، هناك 34 في هذه الفئة العمرية. بعبارة أخرى:

$$\Pr(\text{age} < 30 | G) = 218/1070,$$

$$\Pr(\text{age} < 30 | B) = 34/130.$$

وبالتالي، فإن احتمالات المعلومات للفئة العمرية أقل من 30 هي

$$I_{\text{age} < 30} = \frac{218/1070}{34/130} = \frac{218}{34} \times \frac{130}{1070} = 0.779.$$

ويمكننا حساب ترجيحات الأدلة لـ "سن أقل من 30" كما يلي

$$w_{\text{age} < 30} = \log\left(\frac{218}{34} \times \frac{130}{1070}\right) = \log(0.779) = -0.2497.$$

وتعني القواعد اللوغاريتمية أن الاحتمالات اللوغاريتمية لهذه الفئة هي

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{218}{34}\right) &= \log\left(\frac{218}{34} \times \frac{130}{1070}\right) + \log\left(\frac{1070}{130}\right) \\ &= w_{\text{age} < 30} + \log(o_{\text{Pop}}) \\ &= -0.2497 + 2.1079 = 1.8582.\end{aligned}$$

ولقد أجرينا التجربة السابقة على أفراد مطابقة تماماً لهذه الشروط، فمن المنطقي محاولة إجراء اقتطاعات من ما لاحظناه في الفئات الأكبر التي ينتمي إليها هذا الشخص. اتضح أنه إذا كان السلوك مستقل تحت سمات مختلفة، فيمكن جمع ترجيحات الأدلة معاً لإيجاد الاحتمالات اللوغاريتمية للفرد الذي لديه عدد من الصفات المختلفة، ولمعرفة سبب صحة ذلك، ضع في اعتبارك فرداً له سمتان A_1 و A_2 نود أن نحسب احتمالات أن يكون هذا الفرد جيد، ونريد إيجاد $\Pr(G | A_1, A_2) / \Pr(B | A_1, A_2)$ ونحن نعلم من خلال قاعدة بايز أنه،

$$\Pr(G | A_1, A_2) = \Pr(A_1, A_2 | G) \frac{\Pr(G)}{\Pr(A_1, A_2)}.$$

إذا كان A_1 و A_2 مستقلين (بحيث لا نتجربنا معلومات سمة واحدة أي شيء عن السمة الأخرى)، عندئذ يكون لدينا $\Pr(A_1, A_2 | B) = \Pr(A_1 | B) \times \Pr(A_2 | B)$ و $\Pr(A_1, A_2 | G) = \Pr(A_1 | G) \times \Pr(A_2 | G)$ ومن ثم تكون احتمالات الفرد في الفئة A_1 و A_2 هي

$$\begin{aligned}\frac{\Pr(G | A_1, A_2)}{\Pr(B | A_1, A_2)} &= \frac{\Pr(A_1, A_2 | G) \Pr(G)}{\Pr(A_1, A_2 | B) \Pr(B)} \\ &= \frac{\Pr(A_1 | G)}{\Pr(A_1 | B)} \times \frac{\Pr(A_2 | G)}{\Pr(A_2 | B)} \times \frac{\Pr(G)}{\Pr(B)}.\end{aligned}$$

ويمكن توسيع نطاق نفس التعبير إلى أي عدد من المصطلحات. وبذلك تكون الاحتمالات اللوغاريتمية لـ $A_1, A_2, \dots, A_n$ هي

$$\log\left(\frac{\Pr(G | A_1, A_2, \dots, A_n)}{\Pr(B | A_1, A_2, \dots, A_n)}\right) = w_1 + w_2 + \dots + w_n + \log(o_{\text{Pop}})$$

حيث تمثل o_{Pop} احتمالات السكان وتمثل w_i ترجيحات الأدلة للسمة A_i .

وهذا يقودنا إلى فكرة وثيقة التقييم إذا كنا نعرف ترجيحات الأدلة لكل فئة رئيسية، فبالنسبة للفرد الذي يقع عند تقاطع عدد من فئات مختلفة، عندئذ يمكننا إضافة أرقام w_j ذات الصلة. وأيضاً إضافة مصطلح ثابت معطى من قبل لوغاريتم احتمالات السكان للحصول على التنبؤ للاحتتمالات اللوغاريتمية. وهذا ما يسمى وثيقة تقييم بايز وبشكل عام، فإن وثيقة التقييم لديها بنية بسيطة جداً: أنها تربط كل فئة بدرجة معينة ومن ثم تجمع درجات الفرد معاً للحصول على النتيجة النهائية. الآن نعود إلى مثال بنك سيدني.

مثال 1-10 (متابعة) بنك سيدني

لقد رأينا بالفعل أن $w_{\text{age} < 30} = -0.2497$. ويمكننا حساب ترجيحات الأدلة الأخرى بنفس الطريقة. على سبيل المثال، هناك 196 شخص جيد بين المستأجرين، و60 شخص سيئ، لذلك:

$$w_{\text{renter}} = \log \left(\frac{196}{60} \times \frac{130}{1070} \right) = \log(0.3969) = -0.9241.$$

لدينا أيضاً مصطلح ثابت من $\log(o_{\text{pop}}) = 2.1079$ وتعطينا هذه القيم w وثيقة التقييم ولكن من المناسب أن نقوم بضرب كل الأرقام في 100 وأخذ أقرب عدد صحيح. وهذا يعطينا وثيقة التقييم الواردة في الجدول 4-10. باستخدام هذا نرى أنه، على سبيل المثال، درجة للفرد الذي يملك منزلاً وبطاقة الائتمان وعمره 42 هي $326 = 211 + 23 + 62 + 30$ ، في حين أن درجة الشخص البالغ من العمر 28 عاماً والذي يعيش في منزل وليس لديه بطاقة الائتمان هي $-128 = 211 + 61 - 3 + 25$. ويمكننا التحقق من مدى فعالية هذا باستخدام وثيقة التقييم للتنبؤ باحتمالات مختلف فئات الأفراد. وترد الاحتمالات اللوغاريتمية الفعلية للبيانات في الجدول 5-10.

في مثال صاحب المنزل البالغ من العمر 42 عاماً ولديه بطاقة ائتمان، كانت درجته في وثيقة التقييم هي 326، لذلك الاحتمالات اللوغاريتمية المتوقعة هي 3.26، ومن ثم، التنبؤ لاحتمالات هذا الفرد بأن تكون جيدة هي:

$$e^{3.26} = 26.05.$$

الجدول 4-10: وثيقة التقييم المستمدة من ترجيح الأدلة.

السمات	الدرجة
<30 السن	-25
30-39 السن	-42
40-49 السن	30
≥50 السن	29
يملك منزل	62
يستأجر منزل	-92
آخر	3
لديه بطاقة ائتمان	23
ليس لديه بطاقة ائتمان	-61
ثابت	211

الجدول 5-10: بيانات بنك سيدني: الاحتمالات اللوغاريتمية.

	30 تحت	30-39	40-49	50 فوق
مالك بطاقة ائتمان	2.47	2.51	3.16	3.05
مستأجر بطاقة ائتمان	1.55	1.16	1.70	1.27
آخر بطاقة ائتمان	2.35	2.35	1.67	2.90
مالك بدون بطاقة ائتمان	2.25	1.47	2.40	2.74
مستأجر بدون بطاقة ائتمان	0.69	0.34	1.61	1.20
آخر بدون بطاقة ائتمان	1.79	1.18	1.10	2.48

في هذه الفئة هناك 118 شخصا جيدا و5 أشخاص سيئة، وبالتالي فإن الاحتمالات الفعلية هي 23.6 إلى 1 وبنفس الطريقة، يمكننا أن ننظر إلى احتمالات الشخص البالغ من العمر 28 عاما ويعيش في منزل وليس لديه بطاقة ائتمان بأنها "جيدة". وتكون النتيجة هي 128، حيث تتفق مع الاحتمالات اللوغاريتمية 1.28، مما يعني أنه من المتوقع أن تكون الاحتمالات:

$$e^{1.28} = 3.60.$$

والنتائج الفعلية في هذه الفئة هي 12 فردا جيدين و2 من الأفراد السيئين، مع وجود احتمالات من 6 إلى 1. وبالتالي، فإن التنبؤ في الحالة الأولى معقول، ولكن في الحالة الثانية

يكون التنبؤ أقل إرضاءً، ومع ذلك، حتى في الحالة الثانية فإن الأمور ليست سيئة للغاية، لأنه إذا كان هناك فرد واحد فقط من الأفراد الحاليين مصنف على أنه سيء، فإن هذا من شأنه أن يحول الاحتمالات إلى 4 إلى 1، وهو قريب من التقييم 3.60.

4-10 الانحدار اللوجستي

وهناك طريقة أفضل للتنبؤ باحتمالات الأفراد من خلال استخدام الانحدار اللوجستي، والذي هو موضوع هذا القسم. وتعد هذه هي الطريقة الأكثر شيوعاً لعمل وثيقة التقييم. ولكننا نبدأ بالمسألة الأساسية المتعلقة بكيفية التنبؤ بالاحتمالات. ويتوقع الانحدار العادي متغير تابع y على أساس مجموعة من المتغيرات التفسيرية $2, \dots, m$ ويمكن كتابة الشكل الخطي لهذا التنبؤ هكذا:

$$y = \beta_0 + \sum \beta_i x_i \\ = \beta \cdot x$$

حيث نستخدم حرف بارز للإشارة إلى المتجه: $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ ، $x = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ ، ونقيم $x_0 = 1$ ، ثم نقيم $\beta \cdot x$ من خلال النظر في البيانات السابقة، ولا يمكننا استخدام نفس النهج عند التعامل مع الاحتمالات، لأننا نريد أن نضمن أن التنبؤات y كلها بين 0 و 1.

النهج اللوجستي هو استخدام تحول غير خطي للحصول على التنبؤ الاحتمالي p من قيم x_i :

$$p = \frac{e^{\beta \cdot x}}{1 + e^{\beta \cdot x}} \quad (3-10)$$

إذا أصبحت قيمة $\beta \cdot x$ كبيرة جداً، إذن فالنهج P تساوي 1، إذا كانت $\beta \cdot x = 0$ ، إذن $p = 1/2$ ، وإذا كانت $\beta \cdot x$ هي رقم سلبى كبير، إذن فالنهج 0، ويبين الشكل 6-10 ما تبدو عليه هذه الدالة (وهناك وظائف أخرى قد نختارها والتي من شأنها أن تنتج نتائج مماثلة). وميزة الدالة اللوجستية هي أنه تناسب تعريفنا السابق للاحتمالات اللوغاريتمية بشكل جيد. حيث لدينا:

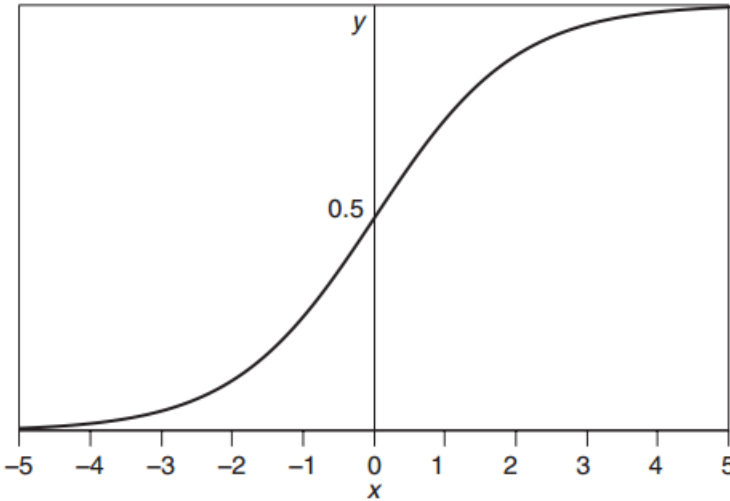
$$1 - p = 1 - \frac{e^{\beta \cdot x}}{1 + e^{\beta \cdot x}} = \frac{1}{1 + e^{\beta \cdot x}}.$$

إذن

$$\text{odds} = \frac{p}{1-p} = \frac{e^{\beta \cdot x}}{1 + e^{\beta \cdot x}} \frac{1 + e^{\beta \cdot x}}{1} = e^{\beta \cdot x},$$

وبالتالي

$$\log_e \left(\frac{p}{1-p} \right) = \log_e(\text{odds}) = \log_e(e^{\beta \cdot x}) = \beta \cdot x. \quad (4-10)$$



الشكل 6-10: رسم بياني للدالة اللوجستية $y = e^x / (1 + e^x)$

وبالتالي، إذا كانت الاحتمالات الفعلية للجد أو السيء تعطى بواسطة نموذج لوجستي مستمد من دالة خطية $\beta \cdot x$ ، فإن الاحتمالات اللوغاريتمية سوف تكون دالة خطية للملاحظات x_i

كيف يمكننا تقدير القيم $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ ؟ ففي الانحدار العادي نحاول تقليل مصطلح الخطأ من خلال النظر في التنبؤ ضد ما حدث فعلاً. ولكن بالنسبة لنموذجنا اللوجستي، فإن التنبؤ هو احتمال وما حدث فعلاً قد يكون نتيجة جيدة أو نتيجة سيئة (والتي يمكن تكون إما 1 أو 0). هناك خياران: نهج بسيط باستخدام انحدار المربعات الصغرى العادية

أو أسلوب الانحدار اللوجستي الأكثر تطوراً. وستعامل مع النهج الأبسط أولاً.

يعمل انحدار المربعات الصغرى مع المعادلة (4-10) بشكل مباشر. ونظراً لأن الاحتمالات اللوغاريتمية هي مزيج خطي من المتغيرات التفسيرية، فيمكننا تقييم المعاملات مباشرة باستخدام انحدار المربعات الصغرى العادية استناداً إلى الاحتمالات اللوغاريتمية لكل فئة. وتعمل هذه الطريقة تعمل بشكل جيد في الممارسة العملية، وميزتها أنه يمكن استخدامها دون استخدام أداة تحليل البيانات التي تتضمن عنصر الانحدار اللوجستي (على سبيل المثال، يمكننا استخدام انحدار المربعات الصغرى من خلال تطبيق "تحليل البيانات" الإضافية التي توجد في إكسيل). نحن بحاجة إلى توفير المزيد من المعلومات حول صيغة المتغيرات التفسيرية.

ومن الناحية العملية، فإن أهم حالة هي عندما تكون المتغيرات التوضيحية فئوية. وفي بعض الأحيان ينتج هذا من طبيعة البيانات (على سبيل المثال، هل الفرد مستأجر لمنزله أم لا؟). ولكن حتى عندما يكون هذا غير صحيح، فإن معظم درجات الائتمان تعطي البيانات الفئوية من خلال تقسيم الأفراد إلى فئات. والمثال الأكثر وضوحاً هو متغير مثل العمر: وهذا يعامل بشكل طبيعي كمتغير مستمر، ولكن تحديد النقاط الائتمانية عادة ما يحدد بعض الفئات العمرية وتخصيص الأفراد إلى واحد فقط من هذه الفئات. وينطبق نفس الشيء على مستويات الدخل. ففي هذه الحالة نستخدم متغيرات وهمية لكل فئة.

لذلك، على سبيل المثال، إذا كنا نستخدم الأقواس العمرية: (A) أقل من 30، (B) من 30 إلى 39، (C) 40 إلى 49، (D) 50 أو أكثر، فيكون الشخص البالغ من العمر 33 عاماً لديه $x_{ageA} = 0, x_{ageB} = 1, x_{ageC} = 0, x_{ageD} = 0$ حيث أن $x_{ageA} = 1 - x_{ageB} - x_{ageC} - x_{ageD}$ ، وتؤدي هذه المتغيرات الفئوية تلقائياً إلى مشكلة الخطية المتداخلة في الانحدار. وبعبارة أخرى، لا توجد معلومات إضافية في الفئة الأخيرة.

ويعتد أفضل نهج هو تنفيذ الانحدار دون ظهور واحدة من الفئات. لذلك، إذا تركنا x_{ageA} في هذا المخطط، فسوف يتم تسجيل الفرد البالغ 25 عاماً كالتالي $x_{ageB} = x_{ageC} = x_{ageD} = 0$. وبالطبع هذا هو الشيء الطبيعي الذي يجب القيام به عندما يكون للمتغير

خيارين فقط. ومع مثل هذا التصنيف من المتغيرات التفسيرية من الطبيعي أن يكون هناك عدد من الأفراد في كل من الخلايا الممكنة أي لكل مجموعة ممكنة من الفئات. فإن مجموعة الأفراد في خانة معينة والذين يكون بعضهم جيد وبعضهم سيئ، تمكننا من حساب قيمة الاحتمالات اللوغاريتمية لمجموعة من المتغيرات الوهمية المقابلة لتلك الخانة. وتصبح قيم الاحتمالات اللوغاريتمية هي المتغير التابع في تحليل الانحدار.

و هناك نقطتين ينبغي أخذهما في الحسبان عند استخدام هذا النهج:

- تعطي هذه الطريقة احتمال متساو لجميع الفئات بغض النظر عن عدد الأفراد المعنيين. في الواقع، يجب أن نكون أكثر قلقا حول الأخطاء في تنبؤات الاحتمالات اللوغاريتمية عندما يكون هناك عدد كبير من الأفراد في فئة واحدة.
- سوف يفشل نهج الانحدار المربعات الصغرى إذا لم يتم تعريف الاحتمالات اللوغاريتمية لفئة محددة حيث لن يوجد أفراد "سيئون" في تلك الفئة. في حالة ما إذا أصبحت الاحتمالات اللوغاريتمية لانهائية فإن الإجراء الموصى به هو إضافة 0.5 إلى كل من الأرقام الجيدة والسيئة للحصول على قيمة الاحتمالات اللوغاريتمية المعدلة. لذلك، على سبيل المثال، إذا كان لدى مجموعة معينة 10 أفراد فقط، كل منهم "جيد"، قد نستبدل قيمة الاحتمالات اللوغاريتمية لانهائية بـ $\log(10.5/0.5)=3.0445$ (لاحظ أن هذا لا يزال أعلى بكثير من قيمة الاحتمالات اللوغاريتمية إذا كان 9 من أصل 10 أفراد "جيدون"، ويكون $\log(9/1)=2.1972$).

الآن ننتقل إلى نهج أكثر تطورا (موصي به) من الانحدار اللوجستي. والفكرة هنا هي استخدام تقييم أقصى احتمالية للمعاملات β . وبعبارة أخرى، فإننا ننظر إلى بيانات النتائج الفردية الجيدة والسيئة ونفترض أن احتمال الحصول على النتائج الجيدة سيكون من خلال المعادلة (3-10). ومن ثم نريد أن نختار قيم β التي تزيد من احتمال مجموعة الملاحظات الخاصة بنا (جميعها إما 0 أو 1). ولنرى كيف يتم عمل ذلك، نفترض أن هناك فردين نريد تقديم ملاحظتين لهما y_1 و y_2 . لنفترض أن لمجموعة معينة من القيم β نحسب احتمال أن $1=y_1$ (جيد) وتحويلها إلى p_1 ، وبنفس الطريقة، نحسب احتمال أن $1=y_2$

وتحويلها إلى p_2 . ومن هنا يمكننا حساب احتمالية ملاحظة قيم y_1 و y_2 التي لاحظناها. وهذا ما يسمى الاحتمال المرتبط بقيم β . على سبيل المثال، يتم الحصول على احتمالية ملاحظة $y_1 = 1$ و $y_2 = 0$ من خلال $p_1(1-p_2)$. إذا كانت القيم x المرتبطة بالملاحظة الأولى هي المتجه $x^{(1)}$ ، وللمراقبة الثانية المتجه $x^{(2)}$ ، لدينا:

$$p_1(1 - p_2) = \frac{e^{\beta \cdot x^{(1)}}}{1 + e^{\beta \cdot x^{(1)}}} \left(1 - \frac{e^{\beta \cdot x^{(2)}}}{1 + e^{\beta \cdot x^{(2)}}} \right). \quad (5-10)$$

وتتمثل المرحلة التالية في تقدير أقصى احتمال للمتجه β عن طريق اختيار القيمة التي تزيد من هذا التعبير. والفكرة هي أن الملاحظات التي أجريناها تجعل بعض القيم β غير محتملة.

