مراجعة طلاب المرحلة الابتدائية الكوريين الموهوبين في الرياضيات

لنظرية يولر (Euler) للشكل متعدد الوجوه

جيهون يم، سانغهوم سونغ، وجون كيم

Jaehoon Yim, Sanghun Song, And Jiwon Kim

جامعة جيونجن الوطنية للتربية، كوريا الجنوبية

ملخص

يستكشف هذا البحث كيفية تشابه البنى التي يقدمها طلاب الصفين الخامس والسادس الابتدائيين الموهوبين في الرياضيات باستخدام نظرية يولر للشكل متعدد الوجوه (Polyhedron Theorem)، مع تلك النظرية التي يقدمها علماء الرياضيات كما ناقشها لاكاتوس (Lakatos 1976). طُلب إلى أحد عشر طالباً من الموهوبين في الرياضيات في المرحلة الابتدائية تبرير النظرية، وتقديم أمثلة لحل التعارض بين النظرية والأمثلة المضادة، فقدّم الطلاب نوعين من التبريرات للنظرية. وصُنّفت الأشكال الهندسية المجسّمة كما وردت في الأمثلة المضادة، على النحو الآتي: (أ) أشكال مصمتة مجسمات بسطوح منحنية (ب) أشكال مصمتة مجسمات مؤلفة من أشكال مجسمات متعددة السطوح (Polyhedron) تشترك في النقاط أو الخطوط أو الأوجه (ج) أشكال كثيرة السطوح مع ثقوب (د) أشكال كثيرة السطوح تحتوي على أشكال كثيرة السطوح. اقترح الطلاب، إضافة إلى استخدام طريقة «منع الوحوش» (التشوه والقصور) (Monster-Barring

Method)[1]، نوعين جديدين من التخمينات لحل التعارض بين الأمثلة المضادة والنظرية وطريقة منـع الاستثناءات وطريقة تعديل التشوه. حيث تشبه البنى التي قدمها الطلاب تلك التي قدمها علماء الرياضيات كما ناقشها لاكاتوس.

المقدمة

تقـول إحدى وجهـات النظر في تدريس الرياضيات إن مـن المهم تحليل عملية التطور الرياضي التاريخية للمعرفة الرياضية وإعادة بنائها؛ بهدف تحسين عملية تعليم الرياضيات وتعلّمها. ويشترك عدد من العلماء أمثال ;(Clairaut (1741, 1746); Brandford (1980 Klein (1948); Toeplitz (1963); Lakatos (1976); Freudenthal (1983, 1991); And Brousseau (1976) فـي وجهة النظر هذه التي تفترض عادة وجود علاقة وثيقة بين النشأة التاريخية للفرد وعملية التعلم، وتفترض أيضاً أن الطلاب، بمساعدة المعلم وتوجيهه، قـادرون على بنـاء معرفة شبيهة بتلـك التي حصل عليهـا علماء الرياضيـات تاريخيّاً. وقد أظهـر لاكاتوس وجهة النظر هـذه ولا سيما في كتابه بعنوان – البرهان والتفنيد- عبر حوار متخيل بين معلم وطلابه، يدعم فيه المعلم والطلاب ادعاءات كل منهم وينتقدها من منظور شخصيات تاريخية متعددة. ومع ذلك، فإن البنية المعرفية التي نفذها المعلمون والطلاب، كمـا قدمها لاكاتوس، هي تلك التي نفذها مشاهير علماء الرياضيـات وفيهم يولر وليجندر وكوشي (Euler, Legendre, Cauchy). ويبدو أن وجهة نظر لاكاتوس شبه التجريبية تطلب إلى الطلاب تعلّم الرياضيات في أثناء العمل بطريقة علماء الرياضيات (Chazan, 1990) من خلال إثارة التساؤل الآتي: «هل من الممكن أيضاً لطلاب المرحلة الابتدائية إنشاء البنى المعرفيـة استناداً إلى نظرية يولر للمجسـم متعدد السطوح، شبيهة بتلك البنى التي ينتجها علمـاء الرياضيـات كما ناقشها لاكاتوس؟» وقـد ركزت هذه الدراسة فـي محاولتنا للإجابة عـن مثل هذا السؤال، علـى: (أ) البنى المعرفية لطلاب المرحلـة الابتدائية الموهوبين في الرياضيات، مقارنة بتلك المقدمة من علماء الرياضيات، كما ناقشها لاكاتوس، (ب) كيفية

1) منـع الوحوش» method barring-monster the مصطلح ابتدعه لاكاتوس (1976) للإشارة إلى تنقيح فرضية مـا باستبعاد الأمثلة المضادة السيئة، وهي طريقة للتعامل مع «الوحوش»؛ أي الأمثلة المضادة التي تبرز عندما تكون التعبيرات ضمن البرهان غير ما يقصد بها أصلاً- المراجع

تبرير طلاب الصفين الخامس والسادس الموهوبين في الرياضيات نظرية يولر للمجسم متعدد السطوح، (ج) البنى التي اقترحوها بصفتها أمثلة مضادة لنظرية يولر للمجسم متعدد السطوح، و (د) ردود أفعالهم عند مواجهتهم لأمثلة مضادة.

خلفية

استعراض الدراسات السابقة

وجد سريرمان (2003) اختلافاً كبيراً في سلوك حل المسألة بين طلاب المرحلة الثانوية الموهوبين في الرياضيات وغير الموهوبين، وأفاد أن الطلاب النابغين يقضون وقتاً أطول في محاولة فهم موقف المسألة، وتحليل الفرضية بوضوح، ومن ثم وضع خطة تكون عالمية بطبيعتها. وقد ركزت الدراسات السابقة لعمليات المعرفة لدى الطلاب الموهوبين في الرياضيات على التعميم والتجريد والتبرير وحل المسألة (Krutetskii, 1976; Lee, 2005; Sriraman, 2003, 2004). ووجد «لي» (Lee, 2005) أيضاً أن الطلاب النابغين في الرياضيات يميلون إلى التقدم نحو مستويات عالية من الاستدلال من خلال التفكير التأملي.

حلّل بعض الباحثين بناء المعرفة للطلاب استناداً إلى منظور لاكاتوس (Athins, 1997; Boats, Dwyer, Laing, 2003; Borasi, 1992; Cox, 2004; Nunokawa, 1996; Reid, 2002; Sriraman, 2006). مثلاً، أعاد سريرمان بناء المناحي شبه التجريبية لمحاولات الطلاب الستة المذكورين آنفاً في حل مسألة تتعلق بالعد، وعرض احتمالات بناء الصيغ الرياضية في أثناء المناقشة الصفية بروح لاكاتوس. وأفاد كوكس (Cox, 2004) أن قدرة طلاب المرحلة الثانوية على البرهنة تتحسن بعد تعريفهم بعملية «التخمين البرهان النقد – القبول أو الرفض» في حصص الهندسة. وقد وصف بوراسي (Borasi, 1992) عملية مراجعة طالبين من المرحلة الثانوية لتعريف المضلع، وتوصل إلى أن التعامل مع المضلع «بطريقة لاكاتوس» قد أتاح المجال للتفكير الرياضي والأنشطة التي تشجع المشاركين على الإفادة من حدسهم وقدراتهم الرياضية. وحلّل «ريد» (Reid, 2002) عملية حل المسألة لطلاب الصف الخامس الأساسي، وصنّف عمليتهم في التعامل مع الأمثلة المضادة، استناداً إلى طريقة منع التشوه أو الانحراف، ومنع الاستثناء (Exception Barring)، إلى ثلاثة

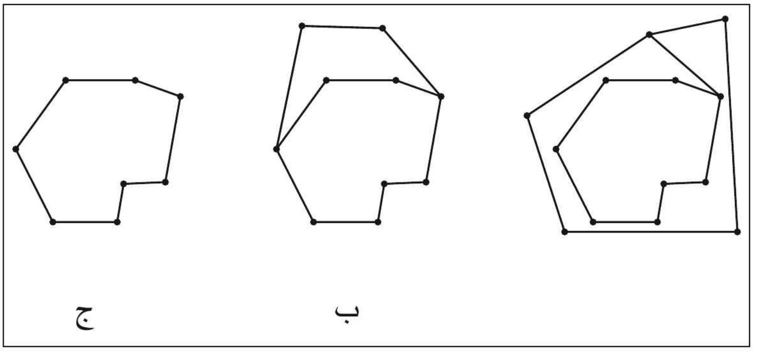
أنمــاط من الاستدلال. وأضــاف أثنز (Athins, 1997) أيضاً أنه لاحــظ حالة منع تشوه على الزوايا في حصة رياضيات للصف الرابع.

