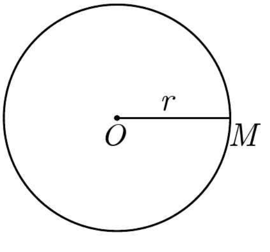
الفصل الرابع

الدوائر
Circles

لتكن O نقطة في المستوى وليكن $r > 0$ عدداً حقيقياً. الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r هي مجموعة جميع النقاط M التي تبعد مسافة r عن النقطة O . أي أن

$$C(O,r) = \{M : OM = r\}$$

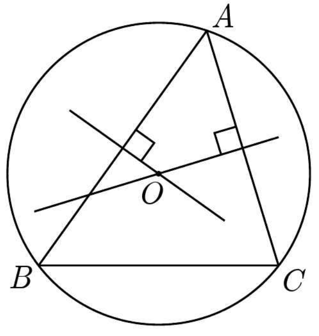
إذا كانت $M \in C(O,r)$ فإن القطعة المستقيمة $\overline{OM}$ تسمى أيضاً نصف قطر. وبهذا فإن نصف قطر الدائرة يعني العدد r أو القطعة المستقيمة $\overline{OM}$.



نقول إن دائرتين متطابقتان إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متساويين.

مبرهنة (١): لكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة توجد دائرة وحيدة تمر بالنقاط الثلاثة.

البرهان: نفرض أن A ، B ، C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. عندئذ، المنصفان العموديان للقطعتين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ غير متوازيين (لأن A ، B ، C ليست على استقامة واحدة). ولذا فهما يتقاطعان في النقطة O.



وبهذا فإن $OA = OB = OC$ وتكون O مركز دائرة تمر بالنقاط A ، B ، C. إضافة إلى ذلك، أي دائرة تمر بالنقاط الثلاث يكون مركزها O ونصف قطرها $\overline{OA}$. أي أنها الدائرة نفسها. □

إذا كانت $C(O,r)$ دائرة فإن مجموعة النقاط P في المستوى حيث $OP < r$ تسمى نقاط الدائرة الداخلية (interior of the circle)

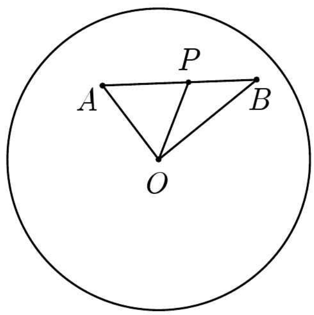
$$\operatorname{Int} C(O,r) = \{P : OP < r\}.$$

كما تسمى مجموعة النقاط Q في المستوى حيث $OQ > r$، نقاط الدائرة الخارجية (exterior of the circle)

$$\operatorname{Ext} C(O,r) = \{Q : OQ > r\}$$

مبرهنة (٢): مجموعة النقاط الداخلية للدائرة هي مجموعة محدبة.

البرهان: لنفرض أن $A,B \in \operatorname{Int} C(O,r)$. عندئذ، $OA < r$ و $OB < r$. لتكن $P \in \overline{AB}$. عندئذ، إحدى الزاويتين $\widehat{APO}$ أو $\widehat{BPO}$ ليست منفرجة.



لنفرض أن $\widehat{APO}$ ليست منفرجة. عندئذ، في المثلث $\triangle BPO$ لدينا $OP < OB < r$. إذن، $P \in \operatorname{Int} C(O,r)$. □

ملحوظة: تسمى المجموعة $C(O,r) \cup \operatorname{Int} C(O,r) = \{M : OM \leq r\}$ قرصاً (disk) مركزه O ونصف قطره r.

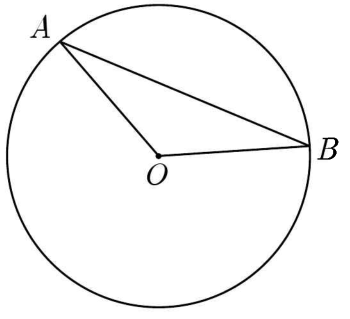
الأوتار والأقواس والزوايا المركزية

[Chords, Arcs, and Central Angles]

تسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على الدائرة وتراً (chord). إذا مر الوتر في مركز الدائرة فإنه يسمى قطراً (diameter) وتسمى نقطتا طرفي القطر نقطتين متقابلتين قطرياً.

مبرهنة (٣): طول أي وتر ليس قطراً في الدائرة $C(O,r)$ أصغر من $2r$.

البرهان: لنفرض أن $\overline{AB}$ وتراً حيث $O \notin \overline{AB}$.

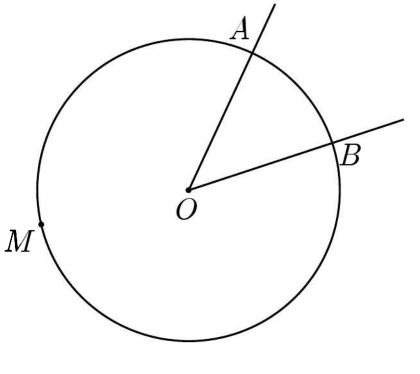


عندئذ، من متباينة المثلث نجد أن $AB < OA + OB = 2r$. □

ملحوظة: لاحظ أن طول قطر الدائرة $C(O,r)$ يساوي $2r$ وأنه أكبر من أو يساوي طول أي وتر آخر من أوتار الدائرة.

الزاوية المركزية [Central Angle]

الزاوية المركزية في دائرة $C(O,r)$ هي الزاوية التي رأسها مركز الدائرة، وبالتالي كل زاوية رأسها مركز الدائرة تسمى زاوية مركزية فيها.



أقواس الدائرة [Arcs of a Circle]

إذا كانت A و B نقطتين مختلفتين على دائرة $C(O,r)$ فإنهما يقسمان الدائرة إلى قوسين، قوس أصغر $\widehat{AB}$ وهو مجموعة النقاط الناتجة عن تقاطع الدائرة مع نقاط الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ الداخلية، بينما القوس الأكبر $\widehat{AMB}$ هو متمم القوس الأصغر. النقطتان A و B هما طرفا كل من القوس $\widehat{AB}$ والوتر $\overline{AB}$، ونعبر عادة عن ذلك بالقول إن القوس $\widehat{AB}$ يقابل (أي يواجه) الوتر $\overline{AB}$.

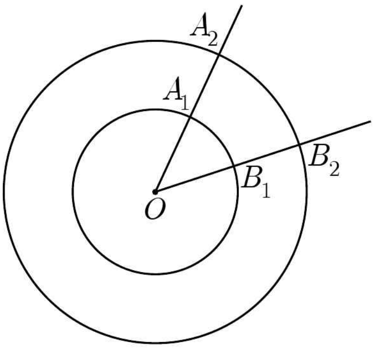
إذا كانت A و B نقطتي نهاية قطر فإن كلاً من القوسين المقابلين لهما يسمى نصف دائرة (semicircle). لاحظ أن أي قطر يحدد نصفين للدائرة.