وبشكل عام عادةً ما يكون لدينا العديد من الملاحظات n وليس فقط اثنين، ولكن المبدأ هو نفسه: سيكون هناك تعبير طويل لمنتج ينطوي على قيمة واحدة β وقيم مختلفة لمتغيرات الفئة x . وينطوي الانحدار اللوجستي على تعظيم هذا التعبير لجميع الخيارات الممكنة لـ β . وسنقدم المزيد من التفاصيل حول هذا الموضوع في القسم التالي. ولكن في كل الحالات يتطلب الانحدار اللوجستي استخدام البرمجيات لأغراض خاصة. وقد تم الحصول على الانحدار اللوجستي لمثال بنك سيدني أدناه باستخدام البرمجيات الحرة "غريتيل".

إن جمال الانحدار اللوجستي هو أنه يعمل بشكل جيد عندما يكون هناك العديد من أنواع السمات والخصائص بدلاً من وجود ثلاث سمات فقط كما في مثال بنك سيدني (بطاقة الائتمان، نوع السكن، شريحة العمر). إذا قمنا بقياس الأفراد من خلال إجاباتهم، على سبيل المثال، 10 أسئلة مختلفة، فحتى إذا كانت الأسئلة بسيطة (نعم أو لا) سوف ينتهي بنا المطاف بتجميع أكثر من 1000 خانة. وهذا يعني أنه سيكون هناك العديد من الخانات التي لا يوجد بها أفراد وأيضاً العديد من الخانات حيث لا يوجد أفراد "سيئة". ولكن ما زلنا بحاجة إلى طريقة لتقييم مخاطر الائتمان لعميل جديد قد ينتمي إلى واحدة من الخانات حيث أننا ليس لدينا العديد من العملاء السابقين للمقارنة بينهم.

مثال 10-1 (متابعة) بنك سيدني

بالنسبة لمثال بنك سيدني، فإن الانحدار اللوجستي يأخذ في الاعتبار الملاحظات الفردية التي يقدر عددها 1200 وتقييم قيم β المرتبطة بالمتغيرات الستة: x_{own} = "المالك"، x_{rent} = "المستأجر"، x_{cc} = "حامل بطاقة الائتمان"، x_{ageB} = "العمر من 30 إلى 39"، x_{ageC} = "من 40 إلى 49"، x_{ageD} = "أكثر من 50". أما المتغيرات الثلاثة الأخرى هي: "أخرى"، "بدون بطاقة ائتمان"، "العمر تحت 30" وتعتبر هذه المتغيرات مجموعات خطية من المتغيرات التفسيرية الأخرى ولا تضيف أي شيء إلى الانحدار، لذلك يتم استبعادها. وهكذا، على سبيل المثال، فإن الأفراد في أعلى الخانة اليسرى من الجدول 10-2 لديهم $x_{own} = 1$ ، $x_{rent} = 0$ ، $x_{cc} = 1$ ، $x_{ageB} = 0$ ، $x_{ageC} = 0$ ، $x_{ageD} = 0$. وهكذا، فإن المنتج العددي لكل من هؤلاء الأفراد $\beta \cdot x = \beta_{cc} + \beta_{own}$ والتي تمثل أيضاً الاحتمالات اللوغاريتمية. الاحتمال المتوقع لكون الـ 64 شخصاً بأن يكونوا "جيدين" هو:

$$P = \frac{e^{\beta_{own} + \beta_{cc}}}{1 + e^{\beta_{own} + \beta_{cc}}}$$

هذه هي القيمة التي نحاول أن تتطابق مع القيم الفعلية من خلال الاختيار الصحيح للقيم β ، تم استخدام البيانات الواردة في جدول البيانات BRMch10-Bank of Sydney.xlsx (الورقة الثانية) لتفعيل الانحدار اللوجستي (باستخدام البرمجيات الحرة غريتيل). ويظهر جزء من المخرجات في الجدول 10-6. وهكذا، لدينا قيم المفردات على النحو التالي:

$$\begin{aligned}\beta_{cc} &= 0.629 \\ \beta_{own} &= 0.493 \\ \beta_{rent} &= -0.984 \\ \beta_{ageB} &= -0.370 \\ \beta_{ageC} &= 0.134 \\ \beta_{ageD} &= 0.204 \\ \beta_0 &= 1.723\end{aligned}$$

حيث β_0 هو الدالة الثابتة. وبالتالي، نحصل على تقييم أقصى احتمالية:

$$\log_e \left(\frac{p}{1-p} \right) = 1.723 + 0.629x_{cc} + 0.493x_{own} - 0.984x_{rent} - 0.370x_{ageB} + 0.134x_{ageC} + 0.204x_{ageD}. \quad (6-10)$$

الجدول 6-10: الناتج من الانحدار اللوجستي

	الدرجة	الخطأ القياسي
ثابت	1.72256	0.287793
بطاقة ائتمان	0.628808	0.211980
مالك	0.493278	0.261849
مستأجر	-0.983520	0.249570
السن من 30 إلى 39	-0.369558	0.271993
السن من 40 إلى 49	0.134251	0.319367
السن من 50 فيما فوق	0.204348	0.259001

يمكننا استخدام هذه القيم لإنتاج جدول الاحتمالات اللوغاريتمية لكل من الفئات الـ 24. ويظهر ذلك في الجدول 7-10، ويمكن مقارنته بالبيانات الواردة في الجدول 5-10. يمكننا أيضا مقارنة هذه النتائج مع ما يحدث إذا استخدمنا انحدار المربعات الصغرى، إذا فعلنا ذلك مع بيانات بنك سيدني، نحصل على:

$$\log_e \left(\frac{p}{1-p} \right) = 1.650 + 0.575x_{cc} + 0.527x_{own} - 0.788x_{rent} - 0.349x_{ageB} + 0.090x_{ageC} + 0.424x_{ageD}.$$

الجدول 7-10: بيانات بنك سيدني: التنبؤ بالاحتمالات اللوغاريتمية من الانحدار اللوجستي.

	30 تحت	30-39	40-49	50 فوق
مالك ببطاقة ائتمان	2.84	2.48	2.98	3.05
مستأجر ببطاقة ائتمان	1.37	1.00	1.50	1.57
آخر ببطاقة ائتمان	2.35	1.98	2.49	2.56
مالك بدون بطاقة ائتمان	2.22	1.85	2.35	2.42
مستأجر بدون بطاقة ائتمان	0.74	0.37	0.87	0.94
آخر بدون بطاقة ائتمان	1.72	1.35	1.86	1.93

وبالنسبة للفئات الفرعية التي يوجد فيها عدد كبير من الأفراد، فإننا نتوقع أن نرى تنبؤات الاحتمالات اللوغاريتمية من الانحدار اللوجستي أفضل من استخدام نهج المربعات الصغرى العادية. وينطبق ذلك على بيانات بنك سيدني، حيث أن نتيجة تنبؤات الاحتمالات اللوغاريتمية من الانحدار اللوجستي هي 3.05 للنوع الأكثر شيوعاً من العملاء (فوق الـ 50 عام ومالك المنزل وحامل بطاقة الائتمان)، في حين يعطي انحدار المربعات الصغرى البديلة تنبؤات الاحتمالات اللوغاريتمية:

$$1.650 + 0.575 + 0.527 + 0.424 = 3.18$$

وهي مرتفعة قليلاً.

* 1-4-10 مزيد من التفاصيل عن الانحدار اللوجستي

لقد رأينا في الملاحظتين Y_1 و Y_2 ومع احتمال أن $y_i = 1$ المعطى من P_i ، واحتمال أن $y_i = 0$ هو $p_i(1-p_i)$ ، يمكننا تعميم هذا التعبير على أي مجموعة من القيم لـ y_1 و y_2 من خلال الإشارة إلى أن الاحتمال يعطى من قبل:

$$(p_1)^{y_1} (1 - p_1)^{(1-y_1)} (p_2)^{y_2} (1 - p_2)^{(1-y_2)}.$$

وبشكل أعم، يمكننا أن نأخذ الملاحظات N ، $i=1, 2, \dots, n$ ، y_i (جميع y_i قيمتها 1 أو 0).

$$\prod_{i=1}^n (p_i)^{y_i} (1 - p_i)^{(1-y_i)}. \quad (7-10)$$

هذا هو احتمال الملاحظة 1، $y_2, \dots, y_n$ ، إذا كانت الاحتمالات $p_1, p_2, \dots, p_n$. إذا كانت تأتي من نموذج لوجستي، فإن:

$$p_i = \frac{e^{\beta \cdot \mathbf{x}^{(i)}}}{1 + e^{\beta \cdot \mathbf{x}^{(i)}}}, \quad (8-10)$$

حيث قمنا بكتابة $\mathbf{x}^{(i)} = (x_0^i, x_1^i, \dots, x_m^i)$ للمتغيرات المستقلة المرتبطة بهذه الملاحظة. لذا فإن مشكلة إيجاد تقدير أقصى احتمالية من مجموعة معينة من البيانات $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ يعادل إيجاد مجموعة من القيم β التي تعظم تعبير المنتج (7-10) حيث تعطى p_i بالمعادلة

(8-10). ولكن إذا أردنا تعظيم تعبير، فيمكننا أيضا تعظيم لوغاريتم هذا التعبير. لذلك، بدلا من تعظيم الاحتمال، نقوم بتعظيم احتمال اللوغاريتم.

$$L = \log \left(\prod_{i=1}^n (p_i)^{y_i} (1 - p_i)^{(1-y_i)} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i \log(p_i) + \sum_{i=1}^n (1 - y_i) \log(1 - p_i).$$

وبما أن قيم P_i تعطى بدالات لوجستية، فيمكن تبسيطها إلى حد كبير:

$$L = \sum_{i=1}^n y_i \log \left(\frac{e^{\beta \cdot x^i}}{1 + e^{\beta \cdot x^i}} \right) + \sum_{i=1}^n (1 - y_i) \log \left(\frac{1}{1 + e^{\beta \cdot x^i}} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i (\log(e^{\beta \cdot x^i}) - \log(1 + e^{\beta \cdot x^i})) - \sum_{i=1}^n (1 - y_i) \log(1 + e^{\beta \cdot x^i})$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i \log(e^{\beta \cdot x^i}) - \sum_{i=1}^n \log(1 + e^{\beta \cdot x^i})$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i (\beta \cdot x^i) - \sum_{i=1}^n \log(1 + e^{\beta \cdot x^i}).$$

ولتعظيم L نأخذ المشتقات المتعلقة بـ β_j . حيث أن:

$$\frac{d}{dz} \log(f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)} \text{ and } \frac{d}{dz} e^{za+b} = a e^{za+b},$$

ونحصل على

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n y_i x_j^i - \sum_{i=1}^n \frac{x_j^i e^{\beta \cdot x^i}}{1 + e^{\beta \cdot x^i}}, j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \frac{e^{\beta \cdot x^i}}{1 + e^{\beta \cdot x^i}}.$$

وقمنا بوضع جميع المشتقات لتساوي صفر وحل المعادلات لإيجاد الحد الأقصى.

$$\sum_{i=1}^n x_j^i \left(y_i - \frac{e^{\beta \cdot x^i}}{1 + e^{\beta \cdot x^i}} \right) = 0, j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{e^{\beta \cdot x^i}}{1 + e^{\beta \cdot x^i}} \right) = 0.$$

يتعين حل هذه المعادلات غير الخطية $m+1$ لإيجاد قيم $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m, m+1$. وليس من الصعب حل المعادلات باستخدام بعض الطرق التكرارية (مثل نيوتن-رافسون). وهذا هو الحل الذي يوفره برنامج تنفيذ الانحدار اللوجستي: فإن تقييم قيم β تزيد من فرصة مراقبة النمط 1_s و 0_s الذين تمت ملاحظتهم.

2-4-10 إنشاء وثيقة التقييم

توفر وثيقة التقييم وسيلة لحساب درجة الفرد، ولكن الدرجات نفسها ليست مهمة جداً، شريطة أن تتمكن من النظر فيها مرة أخرى لمعرفة احتمال التخلف عن السداد. ولقد وجدنا بالفعل وثيقة تقييم تترجم مباشرة إلى (احتمالات لوغاريتمية) مضروبة في 100 في الجدول 4-10. وبالنسبة للانحدار اللوجستي، لدينا:

$$\log(\text{odds}) = \beta \cdot x = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n.$$

وبما أن القيم x_i إما 0 أو 1، فإن قيم β هي بالضبط ما نحتاج إليه للحصول على وثيقة التقييم. لذلك، ببساطة نقوم بأخذ تقديرات الانحدار β ، ونضربها في 100 للحصول على وثيقة التقييم.

لاحظ أن وثيقة التقييم سوف تشمل كل فئة حتى لو كان الانحدار اللوجستي ينتج تقديرات فقط للمتغيرات التي لا تنطوي عليها المتغيرات الأخرى. وهكذا، على سبيل المثال، في وثيقة التقييم بايز في الجدول 4-10 هناك درجة 23 لمن 'لديه بطاقة ائتمان' و 61 لمن 'لا يحمل بطاقة ائتمان'. ومن شأن الانحدار اللوجستي أن ينتج درجة لواحد فقط من هذه المتغيرات، والآخر سيكون صفراً. ومن الواضح أن إضافة نفس العدد إلى كل مجموعة من المتغيرات المستثناة وغير المتكافئة هي نفس إضافة عدد إلى المدة الثابتة، ويحصل

كل فرد مهما كان تصنيفه على نفس النتيجة الإضافية. وهذا يعني أننا يمكن أن نتلاعب بحيث تكون جميع الدرجات متساوية. وعادة ما يتم ذلك من أجل تجنب أي أرقام سلبية في وثيقة التقييم.

لاحظ أنه بالنسبة لمعيار وثيقة التقييم (الاحتمالات اللوغاريتمية) المضروبة في 100، فإن زيادة قدرها 100 في الدرجات يعني زيادة قدرها 1 في الاحتمالات اللوغاريتمية، وهذا يتوافق مع ضرب الاحتمالات بالمبلغ الثابت $e=2.7183$. يمكننا أن ننظر إلى هذا بطريقة أخرى ونقول أن مضاعفة الاحتمالات بمقدار 2 سوف تزيد من النتيجة بمقدار $69 = 100 \log(2)$. وفي بعض الأحيان نريد عمل وثيقة تقييم يوجد بها خاصية تطابق النتيجة الأساسية مع الاحتمالات المعطاة وتتطابق كل مضاعفة من الاحتمالات مع الزيادة في النتيجة بمقدار معين. للقيام بذلك نحن بحاجة إلى تعريف النتيجة كتحويل خطي من الاحتمالات اللوغاريتمية. إذا أعطيت الدرجات لفئة i من خلال:

$$s_i = a + b \log(o_i)$$

بالنسبة للثوابت a و b ، يمكن تحديد b من حقيقة أن مضاعفة الاحتمالات يتوافق مع زيادة الدرجات من خلال $b \log 2$ ويمكن تحديد a من النتيجة الأساسية المطلوبة. وسنرى كيف يتم القيام بهذا من خلال مثال بنك سيدني أدناه.

مثال 10-1 (متابعة) بنك سيدني

استخدام نتائج الانحدار اللوجستي لعمل وثيقة تقييم لبيانات بنك سيدني حيث تكون جميع الأرقام إيجابية، وعلى أن تكون النتيجة مكونة من 200 درجة تقابل الاحتمالات من 10 إلى 1. وكل زيادة قدرها 50 في النتيجة تقابل ضرب الاحتمالات بعامل قدره 2.

الحل

نبدأ مع نتائج الانحدار اللوجستي للمعادلة (10-6). ويمكن مضاعفة القيم β بضربها في 100 وتقريبها لإعطاء وثيقة التقييم للاحتتمالات اللوغاريتمية الأساسية مضروبة في 100

المسماه بوثيقة التقييم 1 في الجدول 8-10. بعد ذلك نقوم بإجراء تعديلات على وثيقة التقييم 1 من أجل الحصول على جميع الأرقام الإيجابية. ثم نأخذ مبلغ ثابت من المدة الثابتة وإضافته إلى كل فئة في مجموعة حصرية ومتبادلة.

لقد حققنا الحد الأدنى من التغيير لتحقيق ذلك: نقوم بطرح 135 من المدى الثابت وإضافة 98 إلى كل من المالك والمستأجر وغيرها، وبالإضافة إلى ذلك نضيف 37 لكل فئة عمرية. هذا من شأنه أن يعطينا وثيقة التقييم 2. لاحظ أن أي فرد سوف يحصل على نفس النتيجة بالضبط من وثيقة التقييم 2 كما تم الحصول عليها من وثيقة التقييم 1. الخطوة الأخيرة هي استخدام التحول الخطي من أجل تحقيق نتيجة مكونة من 200 درجة تقابل الاحتمالات من 10 إلى 1. وزيادة قدرها 50 عندما يتم مضاعفة الاحتمالات، سوف تحتوي وثيقة التقييم الجديدة على $s = a + b \log(\text{odds})$ بدلاً من $s = 100 \log(\text{odds})$. (ترمز $\log(\text{odds})$ إلى الاحتمالات اللوغاريتمية).

$$a + b \log(10) = 200$$

$$b \log(2) = 50.$$

وبالتالي $b = 50/0.693 = 72.135$ وبالتالي:

$$a = 200 - 72.135 \log(10) = 33.903.$$

ولترجمة وثيقة التقييم للاحتتمالات اللوغاريتمية المضروبة في 100 نحتاج أولاً إلى مضاعفة جميع المتغيرات (بما في ذلك الثابت) بنسبة 72.135 / 100 ثم إضافة 33.9 إلى المتغير الثابت وتقريبه، ولكن لتطبيق وثيقة التقييم بشكل أسهل ، نقوم بخطوة إضافية لإضافة المتغير الثابت، الذي هو الآن $60.59 = 33.9 + 0.721 \times 37$ ، كل فئة من الفئات العمرية حتى تتمكن من إسقاط المتغير الثابت. وبعد التقريب، نحصل على وثيقة التقييم 3 كما هو مبين في الجدول 8-10.

الجدول 8-10: تعديل وثيقة التقييم من أجل الحصول على الخصائص المرغوبة.

السمات	وثيقة التقييم 1	وثيقة التقييم 2	وثيقة التقييم 3
السن < 30	0	37	87
السن 30-39	-37	0	61
السن 40-49	13	50	97
السن ≥ 50	20	57	102
يمتلك منزل	49	147	106
يستأجر منزل	-98	0	0
آخر	0	98	71
لديه بطاقة ائتمان	63	63	45
ليس لديه بطاقة ائتمان	0	0	0
ثابت	172	37	0

3-4-10 تطبيقات الدرجات الأخرى

بعد القيام بكل هذا العمل لتحديد إجراءات درجات الائتمان، فمن الجدير بالذكر أنه يمكن استخدام نفس التقنيات بالضبط لحل مشكلة إدارية أخرى شائعة. وهذا هو الهدف منها. فنحن لم نعد نريد أن نحدد الأشخاص الذين يرجح أن يكونوا سيئين من أجل تجنب منحهم المال، وبدلاً من ذلك، نرغب في اختيار الأشخاص الذين يرجح أنهم لن يتخلفوا عن السداد وأيضاً استهدافهم. لا تزال فكرة نمذجة السلوك من حيث وثيقة التقييم قد تم خلقها من فئات مختلفة لا تزال قيمة. وتشارك كل من مشكلة تقييم درجات الائتمان ومشكلة استهداف الترويج في سمة أن نسبة صغيرة جداً من العينة هي في فئة الاستجابة (أو في فئة الديون المعدومة).

