اللعب بِـ «القوى»

Bharath Sriraman

جامعة مونتانو

Pawel Strzelecki

معهد الرياضيات، جامعة وارسو، بولاندا

ملخص

يستكشف هــذا الفصل النطاق الواسع للرياضيات البحتة التــي أصبحت سهلة المنال عبــر استخدام المسائل التي تشتمل على القــوى Powers. ونركز هنا على وجه الخصوص، علــى ضــرورة تحقيق التوازن بين منحى تدريسي ومنهاج تعليمي فــي الرياضيات يستند إلى التطبيــق والسيــاق من ناحيــة، والرياضيات البحتة القويــة، الكامنة ببساطــة تحت الأسئلة المطروحة والمفهومة بسهولة في الرياضيات البحتة من ناحية أخرى؛ وبذلك يدرك الطلاب محدوديــة أدوات الحساب، واكتساب تقديرٍ لجمال الرياضيــات وقوتها، إضافة إلى قابليتها البعيدة المدى للتطبيق في العالم الحقيقي.

المقدمة

ندرس في هذا البحث التبعات التربوية والمنهاجية في المجال العام «للقوى». ونعني بـ «القوى» الرياضيات الناشئة عن دراسة الدوالّ الأسّية(Exponential Functions). وتوصي معايير الجبر في الولايات المتحدة أن يصار إلى تعريف طلاب الصفوف التاسع إلى الثاني عشر بالدالة الأسية وفئات الدوال على نحوٍ عام بما في ذلك الدوال متعددة الحدود (Polynomial)، واللوغرتمية (Logarithmic) والفترية (Periodic) (NCTM, 2000). ويُعرّف طلاب الصفين التاسع والعاشر (الذين تتراوح أعمارهم بين 13–16 سنة) على نحوٍ تقليدي في الولايات المتحدة بالدوال الأسية، عن طريق توسيع قوانين الأس من قوى العدد الصحيح (Integer Powers) إلى القوى الحقيقية(Real Powers). وعادة ما يتبع ذلك رسوم بيانية للدوال الأسية، مثل: $2^x, 3^x$ وهكذا، بهدف نقل حقيقة أن نطاق الدوال على صيغة a^x $(a>1)$، يكون عبارة عن مجموعة أعداد حقيقية، في حين يكون المدى.$(0, \infty)$ ويظهر الرسم البياني أيضاً خصائص مثل زيادة سلوك الدالة، ويمثل محور السينات (x–Axis) الخط الأفقي المقارب لهذه الدالة، ويكون على صيغة.$x \to -\infty$ ثم يصار إلى تعريف الطلاب بالحالة $0<a<1$ ؛ من أجل دراسة خصائص نعرفها جميعاً. ويتمثل الموضوع الرئيس في هذه المعاملة التقليدية للدوال الأسية في تعريف الطلاب العدد غير النسبي (E) عن طريق دراسة سلوك $(1+1/n)^n$ as $n \to \infty$. وأخيراً، يُعرّف الطلاب باللوغريتمات (Logarithms) والقوانين المماثلة في اللوغريتمات المشتقة من لوغريتمات الأسس(Logarithms Of Exponents).

وبحسب الخبرات الرياضية للمؤلف الثاني في بولندا بصفته طالباً في المرحلة الثانوية، فإن الدوال الأسية تظهر في وقت متأخر نوعاً ما في المنهاج مقارنة بمناهج الولايات المتحدة الأمريكية، أي مع بداية السنة الثالثة للمرحلة الثانوية (للطلاب الذين تتراوح أعمارهم بين 16 و 17 سنة). وقد كان تسلسل الأحداث مشابهاً لما وصفناه في الفقرة السابقة. ففي البداية تعلّم الطلاب كيفية تعريف القوة ذات الأس النسبي (Rational Exponents)، وبذلك، تُلبّى متطلبات قوانين الأسس الطبيعية جميعاً. وبعدئذٍ، وبالنظر إلى الرسم البياني، يُحثّ الطلاب على ملاحظة أن الدوال الأسية تنظم التقدم اللوغاريتمي إلى

تقـدم هندسي (وتستخدم هذه السمــة في رسم الدوال الأسية على ورقــة رسم بياني) إلخ. وأخيــراً، عُرّفت القوى ذات الأسس الحقيقية العشوائيــة بطريقة أكثر أو أقل دقة باستخدام الاضطراد (Monotonicity) في الأعداد. ومن الصعوبة بمكان تحديد عدد الطلاب الذين تمكنــوا من استيعاب هذا الجزء مــن الكتاب المدرسي والاحتفاظ بمــا استوعبوه. وعلى أي حــال، فإننــا نخشى أن العدد لم يكــن كبيراً. لقد كان هدف هذا الكتاب، فــي رأينا، واضحاً ويتمثل في تبسيط الرياضيات على غرار طريقة مجموعة البورباكي[1] (Bourbaki)، ولكن يــا للأسف، لم يفلح في ذلك، فتعريف مجموعة «البورباكــي» لـِ $2^{\sqrt{2}}$ بصفته أصغر حد أعلى لمجموعــة القــوى النسبية للعدد، 2، لم يكن موفقاً، إذ إن الطالب البالغ من العمر ستة عشر عامــاً، والمتألق رياضيّاً، لديه كثير من الأمور الأكثر أهمية التي بوسعه عملها، لذا، يجب أن تكون الرياضيات البحتة مصدر ترفيه وتسلية، وسنعود إلى هذا لاحقاً.