قياس القوس [Measure of The Arc]

لنفرض أن A و B نقطتان على الدائرة $C(O,r)$. إذا كانت A و B نقطتي نهاية قطر فإن قياس القوس $\widehat{AB}$ (نصف الدائرة) يساوي $180°$. أما إذا لم يكن $\overline{AB}$ قطراً فإن قياس القوس الصغير $\widehat{AB}$ بالدرجات يساوي قياس الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ المقابلة له وقياس القوس الكبير $\widehat{AMB}$ يساوي $360° - \widehat{AOB}$.

أما الدائرة فيمكن اعتبارها قوساً كبيراً $\widehat{AB}$ حيث $A = B$ ومن ثم فإن قياسها يساوي $360°$.

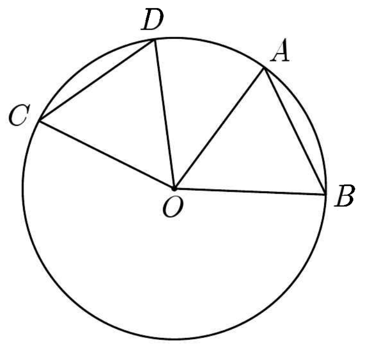
ملحوظة: لاحظ أنه إذا اشتركت دائرتان في المركز O وكانت $\widehat{AOB}$ الزاوية المركزية لهما فإن القوسين $\widehat{A_1B_1}$ و $\widehat{A_2B_2}$ لهما القياس نفسه ولكنهما يختلفان في الطول.



يتطابق قوسان من دائرة واحدة إذا كان لهما القياس نفسه.

مبرهنة (٤): ليكن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ وترين في الدائرة $C(O,r)$. عندئذ، $AB = CD$ إذا وفقط إذا كان $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

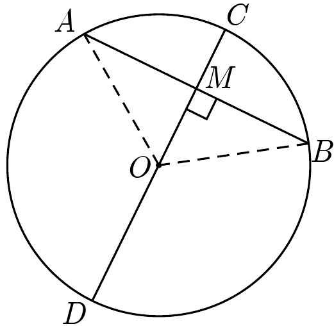
البرهان: لنفرض أولاً أن $AB = CD$. عندئذ، $\Delta COD \equiv \Delta AOB$. ومن ذلك نجد أن $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$، إذن، $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.



ولبرهان العكس، إذا كان $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ فإن $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ ويكون $\Delta AOB \equiv \Delta COD$. إذن، $AB = CD$. □

مبرهنة (٥): لتكن A و B نقطتين مختلفتين على دائرة مركزها O. عندئذ، المستقيم العمودي على الوتر $\overline{AB}$ والذي يمر بالمركز O ينصف كلاً من الوتر $\overline{AB}$ والقوس $\widehat{AB}$ (الصغير والكبير).

البرهان: إذا كانت النقطتان طرفي قطر فالعبارة واضحة. لنفرض إذن أن الوتر $\overline{AB}$ ليس قطراً، ولنفرض أن OM عمودي على الوتر $\overline{AB}$ ويقطع الدائرة في النقطتين C و D.

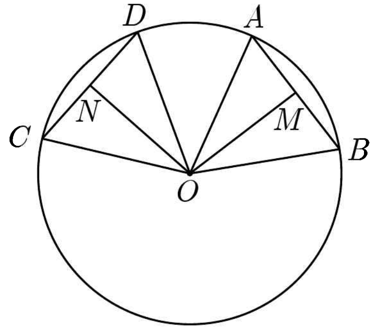


بما أن $OA = OB$ فإن المثلثين القائمين $\triangle AOM$ و $\triangle BOM$ متطابقان، ومن ذلك نجد أن $AM = MB$، أيضاً، $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ و $\widehat{AOD} = \widehat{BOD}$.

إذن، $\widehat{AC} = \widehat{CB}$ و $\widehat{AD} = \widehat{DB}$. □

مبرهنة (٦): يتساوى وتران في دائرة إذا وفقط إذا وقعا على مسافة واحدة من مركز الدائرة.

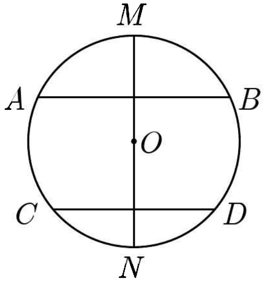
البرهان: لنفرض أن $AB = CD$. عندئذ، $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ ومن ثم فارتفاعاهما OM و ON متساويان.



ولبرهان العكس، نفرض أن $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ وأن $\overline{ON} \perp \overline{CD}$. عندئذ، $AM = MB$ و $DN = CN$. وبما أن $OM = ON$ فإن $\triangle OND \equiv \triangle OMA$. من ذلك نجد أن $AM = DN$ ويكون $AB = CD$. □

مبرهنة (٧): لنفرض أن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ وتران متوازيان في الدائرة $C(O,r)$ وأن النقطتين A و C تقعان في نصف المستوى نفسه بالنسبة للقطر العمودي عليهما. عندئذ، القوس الصغير $\overset{\frown}{AC}$ يطابق القوس الصغير $\overset{\frown}{BD}$.

البرهان:

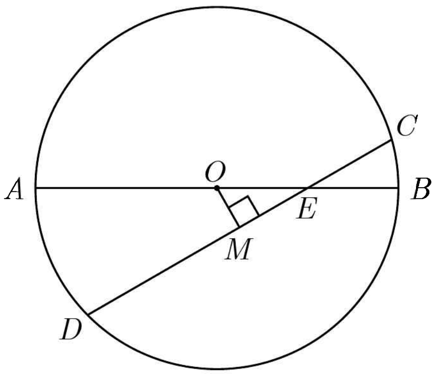


بما أن $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ و $\overline{MN} \perp \overline{CD}$ فإن $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{AM}$ وأن $\overset{\frown}{ND} = \overset{\frown}{CN}$.

ولكن $\overset{\frown}{MBN} = \overset{\frown}{MAN}$ (نصفا دائرة). إذن، $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$. □

مثال (١): $\overline{AB}$ قطر في الدائرة $C(O,r)$. النقطة E هي نقطة تقاطع الوتر $\overline{CD}$ مع القطر $\overline{AB}$، $\widehat{CEB} = 30^\circ$، $AE = 6$، $EB = 2$. احسب المسافة من O إلى CD.

الحل:

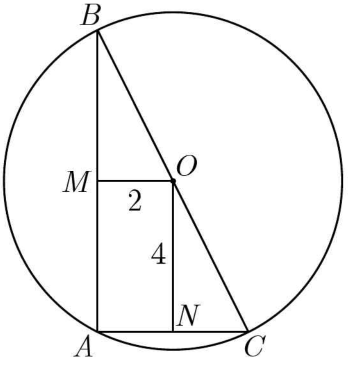


$AB = AE + EB = 6 + 2 = 8$. إذن، $OB = 4$. ولذا فإن $OE = 4 - 2 = 2$. الآن، المثلث $\triangle EOM$ هو مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ فيه $OM = \frac{1}{2}OE = 1$. ◇

مثال (٢): لتكن A، B، C ثلاث نقاط مختلفة على الدائرة $C(O,r)$. إذا كان $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ والمسافتان من O إلى $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ هما 2 و 4 على التوالي فاحسب AB و AC.