ومن وجهة نظر التقديرية، فإن النتيجة هي أن عدداً صغيراً (مطلقاً) من الأفراد في أي مجموعة معينة من الفئات سينتهي به المطاف إلى الاستجابة. هذا هو السبب في استخدام إجراء الانحدار اللوجستي غير المباشر بدلاً من مجرد أخذ الاحتمالات التي نلاحظها في خانة واحدة في الجدول واستخدام هذا للتنبؤ بالاحتمالات اللوغاريتمية لهذه الخانة. وبسبب العدد الصغير من الأفراد المستجيبين في بعض الخانات، فإن التعامل مع كل خانة بمفردها هي طريقة سيئة للمضي قدماً. ومن المرجح أن نحصل على نتيجة أفضل باستخدام نموذج الانحدار اللوجستي. ومن أجل تجنب النتيجة السلبية للاحتتمالات

اللوغاريتمية ، فنحن بحاجة للتعامل مع احتمالات أكبر من 1. لذلك، في هذه المشكلة نقوم بتحديد الاحتمالات على النحو التالي:

احتمالية عدم الاستجابة

احتمالية الاستجابة

عند تطبيق وثيقة التقييم نختار الأفراد الذين سراسلهم عبر البريد بالقيم المنخفضة للنتيجة المقابلة لاحتمال عال نسبيا من الاستجابة. التمرين 5-10 هو مثال على هذا النوع من المشاكل.

ملاحظات

في مناقشة وكالات التصنيف الائتماني لقد استخدمت نطاق واسع من المعلومات التي تقدمها وكالة التصنيف الائتماني ستاندرد آند بورز. الجدول مأخوذ من الجدول 21. في دراسة ستاندرد آند بورز العالمية السنوية لتقييم وتقدير المراحل الانتقالية تاريخ النشر: 21 مارس 2012 (. ويوضح الشكل 10-2 التغيرات على مدار الوقت المبين في الجدول 3 من ذلك التقرير. وعلاوة على ذلك، يحتوي جدول البيانات BRMch10 Markov.xlsx على المواد المأخوذة من الجداول 21 و 59 و 61 و 62 و 64 من الدراسة الافتراضية السنوية للشركات العالمية في 2011 S & P. وتستخدم هذه المعلومات لمقارنة التنبؤات من نظرية ماركوف والسلوك الفعلي ينظر، الذي يشكل الأساس للشكلين 10-4 و 10-5. الجدول الزمني لـ ليز كليبورن الوارد في الشكل 10-1 مأخوذ من المعلومات الواردة في الجدول 8 في ملخصات 2011 ستاندرد & بورز الافتراضية (تاريخ النشر: 21 مارس 2012).

هناك الكثير مما يمكن قوله عن الطريقة التي يمكن بها استخدام البيانات المحاسبية للاستدلال على مخاطر الائتمان. ويعود هذا العمل إلى نموذج معروف من قبل ألتمان في عام 1968، ويعطي مراجعة لهذه الأدبيات ألتمان وسوندرز (1998). استخدام تقنيات مثل الانحدار اللوجستي في هذا السياق يوفر صلة بين مخاطر الائتمان على مستوى الشركات والمستهلك. وهناك طرق أخرى في تقييم مخاطر الشركات وتعتمد على رؤية قيمة الشركة التي تتطور وفقا لعملية عشوائية. ثم، يمكن ترجمة المعلومات عن تقلب العملية والانحراف التصاعدي في القيمة إلى بيان حول احتمال التخلف عن السداد في

فترة T سنوات. وقد اقترحت مورتون في عام 2002 هذا النهج ومنذ ذلك الحين تم تبنيه من قبل شركة KMV، التي استحوذت عليها وكالة موديز في عام 2002. لمزيد من المعلومات حول هذا النهج، انظر الفصل 16 في Culp (2001) أو البحث الذي كتبه بهارات وشومواي (2008).

تستند البيانات المستخدمة في مثال بنك سيدني، إلى مجموعة مماثلة من البيانات الافتراضية المبسطة التي قدمها توماس (2009) (وهو يسميها بيانات بنك ساوثامبتون). يعالج كتاب توماس بشكل أكثر تفصيلاً بكثير طريقة عمل نماذج الائتمان الاستهلاكية ويعد نقطة بداية جيدة إذا أردت التعمق في هذا الموضوع. في المناقشة نذكر مشاكل التوزيع العادي اللوغريتمات إذا كانت الفئات تساوي صفر منفردة. وقد يكون من الناحية التفاؤلية جداً أن نقول إن الانحدار اللوجستي يتجنب هذه المشكلة. هناك الكثير من الأعمال حول الطريقة التي يتم فيها التحيز للتقديرات القصوى لاحتمال الانحدار اللوجستي للعينات الصغيرة (انظر، على سبيل المثال، فirth، 1993 والمراجع الواردة هناك). نهج واحد بسيط للحد من هذا التحيز هو إضافة 0.5 إلى كل من الخلايا "جيدة" و "سيئة". البرنامج غريتل المستخدم للانحدار اللوجستي متاح في <http://gretl.sourceforge.net>.

المراجع

- Altman, E. and Saunders, A. (1998) Credit risk measurement: developments over the last 20 years. *Journal of Banking and Finance*, 21, 1721–1742.
- Bharath, S. and Shumway, T. (2008) Forecasting default with the Merton distance to default model. *Review of Financial Studies*, 21, 1339–1369.
- Culp, C. (2001) *The Risk Management Process: Business strategy and tactics*. John Wiley & Sons.
- Firth, D. (1993) Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika*, 80, 27–38.
- Merton, R. (1974) On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29, 449–470.
- Thomas, L. (2009) *Consumer Credit Models*. Oxford University Press, Oxford.

تمارين

1-10 إفلاس خلال عامين أو احتمالية ليست ذات صلة

وباستخدام المعلومات الواردة في الشكل 10-3 (بدلاً من الأرقام المفصلة في الجدول 1-1)، احسب احتمال أن تكون الشركة التي صنفت على أنها "C / CCC" قد تم تصنيفها أنها متوقفة عن السداد أو مفلسة في خلال عامين.

2-10 مجموعات ماركوف

تحقق من الادعاء بأن مجموعة ولايات معا يمكن أن تلغي افتراض ماركوف. افترض أن هناك أربع ولايات A، B، C، D. وبمجرد الوصول إلى A أو D، لا يوجد أي تغيير ممكن. من B هناك فرصة 10٪ للانتقال إلى A و 20٪ فرصة للانتقال إلى C، وإلا لا يوجد أي تغيير. وبالمثل، من C هناك فرصة 10٪ للانتقال إلى B و 20٪ فرصة للانتقال إلى D، وإلا لا يوجد أي تغيير. الشركات الجديدة تصل إلى B في مثل هذه الطريقة التي نتوقع نفس العدد من الشركات في B كما أن هناك شركات في C. حساب احتمال ثلاث سنوات للوصول إلى D مع العلم أننا من المرجح أيضا أن تبدأ في إما B أو C، وقارن هذا مع التقدير الذي تم إجراؤه إذا جمعنا معا الولايتين B و C.

3-10 فئات ماركوف

التحقق من الادعاء بأن فئات شركات مختلفة، كل منهم تتبع سلسلة ماركوف، يمكن أن تنتج سلوك غير ماركوف في المجموع. افترض أن هناك أربع ولايات A، B، C، D. وبمجرد الوصول إلى A أو D، لا يوجد أي تغيير ممكن. تتصرف الشركات من النوع X كما هو الحال في التمرين 10-2، أي بدءاً من B، بعد سنة واحدة هناك فرصة 10٪ للانتقال إلى A و 20٪ فرصة للانتقال إلى C. وبالمثل، من C هناك فرصة 10٪ للانتقال إلى B و 20٪ من فرص الانتقال إلى D. الشركات من فئة Y هي نفسها إلا أنها تغير الولاية مرتين في كثير من الأحيان، أي من B هناك فرصة 20٪ للانتقال إلى A و 40٪ فرصة

للانتقال إلى C. وبالمثل ، من C هناك فرصة 20٪ للانتقال إلى B و 40٪ فرصة للانتقال إلى D. الشركات الجديدة تصل إلى B في مثل هذه الطريقة التي نتوقع أن يكون N الشركات من نوع X في B، N الشركات من نوع Y في شركات B و N من النوع X في C و N من النوع Y في C. احسب احتمال الانتقال إلى D في خطوتين من B لسلسلة ماركوف التي تتطابق مع التحولات السنوية الملحوظة ومقارنتها مع الاحتمال الحقيقي.

4-10 اکتوفون

اكتوفون هي شركة محمول تبقي بيانات عملائها وتقيمهم بناء على ما إذا فشلوا في سداد التزامات العقد أو لا في النصف الأول من العام المذكور في العقد. البيانات المتاحة على التطبيق ترتبط بالفئة العمرية، ما إذا كان لديهم بطاقة ائتمان وما إذا كان لديهم عقد للهاتف المحمول (إما مع أوكتوفون أو شركة أخرى). وترد النتائج من 2000 من المتقدمين في العام الماضي الذين يعيشون في مدينة واحدة في الجدول 9-10. في هذا الجدول هناك 1850 نتيجة جيدة و 150 سيئة. حساب الأوزان من الأدلة لمختلف السمات المعنية واستخدامها لإنشاء (naive Bayes) بطاقة الأداء.

الجدول 3-10: بيانات اکتوفون: النتائج الجيدة والسيئة

فيما فوق	46	30-45 العمر	22-29 العمر	18-21 العمر
المحمول السابق، بطاقة الائتمان	$G = 250$ $B = 7$	$G = 312$ $B = 9$	$G = 256$ $B = 8$	$G = 150$ $B = 6$
المحمول السابق، بدون بطاقة ائتمان	$G = 91$ $B = 12$	$G = 92$ $B = 9$	$G = 123$ $B = 13$	$G = 114$ $B = 10$
لا يوجد محمول سابق، يوجد بطاقة ائتمان	$G = 45$ $B = 8$	$G = 59$ $B = 11$	$G = 182$ $B = 6$	$G = 99$ $B = 12$
لا يوجد محمول سابق ولا يوجد بطاقة ائتمان	$G = 16$ $B = 9$	$G = 13$ $B = 7$	$G = 26$ $B = 14$	$G = 22$ $B = 9$

5-10 اکتوفون مع تكاليف العقود

تبيع أوكتوفون مجموعة متنوعة من العقود ولكن يمكن تصنيفها على أساس دولار

في الشهر إلى ثلاث فئات: منخفضة التكلفة - أقل من 30 دولار، تكلفة المتوسطة - ما بين 30 و40 دولار؛ وتكلفة مرتفعة - أكثر من 40 دولار.

(أ) من 2000 في عينة تمرين 10-4 هناك 800 مجموعه من العقود منخفضة التكلفة، و600 عقد متوسط التكلفة و600 عقد مرتفع التكلفة. ويتم توزيع 150 من العقود السيئة مع 40 على عقود منخفضة التكلفة، و40 على العقود متوسطة التكلفة و70 على العقود عالية التكلفة. احسب الأوزان الجديدة للأدلة بما في ذلك هذه المعلومات الإضافية.

(ب) ويتم إجراء انحدار لوجستي على هذه البيانات ومنتج المعاملات المبينة في الجدول 10-10. هنا، سمات عمر +45؛ بدون بطاقة ائتمان؛ ولا محمول سابق؛ والعقود عالية التكلفة كلها تم حذفها بسبب الخطية المتداخلة. احسب بطاقة الأداء باستخدام هذه البيانات.

الجدول 10-10: انحدار لوجيستي لاكتوفون

المعامل	
const	0.194171
age18_21	0.135372
age22_29	0.401779
age30_45	0.00415712
credit_card	1.38715
prev_phone	1.45171
low_cost	0.913791
med_cost	0.427606

(ج) استخدام التحجيم لضبط بطاقة الأداء من (ب) بحيث يكون لها الخصائص التالية:
 (أ) ليس هناك مصطلح ثابت. (ب) الأداء بدرجة 500 تمثل احتمالات تتراوح بين 100 و1؛ و(ج) زيادة في درجة تحجيم 100 نقطة تمثل احتمالات يتم ضربها في 10.

(حتى الأداء بدرجة 600 يمثل خلاف 1000 إلى 1).

(د) تم احتساب عقد الهاتف المحمول بتحقيقه ربحاً متوسطاً قدره 15 دولاراً في السنة، في حين أن كل عميل يفشل في سداد مدفوعات مجدولة سيكلف في المتوسط 100 دولار (بما في ذلك تكلفة المتابعة ومتوسط الديون غير المحصلة وقيمة الاستبدال تلك الهواتف التي لم يتم استردادها، بعد السماح لمتوسط المدفوعات التي تم إجراؤها بالفعل). لبطاقة النتائج في (ج)، ما هي النتيجة المستقطعة التي تجعل اوكتوفون تفسخ العقد؟

(هـ) لنفترض بأن النظر في الأرقام بشكل أكثر تفصيلاً يشير إلى أن الأرباح والخسائر تعتمد على حجم العقد على النحو التالي:

	تكلفة منخفضة	تكلفة متوسطة	تكلفة مرتفعة
الربح السنوي	\$10	\$15	\$20
متوسط التكلفة إذا كان سيناً	\$80	\$100	\$160

بماذا توصي اوكتوفون؟

6-10 Cosal Skincare منتجات العناية بالبشرة

تبيع شركة Cosal للعناية بالبشرة منتجات التجميل عبر الإنترنت. كل ستة أشهر تبدأ Cosal حملة للإعلان عن أحد منتجاتها الجديدة في محاولة لزيادة قاعدة عملائها، من خلال إرسال عينة مجانية عبر البريد للعملاء المحتملين على قائمة بريدية. تتضمن القائمة البريدية، التي تشتريها Cosal، سمات معينة للمستلمين. على سبيل المثال، يمكن لـ Cosal اختيار الإناث تحت سن 30 فقط الذين لديهم رخصة قيادة ويعيشون وحدهم. يستخدم كوزال البيانات من الماضي لتعزيز لتوجيه ذلك لنوع من العملاء المحتملين لتشمل في البريد بها. كما هو شائع مع هذا النوع التسويق، هناك نسبة صغيرة من المتلقين للعينة المجانية سيشترون المنتج عبر الإنترنت. ومع ذلك، ترى Cosal عملية شراء واحدة على الإنترنت يتبعها عمليات شراء أخرى. وتشير التقديرات إلى أن الأرباح المكتسبة من عميل واحد جديد عبر الإنترنت تبلغ حوالي 150 دولاراً في المتوسط. وتكلف العينة المجانية 2.50 دولار

لكل متلقي بما في ذلك تكاليف البريد.

الجدول 10-11 يوضح النتائج من الرسائل البريدية المرسلة لـ 10000 عميل محتمل. من خلال هذه الطريقة، تم تحقيق 310 عميل جديد على الإنترنت، وهي نتيجة جيدة للشركة. في هذا الجدول، نتائج P هي أولئك الذين اشتروا على الإنترنت، ونتائج N أولئك الذين لم يجروا عملية شراء عبر الإنترنت.

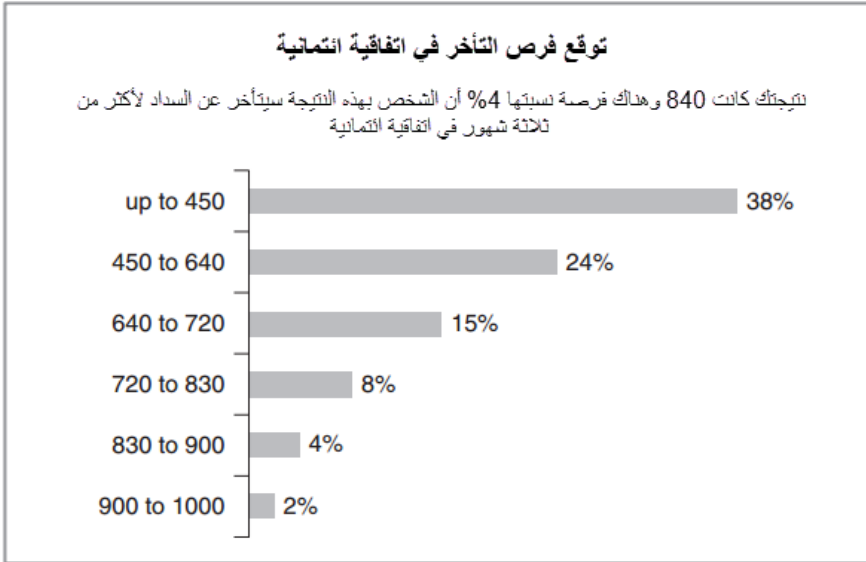
(أ) استخدم هذه البيانات (متوفرة أيضا في جدول بيانات على ملف إكسل BRMch10 CosalSkincare.xls) للعمل على فرص اللوغاريتمات لكل فئة ومن طبق مربعات صغرى عادية أقل انحدار لتحديد مجموعة من القيم β للاستخدام.

	تحت 30	30-39	40-49	50 فوق
أسرة 1، بوظيفة بداء كامل	$N = 456$ $P = 34$	$N = 412$ $P = 16$	$N = 386$ $P = 8$	$N = 386$ $P = 15$
أسرة 1، بوظيفة ليست بدوام كامل	$N = 453$ $P = 24$	$N = 389$ $P = 12$	$N = 375$ $P = 6$	$N = 395$ $P = 12$
أسرة 2، بوظيفة بداء كامل	$N = 463$ $P = 24$	$N = 409$ $P = 15$	$N = 387$ $P = 10$	$N = 363$ $P = 15$
أسرة 2، بوظيفة ليست بدوام كامل	$N = 460$ $P = 18$	$N = 401$ $P = 13$	$N = 373$ $P = 5$	$N = 371$ $P = 18$
أسرة < 3، بوظيفة بدوام كامل	$N = 448$ $P = 12$	$N = 407$ $P = 6$	$N = 405$ $P = 6$	$N = 375$ $P = 9$
أسرة < 3، بوظيفة ليست بدوام كامل	$N = 412$ $P = 12$	$N = 404$ $P = 8$	$N = 377$ $P = 4$	$N = 383$ $P = 8$

(ب) ضع أهداف لتمكين Cosal Skincare من اتخاذ قرار بشأن الأفراد الذي يجب أن يتم إدراجهم في القائمة البريدية.

7-10 الاتساق مع المربعات الصغرى العادية

لنفترض أن الشكل 7-10 يتم إنتاجه من قبل موقع على شبكة الإنترنت يقدم تقييم درجة الائتمان مجانا. هل الأرقام تظهر اتساقاً مع المربعات الصغرى العادية لمخطط الأداء؟



الشكل 7-10: رسم من موقع يقدم تصنيفات ائتمانية مجاناً.

الملاحق

الملحق أ

دروس حول نظرية الاحتمالات

1-A أحداث عشوائية

نظرية الاحتمالات كانت أمر أساسي لكثير من نقاشنا في هذا الكتاب. وهو موضوع يمكن تغطيته على العديد من المستويات المختلفة. لقد كتبت هذا البرنامج التعليمي الموجز مع هدف محدد لعرض المفاهيم المطلوبة في بقية الكتاب للقارئ. قد يكون من المفيد أن نتقل إلى شرح لبعض المفاهيم الاحتمالية، أو كتذكير لهذه المادة للقارئ الذي درس نظرية الاحتمالات سابقاً، ولكنه نسي التفاصيل.