نظرية يولر للشكل متعدد السطوح في براهين لاكاتوس وتفنيداته

عرض لاكاتوس في كتاب **البرهان والتفنيد** (**Proofs And Refutations**) بعض التبريرات لنظرية يولر، مثل إثبات كاتشي الذي ظهر في تاريخ الرياضيات عبر الحوارات بين المعلم والطلاب. فمثلاً، جعل لاكاتوس طالبين هما: Zeta و Sigma يقولان التوضيح الآتي (P.70-72).

الخطوة الأولى: لمضلع V=E

الخطوة الثانية: لأي مضلع V-E=0 (شكل 1:11أ). إذا طبّقت مضلعاً آخر على الشكل (ليس بالضرورة بالسطح أو المستوى نفسه) يكون للمضلع الإضافي عدد n_1 حافات و n_1 رؤوس. وبتطبيقه على الشكل الأصلي على امتداد سلسلة من n_1 حافات و n_1+1 رؤوس، نزيد عدد الحافات على النحو الآتــي: $n_1 - n_1$ وعــدد الرؤوســ $(n_1+1) - n_1$، أي سيكون في نظام المضلــع الجديد زيادة في عدد الحافات مقارنة بعدد الرؤوس: E − V=1 (شــكل 1:11 ب). للتطبيق التام أو غير المعتاد للأشكال نظر (شــكل 1:11 ج). سوف يؤدي «تطبيق» وجه جديد على النظام دائماً إلــى رفع الزيادة بواحد، أو، إلى نظــام F مضلع مبني بهذه الطريقة E − V =F − 1.



شكل (1:11)

الخطوة الثالثة: يمكنني توسعة تجربة فكرتي بسهولة لتشمل نظاماً مضلعاً «مغلقاً». ويمكن تحقيق مثل هذا الإغلاق بتغطية نظام مضلع مفتوح متعدد الأضلاع بمغلف مضلع: تطبيق مثل هذا الغطاء المضلع سوف يزيد F بقيمة واحد دون إحداث تغيير على V أو E، أو للنظام متعدد الأضلاع المغلق، أو الشكل متعدد السطوح المغلق المبني بهذه الطريقة يكون: $V - E + F = 2$.

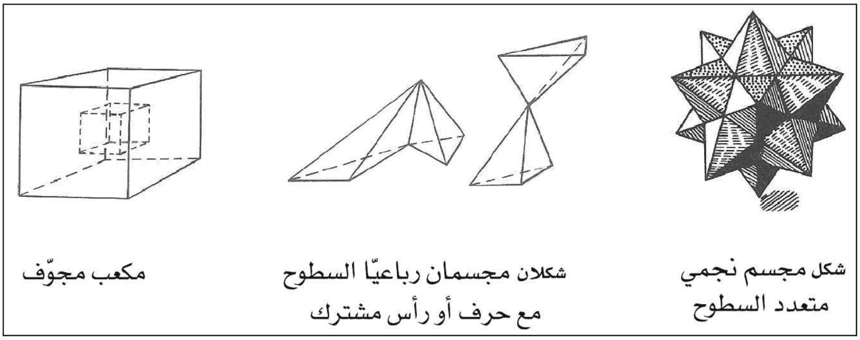
بعد التخمين والبرهان، تبرز أمثلة مضادة تفند التخمين والبرهان. وقد أطلق لاكاتوس على الأمثلة المضادة التي تفند مصطلح ليما[1] (Lemma)، أو التخمينات الفرعية، اسم الأمثلة المضادة المحلية (Local Counterexamples)، والأمثلة المضادة التي تفند التخمين الأصلي بالأمثلة الكلية (Global Counterexamples) (ص. 11:10)، واقترح ستة أنواع من الأمثلة المضادة (شكل 11 :7 – 11 :2) التي تظهر في تاريخ الرياضيات على نحو ما هو موضح أدناه.

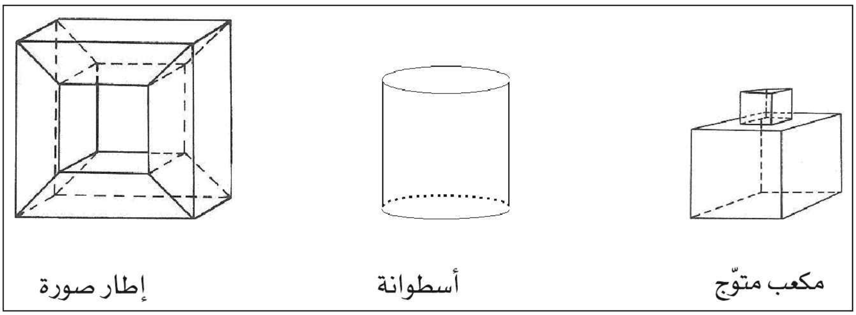
عندما يصار إلى عرض مثال مضاد، فهناك خمسة خيارات. أما الخيار الأول، فينظر إلى التخمين المرفوض على أنه غير صحيح، ومن ثم يرفضه. في حين يستخدم الخيار الثاني طريقة «منع الوحش» (التشوه، الانحراف)، حيث ينظر إلى المثال المضاد على أنه مخلوق عجيب، ويصار إلى الإبقاء على التخمين الأصلي (ص. 16–23). وتولد هذه الطريقة تعريفاً واضح المعالم، لكنها غير مفيدة من وجهة نظر الاستكشاف؛ لأنها لا تعين على تحسين التخمين، في حين يتمثل الخيار الثالث في منع الاستثناء، حيث يصار إلى تغيير التخمين الأصلي إلى تخمين منقح بإضافة جملة شرطية تشير إلى الاستثناء (P.24–27). ولا تضمن هذه الطريقة تحديد الاستثناءات جميعها، وتبقي على القضية المتعلقة بمدى صدق النظرية. ويتمثل الخيار الرابع في طريقة تعديل التشوه، حيث ينظر إلى المنظور

1) ليما Lemma في الرياضيات تعني عبارة رياضية يتوقع أن تكون صحيحة، أو عبارة رياضية مثبتة. وهي تسمى مبرهِنة تمهيدية أو مساعدة، وهي جزء من إثبات نظرية رئيسة، أي افتراض فرعي يستخدم في إثبات فرضية أو مسألة أخرى. وهي ليست مهمة في ذاتها لكن تساعد على إثبات نظرية مهمة. وقد تصبح نظرية بعد الإثبات، لكنها تظل تسمى «ليما»، مثل ليما غاوس وليما زورن وغرونوال Gronwall Lemma & Zorn's & Lemma Gauss's

Lemma – المراجع

الــذي عُدّت بموجبــه الأمثلة أمثلة مضــادة على أنه مشــوه. ويُفسّر المثــال المضاد على أنه مثــال ع إعــادة تعديل المنظور (P.30-33). أما الخيار الخامســ فيتمثل في دمج المُبرهِنة التمهيدية، حيث يحلل البرهان بكل عناية ودقة لتحديد المُبرهِنة الخاطئة التي قد تكون غير ظاهرة أو غير محددة في السابق، وعند كشفها، تضاف إلى التخمين الأولي بصفتها شرطاً لتحسين التخمين المفند (P.33-42).