الحل:

من مبرهنة (٥) العمود $\overline{OM}$ ينصف $\overline{AB}$ ولأن $\widehat{CAB}$ قائمة فهو يوازي $\overline{AC}$ وعليه نرى من مبرهنتي نقطتي التنصيف نعلم أن O منتصف $\overline{BC}$ وأن $AC = 2OM = 4$. بالمثل $AB = 2ON = 8$.



◇

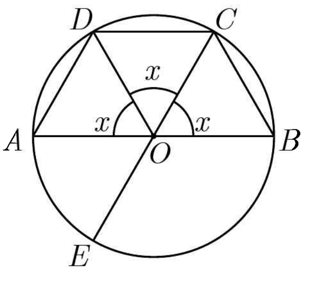
مثال (٣): ليكن $\overline{AOB}$ قطراً في الدائرة $C(O,r)$. ولتكن C و D نقطتين على الدائرة $C(O,r)$ حيث $\overline{OC}$ ينصف $\widehat{DOB}$ و $\overline{OD}$ ينصف $\widehat{COA}$.

(أ) إذا كان $DC = 2$ فاحسب طول قطر الدائرة $C(O,r)$.

(ب) إذا كان $\overline{EOC}$ قطراً فأثبت أن $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$.

(ج) أثبت أن المسافة من A إلى $\overline{CO}$ تساوي المسافة من B إلى $\overline{CO}$.

الحل:



لاحظ أن $\widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = x^\circ = 60^\circ$.

(أ) $\triangle COD$ متساوي الساقين فيه $x = 60^\circ$. وبهذا فهو متساوي الأضلاع.

إذن، $OC = DC = 2$. ومن ثم $AB = 4$.

(ب) في الشكل الرباعي $ADCO$ لدينا $\widehat{ADC} = \widehat{COA} = 2x$. إذن، $\overline{AD} \parallel \overline{OC}$.

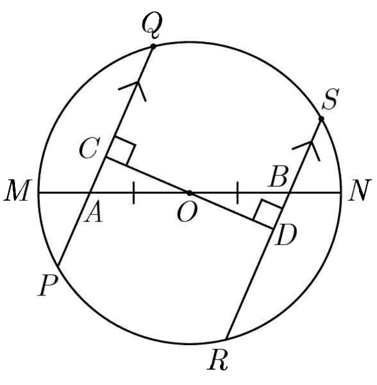
(ج) بما أن كلاً من $\triangle AOD$ و $\triangle COB$ متساوي الأضلاع وطول الضلع يساوي نصف القطر فإنهما متطابقان، ولذا لهما الارتفاع نفسه. وبهذا فالمسافتان من A و B إلى $\overline{CO}$ متساويتان. ◇

مثال (٤): في الدائرة $C(O,r)$ المبينة في الشكل المرفق، $\overline{MON}$ قطر، $OA = OB$ ، $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ ، $\overline{OC} \perp \overline{PQ}$ ، $\overline{OD} \perp \overline{RS}$. أثبت أن:

(أ) $PQ = RS$.

(ب) P و S متماثلتان حول O، Q و R متماثلتان حول O .

(ج) الشكل الرباعي $PQSR$ مستطيل.



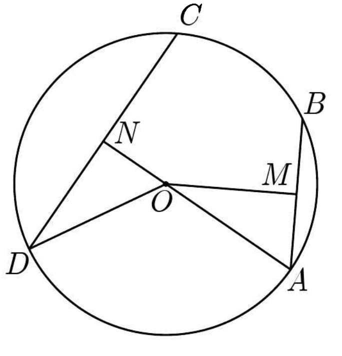
الحل

(أ) بما أن $AO = OB$ وأن $\widehat{COA} = \widehat{BOD}$ وأن $\widehat{CAO} = \widehat{DBO}$ فإن $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$. وبهذا فإن $OC = OD$. أي أن $PQ = RS$.

(ب) بما أن $OP = OS$ وأن $OC = OD$ فإن $\triangle OCP \equiv \triangle ODS$. ومن ذلك نجد أن $\widehat{COP} = \widehat{SOD}$. ولكن C، O، D على استقامة واحدة (لأن $PQ \parallel RS$). إذن، P، O، S على استقامة واحدة. وبالمثل، Q، O، R على استقامة واحدة.

(ج) بما أن $PQ = RS$ وهما متوازيان فإن $PQSR$ متوازي أضلاع قطراه $\overline{PS}$ و $\overline{QR}$ متساويان (لأنهما قطرا دائرة). إذن $PQSR$ مستطيل. ◇

مثال (**٥**): في الدائرة $C(O,r)$ المبينة في الشكل، $\widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ$ ، $\overline{AB} \perp \overline{OM}$ ، $\overline{CD} \perp \overline{ON}$. أثبت أن $\triangle DNO \equiv \triangle OMA$.



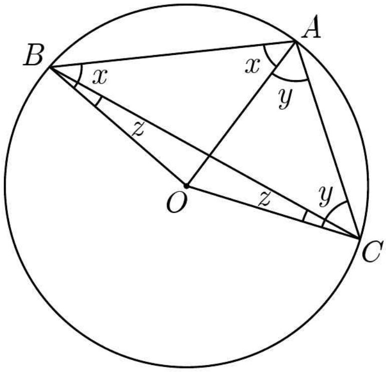
الحل: بما أن $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ فإن $AM = MB$. وبالمثل، $DN = NC$. إذن، $\overline{OM}$ ينصف $\widehat{AOB}$ و $\overline{ON}$ ينصف $\widehat{COD}$. من ذلك نجد أن

$$\widehat{AOM} + \widehat{DON} = \frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{COD}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} = 90^\circ$$

ولكن في المثلث $\triangle DON$ لدينا $\widehat{DON} + \widehat{NDO} = 90^\circ$. إذن، $\widehat{AOM} = \widehat{NDO}$. وبهذا فالمثلثان القائمان $\triangle AOM$ و $\triangle NDO$ متطابقان. ◇

مثال (٦): رسمنا المثلث $\triangle ABC$ داخل الدائرة $C(O,r)$ حيث $\widehat{B} = 35°$، $\widehat{C} = 43°$. احسب قياس كل من $\widehat{BAO}$ و $\widehat{CAO}$.

الحل:



كل من المثلثات $\triangle OAB$، $\triangle OBC$، $\triangle OAC$ متساوي الساقين، كذلك،

$$x + y = \widehat{BAC} = 180° - (43° + 35°) = 102°.$$

ولكن $\widehat{ACB} = y - z = 43°$ و $\widehat{ABC} = x - z = 35°$. إذن، $z = 12°$

ويكون $\widehat{BAO} = x = 47°$ و $\widehat{CAO} = y = 55°$. ◇

القواطع والمماسات [Secants And Tangents]

مبرهنة (٨): لتكن $C(O,r)$ دائرة وليكن h مستقيماً.