الاحتمالية تدور حول دراسة الأحداث غير المؤكدة. أي أمور لا يمكن التنبؤ بها مسبقاً. على سبيل المثال، قد نأخذ في الاعتبار الحدث الذي يحدث فيه زلزال في منطقة سان فرانسيسكو في العام المقبل بدرجة 7 أو أعلى. هذا الحدث إما سيحدث أو لا، ولكن لا يمكننا تحديد ذلك مسبقاً. أو قد ننظر في إلقاء القطعة النقدية ورغبنا في أن تكون "ملك" من جديد لا يمكننا أن نحدد مسبقاً النتيجة، ولكن يمكننا أن نتحدث عن احتمال وقوع الحدث. هناك طبقات من المضاعفات الفلسفية هنا حول ما نعنيه بالضبط بكلمة احتمال، ولكن دور الدروس التعليمية غير معنية باستكشاف هذا المجال. سوف نفترض أننا

نناقش حدثًا يتم تحديده من خلال 'تجربة عشوائية'، والتي لا يمكننا التنبؤ بها: على سبيل المثال، إلقاء القطعة المعدنية.

قد نقول أنه حتى عملية إلقاء القطعة المعدنية ليست عملية عشوائية في الواقع. إذا كنا نعرف بالضبط درجة القوة التي يتم بها دوران العملة وكان لدينا جهاز كمبيوتر قوي بما فيه الكفاية لحسابها، يمكن إذاً أن نتنبأ كل شيء حول إلقاء القطعة المعدنية. بما في ذلك الطريقة التي سوف تصل بها إلى الأرض. نفس الشيء يعد صحيحًا من الناحية النظرية حول الزلزال في كاليفورنيا. في هذه اللحظة قد يكون هذا شيء من المستحيل التنبؤ به، ولكن مع التقدم في العلوم الجيولوجية، قد نأمل في أن نعرف مسبقًا احتمالية وقوع تلك الأحداث، نظرا للبيانات الكافية حول ما يحدث في الصخور تحت الأرض.

وبما أننا نريد تطوير النظرية الأساسية، فإننا سنحجب هذه المضاعفات ونفترض أن لدينا بالفعل تجربة عشوائية والأحداث التي قد تحدث لا يمكن التنبؤ بها. إذا كانت الأحداث تعتمد على ظروف محددة، مثل القوة المطبقة على إلقاء قطعة معدنية، فإننا سوف نفترض أن ليس لدينا أي معلومات حول هذه العوامل. قد تكون التجربة العشوائية مفهوم مثالي، ولكنها ستكون كافية بالنسبة لنا لتطوير النظرية التي نريدها.

من المفيد أحيانا التفكير في التجربة العشوائية التي تنتج مجموعة واحدة كبيرة من النتائج المحتملة. ندعو مجموعة من النتائج الممكنة مساحة العينة (التي عادة ما تكون مكتوبة Ω). مع هذا التعريف نقول أن الحدث هو مجموعة فرعية من Ω وهو ما يقابل مجموعة معينة من النتائج المحتملة. لذلك، على سبيل المثال، إذا تم إلقاء القطعة النقدية المعدنية 10 مرات يمكننا تحديد الحدث الذي يكون فيه "ملك" بالضبط.

وضمن المصطلحات العشوائية، فإن الفكرة يمكن أن تتكرر (على الأقل من الناحية المفاهيمية). هذا سهل بما فيه الكفاية لرؤية فيما يتعلق بإلقاء القطعة النقدية المعدنية، ولكننا سوف نمسك نطاق الفكرة حتى إلى الحالات التي لا توجد فيها هذه الإمكانية في الواقع. عندما نتحدث عن احتمال انزلاق الاقتصاد الأمريكي في حالة ركود خلال عام 2025، فإننا نعلم أن هذا سوف يحدث أو لا يحدث، ولكن يمكننا أن نجري تجربة الفكر التي نتصور فيها كل

أنواع الحقب التاريخية التي تحدث بين حين وآخر والتي ينزلق فيها الاقتصادي إلى حالة ركود خلال تلك الفترة وفي الأوقات التي لا يحدث فيها ذلك.

ومن مزايا استناد نقاشنا على تجربة عشوائية يمكن تكرارها أنها تسمح لنا باستخدام تعريف متكرر للاحتمال. إلقاء قطعة معدنية عدة مرات ينبغي أن ينتج عنه أعداد متساوية تقريبا من الملك والكتابة. لذلك، يمكن تفسير عبارة "احتمال ظهور ملك يساوي 0.5" بمعنى أن عدد N من الرميات، عدد المرات التي يظهر فيها الملك مقسوما على N سوف تقترب 0.5 كما تزايد عدد N . وبصورة أعم، يمكننا النظر في بعض الأحداث A (حيث A هي مجموعة فرعية من مساحة العينة Ω) نسبة المرات التي تحدث فيها نتيجة في A من تجارب N للتجربة العشوائية؛ ثم احتمال A هو الحد من هذه النسبة كما N بالاتجاه إلى ما لا نهاية. ولن نتابع هذه الفكرة بالتفصيل أو نقلق كثيرا حول سبب وجود هذه الحدود بالضرورة. بدلا من ذلك، نريد أن نركز على الخصائص التي يجب أن تمتلكها الاحتمالات.

هناك ثلاثة أشياء فقط تميز الاحتمالات: الاحتمالات غير السلبية؛ احتمال Ω هو 1؛ واحتمال وجود اتحاد من الأحداث المفصولة هو مجموع احتمالات الحدث الفردي. عندما لا يكون هناك سوى عدد محدود من النتائج الممكنة في Ω ، على سبيل المثال إذا كانت التجربة العشوائية هي رمي النرد، سيكون كل شيء واضح تماما: نحن ببساطة نعين احتمال لكل نتيجة ممكنة عن طريق جعل هذه النسبة من المرات لتوقعنا حدوث هذه النتيجة، ومن ثم نحدد احتمال وقوع الحدث A كمجموع احتمالات النتائج ضمن A . ولهذا في حال، كانت $\Omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ نسمح لـ p_i أن تكون الاحتمالية لحدوث x_i واحتمالية لحدث $A \subset \Omega$ يُعطى من خلال

$$\Pr(A) = \sum_{i \in J} p_i \text{ where } J = \{i : x_i \in A\}.$$

نحن بحاجة إلى أن يكون لدينا $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ و $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ الخاصية الثالثة لاحتمالات (فيما يتعلق بمجموعة أحداث منفصلة) تكون أوتوماتيكية في هذه الحالة.

الخاصية الإضافية من القدرة على إضافة الاحتمالات إلى أحداث متفرقة مهم عندما

يكون لدينا عدد لا حصر له من النتائج المحتملة في مساحة العينة Ω . نود أن نكون قادرين على وصف الاحتمالات المرتبطة بعدد لا حصر له من الأحداث. على سبيل المثال، مقامر الذي يبدأ بدولار واحد ويكرر رهانه مرارا وتكرارا بدولار واحد على المربع الأحمر في عجلة الروليت، ويتوقف عندما يفوز بـ 20 دولار أو عندما يفقد الدولار الذي بدأ به. رهانه الأول هو دولار وقد يخسره على الفور، وإن لم يخسره سوف يكسب دولار إضافي. إذا خسر رهاناته الاثنتين التاليتين، سيخسر كل شيء. وبشكل أعم، يمكننا أن نرى أن مبلغ المال الذي ذهب صعودا أو هبوطا بمقدار دولار واحد على كل رهان. نريد أن نعرف احتمال أن يصل إلى الصفر قبل أن يصل إلى 20 دولار. ولكن هذه اللعبة يمكن أن تستمر حسب رغبتنا، والاحتمالات يمكن تقسيمها إلى احتمال الحصول على الصفر (قبل 20 دولار) بعد خطوة واحدة، ثلاث خطوات، خمس خطوات... الخ. هناك عدد لا حصر له من الشروط ولكنها تقل باستمرار.

نحن بحاجة إلى التعود على المصطلحات من مجموعات تتعلق بالأحداث. الحدث الذي يحدث فيه كل من A و B، عندما يكون كل من A و B مجموعة فرعية من مساحة العينة، هو ببساطة تقاطع مجموعات A و B. وبالمثل، فإن الحدث الذي يحدث فيه حدث واحد من A و B هو الاتحاد من المجموعتين الفرعيتين "A" و "B". يمكننا من النظر في احتمال اتحاد "A" و "B" كمجموع احتمالية وقوع ثلاثة أحداث (منفصلة): "A بدون B"، التي نكتبها $A \setminus B$ ومجموعة النتائج في A التي ليست في A. B تقاطع $A \cap B$ ؛ و "B بدون A"، $B \setminus A$.

الآن، لأن $A \setminus B$ و $A \cap B$ هي مجموعات منفصلة والتي اتحادها A لدينا، من افتراضنا للاحتتمالات، أن

$$\Pr(A) = \Pr(A \setminus B) + \Pr(A \cap B).$$

بالمثل

$$\Pr(B) = \Pr(B \setminus A) + \Pr(A \cap B).$$

وعليه

$$\begin{aligned} \Pr(A \cup B) &= \Pr(A \setminus B) + \Pr(A \cap B) + \Pr(B \setminus A) \\ &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B). \end{aligned}$$

2-A قواعد Bayes والاستقلالية

نفترض أن حدثين مستقلين، إذا كان أحدهما لا يحدث فربما لا احتمال حدوث الآخر. وهذا يعني أن احتمال حدوث كل من A و B يعطى بمنتج الاحتمالين الفرديين أو بالرموز

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B).$$

لفهم سبب صحة هذا الأمر نحن بحاجة إلى العودة إلى فكرة الاحتمال الشرطي، التي تعد بمثابة وسيلة للتحدث عن احتمال وقوع حدث بالنظر إلى أننا نعرف وقوع حدث آخر. على سبيل المثال، إذا كنا نعلم أن يتم رمي اثنين من الزهر لهم نتائج مختلفة، ما هو احتمال أن مجموع النردين يعطي رقم زوجي؟ إنها بسيطة بما فيه الكفاية لمعرفة أنه عندما يتم رمي اثنين من الزهر، واحتمال أن حاصل مجموعهما عدد زوجي هي $2/1$ ، لأن أيًا كانت نتيجة أول رمية، فإنه جمعها مع نتيجة الرد الثاني سيكون احتماليته النصف (رقم زوجي في حال كانت نتيجة أول رمية نتيجتها رقم زوجي، الاحتمالات شيء آخر). ومع ذلك، نحن نريد أن نجد احتمال مشروط على الحدث أن النرد يعطي نتائج مختلفة. طريقة واحدة لحساب هذا هو القول أن هناك 36 من النتائج المتساوية في حال رمي اثنين من النرد. ستة من هذه النتائج هي نفسها من رميتان والـ 30 المتبقية لهم أرقام مختلفة. من بين الـ 30، الـ 12 زوج الموضحين أدناه لهم مجموع برقم زوجي.

النرد الثاني	النرد الأول	النرد الثاني	النرد الأول	النرد الثاني	النرد الأول
1	5	1	3	3	1
3	5	5	3	5	1
2	6	2	4	6	2
4	6	6	4	6	2

الآن، وبما أن جميع النتائج الأصلية الـ 36 متساوية على الأرجح، يمكننا أن نرى أن معرفة الرميات مختلفة وتعطي 30 من النتائج المتساوية وفيهم 12 نتيجة لها الخصائص التي نرغب بها. وبالتالي، فإن الاحتمال الشرطي هو $12/30 = 0.4$. عند التعامل مع الاحتمالات المشروطة نستخدم الرمز $\Pr(A|B)$ ليعني احتمال حدوث الحدث A يعتمد على حدوث الحدث B. إذاً المبدأ العام الذي أوضحناه بمثال النرد هو

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

وبعبارة أخرى، يمكننا القول إن احتمال حدوث A بالنظر إلى حدوث B يُعطى باحتمال حدوث كل من A و B مقسوماً على احتمال حدوث B . قد يكون هذا سهلاً لفهمه عندما نضاعف ذلك من خلال $\Pr(B)$ للحصول على

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B) \times \Pr(A|B),$$

والتي تشير ببساطة أن احتمال حدوث كل من A و B معا هو احتمال حدوث B مضروباً في احتمال حدوث A نظراً إلى حدوث B .

في مثال النرد، هناك احتمالية للحصول على رقم زوجي بالنظر إلى أن الأعداد مختلفة التي تساوي احتمالية أن يعطي رمي النرد رقم زوجي والأرقام مختلفة (التي هي $36/12 = 3/1$) مقسومة باحتمالية أن الأعداد مختلفة (التي هي $36/30 = 6/5$).

يمكن استخدام النتيجة أيضاً لربط $\Pr(A|B)$ و $\Pr(B|A)$ ويكون لدينا

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} \times \frac{\Pr(A)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)}.$$

وتسمى هذه عادةً بنظرية Bayes

الآن نحن مستعدين للعودة إلى سؤال الاستقلالية، للقول بأن احتمالية حدوث A مستقلة سواء حدث B أولاً بالقول أن احتمالية A هي نفس احتمالية A في ضوء B ، ولهذا

$$\Pr(A) = \Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)},$$

يمكننا إعادة كتابة ذلك كالتالي $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$

3-A المتغيرات العشوائية

الآن نقوم بتحويل تركيزنا من الأحداث العشوائية إلى أرقام غير مؤكدة والتي يطلق عليها المتغيرات العشوائية. وبالتالي، فإننا نريد أن نضع نموذج لقيمة رقمية لا يمكننا التنبؤ بها مسبقاً. ويمكن أن يكون مجموع هطول الأمطار الأسبوع المقبل، وسعر النفط بعد ستة أشهر

من الآن، أو عدد نحصل عليه عند إلقاء النرد.

ولكن حتى لو لم تتمكن من التنبؤ بالقيمة الدقيقة مسبقاً، قد تتمكن من إنشاء بيانات لاحتمال حدوث قيم مختلفة. عندما نلقي النرد نتوقع تساوي احتمالات الحصول على رقم من الستة؛ عندما نحتاج إلى التخطيط لكميات مختلفة من المطر يمكننا العودة إلى النظر في السجلات لهذا الوقت من السنة للحصول على فكرة عن احتمال حدوث عاصفة مطيرة كبيرة جداً. وإذا كنا نريد أن نتوقع سعر النفط في المستقبل يمكننا أن ننقل إلى الأسواق المالية للنظر في تسعير المشتقات واستنتاج احتمالات أن التجار في السوق قد خمنوا أسعار مختلفة محتملة.

الفكرة القائلة بأن القيم المختلفة للمتغير العشوائي لها احتمالات مختلفة يتم تشكيلها بتخصيص الاحتمالات لقيم مختلفة. نحن بحاجة هنا إلى التمييز بين المتغيرات العشوائية التي يمكن أن تأخذ واحدة فقط من مجموعة محدودة من القيم (مثل الأرقام من 1 إلى 6 التي يمكن الحصول عليها من إلقاء النرد) والمتغيرات العشوائية التي يمكن أن تأخذ أي قيمة في نطاق (مثل هطول الأمطار المقبل أسبوع). النوع الأول الذي نسميه *المتغيرات العشوائية المنفصلة*، والنوع الثاني يطلق عليه *المتغيرات العشوائية المستمرة* ومن المناسب أن نمذجة هذه الأنواع المختلفة من المتغيرات العشوائية بطرق مختلفة، ولكن الفرق بينهما في الواقع ضئيل. على كل حال، فإن سعر النفط يتم نمذجته بشكل طبيعي كمتغير عشوائي مستمر ولكن في الواقع يتم تحديده فقط حتى دقة معينة (بكل سنت أمريكي للبرميل). عادة يمكننا ترجمة ذلك بسهولة إلى حد ما بين النماذج المستمرة والمنفصلة من خلال أخذ متغير عشوائي منفصل مع زيادة دقيقة جداً في الحجم.

بالنسبة للمتغير العشوائي المنفصل، نجعل حدوث إحدى القيم المحتملة لحدث ما، وبعد ذلك من مناقشتنا السابقة نرى أن احتمالات كل نتيجة محتملة هي أرقام غير سالبة تضاف إلى 1. وبشكل أكثر رسمية، يمكننا القول أنه عندما تكون هناك قيم n ممكنة للمتغير العشوائي: $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، ثم هناك احتمالات n المنوطة بالاحتمالات

$$p_1, p_2, \dots, p_n \text{ مع } p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \text{ و } \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

يمكننا أن نرى على الفور أن هناك حاجة إلى نهج مختلف للمتغيرات العشوائية المستمرة. عند التعامل مع متغير عشوائي مستمر، على سبيل المثال طول الفترة الزمنية التي يتطلبها عامل مركز الاتصال للتعامل مع استفسارات العملاء، يصبح احتمال حدوث أي قيمة محددة غير متناهي الصغر. هناك احتمالية تساوي صفر لمكاملة تتطلب بالضبط ثلاث دقائق للتعامل مع: إذا تم قياس الأوقات بدقة كافية، المكاملة التي طولها ثلاث دقائق قد تكون في النهاية مكاملة طولها 3.0001765 دقيقة.

عندما تكون المتغيرات العشوائية مستمرة فمن المفيد أن ننظر إلى أحداث مثل $X \leq 3$ دقائق، حيث X هو المتغير العشوائي الذي هو طول المكاملة. وبالنسبة إلى أي متغير عشوائي مستمر X ، هناك دالة مهمة تعطي احتمال أن تأخذ X قيمة أقل من أو تساوي t مع اختلاف t . ويسمى هذا دالة التوزيع التراكمي (CDF) $F(t)$ ويُعرف بأنه

$$F(t) = \Pr(X \leq t).$$

وعندما تكون F دالة مستمرة، فإن الزيادة الصغيرة $F(t + \delta) - F(t)$ تقترب من الصفر δ حيث تقترب δ من الصفر. لكن

$$F(t + \delta) - F(t) = \Pr(X \leq t + \delta) - \Pr(X \leq t) = \Pr(t < X \leq t + \delta).$$

لذا، فإن دالة التوزيع التراكمي المستمر تتوافق تماما مع الحالة التي يكون فيها احتمال أن المتغير العشوائي X يقع في فاصل صغير يقترب من الصفر حيث أن طول الفاصل الزمني يقترب من الصفر. يمكننا أن نرى هذا يعادل البيان الذي لا يوجد قيمة واحدة من X التي لديها احتمال حدوث أعلى من الصفر. لاحظ أن الكثير من الناس يطلقون مصطلح "المتغير العشوائي المستمر" لمتغير عشوائي يحتوي على دالة توزيع تراكمي مستمرة.

ومن ناحية أخرى، قد يكون لدينا نوع من المتغير العشوائي المستمر حيث توجد قيم معينة ترتبط باحتمال غير صفري. على سبيل المثال، قد نأخذ في الاعتبار الوقت بين المكالمات المستلمة في مركز الاتصال وتسجيل هذا كصفر إذا كانت المكالمات في قائمة الانتظار. ثم لدينا متغير عشوائي مستمر التي يمكن أن يأخذ فقط قيمة إيجابية أو صفر، ولكن مع احتمال ثابت من الصفر. ويرتبط هذا النمط من السلوك بدالة التوزيع التراكمي F المتقطعة. يمكننا القول

تقريباً أن الزيادة في دالة التوزيع التراكمي تحدث عندما يكون هناك تراكم للناتج المحتملة.