المنهجية

المشاركون

علــى الرغم من وجود تعريفات متعددة للموهبة الرياضية، لكن لا يوجد تعريف مقبول عالميّــاً (E.G., Bluton, 1983; Miller, 1990; Gagne, 1991). وقــد استخدمنا في هذه الدراســة تعريف جانييــه (Gagne, 1991) للطــلاب الموهوبين فــي الرياضيات بصفتهم «الطــلاب الذين حدّدهم خبراء على أنهم يمتلكون قدرة متميزة وإمكانات لتحقيق إنجازات كبيرة.»وشارك في هذه الدراسة أحد عشر طالباً من الصفين الخامس والسادس الابتدائيين،

تتـراوح أعمارهـم بين عشرة أعـوام واثني عشر عامـاً من مدارس ابتدائيـة كورية عدة في مقاطعـة جيونجيGyeonggi. وكان من المشاركين خمسة طلاب في الصف الخامس وستة طلاب من الصـف السادس الابتدائي. وكان طلاب الصف السادس الستة يعدّون برنامجاً متقدمـاً للطـلاب الموهوبين فـي الرياضيات؛ ثلاثة منهـم (A, B , C) ملتحقـون ببرنامج جامعـي ترعاه الحكومة، والثلاثة الآخرون (D, E, F) ملتحقون ببرنامج تابع لوزارة التربية والتعليـم. أمـا طلاب الصف الخامس (G, H, I, J, K)، فقد اجتـازوا عملية انتقاء اشتملت علـى اختبار كتابي ومقابلة معمقة، وأوصى مدير مدرستهـم بإلحاقهم بالبرنامج الجامعي. وكان الطلاب جميعهم يتمتعون بدافعية قوية ومتضلّعين من الرياضيات.

المهام

أُعطي المشاركون المهام الآتية:

المهمة الأولى: اشـرح ما تعرفه عن العلاقة بين الرؤوس (V) والأحرف (E) والأوجه (F) فـي المجسم متعدد السطوح، ووضـح كيف يمكن تبرير مثل هذه العلاقة.

المهمة الثانية: هل المعادلة الآتية صحيحة في المجسّمات متعددة السطوح جميعها: $V - E + F = 2$؟ وإذا لم يكن الأمر كذلك، فمتى لا يكون ذلك صحيحاً؟

المهمة الثالثة: إذا عـددت أن مثـالاً مضـاداً يمثـل مجسمـاً متعدد السطـوح، فكيف ستراجع النظرية؟

وإذا كنت تعتقد أن مثالاً مضاداً لا يمثل مجسماً متعدد السطوح، فكيف ستراجع تعريف المجسم متعدد السطوح وتنقحه؟

صُمّمـت المهمة الأولى لتحديـد معرفة المشاركين في نظرية مجسـم متعدد السطوح وتحديـد طريقة تبريرهم للنظرية، في حين هدفـت المهمة الثانية غلى تحديد أنواع الأمثلة المضـادة التـي حددهـا المشاركون. أمـا المهمـة الثالثـة، فصمّمت لملاحظـة كيفية حل المشاركين التباين بين النظرية والأمثلة المضادة.

كان المشاركـون يعرفون العلاقة بين الرؤوس والأحـرف والأوجه الممثلة بالمعادلة: $V - E + F=2$ قبـل مشاركتهـم في هذه الدراسة. وعلى الرغم من ذلك، فلم يختبر أي منهم صـدق النظريـة سابقاً في المجسمات متعددة السطوح كلها، ولـم يبحث أيضاً أي منهم عن أمثلة مضادة للنظرية.

جمع البيانات وتحليلها

صُمّمـت هذه الدراسة استناداً إلى منهجية دراسة الحالة المتعددة (Multiple Case Study) التي وضعها ين (Yin, 2003). حيث أُعطي المشاركون الأحد عشر هذه المهام في مجموعات مرتبة، وأجريت معهم مقابلات في المدة الواقعة ما بين شهر نوفمبر عام 2005 حتـى شهـر يناير عام 2007. وقد صوّر أحد الباحثين كل مشـارك بوساطة الفيديو في أثناء حل المهام، ثم صُوّروا لاحقاً عندما قابلهم باحث آخر. وأكمل المشاركون المهام في غضون ساعتين تقريباً، ثم حلّل الباحثون لقطات الفيديو والمخطوطات وتقارير الملاحظات وأوراق عمل المشاركين.

وقـد شمـل التحليـل ثلاثـة أنـواع مـن البيانـات التـي جمعهـا الباحثـون: (أ) أنواع التبريـرات، (ب) أنـواع الأمثلـة المضـادة، (ج) طـرق حـل التضـارب. وحُللـت أنـواع التبريـرات والأمثلـة المضـادة التـي عرضهـا المشاركـون باستخـدام الترميـز المفتـوح Open Coding (Strauss And Corbin, 1998)، حيـث قُسِّمـت أنـواع التبريـرات إلـى فئتيـن، والأمثلـة المضادة الـى أربعة أنـواع، قُسِّم ثلاثة منهـا إلى جزأيـن فرعيين أو ثلاثـة أجـزاء فرعية. وقـد حُلّلت محاولات المشاركيـن في تعاملهم مع التبايـن بين الأمثلة المضـادة والتخمينـات التـي أظهرتهـا الأمثلـة المضـادة باستخـدام الترميـز الانتقائـي Selective Coding (Strauss And Corbin, 1998) الـذي استنـد إلـى «طريقـة منـع التشوه»،و«طريقـة منع الاستثناء»، و«طريقة تعديـل التشوه»،و«طريقة دمج المبرهنة- ليما» التـي اقترحها لاكاتوس. واستخدم أيضاً تحليل جـدول المتغيرات الإحصائية، وتولى زملاء الدراسة عملية تحقق النتائج (Merriam, 1998).

النتائج

تبريرات المشاركين لنظرية يولر للشكل متعدد السطوح

يمكـن تقسيم تبريرات المشاركيـن للنظرية إلى طريقتيـن: (أ) تصنيف المجسمات متعـددة السطـوح إلـى فئات عدة، وتبريـر النظرية لكل فئـة من فئات المجسمـات متعددة السطـوح، (ب) محاولة عرض تبريرات عامة دون اللجـوء إلى تصنيف المجسمات متعددة السطـوح. وقد بـرّر جلّ المشاركين النظرية في أثناء تصنيـف المجسمات متعددة السطوح إلى فئات، ومن ثم تبرير النظرية. وقد أظهر المشارك (D) في المقابلة المشار إليها أدناه مـن خلال تفسيره منطقيّـاً أن النظرية مبررة في الأشكال المنشوريـة (Prism) والهرمية (Pyramids) والموشورية (Prismoids).

المقابلة الأولى:

المشارك D: يبدو أولاً، في أشكال المناشير، أنه يمكن تبريرها في الحالات جميعها.