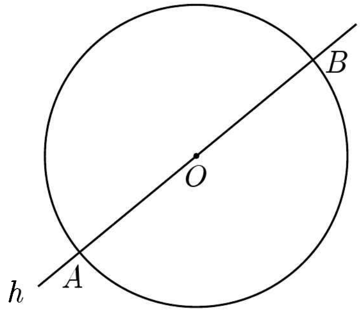
(أ) إذا كان $\text{dist}(O,h) < r$ فإن المستقيم h يقطع الدائرة $C(O,r)$ بنقطتين حيث $\text{dist}(O,h)$ ترمز للمسافة بين O والمستقيم h.

(ب) إذا كان $\text{dist}(O,h) = r$ فإن المستقيم h يقطع الدائرة $C(O,r)$ في نقطة واحدة فقط.

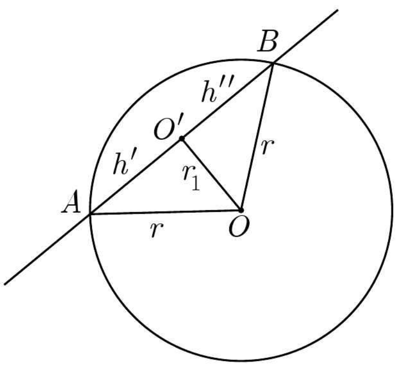
(ج) إذا كان $\text{dist}(O,h) > r$ فإن المستقيم h والدائرة $C(O,r)$ لا يتقاطعان.

البرهان:

(أ) إذا كان $\operatorname{dist}(O,h) = 0$ فإن O تقع على h. ومن ثم توجد نقطة واحدة فقط A ونقطة واحدة فقط B على كل من نصفي المستقيم اللذين تحددهما O حيث $OA = OB = r$.



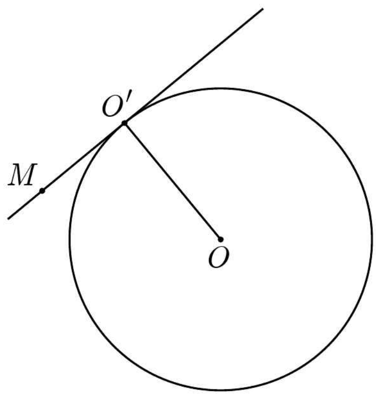
لنفرض إذن، أن $0 < \operatorname{dist}(O,h) = r_1 < r$. لنفرض أن OO' عمودي على h. ليكن h' و h'' نصفي المستقيم h بدءاً من O'. عندئذ، توجد نقطة وحيدة $A \in h'$ ونقطة وحيدة $B \in h''$ (انظر الشكل المرفق) حيث $O'A = O'B = \sqrt{r^2 - r_1^2}$.



إذن، $A,B \in C(O,r)$. ولأي نقطة $M \in h$ مختلفة عن A و B يكون $O'M < \sqrt{r^2 - r_1^2}$ أو $O'M > \sqrt{r^2 - r_1^2}$. أي أن $OM < r$ أو

$OM > r$. وبهذا فإما أن M خارج الدائرة أو أنها داخل الدائرة.

(ب) لنفرض أن $\operatorname{dist}(O,h) = r$ وأن OO' عمودي على h. عندئذ، $OO' = r$ ومن ثم فإن $O' \in C(O,r)$. وإذا كانت $M \neq O'$ فإن



$OM > OO' = r$. ومن ذلك فإن M تقع خارج الدائرة $C(O,r)$.

(ج) لنفرض أن $\operatorname{dist}(O,h) > r$. عندئذ، لكل M على المستقيم h يكون $OM \geq \operatorname{dist}(O,h) > r$. وبهذا فإن M تقع خارج الدائرة $C(O,r)$. □

تعريف: نقول إن المستقيم h مماس للدائرة $C(O,r)$ إذا وجدت نقطة تقاطع وحيدة بين h و $C(O,r)$ وتسمى نقطة التقاطع الوحيدة، نقطة التماس. وإذا قطع المستقيم h الدائرة $C(O,r)$ في نقطتين فيسمى المستقيم h في هذه الحالة قاطعاً للدائرة. وإذا لم يقطع المستقيم h الدائرة $C(O,r)$ فإنه يسمى مستقيماً خارجاً عن الدائرة.

ملحوظة: استناداً إلى المبرهنة (٨) نلاحظ أن h مماس للدائرة $C(O,r)$ إذا وفقط إذا كان $\operatorname{dist}(O,h) = r$. كما أن المماس المار بالنقطة O' عمودي على نصف القطر $\overline{OO'}$.

مبرهنة (٩): لنفرض أن A نقطة خارج الدائرة $C(O,r)$ وأن AT و AT' مماسان للدائرة عند النقطتين T و T'. عندئذ،

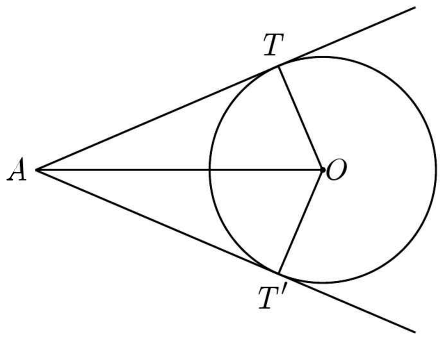
(أ) $AT = AT'$.

(ب) $\overrightarrow{AO}$ ينصف $\widehat{TAT'}$.

(ج) $\overrightarrow{OA}$ ينصف $\widehat{TOT'}$.

(د) $\overleftrightarrow{OA}$ منصف عمودي للقطعة $\overline{TT'}$.

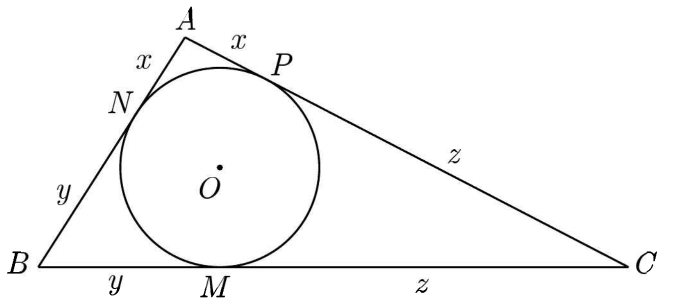
البرهان:



بما أن $\triangle ATO \equiv \triangle AT'O$ فإننا نحصل على صواب العبارات الثلاثة مباشرة من هذا التطابق. أما (د) فهو نتيجة لتطابق $\triangle AO'T$ وَ $\triangle AO'T'$ حيث O' نقطة تقاطع $\overline{AO}$ و $\overline{TT'}$. $\square$

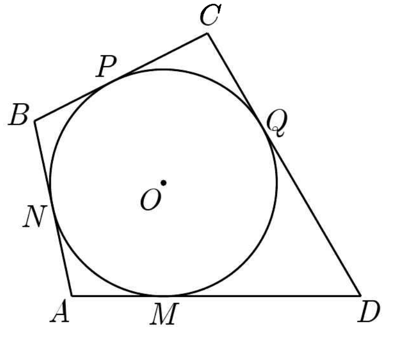
مثال (٧): أضلاع $\triangle ABC$ مماسات للدائرة عند النقاط N ، M ، P. إذا كان محيط المثلث يساوي 30 و $BC = 13$ فاحسب AN.