يمكننا صياغة البيانات لدالة التوزيع التراكمي التي تطابق العبارات حول الاحتمالات. وبما أن احتمالات الأحداث غير سلبية، يمكننا القول إن دالة التوزيع التراكمي تتزايد؛ (F) $(x) \geq F(y)$ عندما $X > Y$. وعلاوة على ذلك، يجب أن تضيف احتمالات قيم مختلفة من X إلى 1 (وهي طريقة أخرى للقول أن $1 = \Pr(\Omega)$). وهكذا، فإن $\Pr(t < X \leq t + \delta)$ تقترب من 1 حيث تقترب t من اللانهاية. ونستنتج التالي

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1 \text{ and } \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0.$$

عندما يكون سلوك دالة التوزيع التراكمي جيد، يمكننا أن نجد مشتق، الذي نسميه دالة كثافة الاحتمال $f(t)$ ، لتحديد هذا رسمياً نحن بحاجة إلى العودة إلى تعريف المشتق: لدينا

$$f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(t + \delta) - F(t)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (\Pr(t < X \leq t + \delta)).$$

وبما أن دالة الكثافة f هي مشتق دالة التوزيع التراكمي F ، يمكننا أن نحول ذلك ونقول أن دالة التوزيع التراكمي تعطى بواسطة تكامل دالة كثافة الاحتمال.

ومن حقيقة أن الدوال المستمرة مختلفة في كل موضع تقريباً، وعندما نأخذ التكامل من أي دالة ثم قيمتها في نقاط معزولة فلن تحدث فرقاً. دون الدخول في التفاصيل الدقيقة اللازمة لعلاج هذا الأمر بشكل نظري، يمكننا القول أن أي متغير عشوائي مع دالة توزيع تراكمي مستمرة سيكون لها وظيفة الكثافة ومع الخاصية

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx.$$

هناك العديد من الأشكال القياسية للتوزيعات المتغيرة العشوائية المستمرة. وسوف نقدم التوزيع الطبيعي في وقت لاحق. ولكن الأمثلة الأخرى هي التوزيع الموحد، الذي له دالة الكثافة $f(x) = 1 / (b - a)$ على مدى فاصل $x \in [a, b]$ والصفر خارج هذا النطاق، والتوزيع الأسّي الذي له دالة كثافة $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ for $x \geq 0$ (الصفر بغير ذلك).

4-A المتوسطات والمتغيرات

من الطبيعي أن نسأل عن متوسط قيمة المتغير العشوائي. لأن كلمة متوسط يمكن أن يكون لها معان مختلفة حسب السياق، عادة ما تستخدم مصطلح قيمة المتوسط، وسوف نشير أيضا إلى هذا كـ القيمة / المتوقعة. القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X الذي يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، وحيث P_i $i = 1, 2, \dots, n$ يعطى بواسطة

$$E(X) = \sum_{i=1}^n P_i x_i. \quad 1-A$$

وهكذا، على سبيل المثال، القيمة المتوقعة من النرد العادل الذي يأخذ القيم من 1 إلى 6، مع كل احتمال $1/6$ تعطى من قبل

$$\frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \dots + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{21}{6} = 3.5.$$

ويمكن أيضا وصف القيمة المتوقعة بأنها متوسط القيمة التي تم الحصول عليها من عينات N من التوزيع. لذلك، إذا كنا قد قمنا برمي النرد 100 مرة فقد نتوقع أن القيمة الإجمالية لجميع الرميات تكون $350 = 3.5 \times 100$. ويأتي ذلك من التفكير في عدد المرات التي من المتوقع أن تحدث نتائج مختلفة: في 100 رميات هناك يكون $100p_1$ من الأحداث حينما تحدث X_1 ، $100p_2$ من المرات عندما تحدث X_2 ، وهلم جرا. وبالتالي، فإن مجموع الرسومات الـ 100 للمتغير العشوائي X سيكون تقريبا $\sum_{i=1}^n 100p_i x_i = 100E(X)$

المعادلة (1-A) لمتغير عشوائي منفصل له نظير لمتغير عشوائي مستمر X مع دالة الكثافة f_X . ويكون لدينا

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

وعندما تقتصر القيم التي يأخذها متغير عشوائي على نطاق $[a, b]$ ، تكون دالة الكثافة صفر خارج هذا النطاق ولدينا

$$E(X) = \int_a^b x f_X(x) dx.$$

وسواء كان المتغير العشوائي منفصلاً أم مستمراً، إذا كان غير محدد، فقد لا يكون له متوسط محدود. على سبيل المثال، إذا أخذنا متغير عشوائي X يأخذ القيم 2، 4، 8، ...، 2^n ، ... حيث $n = 1, 2, \dots$ و $\Pr(X = 2^n) = 1/2^n$ ولم يتم تعريف المتوسط. المجموع المناسب هو

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} 2^i = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

من ناحية أخرى، إذا أخذنا في اعتبارنا المتغير العشوائي Y الذي يأخذ القيم 1، 2، 3، ...، مع $\Pr(Y = n) = 1/2^n$ ، إذا يكون لذلك متوسط مُعطى من خلال

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} i = 2.$$

شيء واحد قد نرغب في القيام به مع متغير عشوائي هو أن نأخذ دالة منه من أجل خلق متغير عشوائي آخر. على سبيل المثال، قد نقوم برسم نموذج لسعر سهم معين في غضون سنة واحدة كمتغير عشوائي X ونرغب في إيجاد القيمة المتوقعة $\log(X)$. ثم سعر $\log$ هو متغير عشوائي آخر. السعر يمكن أن يكون إيجابياً فقط ولكن سعر السجل يمكن أن يأخذ أي قيمة بين $-\infty$ و ∞ . من المهم أن ندرك أننا لا يمكن أن نقول فقط $E(\log(X)) = \log(E(X))$ ؛ هذا البيان غير صحيح. بدلاً من ذلك، نحن بحاجة لحساب التوقعات باستخدام الصيغة التالية:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

الشيء الوحيد الذي يجب أن نراقبه هو أننا قد يكون لدينا متغير عشوائي X حيث $E(X)$ موجود، ولكن هناك دوال g التي تكون فيها $E(g(X))$ غير موجودة. والوقت الوحيد الذي تكون فيه الأمور بسيطة عندما يكون g خطي، مثال $g(X) = aX + b$. إذًا

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} ax f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} b f_X(x) dx \\ &= aE(X) + b. \end{aligned} \quad (2-A)$$

الآن ننظر في طرق قياس انتشار القيم المحتملة لمتغير عشوائي. وأحد الطرق الواضحة لقياس ذلك هو النظر في متوسط الفرق بين القيمة الناتجة من المتغير العشوائي والقيمة المتوسطة للمتغير العشوائي. لاحظ أننا بحاجة إلى أخذ القيمة المطلقة للفرق هنا، وإلا فإن الاختلافات الإيجابية والسلبية ستلغي بعضها البعض. ولهذا، إذا كتبنا $\mu = E(X)$ فإن قياس انتشار القيم في X يكون $E(|X - \mu|)$ حيث $E(X - \mu) = E(X) - \mu = 0$ من المعادلة (2-A). على الرغم من أن هذا "الفرق المطلق المتوقع إلى المتوسط" يجعل هذا منطقياً إلى حد كبير، لكن علامات المعامل تجعل من الصعب التعامل معه.

هناك قياس بديل وهو النظر في الفرق بين عينة من X ومتوسط μ . وبالتالي، فإننا نعتبر التباين X الذي يعرف بالقيمة المتوقعة من مربع المسافة إلى متوسط:

$$\text{var}(X) = E((X - \mu)^2)$$

بما أن التباين هو توقعات المتغير العشوائي $(X - \mu)^2$ الذي هو قيمة غير سلبية، إذا التباين $(X) \geq 0$.

التعبير لهذا التباين يمكن تبسيطه.

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2. \end{aligned} \quad (3-A)$$

يمكننا أيضاً تحديد الانحراف المعياري σ باعتباره الجذر التربيعي للتباين، لذلك

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2. \end{aligned}$$

عندما يتم ضرب متغير عشوائي في رقم ثابت K ، يتم ضرب الانحراف المعياري في K والتباين في k^2 .

كمثال، يمكننا اعتبار المتغير العشوائي X المعطى من خلال شكل الملك في رمي القطعة المعدنية. يكون لدينا $\Pr(X = 0) = 1/8$ ، $\Pr(X = 1) = 3/8$ ، $\Pr(X = 2) = 3/8$ ، $\Pr(X = 3) = 1/8$.

قيمة المتوسط لـ X هي

$$\mu = \left(\frac{3}{8} \times 1\right) + \left(\frac{3}{8} \times 2\right) + \left(\frac{1}{8} \times 3\right) = \frac{3}{2}.$$

التباين لـ X يمكن حسابه من خلال النظر في

$$E(X^2) = \left(\frac{3}{8} \times 1\right) + \left(\frac{3}{8} \times 4\right) + \left(\frac{1}{8} \times 9\right) = 3.$$

ولهذا من خلال المعادلة (3-A)،

$$\text{var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4},$$

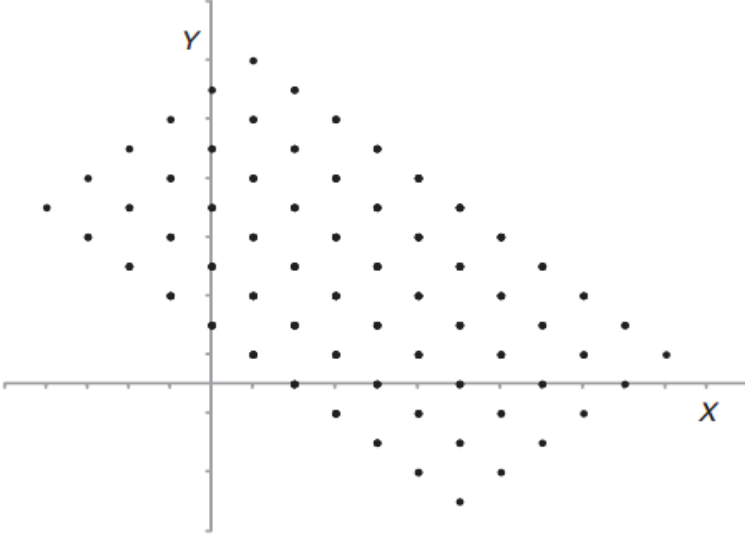
$$\text{والانحراف المعياري لـ } X \text{ هي } \sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.866.$$

5-A مجموعات من المتغيرات العشوائية

بنفس الطريقة التي نظرنا بها إلى مجموعات من الأحداث العشوائية، على سبيل المثال، في الموحدة والتقاطعية - يمكننا أيضا الجمع بين المتغيرات العشوائية. نحن بحاجة إلى التفكير في تجربة عشوائية الكامنة التي تنتج قيم لمتغيرين عشوائيين مختلفين أو أكثر. على سبيل المثال، قد نرمي النرد ثلاث مرات وتعيين X ليكون المتغير العشوائي الذي هو مجموع أول رمي ناقص الثالث و Y يكون المتغير العشوائي الذي هو مجموع آخر رمي ناقص الرمي الأول. وهذا يعني أن معرفة المعلومات عن قيمة متغير عشوائي واحد يمكن أن تعطينا معلومات عن الآخر. ولأن المتغيرين العشوائيين X و Y معرفان من نفس التجربة العشوائية الأساسية، يمكننا أن نتصور رسم قيمهما المحتملة على الرسم البياني مع قيم X على محور واحد وقيم Y على الجانب الآخر. إذا كان X و Y منفصلين، فسوف ينتهي بنا الأمر بالنقاط التي تظهر على الشبكة، ولكن إذا كان X و Y متواصلين، فإن القيم الممكنة تنتشر على الرسم البياني. لهذا المثال قمنا بوضع مخطط بياني للمجموعات المحتملة من القيم لـ X و Y في الشكل 1-A. يمكننا أن نرى أنه إذا كنا نعلم أن $X = -4$ فإننا يمكن أن نستنتج أن $Y = 6$. وذلك لأن $X = -4$ يعني أن كلا رمي الأولين هي 1 والرمية الثالثة نتيجتها 6.

ويسمى توزيع القيم لمتغيرين عشوائيين (أو أكثر) /التوزيع المشترك. فبدلاً من دالة التوزيع التراكمي لمتغير واحد، يكون لدينا الآن دالة توزيع تراكمي لتوزيع مشترك. ويعرف هذا على أنه

$$F_{X,Y}(x, y) = \Pr(X \leq x \text{ and } Y \leq y).$$



الشكل 1-أ: مجموعات من قيم المتغيرين العشوائيين X و Y .

في حين أن دالة التوزيع التراكمي البسيطة تعطي احتمالية أن يكون المتغير العشوائي أقل من قيمة معينة، فإن دوال التوزيع التراكمي المشتركة تخبرنا احتمال أن الزوج (Y, X) يكمن في منطقة (وجود شكل رباعي أسفل اليسار). إذا كانت التجربة العشوائية الأساسية تنتج قيم لمتغيرين عشوائيين مستمرين، X و Y ، فإن خصائص التوزيع المشترك (الطريقة التي تنتشر فيها القيم المركبة على مستوى (Y, X)) هي أفضل وصف من خلال دوال التوزيع التراكمي المشترك. وفي كثير من الحالات توجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة التي تمثل توزيع القيم المشتركة: وفي هذه الحالة، فإن دالة التوزيع المشترك $F_{X,Y}(x, y)$ هي ببساطة جزء لا يتجزأ من دالة الكثافة $f_{X,Y}$ فوق المنطقة المناسبة. ولهذا

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) dv \right) du,$$

و

$$\Pr(a \leq X \leq b \text{ and } c \leq Y \leq d) = \int_a^b \left(\int_c^d f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx.$$

إذا أعطينا التوزيع المشترك فإنه سوف يعني سلوكيات المتغيرات العشوائية الفردية.

بما أن

$$\Pr(X \leq x) = \Pr(X \leq x \text{ and } Y \leq \infty),$$

يمكننا القول

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y).$$

وتسمى توزيعات X و Y المستمدة من توزيع مشترك (X, Y) بالتوزيعات/المهمشية.

يمكننا القول إن اثنين من المتغيرات العشوائية مستقلة إذا كانت قيمة واحد منهم لا

يعطي أي معلومات عن قيمة الآخر. يمكن تحويل هذا إلى بيان حول الأحداث: X و Y

متغيرات عشوائية مستقلة إذا كان لجميع المجموعات A و B في R

$$\Pr(X \in A \text{ and } Y \in B) = \Pr(X \in A) \times \Pr(Y \in B).$$

هذا التعريف قريب جدا من التعريف الذي استخدمناه في وقت سابق للأحداث العشوائية:

لقد استبدلنا للتو الحدث A (مجموعة فرعية من جميع النتائج الممكنة Ω) بحكم أن المتغير

العشوائي X موجود في A (مجموعة فرعية من الأرقام الحقيقية R). لذلك يمكننا القول

إن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلان إذا كان كل حدث ممكن يحدده X وحده مستقل

عن كل حدث ممكن يحدده Y وحده.

الخطوة التالية هي التفكير في خصائص مجموع اثنين من المتغيرات العشوائية. وهذه

هي أبسط طريقة لدمجهم. صيغة متوسط مجموع اثنين أو أكثر من المتغيرات العشوائية

سهلة، نضيف متوسطات الفرديات ببساطة:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

يعد هذا صحيح دائماً - إذ أنه لا يتطلب أي خصائص مثل استقلال المتغيرات. هناك طريقة واحدة لرؤية ذلك من خلال النظر في متوسط N من التعادلات لمجموعات $X + Y$. المجموع هو نفسه تماماً من N من التعادلات X تليها N من التعادلات Y .

إذا كنا مهتمين في خصائص أخرى من مجموع المتغيرات العشوائية، مثل التباين أو الانحراف المعياري، ستكون الأمور أكثر تعقيداً. إذا كانت القيم العالية لمتغير واحد تحدث عندما تكون هناك قيم منخفضة للمتغير الآخر، فإنها سوف تميل إلى أن تلغى في المجموع. والنتيجة النهائية هي أن الانحراف المعياري لمجموع متغيرين عشوائيين قد يكون أقل من الانحراف المعياري لأي منهما بمفرده (وبالتساوي قد يكون أعلى من هذه القيمة).

ومع ذلك، عندما يكون متغيران عشوائيان مستقلين فإن القيمة المتوقعة لنتائجهم هي نتاج قيمهم المتوقعة (المشتقة من هذا) وإن الفرق بين مجموعهم هو مجموع الفروق بينهما. جبرياً يمكننا كتابة ذلك على النحو التالي

$$E(XY) = E(X) \times E(Y), \quad (4-A)$$

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y). \quad (5-A)$$

للتأكد من سبب صحة المعادلة الأولى، يمكننا أن نعتبر X و Y متغيرات عشوائية منفصلة. على وجه الخصوص، نفترض أن X يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ مع الاحتمالات $p_1, p_2, \dots, p_n$ يأخذ القيم $y_1, y_2, \dots, y_m$ مع الاحتمالات $q_1, q_2, \dots, q_m$ إذًا

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Pr(X = x_i \text{ and } Y = y_j) x_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j x_i y_j = \sum_{i=1}^n \left(p_i x_i \left(\sum_{j=1}^m q_j y_j \right) \right) \\ &= E(X)E(Y). \end{aligned}$$

النتيجة حول التباين تتبع تلك النظرية

$$\begin{aligned}
 \text{var}(X + Y) &= E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2 \\
 &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2 \\
 &= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) \\
 &= \text{var}(X) + \text{var}(Y).
 \end{aligned}$$

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X ، الذي نكتبه على أنه σ_X ، هو مجرد الجذر التربيعي للتباين، $\text{var}(X)$ ، لذلك عندما يكون X و Y مستقلين،

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\text{var}(X) + \text{var}(Y)} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}.$$

يمكننا تمديد هذه الصيغة إلى أي عدد من المتغيرات العشوائية. أبسط حالة لهم هي حيث يكون لدينا مجموعة من المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \dots, X_N$ ، والتي جميعها مستقلة ولها أيضًا نفس الانحراف المعياري، ولهذا يمكننا كتابة

$$\sigma_X = \sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = \dots = \sigma_{X_N}.$$

ثم

$$\sigma_{X_1+X_2+\dots+X_N} = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_N}^2} = \sqrt{N\sigma_X^2} = \sqrt{N}\sigma_X.$$

نعرف التباين بين X و Y بأنه

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

ثم

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y).$$

الآن من المعادلة (5-A) نرى أن تباين $\text{cov}(X, Y) = 0$ عندما يكون X و Y مستقلين (على الرغم من أن الدلالات لا تتجه في الاتجاه الآخر). أيضا

$$\text{cov}(X, X) = \text{var}(X).$$

إذا ضربنا المتغير العشوائي X بواسطة ثابت، فإن التباين بين X و Y يتم ضربه أيضا بنفس الثابت، وبالمثل للمتغير العشوائي Y . وهكذا، لأي ثابتين w_x و w_y يكون لدينا

$$\text{cov}(w_x X, w_y Y) = w_x w_y \text{cov}(X, Y).$$

من هذا يمكننا استنتاج التالي

$$\text{var}(w_x X + w_y Y) = w_x^2 \text{var}(X) + w_y^2 \text{var}(Y) + 2w_x w_y \text{cov}(X, Y).$$

إذا كان التباين موجبا، فإن القيم العالية من X ترتبط مع قيم عالية من Y . من ناحية أخرى، إذا كان التباين سالبا، فإن القيم العالية لمتغير واحد ترتبط بقيم منخفضة من الآخر. والعلاقة المبينة في الشكل A.1 أعلاه لها تباين سلبي بين X و Y .