الباحث: ماذا تعني بذلك؟

المشارك D: (وهـو يرسـم أشـكالاً) حسناً، انظـر إلى منشور بعـدد زوايا يسـاوي n وهـو منشور مستطيـل، ويسمى كذلـك لأن قاعدته مستطيلة. إذن، عندنا أربعـة رؤوس على الوجه العلوي وأربعة رؤوس علـى الوجه السفلي، وبذلك فإن عـدد الرؤوس يساوي $2n$. وأن عـدد الأحرف يساوي $3n$ بسبـب وجود أربعة أحرف على الوجـه العلوي، وأربعـة على الوجه السفلـي، وأربعة على الجوانـب. وكذلـك، فـإن عـدد الأوجـه يسـاوي $n + 2$ بسبب وجـود أربعة أوجه على الجوانـب، إضافة إلى الوجهين العلوي والسفلي. وأما في حالـة المنشور الخماسي، فإن عدد الأوجه يساوي أيضاً $n+2$، حيث يوجد خمسة أوجه جانبية إضافة إلى القاعدة (الأوجه العلوية والسفلية). وتشير المعادلة « $V - E + F$» إلـى «عدد الرؤوس − عدد الأحرف + عدد الأوجه»، وفي

حالــة المناشير التي عــدد زواياها n فإنها تكــون: $2n-3n+$ $(n+2)$, ، لذا، فإن «$V - E + F$» تساوي 2.

الباحث: نعم.

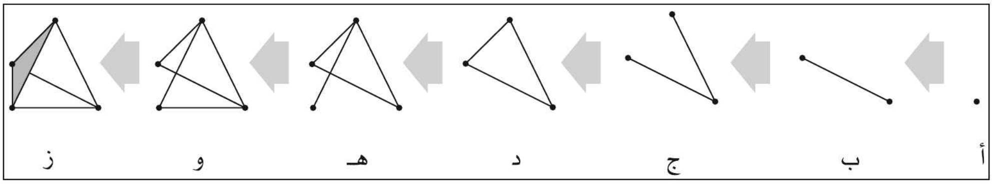
المشارك D: إذن، لقــد انتهينا مــن المناشير... وأما فــي الأشكال الهرمية فيمكن تبريرها أيضاً في الأحوال جميعها.

الباحث: وضح ذلك من فضلك.

المشارك D: هــرم عدد زواياه n، يمكن تبريــره لأن عدد رؤوسه يساوي $n+$ 1. ولديــه عدد أحــرف تساوي $2n$، وأوجه تســاوي $n+1$. فإذا أضفــت عــدد الرؤوس إلــى عــدد الأوجه وطرحتهــا من عدد الأحرف فسوف تحصل على 2.

عرضــ المشارك D توضيحــات باستخدام الأشــكال متعددة السطوح، مثــل المنشور المستطيل في حالة المنشور، والهرم والشكل الموشوري. ويُعدُّ المنشور المستطيل مثالاً عامّاً (Mason & Pimm, 1984) يمثــل زاوية المنشور. وأما في حالة الشكل أو الأشكال متعددة السطــوح العادية مثل كرة القدم، فقد استقصى المشارك D تطبيقات النظرية بوساطة عدّ مجموع نقاط مجسمات معيّنة وأحرفها وأوجهها.

أمــا المشارك B فلم يعمد إلــى تصنيف الأشكال، ولكنه جــرب التبريرات العامة بدلاً مــن ذلــك، حيث بدأ بنقطــة (انظر شكل 8:11)، وتحقق صحــة $V - E + F$ مع ازدياد عدد النقــاط والخطوط والأوجه تدريجيّاً. وكانت هناك V واحــدة فقط في البداية بالنسبة إليه، لكن V و E أو E و F تزداد بقيمة واحد على التوالي بالسير قدماً من (A) إلى (G)، في حين تستقــر $V-E+F$ عند واحد. وفي المرحلة الأخيرة، عنــد تغطية أحد الأوجه في (G)، أثبت أن $V-E+F=2$، استناداً إلى حقيقة أن F تزداد بمقدار واحد. وهذا التبرير يماثل تفسيرات الطالبين زيتا وسيجما (Zeta And Sigma) عند لاكاتوس (1976, Pp. 70-72).



شكل (11: 8)

بعد تبرير نظرية يولر، عبّر المشاركون جميعاً عن رأي يفيد بوجود شكل متعدد السطوح لـم تكن فيه نظرية يولر صحيحة. مثلاً، اعتقـد المشارك D، كما هو مشار إليه في المقابلة الثانية، بعدم انطباق النظرية على الأشكال متعددة السطوح جميعها.

المقابلة الثانية

المشارك D: حسناً...في البداية، بُـرّرت فقط في الأشكال العادية متعددة السطـوح دون استثناء، وذلـك بسبب وجود خمسـة أنواع من الأشـكال العاديـة متعـددة السطـوح. أعتقد أنهـا مبررة في الأشـكال الخمسة جميعـاً، ومن ثم فهي مبـررة في المناشير والأشـكال الموشورية. لذا، فإنني أعتقد أنها مبررة في معظم الأشكال متعددة السطوح بصورة عامة.

الباحث: إذن، هل تعتقد وجود حالات لا تنطبق عليها النظرية؟

المشارك D:فـي بعضـ الحـالات... أعتقـد أنهـا لا تنطبق علـى الحالات جميعها. (بدأ برسم أشكال ليحصل على مجسمات تثبت عدم انطباق نظرية الأشكال متعددة السطوح).

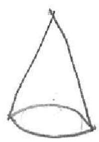
وعلـى الرغم مـن أن المشارك B برّر النظرية باستخـدام الطريقة العامة، فإنه حاول إيجـاد مثـال مضاد معتقداً وجـود مثال على الأقل. وقـد عبّر المشاركون جميعـاً عن رأيهم بوجود مثال لا تنطبق عليه النظرية.

المجسّمات الهندسية التي اقترحها المشاركون بصفتها أمثلة مضادة

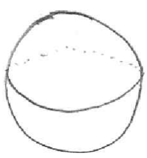
اقتــرح المشاركـون أنواعاً مختلفة مــن الأشكال الهندسيــة المجسمة علــى أنها أمثلة مضــادة للنظرية. وصُنِّفت الأشكال الهندسية المجسمة التــي اقترحها المشاركون إلى أربع مجموعات كما هو موضح أدناه.

مجسمات بسطوح منحنية

اقتــرح المشاركـون (B,C, E, F, H, I) مجسمات بسطوح منحنية كالشكل المخروطي (شكل 11:9) والأسطواني (شكل 11:10) والكروي (شكل 11:11) على أنها أمثلة مضادة.


شكل 11–9 المخروط


شكل 11–10 الأسطوانة


شكل 11–11 الكرة

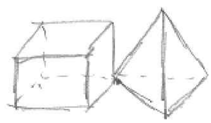
مجسمات هندسية متعددة السطوح تشترك في النقاط والخطوط والأوجه

استشهـد تسعــة مشاركيــن هــم: (A, B,C, D, E, F, G, H, I) بمجسمــات مكونة من شكليــن هندسييــن متعددي الأوجه يشتــركان في النقاط والخطوط والأوجــه بصفتها أمثلة مضــادة. ويمكن تقسيم هذه المجسمات إلــى: (أ) مجسمات تشترك اشتراكاً تاماً في بعض النقــاط أو الخطوط أو الأوجه (من شكل 11:12 إلى شكل 11:15)، (ب) مجسمات تشترك جزئيّاً فقط في خطوط أو أوجه (من شكل 11:16 إلى شكل 11:19).