ويواجــه الطــلاب أيضاً في المنهاج التقليدي مشكلات فــي الكلمات المرتبطة بالدوال الأسيــة؛ إذ إن الــدوال التي تنتج مــن الانحدار الأسي للبيانات الناشئــة عن العلوم الطبيعية والاجتماعية والمالية، تُعطى الأولوية عند تقديمها للطلاب في سياق حل المسائل الكلامية. وهنــاك كثيــر من الأمثلة علــى مثل هذه الدالــة. فمثــلاً، $p = 760e^{-0\cdot 145\mathrm{H}}$ تربط الضغط p علــى السطح المستوي (بالمليمتــر الزئبقي) حتى ارتفاع h (بالكيلومتر) فوق مستوى سطح البحر. وينمذج انتشار المعلومات عبر وسائل الإعلام (التلفاز والمجلات) بوساطة الصيغة $d = p(1- e^{-Kt}$، حيث تشير p إلى عيّنة محددة، في حين تشير T إلى الزمن (Coleman, 1964). وتوجــد أمثلــة تقليديــة كثيــرة في الفيزيــاء. مثلاً، يمثّــل قانون نيوتن فــي التبريد بالصيغــة الآتيــة: $f(T) = T + (f_0 - T)\, e^{Kt}$ حيــث $k < 0,$، وتمثــل $f0$ الحرارة الإبتدائية للجســم المسخّن، في حين تمثــل T حرارة الوسط المحيط. ومن الأمثلــة التقليدية الأخرى التحلل الإشعاعي ونمو البكتيريا وغيرهما.

1) نيكــولا بورباكــي Bourbaki Nicolas اســم جماعي مستعار لمجموعة من خبراء الرياضيات (معظمهم فرنسيــون)، وهي مجموعة كانت تحرر منذ عام 1934، سلسلة من كتب الرياضيات في محاولة منها لجعلها أكثر منطقية، حيث تبدأ دائماً من العام إلى الخاص، وتعرّف جميع المصطلحات والمفاهيم التــي تستعملها، وهذا يسهــل على القارىء فهم المادة المكتوبة. وقد عُرفت البراهين الرياضية التــي تستخدمها ببراهين بورباكي، أي براهين يفهمها الناس من غير ذوي الاختصاص أيضاً- المراجع .

وقـد قُلب هذا المنحى من خلال المنهاج المستند إلى الإصلاح في الولايات المتحدة، الذي يركز على نمذجة الأنشطة بوصفها وسيلة لتوليد البيانات، حيث يمكن، مثلاً، استخدام الكـرات المرتدة ذات درجة مرونة معروفة. وبناءً على هذا المثال، يطلب إلى الطلاب إلقاء الكـرة (كرة سلة، كـرة تنس،.. إلخ) من ارتفاع معروف، ومتابعـة ارتفاع الارتدادات إلى أن تستقـر الكرة على الأرض. ويكون لمثل هذه البيانـات معنى عند إدراك سيـر ارتفاع الكرة المرتـدة مقارنـة بعدد الارتدادات الـذي يوضح تناقص النمط الأسي، ومن ثـم يؤدي إلى الانحـدار الأسـي. مثلاً، تنمـذج البيانات الخاصة بكـرة السلة المرتدة بـكل دقة من خلال $f\ (x)\ = \mathrm{A}\ (0.5)^{x}$، حيـث تشيـر A إلـى الارتفـاع الابتدائـي، فـي حين تشيـر x إلى عدد الارتدادات. وهذه أمثلة محددة من بين عدد كبير من النماذج التي تشير إلى أنشطة تعرِّض الطـلاب للرياضيـات التطبيقية في سياق العالم الحقيقي في سـن مبكرة جدّاً في المدرسة (Lesh & Doerr, 2003). ويمثـل هذا نقيضاً كاملاً للأيـام «الخوالي الجميلة» عندما كان علـى المرء أن يدرس مساقاً في المعـادلات التفاضلية ليواجه مثل هذا النـوع من المسائل ضمن بيئة تعليمية إملائية.