يمكننا أيضا تطبيع حجم التباين من الانحراف المعياري للمتغيرات لإنتاج معامل

الارتباط

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

حيث σ_X هو الانحراف المعياري ل X و σ_Y هو الانحراف المعياري ل Y . تأثير هذا التحجيم يهدف لضمان أن الترابط يكمن بين -1 (علاقة سلبية كاملة) و +1 (ارتباط إيجابي كامل). الارتباط هو أيضا مستقل عن تحجيم المتغيرات، لذلك

$$\rho(w_x X, w_y Y) = \rho(X, Y).$$

6-A التوزيع الطبيعي ونظرية الحد المركزي

يعد التوزيع الطبيعي هو أهم توزيع احتمالي مستمر. ويمكن أن يأخذ التوزيع الطبيعي المعياري القيم على الخط الحقيقي بكامله وله دالة كثافة

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

اتضح أن التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ له القيمة $\sqrt{2\pi}$ ، ولهذا يتم إدراج الثابت $1/\sqrt{2\pi}$ لضمان أن تكامل دالة الكثافة يساوي 1. يتماثل هذا المتغير العشوائي حول $x = 0$ ولهذا يكون متوسطه صفر. علاوة على ذلك، فإن التباين أيضًا يساوي 1. لإثبات ذلك يجب أن يكون هناك تكامل جزئي. بما أن $xe^{-x^2/2}$ مشتق من $e^{-x^2/2}$ يكون لدينا:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x (xe^{-x^2/2}) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx - [xe^{-x^2/2}]_{-\infty}^{\infty} = 1. \end{aligned}$$

يمكننا استخدام تحويل بسيط، تحجيم x وتحويله، لإنتاج توزيع طبيعي مع أي متوسط مطلوب وانحراف معياري. للحصول على متوسط μ والانحراف المعياري σ نستخدم دالة الكثافة

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

وتكتب دالة التوزيع التراكمي لدالة التوزيع الطبيعي

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\mu,\sigma}(y) dy.$$

تعد هذه دالة مفيدة ولكن ليس لديها صيغة مغلقة الشكل. لسنوات عديدة بحث الناس عن القيم Φ في الجداول. في الوقت الحاضر من الأفضل استخدام الدالة NORMDIST في جدول البيانات.

تنبع أهمية التوزيع الطبيعي من الطريقة التي تقارب فيها نتيجة الجمع بين عدد من المتغيرات العشوائية المستقلة المختلفة مهما كانت توزيعاتها الأصلية: وهذه هي نظرية الحد المركزي.

هناك عدد قليل من الإصدارات المختلفة من هذه النظرية، وسنصف نسخة ليندبيرغ وليفي (Lindeberg Levy). ونفترض أن لدينا مجموعة من N' من المتغيرات العشوائية

$X_1, X_2, \dots, X_N$ مع استقلالية كلاً من X_i مستقلة عن الآخرين ولكل منها نفس التوزيع مع متوسط μ والتباين σ^2 (وهو أقل من اللانهاية). ونعرف أن

$$E \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) = N\mu \text{ and } \text{var} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) = N\sigma^2.$$

ولهذا، في حال وضعنا في اعتبارنا المتغير العشوائي

$$Y_N = \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) - \mu \right)$$

إذاً

$$E(Y_N) = \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} (N\mu) - \mu \right) = 0.$$

أيضاً، استخدام حقيقة أن التباين $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$

$$\begin{aligned} \text{var}(Y_N) &= \text{var} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \text{var} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) = \sigma^2. \end{aligned}$$

وهكذا، فإن المتغير Y_N له متوسط 0 والتباين σ^2 . نظرية الحد المركزي تتعلق بالحد كما تركنا عدد من المتغيرات العشوائية المجمعة تتجه إلى ما لا نهاية. لذلك، نفترض أن هناك مجموعة لا حصر لها من المتغيرات العشوائية المستقلة موزعة بشكل مستقل، ونعتبر المتغير العشوائي Y_N الذي ينطوي على متوسط N الأول من المتغيرات العشوائية. ومع زيادة N ، يقترب توزيع Y_N إلى التوزيع الطبيعي مع متوسط 0 والتباين σ^2 . على وجه الخصوص، نظرية الحد المركزي تنص على ما يلي:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(Y_N \leq \alpha) = \Phi_{0, \sigma}(\alpha).$$

لاحظ أن هناك طريقة أبسط لوصف نظرية الحد المركزي من خلال القول بأن مجموع التوزيع $\sum_{i=1}^N X_i$ في الاقتراب إلى التوزيع الطبيعي مع متوسط $N\mu$ وتباين $N\sigma^2$

ولكن تلك التركيبة بالرغم من أنها تلتقط ما يحدث إلا أنها غير مرضية لأنها تعبر عن التوزيع المحدود من حيث N وهو عدد يتجه إلى ما لا نهاية. وبالتالي، علينا أن نعيد إعادة قياس المجموع $\sum_{i=1}^N X_i$ بشكل جوهري لإزالة الاستقلالية على N . وهذا ما يحدث عندما نحدد المتغير العشوائي الجديد Y_N .

ولتوضيح نظرية الحد المركزي، نعرض في الشكل 2-A ماذا يحدث عندما نعتبر متغيراً عشوائياً يتم الحصول عليه من مجموع تسعة من المتغيرات العشوائية الفردية، كل منها موزعة بشكل موحد بين 0 و 1. يكون لدينا

$$\begin{aligned} Y_9 &= \sqrt{9} \left(\frac{1}{9} \left(\sum_{i=1}^9 X_i \right) - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^9 X_i \right) - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

حيث يكون لكل X_i توزيع موحد على $[0, 1]$. وبالتالي، فإن دالة الكثافة لـ X_i هي ببساطة $f(x) = 1$ for $0 \leq x \leq 1$. كل عنصر فردي من X_i له متوسط 0.5 ولكننا نريد أيضاً أن نجد التباين. ويعطى ذلك من خلال

$$\begin{aligned} \text{var}(X_i) &= E(X_i^2) - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4} \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

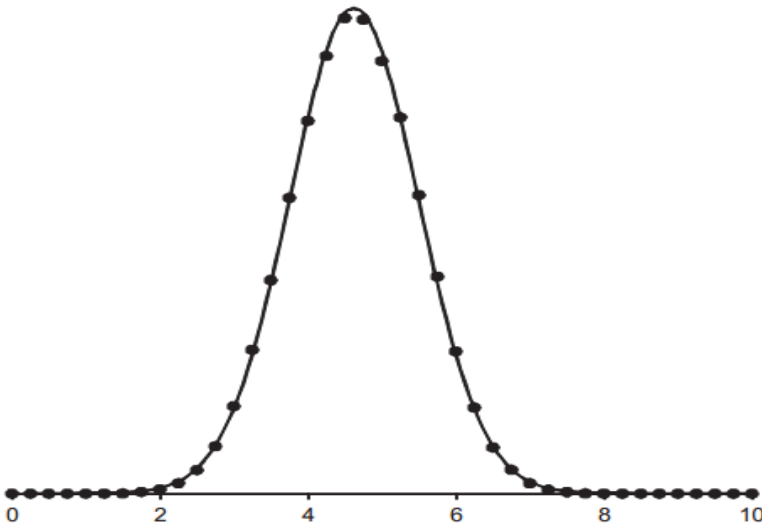
وهكذا، فإن نظرية الحد المركزي تخبرنا أن المتغير Y_N تقارب بالتوزيع الطبيعي بمتوسط 0 وتباين 12/1 (مثال الانحراف المعياري $\sqrt{\frac{1}{12}}$). بما أن

$$\sum_{i=1}^9 X_i = 3Y_9 + \frac{9}{2},$$

هذا يعادل القول بأن مجموع $\sum_{i=1}^9 X_i$ ، التوزيع الطبيعي بمتوسط $2/9$ وانحراف معياري $0.6603 = 3\sqrt{\frac{1}{12}}$.

ليس من الممكن إعطاء أي نوع من الصيغة لتوزيع $\sum X_i$ كن يمكننا أن نولد عينات عشوائية من توزيعها وهذا ما تم في الشكل A-2. يتم إنشاء الدوائر من عينة للعثور عليها، على سبيل المثال، احتمال أن $\sum X_i$ قيمة بين 4.25 و 4.5 - هو 0.1125. ويظهر الخط المتصل لتوزيع الطبيعي المطابق، الذي يعطي احتمالا متوقعا قدره 0.11358 لهذا الرقم. الفرق بين الاثنين يظهر كدائرة تحت الخط المتصل في هذه القيمة (أعلى النقاط في الرسم البياني). ومن الواضح أن التوزيع الطبيعي يوفر تقريب جيد للغاية لمجموع تسعة توزيعات موحدة.

وبالإضافة إلى ذلك تنشأ بشكل طبيعي من نظرية الحد المركزي، والتوزيع الطبيعي سهل التعامل معه لأن مجموع اثنين أو أكثر من المتغيرات العشوائية المستقلة مع توزيع طبيعي لديها أيضا توزيع طبيعي. وهكذا، إذا كان X له توزيع طبيعي بمتوسط μ_1 والتباين σ_1^2 Y له توزيع طبيعي بمتوسط μ_2 والتباين σ_2^2 ، Y مستقلان.



الشكل A-2: شرح نظرية الحد المركزي : مجموع تسعة توزيعات موحدة.

إذا $X + Y$ لهم توزيع طبيعي بمتوسط $\mu_1 + \mu_2$ والتباين $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ لاحظ أن هذه الخاصية لا تحتفظ بأي توزيع آخر: مجموع توزيعين موحدتين ليس توزيع موحد؛ مجموع توزيعين أسين ليس توزيع أسين،.. الخ.

الملحق ب

إجابات على التمارين ذات الأرقام الزوجية

2-1 Connaught

(أ) تعد السلطة التنفيذية المتهمة بالتداول الداخلي مشكلة مختلفة عن الصعوبات الكامنة وراء الانخفاض في القيمة السوقية بنسبة 60٪. ويرتبط تحذير الربح بمخاطر الأعمال، ولكنها تتضمن أيضا عنصرا من عناصر المخاطر التشغيلية الناجمة عن ضعف النظم المحاسبية (انظر الجزء (b)).

(ب) الشيء غير المعتاد في هذه الحالة هو مدى سرعة وتراجع الأسهم. وذلك لأن الشركة لم تعط أي تحذير عن حدوث هذا التحول الحاد، وادعوا أن الأساسيات كانت في حالة جيدة. المشكلة هنا هي أن الحسابات تعكس وجهة نظر متفائلة جدا حول ما سيحدث. وليس من المدهش أن الممارسات المحاسبية للمجموعة كانت قيد التدقيق. وهذه تعد مشكلة خاصة لأن الأرباح التي تبدو الآن مشتبها فيها كان يتم استخدامها لمنح مكافآت كبيرة للمديرين التنفيذيين. وستتضمن استراتيجية مناسبة لإدارة المخاطر محاسبين الشركة بصورة أكثر تحفظا عن الأرباح المستقبلية.

4-1 شكل المنتج لخريطة الحرارة

اتضح أن من الصعب اختيار الأرقام للقيام بالعمل، ولكن لدينا ترتيب يعمل بشكل جيد: غير هام = 10,000 دولار، طفيف: 20,000 دولار، متوسط = 42,000 دولار، رئيسي = 120,000 دولار، كارثي = 300,000 دولار. لاحظ أننا يجب أن يكون لدينا تكلفة بالدولار لخطر متوسط أكبر من 40,000 دولار، لتجنب التحول من مربع "متوسط" إلى "منخفض" وأقل من 45,000 دولار لتجنب التحول مربع ينبغي أن يكون "متوسط" إلى "عال".

Changing a dally failure rate into a yearly one 2-2

(أ) ندع X_i تكون متغير عشوائي مرتبطاً باليوم i وإذا كان هناك خطأ سيكون 1 وإذا لم يكن هناك سيكون الرقم 0. وتكون القيمة المتوقعة من $X_i = 0.999 + 1 \times 0.001$

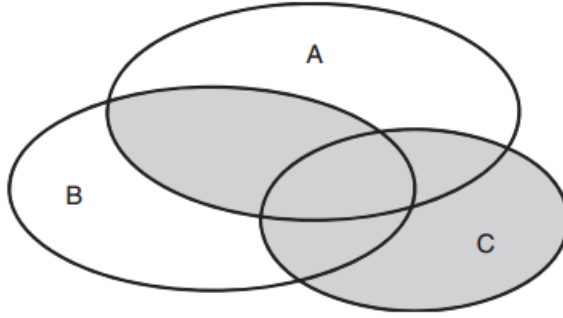
$= 0.001$. ومن الواضح أن عدد الفشل في 365 يوماً هو $N = \sum_{i=1}^{365} X_i$.

$$E(N) = \sum_{i=1}^{365} E(X_i) = \sum_{i=1}^{365} 0.001 = 0.365.$$

(ب) احتمال عدم وجود أي خطأ في أي من الـ 365 يوماً هو احتمال أن كل x_i هو 0، وإذا كانت x_i مستقلة، يتم إعطاء هذا الاحتمال بمقدار $0.999^{365} = 0.6941$. وبالتالي، فإن احتمال وجود فشل واحد على الأقل خلال هذه الفترة هو $1 - 0.6941 = 0.3059$ ، وهذا أصغر بكثير من الرقم 0.365 الذي قد يكون أول تخمين لدينا من الاحتمال.

4-2 الجمع بين خطر الاتحاد والتقاطع

(أ) في مخطط فين للشكل B.1 قمنا بوضع $A =$ سوء الأحوال الجوية، $B =$ التسليم المتأخر، و $C =$ العثور الأثري. المنطقة المظللة في الرسم البياني هي حالة تأخر أكبر من أربعة أسابيع.



الشكل 1-B: مخطط فين للممارسة 4-2.

(ب) وهذا ينطوي على احتمال (على افتراض وجود الاستقلال):

$$\begin{aligned} & \Pr(C) + \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B \cap C) \\ &= 0.05 + 0.2 \times 0.1 - 0.2 \times 0.1 \times 0.05 = 0.069. \end{aligned}$$

6-2 المحافظ ذات الأعداد الكبيرة والاختلافات المختلفة

لدينا $\sigma_i \leq \sigma_{\max}$ لكل i حيث $\sigma_{\max}$ هو أكبر انحراف معياري. حيث $K/\sigma_i = w_i$ حيث نأخذ:

$$K = \frac{W}{\left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \dots + \frac{1}{\sigma_N}\right)}$$

منذ أن $w_1 + w_2 + \dots + w_N = W$ أصبحت كل $1/\sigma_i$ على الأقل تعادل $1/\sigma_{\max}$ ، وبالتالي

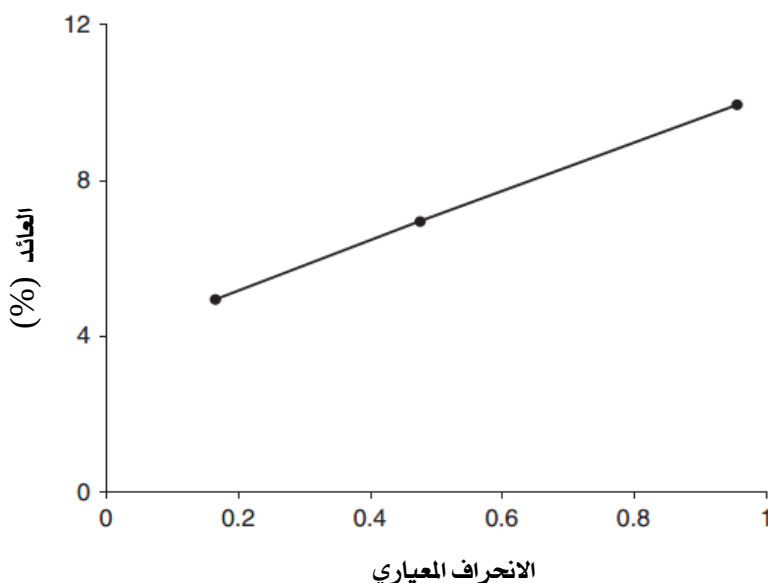
$$K \leq \frac{W}{N(1/\sigma_{\max})} = \frac{W\sigma_{\max}}{N},$$

والانحراف المعياري العام هو

$$\begin{aligned} \sigma_Z &= \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + \dots + w_N^2 \sigma_N^2} \\ &= \sqrt{K^2 + K^2 + \dots + K^2} \leq \frac{W\sigma_{\max}}{N} \sqrt{N} = \frac{W\sigma_{\max}}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

8-2 محفظة مثالية وأصول خالية من المخاطر

المحافظ المثلث لديها انحرافات معيارية من 0.16 و 0.47 و 0.95. ويبين الشكل 2-8 كيفية ترتيبها في خط مستقيم.



الشكل 2-8: العائد هو دالة خطية للانحراف المعياري.

المحافظ هي كما يلي:

Return	Weight on A	Weight on B	Weight on C	Weight on D
10	0.2236	0.4099	0.1491	0.2174
7	0.1118	0.2050	0.0745	0.6087
5	0.0373	0.0683	0.0248	0.8696

أما المحافظ الأساسية A و B و C فلهم الترجيحات 0.2857 و 0.5238 و 0.1905 وهذه النسب لا تزال هي نفسها في جميع الخانات، ولكن بنسب متفاوتة على D.