الحل:



لاحظ أن $AN = AP = x$ ، $BN = BM = y$ ، $CM = CP = z$. عندئذ، محيط المثلث $\triangle ABC$ هو $2(x + y + z) = 30$. أي أن $x + y + z = 15$ ولكن $BC = y + z = 13$. إذن، $AN = x = 2$. ◇

مثال (٨): في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ ، $\overline{DA}$ مماسات للدائرة $C(O,r)$ عند النقاط، N ، P ، Q ، M على التوالي. أثبت أن $AB + CD = BC + DA$.

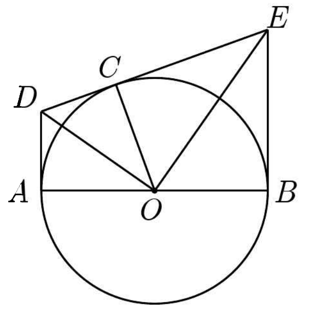


الحل: لاحظ أن

$$\begin{aligned} AB + CD &= AN + NB + CQ + QD \\ &= AM + BP + PC + MD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (AM + MD) + (BP + PC) \\ &= AD + BC \end{aligned}$$ ◇

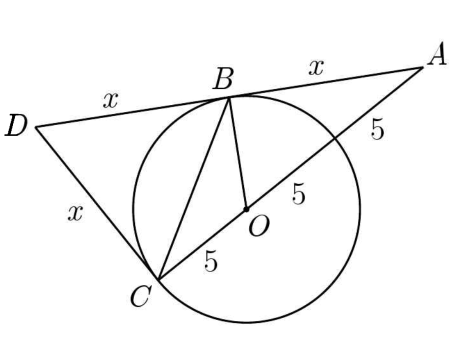
مثال (٩): في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة $C(O,r)$. $\overline{DA}$، $\overline{DE}$، $\overline{BE}$ مماسات للدائرة عند نقاط التماس A، C، B على التوالي. جد قياس $\widehat{DOE}$.



الحل: بما أن $\overline{OD}$ ينصف $\widehat{AOC}$ وأن $\overline{OE}$ ينصف $\widehat{COB}$ فإن

$$\widehat{DOE} = \widehat{DOC} + \widehat{COE} = \frac{\widehat{AOC}}{2} + \frac{\widehat{COB}}{2} = 90^\circ.$$ ◇

مثال (١٠): في الشكل المرفق، C دائرة مركزها O ونصف قطرها 5، $OA = 10$، AD و CD مماسان للدائرة عند B و C. احسب BC.



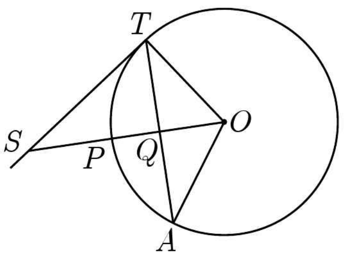
الحل: بما أن $\overline{AB}$ مماس للدائرة فإن $\widehat{OBA} = 90^\circ$. وبما أن $\frac{1}{2}OA = \frac{10}{2} = OB = 5$ فإن $\widehat{BAO} = 30^\circ$. وبما أن $\overline{CD}$ مماس للدائرة فإن $\widehat{DCA} = 90^\circ$. إذن، $\widehat{ADC} = 60^\circ$. الآن، $\triangle DCB$ متساوي الأضلاع لأن $BD = DC$ وأن $\widehat{BDC} = 60^\circ$. إذن، $BC = CD = DB = x$. أيضاً، $\triangle ADC$ مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ وعليه $BC = x = \frac{15}{\sqrt{3}}$. ◇

خواص زوايا الدوائر [Angle Properties of Circles]

نقول إن الزاوية مرسومة داخل دائرة، إذا وقع رأسها على الدائرة وكان ضلعاها وترين في الدائرة.

مبرهنة (١٠): قياس الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة وأحد ضلعيها مماس للدائرة حيث الرأس هو نقطة التماس والضلع الآخر وتر في الدائرة يساوي نصف قياس القوس المحصور بالضلعين.

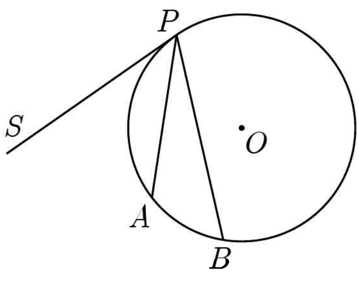
البرهان:



لنفرض أن $\overline{TA}$ وتر في الدائرة $C(O,r)$ وأن $\overline{TS}$ مماس عند النقطة T. ارسم $\overline{OQ}$ عمودياً على $\overline{TA}$ ويقطع الدائرة عند النقطة P. الآن، $\triangle AOT$ متساوي الساقين. ولذا ارتفاعه $\overline{OQ}$ ينصف $\widehat{AOT}$. إذن، $\widehat{TOQ} = \frac{1}{2}\widehat{TOA} = \frac{1}{2}\widehat{TPA}$.
ولكن $\widehat{TOQ} + \widehat{OTQ} = 90°$ و $\widehat{ATS} + \widehat{OTQ} = 90°$. من ذلك نجد أن $\widehat{ATS} = \widehat{TOQ}$. وبهذا فإن $\widehat{ATS} = \widehat{TOQ} = \frac{1}{2}\widehat{TPA}$. □

مبرهنة (١١): قياس الزاوية المرسومة داخل دائرة (أي رأسها على الدائرة وضلعاها وتران) يساوي نصف قياس القوس الأصغر المقابل للضلعين.

البرهان: لنفرض أن $\widehat{APB}$ مرسومة داخل الدائرة $C(O,r)$. ارسم المماس $\overline{PS}$.

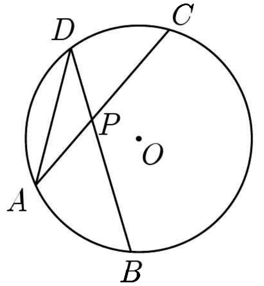


عندئذ،

$$\widehat{APB} = \widehat{SPB} - \widehat{SPA} = \frac{1}{2}\widehat{PB} - \frac{1}{2}\widehat{PA} = \frac{1}{2}\widehat{AB}. \quad \square$$

مبرهنة (١٢): قياس الزاوية التي يقع رأسها داخل دائرة يساوي نصف مجموع قياسي القوسين الصغيرين المقابلين لضلعيها.

البرهان:



لنفرض أن $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ وتران في الدائرة $C(O,r)$ يتقاطعان في النقطة P .