ينقل التعرض للجوانب التطبيقية من الرياضيات جانباً واحداً فقط للطلاب من طيف الرياضيـات، ويمكننـا القول إن أنشطة الرياضيـات البحتة يمكن تحقيقهـا أيضاً، بوساطة مسائل تحتوي على قوى يمكن أن تقود الطلاب إلى تبصر عميق بسلوك الأعداد، والاحتمالات المثيرة في الرياضيات البحتة، على الرغم من جملتها الابتدائية المثيرة. ويتمثل هدفنا من هـذا البحث فـي إبراز هذه الاحتمالات البديلة في الرياضيـات البحتة، وتطبيقها عن طريق التلاعب بالقوى، وبذلك يتسع خيال الطلاب.

مدخل لأساسيات نظرية الأعداد

المداخـل إلى أساسيـات نظرية الأعداد يصـادف الطلاب مفاهيـم أساسية لنظرية الأعـداد، مثل الأعداد الأولية والأعداد المركبة، وخوارزميـة القسمة، والاختبارات المتعلقة بهـا)، ومفاهيـم المضاعـف المشتـرك الأصغـر، والقاسم المشتـرك الأعظـم، والنظرية الأساسيـة في الحساب في مرحلة المدرسـة المتوسطة للطلاب الذين تتراوح أعمارهم بين

(10–13 سنة). ويا للأسف، ليس هناك متابعة، أو أنها متابعة لا تفي بالغرض، لهذه الموضوعات في مراحل الدراسة العليا. ويتمثل أحد عيوب المنهاج في إظهار حساب التفاضل والتكامل، بصفته قمة خبرات المرحلة الثانوية للطلاب في تناول مجموعة من الأعداد الحقيقية ذات دوال متغيرات مستمرة. ويقدم التسلسل التقليدي للجبر، والهندسة، وعلم المثلثات، والهندسة التحليلية فرصاً ضئيلة لتطوير مفاهيم نظرية الأعداد الأولية التي يعرفها الطلاب سابقاً على نحوٍ أكبر. ويمكن للمسائل التي تحتوي على قوى أن تكون مفيدة في حل مثل هذا الوضع غير الملائم. ويمكن تصنيف جُلّ الكتب الموجودة التي تشتمل على معالجة المسائل المحتوية على قوى ونظرية الأعداد، في كتب «المسابقات»، لذا، فهي توجِد هالة «نخبوية» تتعلق بمثل هذه المسائل. ونحن نفكر في ذلك بطريقة مغايرة، وندعو المعلمين إلى الإفادة، على نحوٍ ملائم، من مهام «القوة»؛ لينقلوا إلى الطلاب قوة الرياضيات البحتة ومحدودية أدوات الحساب. وسيصار إلى توضيح مثل هذه المسألة لاحقاً.

قد يفترض أحدهم السؤال الآتي: ما باقي قسمة العدد 131 6 على 215؟ لا تستطيع معظم الآلات الحاسبة حل هذه المسألة، وهذا يحتم يحتم علينا ضرورة تفحص المسألة بأدوات مفاهيمية مختلفة. نستطيع التفكر فيما يعنيه الباقي، ويمكننا الرجوع إلى مفاهيم من الصفوف الأولى والبدء بعمليات حساب أساسية، مثل:

ما باقي قسمة العدد 5 على 3؟ إنه 2، كان ذلك سهلاً.

ما باقي قسمة $40=8\times5$ على 3؟ إنه 1، لا يزال الأمر سهلاً.

والآن، ما باقي قسمة $280=7\times8\times5$ على 3؟ نستطيع بصعوبة إجراء القسمة على 3، والتوصل إلى أن الباقي يساوي 1.

هل هناك درس يمكن تعلّمه من خلال هذا العمل التجريبي؟ نعم؛ الظاهرة الرياضية المهمة التي نسعى إلى إيصالها تتمثل في أننا لو حسبنا باقي كلٍّ من 7، 8، 5 (التي هي 2، 2، 1 على التوالي)، وضربنا هذا الباقي، أي $4= 1\times2\times2$، وقسمناه على 3، فإننا سنحصل على الرقم نفسه في باقي قسمة 280 على 3. ويطلق على هذه الظاهرة بصورة عامة نظرية

الباقــي التي يمكــن كتابتها على النحو الآتــي: باقي حاصل ضرب أعــداد مقسومة على عدد معيّــن يساوي باقــي حاصل ضرب باقي كلٍّ مــن الأعداد (يكوّن الناتــج) المقسوم على هذا العدد.

دعونــا نعود مرة أخرى إلى المسألــة الأصلية. نستطيع استخــدام قوانين الأسس التي حفظهــا طلابنا بدقة، ونكتــب 6^{131} بصفتها حاصل ضرب أعداد تتــرك وراءها باقياً بسيطاً عند قسمته على العدد 215. وسيكون أفضل جواب محتمل هو العدد 6^3، حيث إن $216 = 6^3$، وبقسمة العدد 216 على 215 يكون الباقي 1، ونستطيع بسهولة ضرب 1S.