10-2 خصائص كبولاً

لدينا القيم التالية لـ $C(a,b)$ اعتماداً على المنطقة:

$$= (2/3)ab \text{ when } a \leq 3/4, b \leq 3/4 \text{ (region A)}$$

$$= (1/2)a + 2a(b - (3/4)) \text{ when } a \leq 3/4, b > 3/4 \text{ (region B)}$$

$$= (1/2)b + 2b(a - (3/4)) \text{ when } a > 3/4, b \leq 3/4 \text{ (region C)}$$

$$= (3/8) + 2(3/4)(a - 3/4) + 2(3/4)(b - 3/4) - 2(a - 3/4)(b - 3/4)$$

خلاف ذلك (المنطقة D)

مع هذه التعاريف نحصل على

$$C(a, 1) = (1/2)a + 2a(1/4) = a \text{ when } a \leq 3/4$$

$$C(1, b) = (1/2)b + 2b(1/4) = b \text{ when } b \leq 3/4$$

$$\begin{aligned} C(a, 1) &= (3/8) + (3/2)(a - 3/4) + (3/2)(1/4) - (a - 3/4)(1/2) \\ &= a \text{ when } a > 3/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(1, b) &= (3/8) + (3/2)(1/4) + (3/2)(b - 3/4) - (1/2)(b - 3/4) \\ &= b \text{ when } b > 3/4. \end{aligned}$$

وبالتالي، C لديها توزيعات هامشية موحدة كما هو مطلوب. ونحن نتحقق من المشتقات المتعلقة بـ a (المشتقات متشابهة).

$$\partial C / \partial a = (2/3)b > 0 \text{ in } A$$

$$= (1/2) + 2(b - (3/4)) > 0 \text{ in } B$$

$$= 2b > 0 \text{ in } C$$

$$= 2(3/4) - 2(b - 3/4) = 3 - 2b > 0 \text{ in } D.$$

وعلاوة على ذلك، يتم إنشاء C بحيث تتواجد على الحدود. لذلك تتزايد C في كل من الحجاج. ومع ذلك، فإن عدم مساواة المستطيل لا تستمر، حيث أن

$$\begin{aligned} C(3/4, 3/4) + C(1, 1) - C(3/4, 1) - C(1, 3/4) \\ = (3/8) + 1 - (3/4) - (3/4) = -1/8. \end{aligned}$$

12-2 الاعتماد على المنحنى العلوي

ملحوظة

$$\begin{aligned}\Pr(X > F_X^{-1}(\alpha), Y > F_Y^{-1}(\alpha)) &= 1 - \Pr(X \leq F_X^{-1}(\alpha) \text{ or } Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)) \\ &= 1 - \Pr(X \leq F_X^{-1}(\alpha)) - \Pr(Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)) \\ &\quad + \Pr(X \leq F_X^{-1}(\alpha) \text{ and } Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)) \\ &= 1 - 2\alpha + C(\alpha, \alpha).\end{aligned}$$

لذلك، وضع $\delta = 1 - \alpha$ كصيغة لـ λ_u تصبح:

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1 - 2(1 - \delta) + C(1 - \delta, 1 - \delta)}{\delta} \\ &= 2 + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(1 - \delta, 1 - \delta) - 1}{\delta}.\end{aligned}$$

و باستبدال كلايتون كوبولا نحصل على

$$\lambda_u = 2 + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2}{(1-\delta)^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} - 1}{\delta}.$$

الآن الحد هنا يساوي السلبية للمشتقة $-1 - \frac{1}{2}(2x^{-2} - 1)$ وتم تقييمها عند $x=1$ (ملاحظة $g(1)=1$) ولكن

$$\frac{dg}{dx} = (1/2)(2x^{-2} - 1)^{-\frac{3}{2}}(4x^{-3}).$$

وبما أن هذا يأخذ القيمة 2 عند $x=1$ نحصل على النتيجة التي نريدها $\lambda_u = 0$

2-3 القيمة المعرضة للخطر لتوزيع المثلث

يمكننا حساب دالة التوزيع التراكمي، ولكن البديل هو العمل مباشرة مع المنطقة الواقعة تحت المثلث. وسوف سنعمل بآلاف الدولارات، الآن نريد إيجاد a بحيث أن $\int_a^{100} f(x)dx = 0.01$. وهكذا (باستخدام قاعدة مرات ارتفاع العمود الرأسي لمنطقة المثلث) نحن بحاجة:

$$(1/2)(100 - a)f(a) = (1/2)(100 - a)^2/100^2 = 0.01.$$

وبالتالي

$$(100 - a)^2 = 200$$

حيث $a = 85.858 = 100 - \sqrt{200}$ وتبلغ القيمة المعرضة للخطر البالغة 99% $= 85.858$ دولار. وبالمثل، القيمة المعرضة للخطر البالغة 95% من $(a - 100) = 2$ تعطينا $a = 100 - \sqrt{1000} = 68.377$ والقيمة المعرضة للخطر البالغة 95% $= 68.377$ دولار.

4-3 يقلل التنوع من القيمة المعرضة للمخاطر

القيمة المطلقة المعرضة للخطر بنسبة 98% من الاستثمار في كل من A وB هي 6000 دولار - وهذا مبين في جدول النتائج المحتملة واحتمالاتها. وهناك احتمال أكبر من 2% أن واحدة أو غيرها من الشركات سوف تفشل، ولكن هناك احتمال أقل من 2% أن تفشل كل من الشركتين. ومن ناحية أخرى، فإن استثمار 20 000 دولار في سنديين في الشركة A يعطي فرصة بنسبة 4% لجمع 30% فقط من القيمة الاسمية، - وبالتالي فإن القيمة المطلقة المعرضة للخطر البالغة 98% هي 14 000 دولار.

6-3 عملية تقديرات القيمة المعرضة للخطر

(أ) قد يكون لنظامين مختلفين تماماً نفس عدد انتهاكات القيمة المعرضة للخطر ولكن هذه الانتهاكات تحدث في أوقات مختلفة. وللقيام بهذه العملية بشكل صحيح ويمكننا ببساطة عمل إجراء القيمة المعرضة للخطر حيث تتوقع أرباحاً كبيرة جداً في يوم واحد فقط من أصل مائة يوم. (كبيرة جداً بحيث تكون هناك احتمالية كبيرة لحدوث اختراق) وبالنسبة لـ 99 يوماً فتتوقع خسارة كبيرة جداً، كبيرة بما فيه الكفاية بأن لا تحدث الخسارة. وهذا يعد إجراء ضعيف لأنه لا يخبرنا شيئاً عن المخاطر الحقيقية؛ مما يدل على أننا لا يمكننا الحكم على العملية من خلال عدد الانتهاكات فقط.

(ب) الجواب هو أنها لا تحتاج إلى أن تكون جيدة بشكل متساو (انظر المناقشة أعلاه). ويعد الإجراء جيداً عندما يكون غنياً بالمعلومات. وهذا يعني أن كل رقم يتم إنتاجه هو

الرقم الصحيح من حيث التنبؤ بمستوى المخاطر الصحيح لليوم المعني (بدلاً من أن تكون مرتفعة جداً في بعض الأيام ومنخفضة جداً في الأيام الأخرى).

8-3 النقص المتوقع هو فرعي

(أ) النقص المتوقع هو مقياس للمخاطر يقوم بالقياس والتحول على النحو الملائم، حيث يمكننا القول إن العجز المتوقع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 5000 وانحراف معياري 3000 هو

$$-5000 + 2.667 \times 3000 = 3001.$$

(ب) يمكن حساب العجز المتوقع للمشروع الثاني بنفس الطريقة. وتعطى من خلال

$$-3000 + 2.667 \times 1500 = 1000.5.$$

ومجموع المشروعين لديه توزيع طبيعي مع متوسط 8000 والتباين الذي يعطى من خلال مجموع الفرقين، وبالتالي، فإن الانحراف المعياري يعطى من خلال

$$-3000 + 2.667 \times 1500 = 1000.5.$$

وهذا يعني أن العجز المتوقع هو

$$-3000 + 2.667 \times 1500 = 1000.5.$$

وهو أقل بكثير من مجموع النقص المتوقع من المشاريع الفردية، وهو $1000.5 + 3001 = 4001.5$.

2-4 التوزيع الفردي

مع وجود مؤشر منحني يبلغ 5، نحن نعلم أن توزيع الحد الأقصى سوف يقترب من دالة التوزيع التراكمي $F_{\max}(a_N x) = \exp(-x^{-5})$ ، نفترض أن عدد المرات في أي يوم هي متسقة بما فيه الكفاية للسماح لهم جميعاً بأن يتم نمذجتهم باستخدام نفس التوزيع. نحن نستخدم المعلومات على متوسط هذا التوزيع لتقدير معلمة التحجيم a_N وتعطى القيمة المتوسطة للتوزيع الفردي ومعلمة $a=5$ من خلال $\Gamma(1 - (1/5)) = 1.1642$.

ولدينا أيضاً $F_{\max}(x) \simeq \exp -(x/a_N)^{-5}$ والتي سيكون لها متوسط $1.1642a_N$ (وهذا يحتاج إلى تفكير دقيق - قد نفكر أولاً أن المتوسط هو $1.1642/a_N$) وبالتالي $a_N = 12/1.1642 = 10.3$. وبالتالي، يمكننا تقسيم التوزيع كما يلي

$$F_{\max}(x) = \exp \left(- \left(\frac{x}{10.3} \right)^{-5} \right)$$

وبالتالي فإن احتمال أن تكون x أقل من 20 هو

$$F_{\max}(20) = \exp(-(20/10.3)^{-5}) = 0.964$$

الضمان في أي يوم وبالتالي فالقيمة المتوقعة من $28 = 3.6 / 100$ يوماً قبل حدوث ذلك.

4-4 حساب متوسط إجمالي الناتج المحلي

دالة الكثافة لإجمالي الناتج المحلي هي: $(1/\beta)(1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi-1}$ وبالتالي، فإن متوسط هذا التوزيع يعطى بالحد الأقصى لـ R

$$\begin{aligned} \int_0^R (x/\beta)(1 + \xi x/\beta)^{-(1/\xi)-1} dx &= \frac{1}{\xi - 1} \left[\frac{x + \beta}{(1 + \xi x/\beta)^{1/\xi}} \right]_0^R \\ &= \frac{1}{\xi - 1} \left(\frac{R + \beta}{(1 + \xi R/\beta)^{1/\xi}} - \beta \right) \\ &= \frac{\beta}{1 - \xi} \left(1 - \frac{1 + R/\beta}{(1 + \xi R/\beta)^{1/\xi}} \right). \end{aligned}$$

إذا كان $1 < \xi$ و $0 < \delta$ و $\xi = 1 / (1 + \delta)$ فإن:

$$\frac{1 + R/\beta}{(1 + \xi R/\beta)^{1/\xi}} < (1 + \xi R/\beta)^{1-1/\xi} = (1 + \xi R/\beta)^{-\delta}.$$

ولكن عند اتجاه R إلى ما لا نهاية، فإن $(1 + \xi R/\beta)^{-\delta}$ تتجه نحو الصفر. وبالتالي،

فإن التكامل يأخذ قيمة $\beta/(1 - \xi)$ في الحدود الكبيرة لـ R

6-4 تقدير المعلومات من متوسط الأرقام الزائدة

اكتب β_{10} لقيمة β لتوزيع $G_{\xi,\beta}$ الذي يصف الفائض أكثر من 10 ملايين دولار، و β_{20}

لما يعادل 20 مليون دولار وهكذا. ومن ثم الصيغة $\beta/(1-\xi)$ للمتوسط الزائد تدل على:

$$\beta_{10}/(1-\xi) = 9,$$

$$\beta_{20}/(1-\xi) = 12.$$

ونحن نعلم أيضا أن $\beta_{20} = \beta_{10} + 10\xi$. So, $10\xi/(1-\xi) = 3$ وبالتالي

$$13\xi = 3 \text{ و } \xi = 3/13 = 0.23$$

في حين أن

$$\beta_{20} = 12(1 - 0.23) = 9.24.$$

وأخيرا نستنتج أن

$$\beta_{25} = \beta_{20} + 5\xi = 9.24 + 5 \times 0.23 = 10.39.$$

2-5 فرضية المنفعة المتوقعة والمشروع التجاري

(أ) مع وجود دالة المنفعة الخطية، يكون تعظيم الفائدة المتوقعة هو نفس تعظيم الربح المتوقع. حيث يعطي الخيار A (الاستثمار) عائد قدرة 40 دولار بشكل مؤكد. إذا كانت كيت تسدد المبلغ x فإن القيمة المتوقعة للاستثمار من الخيار B (منح القرض إلى كيت) هي $0.7x$ (مع احتمال 0.3 بأن يخسر جيمس كل شيء). ولجعل هذا جدير بالاهتمام فإنه يجب على الأقل أن يتطابق مع الربح المحدد، أي:

$$x = 1040/0.7 = \$1485.71.$$

(ب) المعادلة الأساسية لهذه المشكلة هي

$$u(1040) = 0.7u(x).$$

وعند $\sqrt{x}$ ، يمكننا إعادة كتابة هذا على النحو التالي

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{1040}}{0.7} = 46.07.$$

وبالتالي

$$x = 46.07^2 = \$2122.45$$

(وهو مبلغ أكبر من الذي تستطيع كيت تسديده).

4-5 الهيمنة العشوائية والآفاق السلبية

نفترض أن $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ وكل شيء يقدر بالدولار، قد نفترض دون فقدان العمومية أن نفس النتائج تظهر في كل من A و B (من خلال وضع الاحتمالات تساوي صفر إذا لزم الأمر). لاحظ أن أسوأ النتائج في A- و B- هي $-x_n$ و $-y_n$ والشرط الذي نحتاج إلى إظهاره من أجل إثبات أن B- يهيمن بشكل عشوائي على A- ينطوي على مبالغ لاحتمالات النتيجة i وجميع النتائج الأفضل:

$$q_i + q_{i-1} + \dots + q_1 \geq p_i + p_{i-1} + \dots + p_1$$

لكل i يوجد الأقل واحدة من هذه التفاوتات الصارمة. ومع ذلك، فإن هذا الشرط هو بالضبط الذي أعطى كبديل للتعريف الأول للهيمنة العشوائية لـ A على B في التفاوت (5-5).

6-5 فشل الهيمنة العشوائية

يمكننا أن نلخص الأرباح الزائدة بقيمة 700٪ أو الأفضل إظهار أن q لديه احتمال أعلى. أو تلخيص الأرباح الزائدة بقيمة 1000٪ أو الأفضل إظهار أن r لديها احتمال أعلى. وبالتالي لا يهيمن عشوائياً على الآخر. وهذا أيضاً يعطي فكرة عن كيفية ترتيب المرافق للنتيجة التي نريدها. ولإظهار أن q هي المفضلة، يمكننا أن نأخذ "المنفعة A" في الجدول 1-B ولإظهار أن r هي المفضلة، نأخذ "المنفعة B". الأعمدة الأخرى تلخص عناصر الحصول على قيمة الفائدة المتوقعة (هناك العديد من الطرق المختلفة لتحقيق نفس النتيجة).

الجدول 1-B: مجموعتان من مهام المنافع للممارسة 6-5

A المنفعة			B المنفعة		
	q	r		q	r
\$100	1	0.1	0	1	0.1
\$300	2	0.4	0.6	2	0.4
\$400	3	0.6	0	3	0.6
\$500	4	0	1.2	4	0
\$700	20	6.0	4.0	5	1.5
\$900	21	4.2	2.1	6	1.2
\$1000	22	0	2.2	20	0
totals		11.3	10.1		3.8

2-6 نظرية الاحتمالات عندما تتحول الأرباح إلى خسائر

وبما أن كل من x و y إيجابية والاحتمال A هو مفضل عن B ، نحصل على

$$\sum_{i=1}^n [w^+(p_i + \dots + p_n) - w^+(p_{i+1} + \dots + p_n)]v(x_i) \\ > \sum_{i=1}^n [w^+(q_i + \dots + q_n) - w^+(q_{i+1} + \dots + q_n)]v(y_i).$$

الاستعاضة عن $v(x_i)$ و $v(y_i)$ باستخدام $v(-x_i) = -\lambda v(x_i)$ و $v(-y_i) = -\lambda v(y_i)$ يعطينا:

$$-(1/\lambda) \sum_{i=1}^n [w^+(p_i + \dots + p_n) - w^+(p_{i+1} + \dots + p_n)]v(-x_i) \\ > -(1/\lambda) \sum_{i=1}^n [w^+(q_i + \dots + q_n) - w^+(q_{i+1} + \dots + q_n)]v(-y_i).$$

الضرب في $-\lambda$ يغير اتجاه التفاوت، وبالتالي لدينا:

$$\sum_{i=1}^n [w^-(p_i + \dots + p_n) - w^-(p_{i+1} + \dots + p_n)]v(-x_i) \\ < \sum_{i=1}^n [w^-(q_i + \dots + q_n) - w^-(q_{i+1} + \dots + q_n)]v(-y_i).$$

هذا هو بالضبط التفاوت الذي نحتاجه لإظهار أن الاحتمال

$-A = (-x_1, p_1; -x_2, p_2; \dots; -x_n, p_n)$ هو مفضل على $-B = (-y_1, q_1; -y_2, q_2; \dots; -y_n, q_n)$

4-6 الأس في قانون السلطة

معايير المعلمات التقليدية لديها:

$$v(x) = x^{0.88} \text{ and } w^+(p) = 0.132.$$

وهذا يعني أن قيم الاحتمالات هي كما يلي

$$V(A) = v(1)(1 - w^+(0.05)) + v(381)w^+(0.05) = 25.52.$$

$$V(B) = v(20) = 13.96.$$

$$V(C) = v(301)(1 - w^+(0.05)) + v(681)w^+(0.05) = 172.81.$$

$$V(D) = v(320) = 160.15.$$

تتنبأ نظرية التوقعات أن كلا من A و C مفضلان. وتغيير الأس إلى 0.6 يعطي القيم:

$$V(A) = 5.54, V(B) = 6.03, V(C) = 33.26, V(D) = 31.85,$$

والتي تعطي التنبؤ الدقيق للتجربة.

6-6 يمكن أن يؤدي تغيير الاحتمالات إلى تغيير الخيارات

(أ) قيم الاحتمالات الأربعة هي:

$$V(A) = w^-(0.5)v(-100) + w^+(0.5)v(1000)$$

$$= 0.454 \times (-126.2) + 0.421 \times (501.2) = 153.71.$$

$$V(B) = w^+(0.4)v(1000) = 0.370 \times (501.2) = 185.44.$$

$$V(C) = (w^+(1) - w^+(0.7))v(200) + (w^+(0.7) - w^+(0.4))v(300)$$

$$+ (w^+(0.4))v(550)$$

$$= (1 - 0.534) \times 117.74 + (0.534 - 0.370) \times 169.59$$

$$+ 0.370 \times 292.64$$

$$= 190.96.$$

$$V(D) = v(340) = 189.82.$$

وبالتالي C لديها أعلى قيمة وتعد هي المفضلة.

(ب) مقامرات المرحلة الثانية هم $A' = (-\$440, 0.5; \$660, 0.5)$

$$B' = -340, 0.6; \$660, 0.4), C' = (-140, 0.3; -40, 0.3; 210, 0.4).$$

$$\begin{aligned} V(A') &= w^-(0.5)v(-440) + w^+(0.5)v(660) \\ &= 0.454 \times (-478.8) + 0.421 \times (344.8) = -72.21. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(B') &= w^-(0.6)v(-340) + w^+(0.4)v(660) \\ &= 0.518 \times (-379.6) + 0.370 \times (344.8) = -69.06. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(C') &= (w^-(0.6) - w^-(0.3))v(-40) + w^-(0.3)v(-140) \\ &\quad + w^+(0.4)v(210) \\ &= (0.474 - 0.328) \times (-55.3) + 0.328 \times (-170.8) \\ &\quad + 0.370 \times 123.03 \\ &= -18.57. \end{aligned}$$

جميع القيم سلبية، لذلك لن يتم قبول أي من هذه المقامرات.

2.7 أضواء أجاكس

تعتقد الشركة أن الطلب الشهري هو $K - \alpha p$ حيث p هو سعر كل لمبة. فإن $K - 10\alpha = 50\,000$ ، وإذا تم بيع S الشهر المقبل مقابل 8 دولار، ستكون $K - 8\alpha = S$ حل هذين المعادلتين يعطينا $K = 5S - 200\,000$ و $\alpha = (S/2) - 25\,000$

بعد إيجاد Y ومبيعات S نجد أن المبلغ المتبقي للبيع بعد شهر واحد هو $100,000 - Y + S$ حيث يجب أن تكون المبيعات كل شهر نصف هذا المبلغ ويجب أن تتطابق مع الطلب كل الشهر. وهكذا (باستخدام الصيغة لـ K و α التي استخلصناها).

$$50\,000 - (S/2) + (Y/2) = (5S - 200\,000) - ((S/2) - 25\,000)p.$$

و بحل P نحصل على:

$$p = 10 - \frac{S}{5000} + \frac{Y}{50\,000}.$$

تكاليف المرحلة الأولى للطلب (مما يسمح للتكلفة السابقة من المخزون الحالي المفترض أنه 5 دولار لكل لمبة) هي

$$C_1(Y) = 500\,000 + 5Y.$$

ثم كتابة $Q(Y, S)$ لإجمالي الإيرادات الناتجة عن جميع المبيعات:

$$Q(Y, S) = (100\,000 - S + Y)\left(10 - \frac{S}{5000} + \frac{Y}{50\,000}\right) + 8S.$$

الآن افترض أن $S_i = S$ مع احتمال P_i (حيث $\sum_{i=1}^N p_i = 1$) فإن:

$$\Pi(Y) = -C_1(Y) + \sum_{i=1}^N p_i Q(Y, S_i).$$

بأخذ المشتقات، يتم إيجاد Y من خلال

$$5 + \sum_{i=1}^N p_i \frac{(100\,000 - S_i + Y)}{50\,000} + \sum_{i=1}^N p_i \left(10 - \frac{S_i}{5000} + \frac{Y}{50\,000}\right) = 0$$

$$17 + \sum_{i=1}^N p_i \frac{-11S}{50\,000} + \frac{Y}{25\,000} = 0.$$

وبالتالي

$$Y = \frac{11\bar{S}}{2} - 17 \times 25\,000$$

حيث أن $\bar{S} = \sum_{i=1}^N p_i S_i$ هو متوسط قيمة S

4-7 القيود غير المتوقعة في مثال نسبة الادخار

ويختلف الطلب في الشهر الأول بالنسبة للسيئاريو A والسيئاريو C، ومن ثم فإن ذلك سيسمح عادة باختيار خيارات مختلفة في إطار السيئاريوهات المختلفة. ومع ذلك، لا توجد علاقة في هذه المشكلة بين الطلبات في فترات مختلفة. وعلاوة على ذلك، فإن الوضع في نهاية الشهر الأول هو نفسه لكلا السيئاريوهات - بمجرد أن يرتفع الطلب عن 50 فلا يمكن أن يكون هناك مبيعات إضافية. ويبدأ الشهر الثاني لكل من السيئاريو A والسيئاريو C بما تم طلبه في بداية الشهر الأول فقط (أي x_1)، وبالتالي فإن الحل الغير متوقع (الذي لا يمكن أن يأخذ في الاعتبار معلومات الطلب المستقبلية) سوف يطلب بنفس المبلغ لهذين السيئاريوهين.