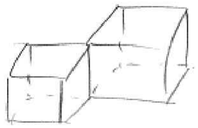
مجسمات تشترك اشتراكاً كاملاً في النقاط أو الخطوط أو الأوجه

تنطبــق النظرية في المجسمات التي تشترك فــي نقطة واحدة كما هو موضح في شكل 11:12، علــى كل شــكل متعدد الأوجــه، ويشترك شكلان متعددا الأوجــه في نقطة، حيث V−E+F=3. واقتــرح المشاركون أيضاً مجسمات تشترك في الحــرف (شكل 11:13)، إضافة

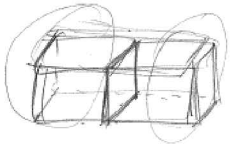
إلــى تلك المجسمات التي تشترك في الوجه اشتــراكاً تامّاً (شكل 11:14 و 11:15) بصفتها أمثلة مضادة.



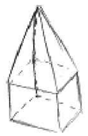
شكل 11–12



شكل 11–13



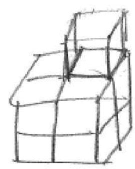
شكل 11–14



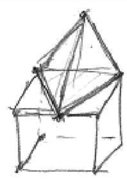
شكل 11–15

مجسمات تشترك جزئيّاً فقط في خطوط أو أوجه

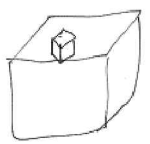
أثار الشكلان 11:14 و11:15 لدى المشاركين السؤال الآتي: هل يكون من المناسب أن نعدهمــا مشتركين في الوجوه؟ واقترح المشاركون المجسمــات المعدلة التي تشترك جزئيّاً في الخطوط أو الوجوه بصفتها أمثلة مضادة.



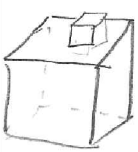
شكل 11–16



شكل 11–17

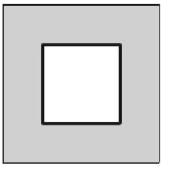


شكل 11–18



شكل 11–19

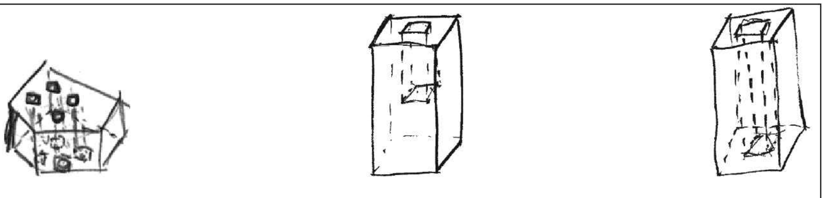
فكــر المشاركــون مليّــاً في كيفيــة عدّ الأحــرف عندما تكــون مشتركة جزئيّــاً كما في شــكل11:16، وعندما تكون مقسمة كما فــي شكل 11:17. وقاد المثــال المضاد المشار إليه فــي شــكل 11:19 المشاركين إلى التفكير في السؤال الآتي: «هل مــن المناسب أن نعد الوجه النــاجــم عن ربط وجهين وجهاً واحــداً؟» أطلق لاكاتوس (Lakatos, 1976, P.74) على هذه الحالة اسم «وجه حلقي» (Ring-Shaped Face) (شكل 11:20).



شكل 11–20 وجه حلقي

المجسمات متعددة الأسطح بثقوب (Polyhedra With Holes)

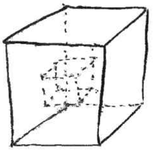
يمثـل النـوع الثالث من المجسمات الذي اقترحه المشاركون (A, B, C, G, J, K) أمثلة مضــادة لمجسمات تحتوي على ثقوب، كما هو موضح فــي الشكل 21:11 إلى الشكل 32:11. وقد شجعت هذه الأمثلة المضادة المشاركين على إعادة التفكير في تعريف الوجه أيضاً.



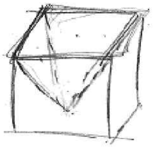
شكل 11–21 شكل 11–22 شكل 11–23

المجسمات متعددة الأوجه التي تحتوي على مجسمات أخرى متعددة الأوجه

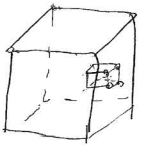
اقتــرح ثمانيــة مشاركــون، هــم: (A, B, C, D, F, G, J, K) مجسمــات تكــون متعددة الأوجــه، تحتوي على مجسمات أخرى متعددة الأوجه بصفتهــا أمثلة مضادة. ويمكن تقسيم مثــل هذه الأمثلة المضادة إلى ثلاثة أنواع فرعية علــى النحو الآتي: يتمثل النوع الأول بوجود مجسم داخل مجسم آخر، بحيث لا يشترك معه في أي وجه أو نقطة أو خط (شكل 24:11)، فــي حين يتمثل النوع الثاني بمجسمين يشتركان في وجه اشتــراكاً تامّاً (شكل 25:11)، أما النــوع الثالث، فيتمثل فــي وجود شكل داخل شكل آخر، ويشترك الشكلان في جزء من الوجه (شكل 26:11).



شكل 11–24



شكل 11–25



شكل 11–26

إجابات المشاركين على التباين الذي أحدثته الأمثلة المضادة

قُسّمت إجابات المشاركين على التباين بين الأمثلة المضادة والنظرية إلى أربع فئات، هي: طريقة منع التشوه، وطريقة منع الاستثناء، وطريقة تعديل التشوه، والتخمينات الجديدة.

طريقة منع التشوه

استخـدم المشاركان D و E طريقة منع التشــوه. واقترح المشارك E في الحلقة الثالثة أشكالاً مخروطية وأسطوانيــة وكروية بصفتها أمثلة مضادة، وتساءل عن كيفية تحديد عدد النقاط والخطوط والأوجه في هذه الأشكال. وبعد ذلك قال: «الشكل متعدد الأوجه هو عبارة عــن شكل هندسي مجسم مكــون من مضلعات متعددة»، والسطــح المنحني لا يكوّن مضلعاً. وعلــى هــذا، فإن المجسمــات ذات السطوح المنحنيــة ليست أشكالاً متعــددة الأوجه بل هي كائنات غير سوية غريبة الشكل.

المقابلة الثالثة

المشارك E: المخاريط لها سطوح منحنية، لذا، أرى أنها لن تفيد.

الباحث: ما المشكلة في السطوح المنحنية؟

المشارك E: لأنــك لا تستطيع إحصــاء عدد الأحرف والأوجــه في السطوح المنحنيــة. فهــل تستطيــع إحصــاء عــدد الأوجــه؟ لكن عدد الرؤوس واحــد، وأعتقد أنه لا يوجد أي حرف بحسب التعريف الذي أفكر فيه.

الباحث: هل تستطيع القــول أن المخروط شكل متعدد الأوجه؟ نظرية يولر تتحدث عن الأشكال متعددة الأوجه.

المشارك E: عندمــا نتحدث عن السطــوح المنحنية فــإن للمجسم الكروي سطوحــاً منحنيــة، ولهذا المجســم وجه واحد، ولكــن ليس له حرف أو نقطة مميزة، وأرى أنه لا يوجد شيء من هذا القبيل.

الباحث: ما تعريف الشكل متعدد الأوجه، في رأيك؟

المشارك E: أعتقــد أنه مكون من أوجــه لها زوايا. (بــدأ بكتابة التعريف) «الشــكل متعــدد الأوجــه = شــكل هندسي مجســم مكون من مضلعات متعددة».