وهكــذا، فــإن $6^{131} = 6^3 \times 6^3 \times 6^3 \times 6^3 \times 6^3 \ldots$ (43 مرة $6^2 \times$ مقسوماً على 215 يترك ناتجــاً يســاوي $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \ldots$ (43 مــرة $36 \times$، وهي عبارة عــن 36 و36 مقسومة على 215 بحيــث يكــون الباقي 36. انتهــى. لا تسمح لنا هــذه المسألة بالإفادة مــن قوانين الأس فحسب، بل تقود أيضاً إلى بعض وجهات النظر في نظرية الأعداد.

ومــن المسائــل اللطيفة الأخرى التــي تشتمل على القــوى، حساب الرقــم الأخير لقوة معيّنــة، الــذي يكون رقماً ضخماً عادة مثل 777^{777} أو 2004 2004. ومرة أخرى، يتيح لنا هذا التواصــل مــع السلوك الأساسي للأعــداد. وإذا ما نظرنا إلى مسألة سهلــة مثل 12345 11، فإننا نلاحظ أن الرقم الأخير هو 1، حيث إننا نضرب الناتج 1S. وأما إذا كان لدينا 11^{12345} فإننــا نستطيــع التحقق بالتجربــة، أن 11^4، 11^3، 11^2، 11^1...تنتهي دائماً بواحد. ويمكن أن يتوصــل الطلاب إلى أن الرقــم الأخير هو 1، وعموماً، فإن الرقم الأخير لأي عدد ضخم مثل 777^{777} يمثــل ناتــج الرقم الأخير مضروبــاً في نفسه في عدد المــرات المحددة. وعلى هذا، فإن الرقم الأخير 777^{777} هو الرقم الأخير نفسه لِ 7^{777}. والآن، إذا كتبنا قوى العدد 7، فإننا سنكتشف ظاهرة دورية في الأرقام الأخيرة ذات صلة بقواها، وهذا يلاحظ بوساطة سلسلة القــوى للعــدد 7^9، 7^8، 7^7، 7 6، 7 5، 11 4، 7 3، 7 2، 7 1، 7 :7... التي تعطي الأرقام الأخيرة 7، 9، 3، 1، 7، 9، 3، 1، 7، 3......... وبذلك، نستطيع مرة أخرى أن نوظف قوانين الأسس في إعادة كتابة 777 7 على النحو الآتي:

$$7^{777} = (7^4) \times (7^4) \times (7^4) \times (7^4) \times \ldots (194 \text{ مرة}) \times 7^1$$

لذا، فإن الرقم الأخير هو 7.

ولمّــا كنا قادريــن على تحديد الأعداد الأخيــرة للأعداد الكبيرة، فلمــاذا لا ننظر إلى مسألة تحديد الأعداد الأولية.

البدء بمسائل الأعداد: «مبررات» للتوافيق والتحليل

دعونــا نستهل حديثنا بمسألة موجودة. هل ثمة قــوة صحيحة للعدد 2 تبدأ بِ 1999... في امتدادها العشري؟ وبعبارة أخرى، يطلب إلينا السؤال المطروح إثبات وجود عدد صحيح «n» مثل العدد 2ن 1999 = 2^n 1999=... دون السؤال على نحوٍ صريح عن مقدار هذه القوة بالتحديد. ونستطيع بكل وضوح افتراض أن $n>0$. عندما نرفع العدد 2 إلى أي قوة صحيحة، هنــاك تسعة خيارات واضحة لكل رقــم بعد ذلك. وبذلك، يكون هناك 9000= 9.10.10.10 طريقــة ممكنة لترتيــب الأرقام الأربعة الأولــى. ولمّا كانت $n>0$، فليس لدينــا أي قيود على عــدد القيم التي نستطيــع إيجادها، ونستطيــع بسهولة أن نوجد أكثر مــن 9000 قيمة للعدد 2^n. وباستخــدام مبدأ برج الحمــام، يجب أن تبدأ بعض قوى العدد 2 بالأعداد الأربعة الأولى نفسهــا، لكننا لا نزال غير متأكدين أن إحدى هذه السلاسل الأولية تساوي فعلاً 1999. ويُعدُّ هــذا ســؤالاً دقيقاً ذا صلة باللانسبية، وقد ارجأناه بعض الوقــت بعد الإشارة إلى شيء أكثر سهولة.

هنــاك مسألة لطيفة تحل بسهولة من خلال مبدأ برج الحمام، وتستفيد من خصائص قابليــة القسمة في إثبات وجــود بعض قوى العدد 3 التي تنتهــي بِ 001. ويمكن توضيح هذا بسهولــة علــى النحــو الآتي: افترضــ أن 3^m و 3^n حيــث ($m > n>1$)، وعنــد قسمتهما على العــدد 1000 يكــون الباقي متساوياً. (يحتاج وجود مثل M و N إلى تطبيق مبدأ برج الحمام، وسنتــرك هــذا كله للقارئ). إذن، فــإن $3^m - 3^n = 3^n(3^{m-n} - 1)$ تقبل القسمة على 1000. ومــن الواضح الآن أن 3N و 1000 ليس بينهما عامــل مشترك، وهذا يعني أن 1000 يجب أن تقسم العامل $3^{m-n} - 1$، وهذا يعني أيضاً أن 3^{m-n} ينتهي بِ 001.