6-7 قيود القيمة المعرضة للمخاطر على محفظة ذات سندات

لنفترض أن ترجيحات الحافظة هي w_A, w_B, w_C حيث تمثل w_C النسبة في سندات الخزينة. فإن الربح المتوقع بعد ثلاث سنوات يتناسب مع $250w_A + 300w_B + 200w_C$ ويكون توزيع الأرباح طبيعي مع هذا المتوسط والانحراف المعياري.

$$\sqrt{w_A 100^2 + w_B 150^2} = 10\sqrt{100w_A + 225w_B}.$$

لتحقيق احتمال أقل من 0.01 من وجود ربح سلبي ينطوي على قيمة a_z وهي 2.3263 أو أكثر. وبالتالي القيد هو:

$$\frac{250w_A + 300w_B + 200w_C}{10\sqrt{100w_A + 225w_B}} \geq 2.3263.$$

وباستغلال هذا القيد نحصل على مشكلة تحسين:

$$250w_A + 300w_B + 200w_C \text{ قدر أقصى}$$

من خلال:

$$\begin{aligned} (25w_A + 30w_B + 20w_C)^2 &\geq 5.4119(100w_A + 225w_B) \\ w_A + w_B + w_C &= 1 \\ w_A \geq 0, w_B \geq 0, w_C &\geq 0. \end{aligned}$$

ويمكن حل هذا باستخدام جدول بيانات وأداة السولفر، ولحل هذا بشكل مباشر يمكننا

استبدال $w_A - w_B = 1$ وحصل على:

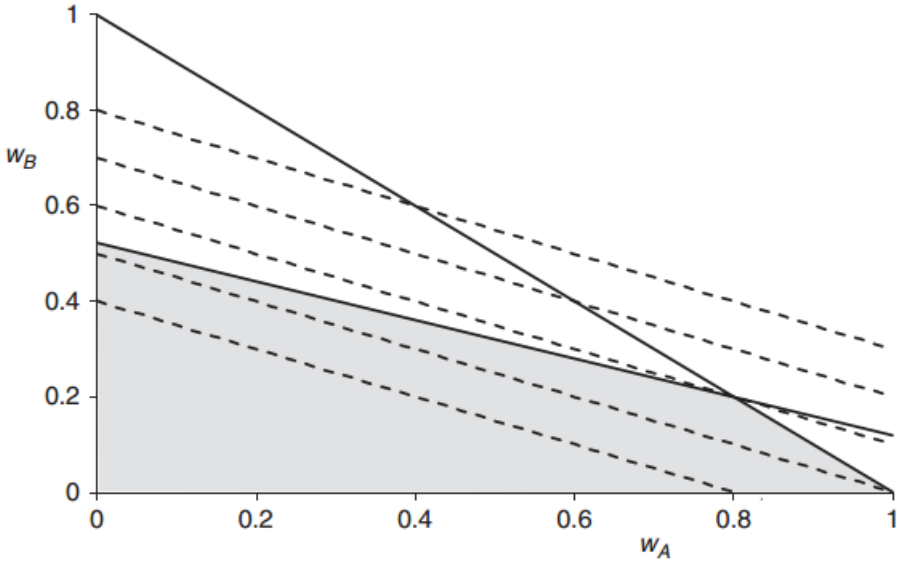
$$50w_A + 100w_B + 200 \text{ قدر أقصى}$$

من خلال:

$$\begin{aligned} (5w_A + 10w_B + 20)^2 &\geq 5.4119(100w_A + 225w_B) \\ w_A \geq 0, w_B \geq 0, w_A + w_B &\leq 1. \end{aligned}$$

يظهر الشكل B-3 (حيث الخطوط المتقطعة تمثل ملامح الهدف) أننا نجد الحل عندما يتقاطع الخط $w_A + w_B = 1$ مع القيد $(w_A + 10w_B + 20)^2 = 5.4119(100w_A + 225w_B)$ ويحدث هذا

عند $w_A=0.8012$ و $w_B=0.1988$. وبالتالي $w_C=0$ وفي هذه الحالة لا نقوم بالاستثمار في السندات.



الشكل 3-B: المنطقة المظللة لتحسين المحفظة.

2-8 المعاملات ليست ذات الصلة

إن صياغة هذه المشكلة مشابهة لميزانية ترتيب عدم اليقين، ولكن هنا $B = 3$ لذلك لا ينتج عنها قيوداً إضافية. ولهذا، يمكن إعادة كتابة القيد كما يلي

$$\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \bar{a}_3 x_3 + w_1 + w_2 + w_3 + 3t \leq b,$$

$$w_1 + t \geq \delta_1 |x_1|$$

$$w_2 + t \geq \delta_2 |x_2|$$

$$w_3 + t \geq \delta_3 |x_3|$$

$$w_i \geq 0, t \geq 0.$$

والسؤال هو: كيف يمكن إعادة كتابة ذلك كقيد واحد؟

لاحظ أن أي حل من (w_1, w_2, w_3, t) يمكن استبداله بحل جديد وإضافة الحل

الحالي لكل من w_i ووضع $t = 0$ ، أي أننا نستخدم الحل الجديد

$$(w'_1, w'_2, w'_3, t') = (w_1 + t, w_2 + t, w_3 + t, 0)$$

وهذا يعني أننا يمكن أن نفترض $t = 0$ دون فقدان العمومية للحصول على القيود:

$$\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \bar{a}_3 x_3 + w_1 + w_2 + w_3 \leq b$$

$$w_1 \geq \delta_1 |x_1|$$

$$w_2 \geq \delta_2 |x_2|$$

$$w_3 \geq \delta_3 |x_3|$$

$$w_i \geq 0.$$

ولكن الآن لاحظ أن أي حل ينطوي على حل موجود بالفعل $w_i = \delta_i |x_i|$ إذا كان هناك تفاوت صارم في w_i فيمكننا تقليله وسوف يظل القيد الأول قائماً. وأخيراً يمكننا كتابة القيد كما يلي:

$$\bar{a}_1 x_1 + \delta_1 |x_1| + \bar{a}_2 x_2 + \delta_2 |x_2| + \bar{a}_3 x_3 + \delta_3 |x_3| \leq b.$$

ويمكن أيضاً أن تستمد هذه النتيجة ببساطة من خلال ملاحظة أنه يمكننا استبدال a_i بـ $\bar{a}_i + \delta_i$ عندما تكون $x_i \geq 0$ أو استبدالها بـ $\bar{a}_i - \delta_i$ عندما تكون $x_i < 0$.

وسيوّدي ذلك إلى فرض قيود أشد ضمن مجموعة عدم اليقين A

4-8 التحسين الأمثل لـ "سينتنال"

حدث انخفاض في الربح بمقدار 40 دولار لكل عملية بيع بسبب التغيير في سعر البيع وبالتالي فإن دالة الهدف تصبح:

$$120z_L + 100z_S - 70(x_L + x_S)$$

مع وجود نفس القيود التي كانت توجد من قبل، وتكون المشكلة النهائية الجديدة هي

تحقيق أقصى قدر G

من خلال:

$$\begin{aligned} G &\leq 120x_L - 70(x_L + x_S) \\ G &\leq 120 \times 5000 - 70(x_L + x_S) \\ G &\leq 100x_S - 70(x_L + x_S) \\ x_L &\geq 0, x_S \geq 0. \end{aligned}$$

الحل لهذه المشكلة كما تم الادعاء هو وضع كل شيء يساوي صفر. والنتيجة هي أنه مع هذه البيانات فإنه من المستحيل ضمان الربح، ولكن يتم اختيار x_L و x_S ، والسبب هو أن الخسارة من امتلاك الكثير (70 دولار) هي أكثر من أرباح المبيعات 50 دولار و 30 دولار للحجيين. لذلك، إذا كانت الأوضاع لا تسمح بوجود طلب أكبر فستكون الخسائر المتعلقة بالطلب الأكبر ي أكبر من أرباح الطلب الأصغر، مما يؤدي إلى خسارة سيبتال في نهاية المطاف.

6-8 بروفانس رينتالز

(أ) تمثل x عدد أنظمة تحديد المواقع العالمية المثبتة، وتمثل p نسبة العملاء الراغبين في الحصول على نظام تحديد المواقع العالمية، حيث تجني بروفانس رينتالز ربحاً قيمته 4 دولار لكل من سيارات $\min(x, 100p)$ وخسارة قدرها 10 دولار لكل من سيارات $\max(100p - x, 0) = 100p - \min(x, 100p)$ ، وبالتالي، فإن الأرباح التي حققتها بروفانس رينتالز هي:

$$\begin{aligned} &2000 \min(x, 100p) - 5000 \max(100p - x, 0) - 750x \\ &= 7000 \min(x, 100p) - 500000p - 750x. \end{aligned}$$

مشكلة التحسين الأمثل هو

$$\max_x \left[\min_{p \in [0,1]} (7000 \min(x, 100p) - 500000p - 750x) \right].$$

(ب) دالة الهدف الداخلية للتقليل إلى الحد الأدنى هي مقعرة في p ، ويمكننا إيجاد المتغير p من خلال:

$$7000 \min(x, 100p) - 500000p$$

وبالتالي، يتم تصغيره عند نقطة النهاية للفاصل الزمني $[0, 1]$.

(ج) إذا كان $p = 0$ فإن الربح هو $-x750$ وإذا كانت $p = 1$ فإن الربح هو $-x7000$
 $x750 - 500000$ ، وبهذا تصبح المشكلة:

$$\max_x [\min(-750x, 6250x - 500000)]$$

لا يمكن أبداً أن ينتج التعظيم (المضاعفة) ربح مضمون، ولكننا في نفس الوقت لا نريد أن تكون الخسارة كبيرة جداً. فعندما تؤخذ x كدالة، يتم مضاعفة الدالة $\min(-750x, 6250x - 500000)$ حيث تعبر الخطان، أي عند:

$$\begin{aligned} -750x &= 6250x - 500000 \\ x &= 500000/7000 = 71.4. \end{aligned}$$

2-9 حفلات البوب

(أ) القيمة المتوقعة للاستثمار الأول بسيطة: 12 000 دولار للمبيعات المتوقعة للتذاكر
 تعني أن الربح المتوقع هو 12 000 دولار - 10 000 دولار = 2000 دولار.

(ب) نحن نعمل باستخدام وحدات بآلاف الدولارات، وبما أنه هناك ضمان بأن يسترجع المستثمرين تسعة من أصل عشرة من استثمارهم الأولية، يكون صافي المبلغ الإجمالي هو -1 وعلاوة على ذلك، يحصل المستثمرون على 5٪ من الأرباح التي تزيد عن 171. اكتب X للمبيعات المتوقعة للتذاكر، X هو متغير عشوائي طبيعي مع متوسط μ $= 230$ وانحراف معياري 80. ويكون الربح المتوقع هو

$$\begin{aligned} E(\Pi) &= -1 + (1/2)E[\max(X - 171, 0)] \\ &= -1 + (1/20)[(230 - 171)(1 - \Phi_{\mu,\sigma}(171)) + 80^2\phi_{\mu,\sigma}(171)] \\ &= -1 + (1/20)59(1 - 0.2304) + (1/20)80^2 \times 0.003799 \\ &= 2.486. \end{aligned}$$

وبالتالي فإن الربح المتوقع هو 2486 دولار، وهو أعلى من (a) وبالتالي يكون هو الاستثمار المفضل.

4-9 سامبا فارم

سيتم اتخاذ قرار على أساس معلومات حول الفعالية، والتي نقيسها كجزء من P وتعطى قيمة القطع لـ p على أساس $p=0.4$ ، وتبلغ أرباح السنوات من 4 إلى 8 خمسين ألف دولار لكل 0.1 زيادة في p فوق 0.4. ويمكن كتابة هذا $(0, p - 0.4)$ وبالتالي $500 \max(0, p - 0.4)$ حصل على صافي القيمة الحالية من خلال:

$$NPV = -60 - \frac{60}{1.08} - \frac{60}{1.08^2} + 500 \max(0, p - 0.4) \times \left(\frac{1}{1.08^3} + \frac{1}{1.08^4} + \frac{1}{1.08^5} + \frac{1}{1.08^6} + \frac{1}{1.08^7} \right)$$

نحن بحاجة لأخذ هذا التوقع p الموزع بشكل موحد على $[0, 0.8]$. باستخدام الصيغة التي لدينا

$$E[\max(0, p - 0.4)] = \frac{(0.8 - 0.4)^2}{2(0.8 - 0)} = 0.1.$$

وبالتالي فإن صافي القيمة الحالية هي:

$$\begin{aligned} E(NPV) &= -60 - \frac{60}{1.08} - \frac{60}{1.08^2} \\ &\quad + 50 \left(\frac{1}{1.08^3} + \frac{1}{1.08^4} + \frac{1}{1.08^5} + \frac{1}{1.08^6} + \frac{1}{1.08^7} \right) \\ &= 4.16. \end{aligned}$$

6-9 أسعار الخيارات تعني التوزيع.

يصبح خيار عقد الشراء أكثر قيمة مع ارتفاع سعر السهم. وبافتراض وجود توزيع طبيعي، فإن السعر المناسب لخيار عقد الشراء وسعر الممارسة هو

$$E(\max(X - a, 0)) = (\mu - a)(1 - \Phi_{\mu, \sigma}(a)) + \sigma^2 \varphi_{\mu, \sigma}(a).$$

يمكننا إعداد جدول بيانات للبحث عن قيم μ و σ التي تعطي القيم الصحيحة عند استخدام هذه الصيغة. نجد أن

$$\mu = 452.35,$$

$$\sigma = 55.94.$$

عندما يكون خيار عقد البيع هو أكثر قيمة مع انخفاض سعر السهم بافتراض وجود توزيع طبيعي، نحصل على سعر مناسب من خلال:

$$E[\max(a - X, 0)] = (a - \mu)\Phi_{\mu,\sigma}(a) + \sigma^2\varphi_{\mu,\sigma}(a).$$

وباستبدال $a=450$ نحصل على

$$\begin{aligned} E[\max(a - X, 0)] &= (-2.35)\Phi_{\mu,\sigma}(450) + (55.94)^2\varphi_{\mu,\sigma}(450) \\ &= 21.16. \end{aligned}$$

ومن المثير للاهتمام أنه، كما ذكر في القسم 9-4، الأرقام هنا تطابق الأسعار الفعلية لخيارات عقد الشراء الأمريكية لـ "أبل" (للتواريخ المذكورة) والسعر الفعلي لخيار عقد البيع هو 22.00 دولار. وهو رقم لا يختلف عن نتيجة هذه العملية الحسابية.

2-10 مجموعات ماركوف

مصفوفة الانتقال هي:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

يمكننا أن نأخذ صلاحيات هذه المصفوفة للعثور على الاحتمالات على مدى ثلاث سنوات (وهذا يمكن القيام به في إكسيل باستخدام أداة MMULT، ولكن عليك أن تكون على دراية بأدوات "array") لدينا:

$$P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.221 & 0.385 & 0.298 & 0.096 \\ 0.024 & 0.149 & 0.385 & 0.442 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذا كنا من المرجح أن نجد B أو C إذن فاحتمالية العثور على D بعد ثلاث خطوات هي $0.5(0.096 + 0.442) = 0.269$. الآن نحن نفكر في الجمع بين B وC، وهذا يعطينا سلسلة مكونة من ثلاث حالات مع وجود احتمالات حدوث انتقال أو تحول.

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.85 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ونحصل على احتمالات الانتقال المكونة من ثلاث خطوات من خلال

$$\tilde{P}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.129 & 0.614 & 0.257 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهذا يعطي احتمال الحصول على D بعد ثلاث خطوات، هي 0.257 (أصغر قليلا من دون تجميع).

4-10 أكتوفون

	جيد	سليئ	احتمالات	WoE
18-21	385	37	10.41	-0.17
21-29	587	41	14.32	0.15
30-45	476	36	13.22	0.07
46+	402	36	11.17	-0.10
بطاقة ائتمان	1353	67	20.19	0.49
بدون بطاقة ائتمان	497	83	5.99	-0.72
حوال سابق	1388	74	18.76	0.42
هاتف سابق	462	76	6.08	-0.71
بدون هاتف سابق				

يمكننا حساب ترجيحات الأدلة على النحو التالي:

مجموع الأشخاص الجيدة من السكان هو 1850 و 150 شخص سيء. لذا $\log(O_{Pop}) = \log(1850/150) = 2.512$. ويمكن الحصول على وثيقة التقييم ببساطة عن طريق ضرب ترجيحات الأدلة في 100

وثيقة التقييم	
17-	18-21 السن
15	21-29 السن
7	30-45 السن
-10	46+ السن
49	بطاقة انتمان
-72	بدون بطاقة انتمان
42	هاتف سابق
-71	بدون هاتف سابق
251	ثابت

6-10 كوسل للعناية بالبشرة

(أ) نحصل على قيم β التالية

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= 3.89 \\
 \beta_{h1} &= -0.58 \\
 \beta_{h2} &= -0.57 \\
 \beta_{h3} &= 0 \\
 \beta_{\text{full-time}} &= -0.17 \\
 \beta_{\text{not-ft}} &= 0 \\
 \beta_{<30} &= -0.28 \\
 \beta_{30-39} &= 0.17 \\
 \beta_{40-49} &= 0.70 \\
 \beta_{>50} &= 0
 \end{aligned}$$

(ب) ولجعلها جديرة بالاهتمام، نحتاج إلى أن تكون نسبة N / P أقل من 150 دولار / 2.50 دولار=60، وهذا يتطلب أن تكون الاحتمالات اللوغاريتمية أقل من $\log(60)=4.094$ 3. باستخدام الإجراء العادي وهو الضرب في 100، وإعادة توزيع المدة الثابتة (189 لساعات الأسرة، 100 للعمل، و100 للعمر) نحصل على

وثيقة التقييم على النحو التالي

السّمات	وثيقة التقييم
الأسرة المكونة من 1	131
الأسرة المكونة من 2	132
الأسرة المكونة من 3 أو أكثر	189
عمل بدوام كامل	83
السن تحت 30	100
السن من 30 إلى 39	72
السن من 40 إلى 49	117
السن أعلى من 50	170
	100

ويجدر منح القرض للأفراد الذين درجاتهم أقل من 409.