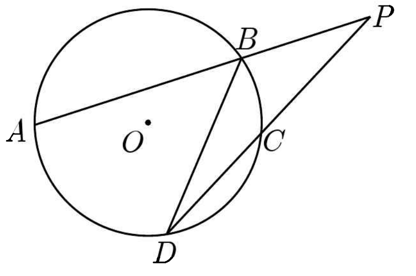
بما أن $\widehat{APB}$ زاوية خارجة للمثلث $\triangle APD$ فإن

$$\widehat{APB}=\widehat{PAD}+\widehat{PDA}=\frac{1}{2}\widehat{DC}+\frac{1}{2}\widehat{AB}=\frac{1}{2}\left(\widehat{DC}+\widehat{AB}\right). \qquad \square$$

مبرهنة (١٣): قياس الزاوية التي رأسها خارج دائرة وضلعاها إما وتران أو مماسان أو وتر ومماس للدائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين الصغيرين المقابلين لضلعيها.

البرهان:

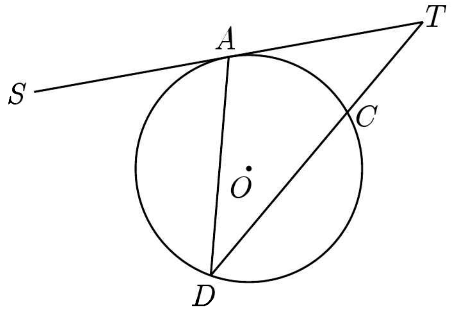
(أ) لنفرض أن $\widehat{APD}$ زاوية ضلعاها وتران في الدائرة $C(O,r)$.



بما أن $\widehat{ABD}$ خارجة للمثلث $\triangle DBP$ فإن

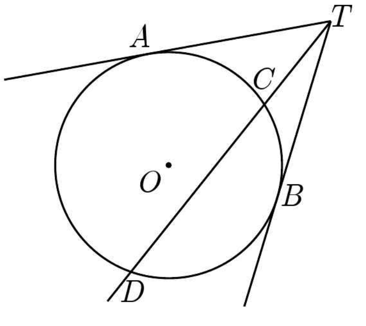
$$\widehat{APD} = \widehat{ABD} - \widehat{BDP} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}\right).$$

(ب) نفرض أن $\widehat{ATD}$ زاوية ضلعاها هما المماس $\overline{AT}$ والوتر $\overline{CD}$. عندئذ،



$$\widehat{ATD} = \widehat{SAD} - \widehat{TDA} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AC}\right).$$

(ج) نفرض أن $\widehat{ATB}$ زاوية ضلعاها مماسان للدائرة $C(O,r)$. ارسم TCD مستقيماً يقطع الدائرة في النقطتين C و D. عندئذ،



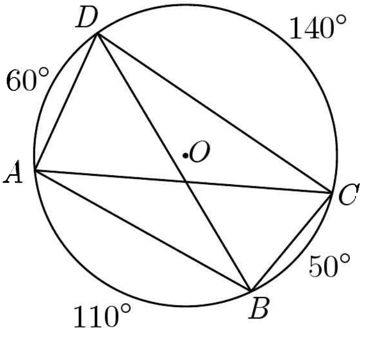
$$\widehat{ATB} = \widehat{ATD} + \widehat{DTB} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{DB} - \overset{\frown}{CB}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{ADB} - \overset{\frown}{ACB}\right). \qquad \square$$

ملحوظة: من المبرهنة (١٣) نحصل على:

(أ) قياس أي زاوية مرسومة داخل نصف دائرة يساوي $90°$.

(ب) جميع الزوايا المرسومة داخل دائرة وتقابل القوس الصغير نفسه يجب أن تكون متطابقة.

مثال (١١): الدائرة $C(O,r)$ المبينة فيها، $\widehat{AB} = 110°$، $\widehat{BC} = 50°$، $\widehat{CD} = 140°$. احسب قياس زوايا الشكل الرباعي $ABCD$ وقياس الزوايا بين قطري وأضلاع الشكل الرباعي $ABCD$.



الحل:

$$\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{BC} + \frac{1}{2}\widehat{DC} = 25° + 70° = 95°$$

$$\widehat{B} = \frac{1}{2}\widehat{AD} + \frac{1}{2}\widehat{DC} = 30° + 70° = 100°$$

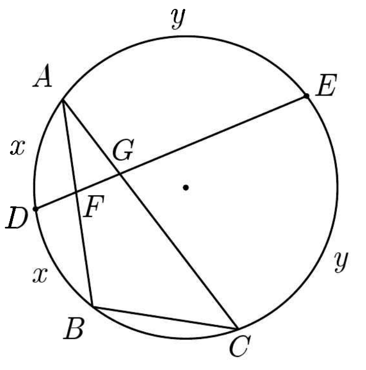
$$\widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{AD} + \frac{1}{2}\widehat{AB} = 30° + 55° = 85°$$

$$\widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{AB} + \frac{1}{2}\widehat{BC} = 55° + 25° = 80°$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{DBC} = 70^\circ$$
$$\widehat{CAB} = \widehat{CDB} = 25^\circ$$
$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 30^\circ$$
$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 55^\circ. \qquad \square$$

مثال (١٢): في الشكل المرفق، D و E منتصفا $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{AC}$ على التوالي، F و G نقطتا تقاطع $\overline{DE}$ مع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ على التوالي. أثبت أن $\triangle AFG$ متساوي الساقين.

الحل:

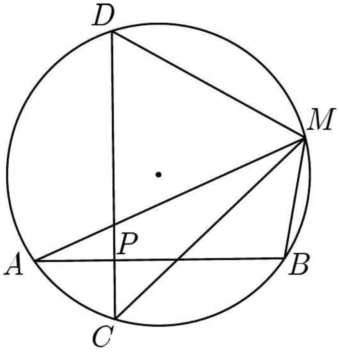


لنفرض أن $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} = x$ وأن $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EC} = y$. عندئذ،

$$\widehat{AFG} = \frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{EC}\right) = \widehat{AGF}. \qquad \diamond$$

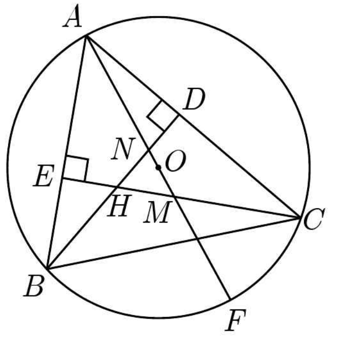
مثال (١٣): ليكن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ وترين متعامدين في دائرة. لنفرض أن M نقطة واقعة على $\overset{\frown}{BD}$ أو $\overset{\frown}{AC}$. أثبت أن $\widehat{AMD} + \widehat{BMC} = 90^\circ$.

الحل: نفرض أن P هي نقطة تقاطع الوترين. الآن،



$$\widehat{AMD} + \widehat{BMC} = \frac{1}{2}\widehat{AD} + \frac{1}{2}\widehat{BC} = \widehat{APD} = 90^\circ . \qquad \diamond$$

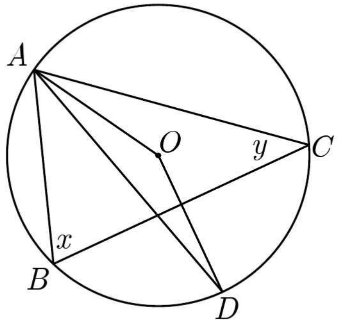
مثال (١٤): في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$، $\overline{CE} \perp \overline{AB}$، $\overline{AF}$ قطر. أثبت أن $\triangle HNM \sim \triangle ABC$.