دعنا نعود مرة أخرى إلى قوى العدد 2، وإلى السؤال الآتي: هل كان أحدها يبدأ بالعدد 1999، فـي الترميز العشري. ربما يبدو هذا التسلسـل غريباً جدّاً من حيث ظهوره في بداية الترميـز العشري لبعض قوى العدد 2. فدعونا نجرب شيئـاً أكثر سهولة في البداية، ولنأخذ مثلاً، التسلسل A(N) المؤلف من الأعداد الأولى للقوى المتتالية للعدد 2:

8 ،4 ،2 ،1 ،5 ،3 ،2 ،1 ،6 ،3 ،1 ،8 ،4 ،2 ،1،..... فهـل سيظهـر العـدد 7 فـي هـذا التسلسل؟

هـذه المسألة معروفة في النسـخ المختلفة للدراسات المتعلقـة بالرياضيات، وظهرت الإشـارة الأولـى إليهـا فـي الكتـاب المشهـور المعـادلات التفاضليـة العاديـة Ordinary Differential Equations (Arnold, 1978)، وعادةً ما تكون مصحوبة بحقائق مساعدة، أو مقترحات يقصد بها إيجاد حلول يمكن الوصول إليها بسهولة. ومع ذلك، لم يصادفنا أي حـل تفصيلي لهذه المسألة. وسنعالج هذا الموقـف المؤسف، وسوف نوضح في هذه العملية الرياضيات الغنية التي ستنجم عنها. بادئ ذي بدء، فإن أي حل سريع باستخدام ورقة وقلم رصاص أو أي أداة حساب أخرى سوف يتوصل بسهولة إلى:

$$2^{46} = 70{,}368{,}744{,}177{,}664$$

وبالمضـي قدماً في هـذه التجربة، نستطيع ملاحظة أن العـدد 7 يمثل العدد الأول في القوة السادسـة والخمسين والسادسة والستيـن والسادسة والسبعيـن والسادسة والثمانين للقـوة 2 (لكن العـدد الأول للقوة 106 للعدد 2 هو 8 وليس 7). ومـع ذلك، فإن هذه الطريقة التجريبيـة بعيدة كل البعد مـن أن تكون جذابة رياضيّاً، ونحن نحتاج إلى حل أفضل يتيح لنا وضـع نتائـج أخرى. ويجب علينا في البداية أن ندرك معنى الجملـة القائلة إن العدد 7 يمثل العدد الأول للعدد $2n$. الجواب بسيط: فالعدد سبعة يمثل العدد الأول لِ $2n$ إذا، و إذا فقط، كان للعدد الطبيعي k:

$$7.10^{k} < 2^{n} < 8.10^{k}$$

ونستطيع الحصول على وصف أكثر سهولة لهذا الشرط إذا أخذنا اللوغريتمات العشرية لكلا الجانبين في الحسبان، وهو ما يعرفه طلابنا. وعلى هذا، ينتج: $K + \mathrm{Log}\ (7) < n\mathrm{Log}\ (2) < k + \mathrm{Log}\ 8$). ولما كانت اللوغريتمات العشرية للعددين 7 و8 تقع بين 0 و 1، فنستطيع القول إن K هو الجزء المتمم للعدد، $n\mathrm{Log}(2)$ الذي يقود إلى التباينات الآتية:

$$\mathrm{Log}\ 7 < n\mathrm{Log}2 - [n\mathrm{Log}2] < \mathrm{Log}8$$

ويكفي الآن أن نجمع بعض الحقائق المعروفة، وندعو القارئ إلى تحققها.

ليما (مُبرهنة) 1: العدد $\mathrm{Log}(2)$ غير نسبي.

ليما 2: إذا كان العدد x غير نسبي، وكان $c(n) := n\mathrm{x} - [n\mathrm{x}]$، فعندئذٍ يكون لكل A و B تنتمي إلى المجموعة [0,1] عدد غير محدود من التسلسل $c(n)$ يقع داخل الفترة (A,B).

نأمل أن يحث من يقرؤون هذا الكتاب طلابهم ويشجعونهم على إثبات ليما 1، التي من السهل جدّاً إثباتها بوساطة التناقض. وبافتراض أن البرهان قد تم، فدعونا نلقي نظرة على إثبات ليما 2، ومن ثم نتفحص تبعاتها.