طريقة منع الاستثناء

لاحــظ الباحثون المشاركين (A, D, F, G, I) وهم يجربون طريقة منع الاستثناء. وقد عــرّف المشتــرك F الشكل متعدد الأوجه أنــه «شكل هندسي مكون من أوجــه». وبذلك، فإن الأشــكال الهندسية المجسمة تعدُّ أشكالاً متعددة الأوجــه؛ لأن السطوح المنحنية عبارة عن وجوه. وبهدف استثناء المخاريط والأسطوانات والأشكال الكروية، عدّل المشارك F التخمين الأصلــي ليصبح على النحو الآتي: «في جميع الأشكال متعددة الأوجه، باستثناء تلك المكونة مــن أوجه منحنية، فإن $V-E+F=2$». واستخدم المشارك I في المقابلة الرابعة طريقة منع الاستثنــاء عن طريق تعديل النظرية لتصبح على النحو الآتــي: «في الأشكال متعددة الأوجه التي لا تحتوي على دائرة، فإن $V-E+F=2$».

المقابلة الرابعة

الباحث: (مشيراً إلى الشكلين الكروي والأسطواني)، هل يمكننا أن نعدهما أشكالاً متعددة الأوجه أيضاً؟

المشارك I: لديهما وجه أو أكثر. يمكننا أن نعدهما شكلاً متعدد الأوجه.

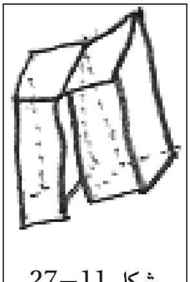
الباحث: إذن، ألا يجب علينا تعديل هذه المعادلة ($V-E+F=2$)؟

المشارك I: نعم...

الباحث: كيف يمكننا تغييرها؟

المشارك I: (فكر ملياً) إذا ضمّنا الدائرة... فإنني أعتقد أن أي شكل متعدد الأوجه دون أي دوائر ينتمي إلى هذه الفئة (V−E+F=2).
أليس كذلك؟

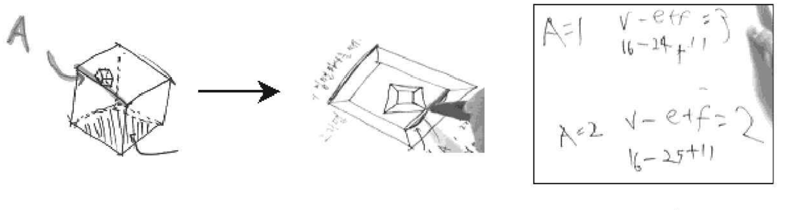
اقترح المشارك I مجسمين مستطيلين يشتركان في حرف واحد (شكل 27:11) بصفتهما مثالين مضادين. ثم نقّح بعد ذلك النظرية لتصبح على النحو الاتي: «في الأشكال متعددة الأوجه التي لا تحتوي على دائرة وغير مربوطة بغيرها من الأشكال متعددة الأوجه، فإن V−E+F=2». ووجد المشارك G أشكالاً هندسية مجسمة بثقوب على أنها أمثلة مضادة، وعدّل النظرية لتصبح على النحو الآتي: «في الأشكال متعددة الوجوه غير المخترقة بثقب اختراقاً تامّاً، فإن V−E+F=2».



شكل 11−27

طريقة تعديل التشوه

جرّب المشاركون B, D, E, F, G طريقة تعديل التشوه لتحويل المثال المضاد إلى مثال. واعتقد المشارك B بعد التوصل إلى المثال المضاد الذي يكون فيه جزء من الوجه مشتركاً بشكلين، أن تبرير نظرية يولر يعتمد على عدّ الحافة المقسمة بنقطة، حافة واحدة أو اثنتين.



أ ب ج

الشكل 11−28

قارن المشارك B النتائج عند عدّ الحرف (الخط أ في شكل11:28أ) المقسوم بنقطة علــى أنه حرف واحــد (أ=1)، وعندما عده على أنه اثنــان (أ=2). وعندئذٍ، فإن المشارك B فــي المقابلة الخامسة أوضح سبب عدّه الحرف المقسوم بنقطة في هذا الشكل الهندسي المجسم على أنه اثنان.

المقابلة الخامسة

الباحث: هل يُعدُّ المجسم شكلاً متعدد الأوجه؟

المشارك B: نعم، إنه كذلك.

الباحث: إذن، ماذا بوسعنا أن نفعل؟

(المشارك يكتب B)

المشــارك B: إذا كان هناك رأس في منتصف الحرف (حتى لو لم يكن في المنتصف تمامــاً)، فعندئــذٍ سيصار إلى عدّ الجانبيــن الأيمن والأيسر للرأس علــى نحوٍ مستقل. ومن الضروري جدّاً عدّ هذا الجزء على نحوٍ منفصل (الجزء الأيسر من الخط أ)، وذلك الجزء أيضاً (الجزء الأيمن من الخط أ). وفي حالة الأشكال المستوية، نعدّ أي خط بين أي نقطتين بصورة منفصلة؛ ويجب عليك حتى تتمكن من جعل (قيمة V–E+F) في المجسمات تساوي 2، أن تعدّ الجانبين الأيمن والأيسر للنقطة كل جانب على حدة.

وأن أحــد المشاركيــن أيضاً لم يعدّ الشكلين متعددي الأوجــه اللذين يشتركان في وجه اشتــراكاً تامّــاً، حيث إن أحدهما بداخــل الآخر (شكل11:25)، على أنهمــا مثال مضاد بعد استخــدام طريقة تعديل التشــوه. ورأى المشارك D أن الشكل لم يكن مثــالاً مضاداً لأنه عُدّ مجسماً مغموراً دون غطاء، بدلاً من كونهما مجسمين يشتركان في وجه واحد.

أمــا الوجه الذي علــى شكل حلقة(شــكل11:20)، ففضّل بعض المشاركين استخدام طريقة منع التشوه بعدم عدّه وجهاً، ومن ثم، استخدم طريقة تعديل التشوه بعدم عدّ الأشكال المجسّمــة ذات الوجــه الحلقي على أنها أمثلــة مضــادة E.G., V=16, E=24, F=10, V–E+F=2) (شكل11:19). وقد استخدم المشارك I، طريقة منع التشوه للأشكال الأسطوانية

والكرويــة، وطريقة تعديل التشوه للمخروط آخذاً في الحسبــان أن نظرية الأشكال المتعددة يمكن تعديلها بموجب الشرط V=1, E=1, F=2.

التخمينات الجديدة

لــم تقتصر مناحي المشاركين على منع التشوه، وتعديلــه ومنع الاستثناء، وهي طرائق تتشابــه إلى حد ما، حيث إنهــا جميعاً تستخدم لدعم الصيغــة الرياضية V−E+F=2. لذا، اقتــرح المشاركــون نوعيــن جديدين من التخمينــات، يشتمل أولهما علــى البحث عن صيغة جديــدة بخصوص قيمة V−E+F التي يُعبّر من خلالها عن العلاقة بين النقاط، والخطوط، والأوجــه في الأشكال الهندسية المجسمة، وفيها الأمثلــة المضادة التي توصلوا إليها. ويمثل الجدول الآتي 1:11 ملخصاً للتخمينات الجديدة التي اقترحها المشاركون:

جدول 1:11 ملخص تخمينات المشاركين

V−E+F	الشروط	المشاركون
0	إذا لم يكن الوجه على شكل الحلقة في الأشكال متعددة الأوجه بثقوب	G
1	في الأشكال متعددة الأوجه التي تحتوي على دائرة	I
3	في الأشكال متعددة الأوجه التي تشترك اشتراكاً تامّاً إما بنقطة أو بخط مع أشكال أخرى متعددة الأوجه	G and F
	إذا رُبطت الأشكال المجسمة عند الرأس أو الحرف أو الوجه	H
4	فــي الأشــكال متعددة الأوجه التي تحتوي على أشــكال أخرى متعددة الأوجه مثل المكعب الأجوف (Hollow Cube)	F

تتعلــق الأنواع الأخرى من التخمينات التي اقترحها المشارك A بضرورة أخذ العناصر الجديــدة في الحسبان خلا النقاط والخطــوط والأوجه. واقترح كما فــي المقابلة السادسة تطوير صيغة تشتمل على عناصر ثلاثية الأبعاد.