الحل: صل $\overline{CF}$ ولاحظ أن $\widehat{ACF} = 90^\circ$. الآن،

$\widehat{HNM} = \widehat{AND} = 90^\circ - \widehat{FAC} = \widehat{AFC}$ وبما أن $\widehat{ABC}$ محيطية منشأة على القوس $\widehat{AC}$ فإن $\widehat{ABC} = \widehat{AFC}$ وعليه $\widehat{ABC} = \widehat{HNM}$. كذلك $\widehat{NHM} = \widehat{EHB} = 90^\circ - \widehat{ABD} = \widehat{BAC}$. إذن، $\triangle HNM \sim \triangle ABC$. $\diamond$

مثال (١٥): في الشكل المرفق، $\widehat{BD} = \widehat{DC}$. $\widehat{ABC} = x$ و $\widehat{ACB} = y$.
حيث $x > y$. جد قياس $\widehat{ADO}$.

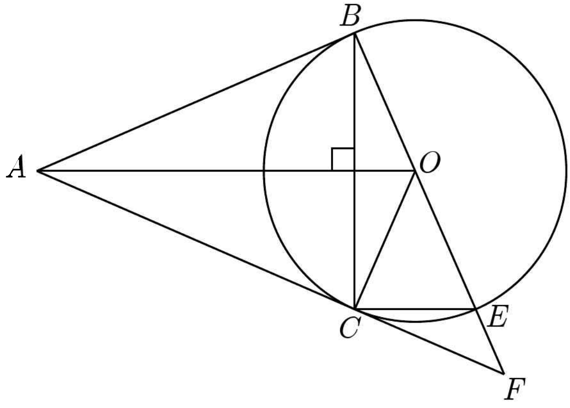


الحل: بما أن $\triangle OAD$ متساوي الساقين فإن

$$\begin{aligned}
\widehat{ADO} &= \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{AOD}\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ABD} \\
&= 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AB} - \frac{1}{2}\widehat{BD} \\
&= 90^\circ - \widehat{ACB} - \frac{1}{4}\widehat{BC} \\
&= 90^\circ - \widehat{ACB} - \frac{1}{2}\widehat{BAC} \\
&= 90^\circ - \widehat{ACB} - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{ACB}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}\right)
\end{aligned}$$

إذن، $\widehat{ADO} = \frac{1}{2}(x - y)$. ◇

مثال (١٦): في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ مماسان للدائرة $C(O,r)$ ،
$\overline{BC} \perp \overline{AO}$. أثبت أن $\widehat{BAO} = \widehat{ECF}$.



الحل:

$$\widehat{BAO} = 90^\circ - \widehat{BOA} = \widehat{OBC} = \widehat{EBC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CE} = \widehat{ECF}.$$ ◇

مساحة المضلعات المنتظمة [Areas of Regular Polygons]

لقد أثبتنا في بداية هذا الفصل أنه توجد دائرة وحيدة تمر بأي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. وسنبين في الجزء الثاني من هذا الكتاب أنه يمكن رسم دائرة تحيط أي مضلع منتظم تسمى الدائرة الخارجية للمضلع. أيضاً يمكن رسم دائرة داخل أي مضلع منتظم تسمى الدائرة الداخلية للمضلع. إضافة إلى ذلك فإن الدائرتين الخارجية والداخلية للمضلع المنتظم تشتركان في المركز.

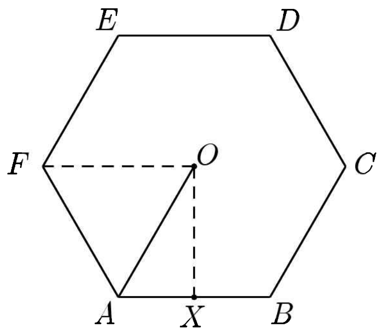
تعريف:

(١) مركز المضلع المنتظم هو المركز المشترك للدائرتين الخارجية والداخلية.

(٢) نصف قطر المضلع المنتظم هو المسافة بين مركز المضلع وأي رأس من رؤوسه.

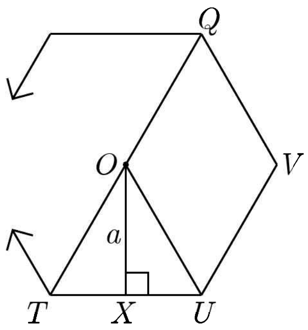
(٣) عامل (apothem) المضلع المنتظم هو المسافة بين المركز وأي ضلع من أضلاعه.

(٤) الزاوية المركزية للمضلع المنتظم هي الزاوية التي رأسها مركز المضلع وضلعاها نصفا قطرين مرسومان لرأسين متجاورين.



المركز (O)، العامل ($\overline{OX}$)، نصف القطر (OA)، زاوية مركزية ($\widehat{FOA}$).

مبرهنة (١٤): مساحة المضلع المنتظم تساوي نصف حاصل ضرب العامل والمحيط.

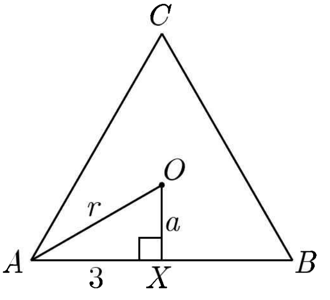


البرهان: لنفرض أن $TUVQ\cdots$ مضلع منتظم، عامله a، طول ضلعه s، محيطه p ومساحته A. برسم n من المثلثات المتطابقة، نجد أن مساحة كل منها تساوي $\frac{1}{2}as$. عندئذ،

$$A = n \times \frac{1}{2}as = \frac{1}{2}a(ns) = \frac{1}{2}ap. \quad \square$$

مثال (١٧): جد نصف قطر وعامل المثلث المتساوي الأضلاع إذا كان طول ضلعه يساوي 6.

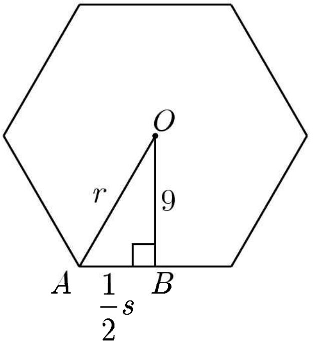
الحل:



لاحظ أن المثلث $\triangle AOX$ هو مثلث $90° - 60° - 30°$. إذن، $a = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ و $r = 2a = 2\sqrt{3}$. ◇

مثال (١٨): جد مساحة السداسي المنتظم إذا كان عامله يساوي 9.