إثبات ليما 2: لاحظ أولاً أن عناصر التسلسل $c\ (n)$ جميعها مختلفة. وفعلاً إذا كان $c(k) = c(m)$ حيث $k>m$، فإن. $(k-m)x = [kx] - [mx]$ وهذا يُعدُّ تناقضاً، حيث إن ناتج العدد الصحيح غير الصفر $(k-m)$، والعدد غير النسبي x لا يمكن أن يكونا عدداً صحيحاً.

لنأخذ الآن عدداً صحيحاً موجباً N حيث يكون $1/\ n<b-a$، وحيث تكون الأعداد $c(1), c\ (2),\dots , c(n+1)$

مختلفة وتنتمي إلى الفترة [0,1]، ونستدل بوساطة مبدأ برج الحمام أنه للعددين I و S، حيث I و (I+S) يقعان بين 1 و (N+1)، فيكون لدينا التباين الآتي:

$$0 < \mathcal{E} = \left| c(i)-(i+s) \right| \leq 1\ /\ n<b-a$$

والآن، لُـفّ المحـور الحقيقي على صورة محيط الدائـرة T بمحيط طوله 1 مع نقطة0 مميـزة فـي المركز. للعدديـن a, b في $[0, 1]$، ندلـل بوساطة (a, b) قوسـ T، الذي يقابل الفتـرة (a,b)، على المحـور الحقيقي. لتكـن f: T→T دوراناً بعكس تجـاه عقارب الساعة بزاويـة نصف قطريةXπ2. ويتعين علينا النظر إلى صور النقطة المميزة 0 تحت التكرارات F علـى T، بـدلاً من مراقبـة الأعداد $c(n)$ في الفتـرة $[0,1]$. وبعد لحظة مـن التأمل، فإننا نلاحظ أن طول القوس $(0, b\ (n))$ حيث $[\ (0)$.f•...• f• f= (0) $f\ n$ = $b(n)$مجموعة مـن التفاصيـل= •] مساوٍ لِ $c(n)$. ومن هنا، فإننا نعرف بوساطة (1) أن طول القوس بين النقاط $b(i), b(i+s)$ أصغر من $b-a$. وهذا يعني أن مجموع تكرار s لِ f هو دوران لنصف الزاويـة القطريـة Xπ2. واتجاه الـدوران لا يهم أيّاً كان. وهذا يعنـي أن العدد غير المحدود للنقـاط، $b(s), b(2s), b(3s)$ .... تنتمـي إلى القوس (a,b). وفي الحقيقة، إذا بدأنا من النقطـة الثابتة 0 وسرنا مدة زمنية غير محدودة علـى امتداد المحيط T باتجاه واحد فقط بخطـوات طولهـا ε، فإننا سنقفـز إلى القوسـ (A,B) مرات غير محـدودة، حيث إن طوله (B–A) أكبر من طول خطواتنا، وهذا يتمم البرهان.

والآن، بتطبيق ليما 2 على، $x = \text{Log}\ (2), a = \text{Log}(7), b= \text{Log}\ (8)$ نستخلص أن 7 هو الرقم الأول للقوى غير المحدودة للعدد 2. وإذا ما طبّقنا ليما 2 مرة أخرى على الأعداد $x=\text{Log}(2), a=\text{Log}(77)-1, b=\text{Log}(78)-1$، فعندئـذٍ، نستخلص بسبب التساوي بين $1=[\text{Log}77]=[\text{Log}78]$، أن العدد 7 يظهر مرتين في المكانين الأول والثاني للمؤشر العشري لقوة العدد 2. ونكتشف من خلال استخدام البرهان القياسي أن أي تسلسل محدود للأرقام يمكـن أن يظهر في بداية المؤشر العشري لقـوة العدد 2 مثل 1234 أو 567890، أو (أخيراً) 1999. إذا كنـت لا تصدق هـذه الجملة الأخيرة، فإننا ندعوك إلى حسـاب (لنقل) 2^{9030} أو 2^{11166}. وسنظهر بعض التواريخ المهمة في نهاية هذه الرواية، مقارنة بقوى العدد 2 المقابلة لإقناع المتشككين، ونستطيع إضافة إلى ذلك استنتاج النتيجة المباشرة الآتية:

النتيجـة الطبيعيــة المباشرة: إذا كان العدد الصحيح $p>1$ ليســ قوة العدد الصحيح 10، فعندئــذٍ يمكــن أن يظهــر أي تسلســل للأرقام في بدايــة المؤشر العشري للقــوة n لِـ p لبعض n.