المقابلة السادسة

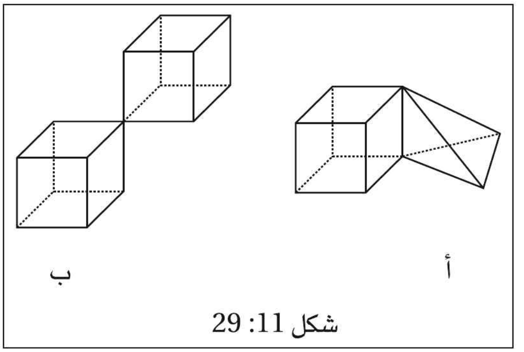
المشارك A: يمكن في حالة البعد الثنائي، وضع قانون بكل سهولة باستخدام V, E, F فقط، لكن في ثلاثية الأبعاد يُضاف عنصر جديد هو المساحة. وعلى هذا، إذا كانت صيغة نظرية يولر قد وضعت باستخدام عناصر ثنائية الأبعاد، فإنني أعتقد أن بإمكاننا وضع صيغة جديدة تنطبق حصريّاً على البعد الثالث وفيه المساحة، أليس كذلك؟

الباحث: العنصر الجديد ذو الأبعاد الثلاثة. هل نستطيع القيام بذلك فعلاً ذلك إذا فكرنا في ذلك؟

المشارك A: نعم، أعتقد ذلك.

الباحث: إذن، كيف يمكننا تحديد الأرقام في ثلاثيات الأبعاد ؟

المشارك A: باستخدام المساحة.



شكل 11: 29

وبعد ذلك، اقترحتُ المعادلتين $V-E+F-S=1$ و $V-E+F+S=3$ بصفتهما تخمينين جديدين، وتأكد أن المعادلة $V-E+F-S=1$ يمكن تبريرها بالأشكال المجسمة في شكل: 29:11أ على النحو الآتي: $V=15,\ E=24,\ F=12,\ S=2,\ V-E+F-S=1$. (شكل 11 :29 ب) $V=10, E=17, F=10, S=2, V-E+F-S =1$. وقد قاد هذا التخمين المشارك A إلى التفكير في إمكانية توسعة نظرية الأشكال متعددة الأوجه لتشتمل على مجسمات رباعية الأبعاد.

مناقشة

كانــت الأشــكال متعددة السطـوح التي درسهــا المشاركون قبل البحــث مقصورة على فئــة الأشكال العادية متعــددة الأوجه، والمناشير، والأشكال الهرميــة والموشورية والأشكال متعــددة الأوجه شبه العاديــة مثل كرة القدم، التي تنطبق نظرية يولــر عليها جميعها. وعلى الرغــم مــن ذلك، فكّر المشاركــون في وجود بعضــ الأشكال متعددة الأوجــه التي لا تنطبق عليهــا النظريــة. وبــدا أن هــذا الاعتقاد نجم عــن طريقة التبريــر التي استخدمهــا غالبية المشاركين. يمكن الحصول على قيمة V−E+F بإحصاء عدد النقاط والأحرف والأوجه في حالة الأشكال المنشورية والهرمية والموشورية (فمثلاً: في المنشور ذي الزوايا التي عددها n، فــإن $V=2n, E=3n, V=n+2$، وبذلــك، فإن $V-E+F=2$). وعلى الرغم من ذلك، فقد أخفــق هــذا التبرير في تقديم معلومات عن أنواع جديدة مــن المجسمات التي لم تجتز هذا الاختبار بعد. وتشير آراء المشاركين التي تقول بوجود أشكال متعددة الأوجه لم تصلح معها نظريــة الأشــكال متعددة السطوح، إلــى اعتقادهم أن نطاق الأشكال متعــددة الأوجه واسع. ويدعم وجهــة النظر هذه الأنواع المتعددة من المجسمات التي عرضها المشاركون بصفتها أمثلة مضادة.

هناك أوجه تشابه قوية بين الأشكال المجسمة التي اقترحها المشاركون على أنها أمثلة مضادة، وتلك التي ناقشها لاكاتوس. وتمثّل النوع الأول من الأمثلة المضادة التي توصل إليها المشاركــون في المجسمات ذات الأوجه المنحنيــة، التي ظهرت لدى لاكاتوس كالأسطوانات (ص.22). في حين تمثّل النوع الثاني بشكلين هندسيين، أو أكثر، متعددي الأوجه يشتركان فــي النقاط أو الخطوط أو الأوجــه، التي اكتشفها علماء رياضيــات أمثال هيزل (Hessel) (الأشــكال التي تشترك فــي الخطوط أو النقــاط) ولوليَر (Lhulier) (المكعــب مع قمة أو تــاج) في العاميــن 1813 و 1832 على التوالي (P.15,34). وكان لوليَر أول من اكتشف النوع الثالــث من الأمثلة المضادة (ص.19)، إضافة إلى إطار الصورة والنفق اللذين أشار إليهما لاكاتوســ، وجــد المشاركون أيضاً شكلاً متعدد الأوجه لم يكن مثقوباً بصورة تامة. أما النوع الرابع، فيتمثل في الأشكال متعددة الأوجه داخل أشكال أخرى متعددة الأوجه، التي اكتشفها

هيــزل ولوليَر استنــاداً إلى الفكرة التــي تُوصِّل إليها خــلال مراقبة مجموعــة المعادن شبه البلورية (Crystalloid Of Mineralogy) الموجودة داخل معدن بلوري شفاف (ص. 13).

ونحــن نعتقد أنه يمكــن استخدام الأمثلــة المضادة في مساعدة الطــلاب على تطوير الاستــدلال الرياضــي (Lakatos, 1976; Boats, Et Al., 2003). وقد درس المشاركون في هــذه الدراسة مفاهيم مثــل؛ الشكل متعدد السطوح، والوجه وتوصلــوا إلى تعريفات جديدة. وشجعتهم الأمثلة المضادة التي اكتشفها المشاركون أيضاً على دراسة تعريف المصطلحات على نحوٍ دقيق. وقد دفع الوجه الحلقي خاصة بعض المشاركين إلى إعادة النظر في تعريف الشــكل متعدد الأوجه، حيث أكدوا عدم إمكانية تسميته بالشكل متعدد الأوجه؛ لأن الشكل لا يتماشــى ومجموع الزوايا الداخلية للشــكل متعدد الأوجه n −Polygon180 × $n - 2$. وهذا يبين أنه كان ينظر إلى صيغة مجموع الزوايا الداخلية للشكل متعدد الأوجه بصفتها خاصية للتعريــف تقــرر هل كان الشكل متعدد الأوجــه أم لا. وتشبه هذه الطريقــة في تعريف الشكل متعــدد الأوجه، التعريف الذي عرضه بالتــزر (Lakatos, 1976, P. 16) (Baltzer): «أي، نظام الشكل متعدد الأوجه حيث المعادلة V−E+F=2».