والســؤال الــذي يطرح نفسه مرة أخــرى: لماذا لم يظهر الرقم 7 مــن ضمن العناصر الأولــى للتسلسل الــذي طرحناه في البداية؟ ولماذا يتظاهر هــذا التسلسل المخادع على أنه دوري؟ والسبــب في ذلك بسيط. ويمكــن أن يُقرّب الرقم $\text{Log}(2) = 0.3010299956\ldots$ بوساطــة الرقــم النسبي 0.3، ويكــون التسلسل $c(n) = nx - [nx]$ دوريّــاً للأرقام النسبية x جميعهــا. وبعبــارة أخرى: $2^{10} = 1024$، وهو رقم قريب جــدّاً من الألف. ويتمثل ضربه في العــدد ألــف بإضافة أصفار في النهايــة، بحيث تبقى الأعداد الأولى ثابتــة. لذا، نتوصل إلى استنتــاج خاطــئ بمجرد النظر إلى عــدد قليل من التسلسل $a(n)$ فــي البداية، أن التسلسل الــذي يحــوي على الفترة 10 و 7 ليس عنصراً (عضواً) فيه، في حين يظهر العدد 8 في كثير مــن الأحيــان. ولكي يُــرى الرقم سبعة، يجب على المــرء أن ينظر إلى الأرقــام الستة الأولى فــي $a(n)$ (أي، الرقــم الأول مــن $2^6 = 24$)، ومن ثــم ينتظر إلى أن تعمــل الآثار التراكمية للاضطرابات الصغيرة $2^{10} - 1000 = 24$.

في عــام، 1910 أثبت سيربنسكــي (Sierpinski) وويل (Wey1) وبــول (Bohl)، كل علــى حــدة، أنه لكل عدد x غيــر نسبي فإن التسلســل $c(n) = nx - [nx]$ يكــون موزعاً على الفترة. (Arnold & Avez, 1968) [0,1] وعلى نحوٍ أكثر دقة، إذا أخذنا b و a عشوائيّاً من [0,1] حيث $(a<b)$، وتشير $k(n,a,b)$ إلى مجموع عناصر المجموعة

$$\mathcal{E}(a,b)\}\ n,\ c(i)\ \{c(i): 1 \le i \le$$

فعندئذٍ نحصل على: $\lim_{n\to\infty} k(n,a,b) / n = b-a$

ولمزيـد من الإيضاح، فإن هذه النظرية تقول إننـا إذا سرنا على امتداد محيط دائرة وحدة متكاملة، بحيث نسير بخطوات غير نسبية، فعندئذٍ، نمرّ فوق كل حفرة بتكرار متناسب وبحجم الحفرة. دعنا نعبر عن هذه الحقيقة بلغتنا الخاصة باستخدام قوة العدد 2. لنفترض أن $a(8, n)$ و $a(7, n)$ أعـداد السبعـات والثمانيات من مجموع الأعداد n للتسلسل $a(n)$، فإنه وفقاً للصيغة الأخيرة يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} a(7, n) / n = \text{Log}8 - \text{Log}7$$

$$\lim_{n\to\infty} A(8, n) / n = \text{Log}9 - \text{Log}8 ,$$ ومن ثم، فإن

$$\lim_{n\to\infty} a(7, n) / a(8, n) = (\text{Log}8 - \text{Log}7) / (\text{Log}9 - \text{Log}8) = 1.1337 \ldots > 1$$

وهـذا يعني أنه بالنظر إلـى الأجزاء الأولية من التسلسـل $a(n)$، فإننا سنجد سبعات أكثـر من الثمانيات. وتعدُّ النتيجة التي توصـل إليها الباحثون المشار إليهم آنفاً، إضافة إلى حقيقتنـا الصغيرة بخصوص السبعات والثمانيات، نتائـج بسيطة لنظرية عامة عميقة جدّاً في نظرية الإرجوديك Ergodic Theory[1] المنسوبة إلى G. D Birkhoff) (Cornfield,) Fomin, & Sinai, 1982) التـي نحـث القـارئ المهتـم على متابعتها. ونختتـم هذا الجزء بمسألة بسيطة لقرائنا.

---

1) نظريـة الإرجوديـك Theory Ergodic فرع مـن الرياضيات نشأ في ثلاثينيات القرن العشرين على يـد Koopman And Birkhoff، Neumann، Von. يهتم بدراسة النظم الديناميكية في حالة قياس اللامتغير والمسائل المتعلقة به، ولهذه النظرية علاقة بالهندسة أيضاً ونظرية الأعداد، ولها تطبيقات على العمليات العشوائية. وقد خضعت هذه النظرية إلى تطوير مستمر من علماء الفيزياء- المراجع

المسألــة: لأي n يكون للعــدد 2^n أربع سبعات متتالية في البدايــة. وماذا يكون بالنسبة لخمســ سبعات؟ كيف يمكننا تقدير، مما ورد ذكره أعلاه، أقل n حيث يبدأ المؤشر العشري للعدد 2^n بِ 2004 سبعات متتالية؟

مسائل عملية: التعمق أكثر فأكثر

إذا غيرنا قوانين القوى (الأس)، نلاحظ أن $Ax+Y = Ax. Ay$. دعنا نفترض أن $A>0$، فعندئــذٍ يمكن افتراض الســؤال العام على النحو الآتي: $F: R\rightarrow R$، ما الحلول الأخرى كلها لِ $F(X+Y)= F(X). F(Y)$? وهنــاك مسألة جيدة أخرى تبرز من ملاحظة أن $Log\ (Xy) = Log\,X + Log\,Y$. إذن، مــا الحلــول الأخرى لِ $F(X.Y) = F(X) + (Y)$? ؟ من المسائل التقليديــة ذات الصلــة إيجــاد الدوالّ جميعها التــي تفي بمعادلة كوشــي الدالّية: $F(X+Y) = F(X0 = F(Y)$). وبالإجابــة عــن هــذه المسائل، فإن المــرء يدخل في أعمــاق استقصاء المعــادلات الدالّية، وهــي معادلات يستطيع المعلمــون استخدامها بوصفهــا مشروعاً ممتداً للطلاب ذوي الذكاء المتوقد.

بعض القوى غير العادية لِ 2 والنتائج

مــن أجــل إقناع المشككين في الخاصية غير العادية للقــوى 2، أدرجنا قائمة بالقوى 2 التي ترتبط بعينات (متحيزة) لأحداث تاريخية مهمة.

معمودية بولاندا	$966\ 2^{568} = 9.66... \times 10^{170}$
معركة هاستينجز	$1066\ 2^{5561} = 1.066... \times 10^{1674}$
كولمبوس يكتشف أميركا	$1492\ 2^{3761} = 1.492... \times 10^{1132}$
تأسيس جامعة هارفارد	$1636\ 2^{9528} = 1.636... \times 10^{2868}$
وفاة كروموِيل	$1658\ 2^{3223} = 1.658... \times 10^{970}$
تأسيس الرابطة الملكية	$1660\ 2^{4874} = 1.660... \times 10^{1467}$

تغيير اسم نيوأمستردام إلى نيويورك	1664 $2^{6040} = 1.664\ldots \times 10^{1818}$
الطبعة الأولى «لمبادئ» نيوتن	1687 $2^{6143} = 1.687\ldots \times 10^{1849}$
وولبول يصبح أول رئيس وزراء لبريطانيا	1721 $2^{10229} = 1.721\ldots \times 10^{3079}$
الثورة الفرنسية	1789 $2^{9857} = 1.789\ldots \times 10^{2967}$
واترلو	1815 $2^{931} = 1.815\ldots \times 10^{280}$
بداية الحرب العالمية الثانية	1939 $2^{5522} = 1.939\ldots\ 10^{1662}$
نهاية الحرب العالمية الثانية	1945 $2^{1931} = 1.945\ldots \times 10^{581}$

نأمل أن نكون قد أوصلنا إلى القارئ خصوبة الرياضيات البحتة المتضمّنة في المسائل التـي تحتوي علـى القوى. وتكمـل مسألة التلاعب بالمسائـل، التي تشتمل علـى القوى لعمل روابـط متينة بموضوعات في نظرية الأعـداد والتوافقيات والتحليل، والرياضيات التطبيقية والإحصـاء التي يتعلمها الطلاب خلال المنحى النموذجي الذي يحظى حاليّاً بحماس كبير. وقد استخدم المؤلف الأول لهذا البحث مسائل بأرقام بداية ونهاية شبيهة بتلك المشار إليها فـي هـذا البحث، لطلاب يبلغون من العمـر أربعة عشر عاماً كانـوا ملتحقين بمساق الجبر. وقـد تمثل الهـدف التربوي التعليمـي باستخدام خبرات حـل مسائل «الرياضيـات البحتة»، ونجـم عن ذلك زيـادة اهتمام الطلاب بأسـرار الأعداد الصحيحة وخفاياهـا. ومن الأمور الأخرى، إدراك الطلاب محددات أدوات الحساب، وفهم الحاجة إلى إبداع أدوات مفاهيمية لمعالجـة المسألة. ولقيـت مسائل أخرى أيضاً، تشتمل على ظاهـرة خاصة من بين الأعداد الصحيحـة الموجبة، ونجم عنها اكتشاف مبدأ برج الحمام، نجاحاً باهراً في غرفة الصف (Sriraman, 2004A; 2004B).

وفي الختام، نأمل ألا ننسى أبداً الجمال الذي تتضمنه أنشطة الرياضيات البحتة، وأن ننقـل إلى طلابنا أن مثل هـذه الأنشطة هي التي ألهمت خيال علمـاء الرياضيات، وأسهمت فـي تطورها منذ بداياتها الأولى. ونحن نعتقد أن صورة عالم الرياضيات البحتة المضطجع

تحـت شجرة (الذي يبدو للعيـن غير المدربة على التمحيص أنه لا يفعل شيئاً)، تتمم صورة عالـم الرياضيات التطبيقـي والعالم المجتهـد المنهمك في محاولة إعطـاء معنى لفوضى العالـم الواقعي وغطرستـه، ففي المحصلة، ماذا سيفعل الشخص الثاني إذا لم يقم الأول بأي شيء؟