لقــد لوحــظ أن طلاب المرحلة الابتدائيــة استخدموا طريقة منــع التشوه وطريقة منع الاستثنــاء عند كل مــن «ريد» و«أثنز»، ولوحظ أيضاً استخــدام المشاركين في هذه الدراسة طريقــة منع التشوه، وطريقــة منع الاستثناء، وطريقة تعديل التشــوه، والتخمينات الجديدة. ولم يرفض المشاركون النظرية الأصلية، بل حاولوا تطوير تخمينات جديدة تتألف من أمثلة مضادة، وقد أقدم أربعة من المشاركين الخمسة الذين استخدموا طريقة منع الاستثناء على وضــع تخمينات جديدة. وكانت هنـاك حالات في الماضي، عُدّت فيها بعض الأمثلة المضادة انحرافــات، وبذلك استُثنيت، لكنها قُبلت أخيراً، واعتُمدت بصفتها أمثلة (E.G. Lakatos, 1976, P.31). وقــد أظهر المشاركون هــذه القدرة على مراجعة موقفٍ ما وتغييره. واتخذوا في البداية كلاًّ من طريقة منع التشوه وطريقة منع الاستثناء دليلاً على الأمثلة المضادة التي عرضوها، لكنهم حاولوا تضمين الأمثلة المضادة داخل نطاق الأمثلة في أثناء تعديل التشوه

أو التخمينــات الجديدة. وهــذه المرونة في التفكير هي التي قال كروتتسكي وسريرامان إنها تُعدّ سمة من سمات الموهوبين في الرياضيات.

رأى لاكاتوس أن طريقة دمج المبرهنة التمهيدية تُعد طريقة مفيدة لتنقيح التخمين استناداً إلى البرهان. ويُعدُّ تحليل البرهان شرطاً أساسيّاً لهذه الطريقة، ويُعدُّ أيضاً عنصراً مهمّاً من عناصر البرهان والتفنيد، كما أشار ننوكاوا (Nunokawa, 1996) . وعلى الرغم مــن ذلك، لم تلاحظ طريقة دمــج المبرهنة التمهيدية وتحليل البرهــان في هذه الدراسة. وعندمــا شُجّع المشارك B، الذي عرض إثباتاً بازدياد عناصر الشــكل متعدد الأوجه، على التفكيــر في صدق إثباته للمثــال المضاد (الشكل 18:11)، عرض حلّاً لتعديل التشوه بقوله: «ليس البرهان هو الخطأ، بل إن هناك مشكلة في هذا المجسم».

الخاتمة

تركز هذه الدراسة على البنى التي عرضها طلاب الصف الخامس أو السادس الأساسي لحل المهام المتعلقة بنظرية يولر للمجسمات متعددة السطوح، ومقارنتها بالبنى التي عرضها علمــاء الرياضيــات، التي ناقشها لاكاتوس. ولدى تحليل سريرامــان (Sriraman, 2004) مفهــوم طلاب الصف التاسع الأساسي للبرهان، بيّــن أن العمليات التي استخدمها الطلاب الموهوبــون تظهر تماثلاً ملحوظاً مع تلــك التي يستخدمها علمــاء الرياضيات المختصون. وتظهــر هذه الدراسة أيضاً تشابهاً بين أبنية طلاب الصفين الخامس والسادس الأساسيين الموهوبيــن في الرياضيــات، وأبنية علماء الرياضيــات الذين درسهم لاكاتوس. إن الأمثلة المضــادة وطرق حل التضــارب بين النظرية والأمثلــة المضادة التي اقترحهــا المشاركون، باستثنــاء طريقة دمج المبرهنة التمهيدية وتحليــل البرهان، قد أظهرت تشابهاً ملحوظاً مع تلك المقدمة في تاريخ الرياضيات.

قائمة المراجع

Athins, S. (1997). Lakatos' Proofs And Refutations Comes Alive In An Elementary Classroom. School Science And Mathematics, 97(3), 150–154.

Bluton, C. (1983). Science Talent: The Elusive Gift. School Science And Mathematics, 83(8), 654–664.

Boats, J. J., Dwyer, N. K., Laing, S., & Fratella, M. P. (2003). Geometric Conjectures: The Importance Of Counterexamples. Mathematics Teaching In The Middle School, 9(4), 210–215.

Borasi, R. (1992). Learning Mathematics Through Inquiry. Portsmouth, Nh: Heinemann.

Branford, B. (1908). A Study Of Mathematical Education. Oxford: Clarendon Press.

Brousseau, G. (1997). Theory Of Didactical Situations In Mathematics (N. Balacheff, M.Cooper, R. Sutherland & V. Warfield , Ed. And Trans.). Dordrecht: Kluwer Academic.

Chazan, D. (1990). Quasi–Empirical Views Of Mathematics And Mathematics Teaching. Interchange, 20(1), 14–23.

Clairaut, A. C. (1741). ةLéments De Géométrie. Paris: Gauthier–Villars.

Clairaut, A. C. (1746). ةLéments De Algébre. Paris: Rue Saint Jacques.

Cox, R. (2004). Using Conjectures To Teach Sutdents The Role Of Proof. Mathematics Teacher, 97(1), 48–52.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology Of Mathematical Structures. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic.

Gagne, F. (1991). Toward A Differentiated Model Of Gifted And Talent. In N. Colangelo & G.A. Davis (Eds.), Handbook Of Gifted Education (Pp. 65–80). Boston: Allyn And Bacon.

Klein, F. (1948). Elementary Mathematics From An Advanced Standpoint: Arithmatic, Algebra, Analysis. (E. R. Hedrick & C. A. Noble, Trans.). New York: Dover. (Original Work Published 1924).

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology Of Mathematical Abilities In School Children. Chicago: The University Of Chicago Press.

Lakatos, I. (1976). Proofs And Refutations: The Logic Of Mathematical Discovery. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1986). A Renaissance Of Empiricism In The Recent Philosophy Of Mathematics? In T. Tymoczko (Ed.), New Directions In The Philosophy Of Mathematics (Pp. 29–48). Boston: Birkhauser.

Lee, K. H. (2005). Mathematically Gifted Students' Geometrical Reasoning And Informal Proof. In L. C. Helen, & L. V. Jill (Eds.), Proceedings Of The 29Th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education (Vol 3. Pp. 241–248), Melbourn, Australia: Pme.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic Examples: Seeing The General In The Particular. Educational Studies In Mathematics, 15, 277–289.

Merriam, S. B. (1998). Qualitative Research And Case Study Applications In Education. John Wiley & Sons, Inc.

Miller, R. C. (1990). Discovering Mathematical Talent. (Eric Digest No. E482).

Nunokawa, K. (1996). Applying Lakatos' Theory To The Theory Of Mathematical Problem Solving. Educational Studies In Mathematics, 31, 269–293.

Reid, D. (2002). Conjectures And Refutations In Grade 5 Mathematics. Journal For Research In Mathematics Education, 33(1), 5–29.

Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations: The Problem-Solving Experiences Of Four Gifted Students. Journal Of Secondary Gifted Education, 14(3), 151–165.

Sriraman, B. (2004). Gifted Ninth Graders' Notions Of Proof: Investigating Parallels In Approaches Of Mathematically Gifted Students And Professional Mathematicians. Journal For The Education Of The Gifted, 27(4), 267–292.

Sriraman, B. (2006). An Ode To Imre Lakatos: Quasi-Thought Experiments To Bridge The Ideal And Actual Mathematics Classrooms. Interchange, 37(1–2), 151–178.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). Basics Of Qualitative Research (2Nd Ed.). Thousand Oaks, Ca: Sage Publications.

Toeplitz, O. (1963). The Calculus—A Genetic Approach (L. Lange, Trans.). Chicago: The University Of Chicago Press. (Original Work Published 1949).

Yin, R. K. (2003). Case Study Research: Design And Methods (3Rd Ed.). Thousand Oaks, Ca: Sage Publications.