الحل:

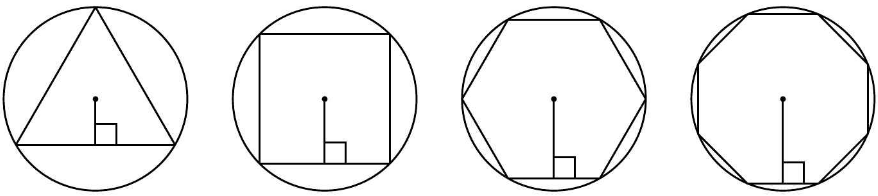


المثلث $\triangle AOB$ هو مثلث $90° - 60° - 30°$. إذن، $\frac{1}{2}s = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. أي أن $s = 6\sqrt{3}$. ومن ذلك نجد أن $p = 6 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$. وبهذا فإن

$$A = \frac{1}{2}ap = \frac{1}{2} \times 9 \times 36\sqrt{3} = 162\sqrt{3}.$$ ◇

محيط الدائرة [Circumference of circle]

الأشكال الأربعة التالية تبين لنا أربعة مضلعات منتظمة مرسومة داخل دوائر متطابقة.



من هذه الأشكال نلاحظ أن الزيادة في عدد أضلاع المضلع تؤدي إلى الزيادة في كل من:

(أ) العامل، حيث يقترب أكثر فأكثر من نصف قطر الدائرة.

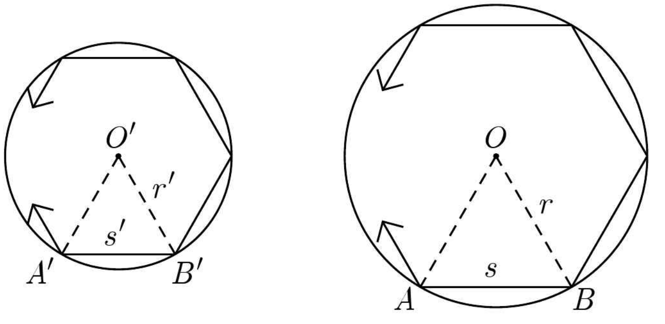
(ب) المحيط، حيث يقترب أكثر فأكثر من محيط الدائرة.

(ج) المساحة، حيث تقترب أكثر فأكثر من مساحة الدائرة.

بجعل عدد أضلاع المضلع يزداد زيادة كافية نستطيع القول إن محيط الدائرة (يرمز له بالرمز C) هو نهاية محيطات المضلعات المنتظمة المرسومة داخل الدائرة. كما أن مساحة الدائرة (يرمز لها بالرمز A) هي نهاية مساحات المضلعات المنتظمة المرسومة داخل الدائرة.

مبرهنة (١٥): النسبة بين محيط أي دائرة وقطرها عدد ثابت.

البرهان: لنفرض أن C محيط الدائرة التي مركزها O وقطرها d وأن C' هو محيط الدائرة التي مركزها O' وقطرها d'.



ارسم داخل الدائرة O مضلعاً منتظماً عدد أضلاعه n ومحيطه p_n وارسم داخل الدائرة O' مضلعاً منتظماً عدد أضلاعه n ومحيطه p'_n. عندئذ، النسبة بين محيطي المضلعين هي:

$$\frac{p_n}{p'_n} = \frac{ns}{ns'} = \frac{s}{s'}$$

وبما أن $\triangle AOB \sim \triangle A'O'B'$ فإن $\frac{r}{r'} = \frac{s}{s'}$. إذن، $\frac{d}{d'} = \frac{r}{r'} = \frac{p_n}{p'_n}$.

الآن، بجعل n يزداد زيادة كافية بحيث يقترب p_n من C و p'_n من C' نجد أن $\frac{d}{d'} = \frac{C}{C'}$. أي أن $\frac{C'}{d'} = \frac{C}{d}$. وبهذا فإن $\frac{C}{d}$ ثابت لأي دائرة. $\square$

ملحوظات:

(١) من المعلوم أن هذا الثابت $\frac{C}{d}$ يساوي العدد غير الكسري π (يساوي تقريباً 3.14 أو $\frac{22}{7}$). من ذلك نحصل على القانون التالي لحساب محيط الدائرة:

$$C = \pi d = 2\pi r\,.$$

(٢) إذا كان قياس القوس $\widehat{AB}$ في دائرة $C(O,r)$ يساوي n° فإن هذا القياس يقابل $\frac{n}{360}$ من محيط الدائرة. ولذا فإن طول القوس $\widehat{AB}$ يساوي

$$\frac{n}{360} \times 2\pi r\,.$$

على سبيل المثال، إذا كان نصف قطر دائرة يساوي 4 وقياس القوس $\widehat{AB}$ يساوي 40° فإن طول القوس يساوي

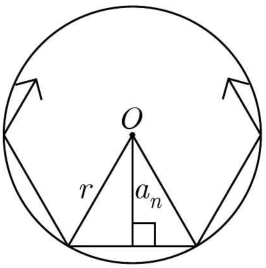
$$\frac{40}{360} \times 2\pi \times 4 = \frac{8\pi}{9}\,.$$

مساحة الدائرة [Area of a Circle]

لإيجاد مساحة الدائرة نستخدم قانون مساحة المضلع المنتظم.

مبرهنة (١٦): مساحة الدائرة $C(O,r)$ هي $A = \pi r^2$.

البرهان: لنفرض أن A_n مساحة المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة $C(O,r)$ والذي عدد أضلاعه n وعامله a_n ومحيطه p_n .

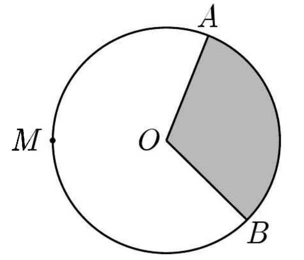


عندئذ، $A_n = \frac{1}{2} a_n p_n$. وبأخذ n كبيراً بما فيه الكفاية بحيث يقترب a_n قرباً كافياً من r، p_n من C، A_n من A نجد أن $A = \frac{1}{2} rC$. وبما أن $C = 2\pi r$ فإن $A = \frac{1}{2} r(2\pi r) = \pi r^2$. □

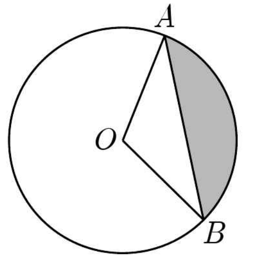
تعريف:

(١) القطاع (sector) في الدائرة $C(O,r)$ هو المنطقة المحدودة بنصفي قطر الدائرة وقوس.

(٢) المقطع (segment) في الدائرة $C(O,r)$ هو المنطقة المحدودة بقوس في الدائرة والوتر المقابل للقوس.



كل من المنطقتين المظللة وغير المظللة قطاع في الدائرة

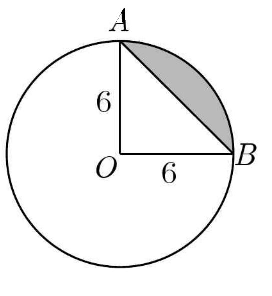


المنطقة المظللة مقطع في الدائرة

مساحة القطاع الذي قياس قوسه n درجة هو $\frac{n}{360} \times \pi r^2$.

أما مساحة المقطع فيمكن إيجادها بطرح مساحة المثلث $\triangle AOB$ من مساحة القطاع AOB.

مثال (١٩): جد مساحة المقطع المقابل لقوس في دائرة قياسه $90°$ ونصف قطر الدائرة 6.

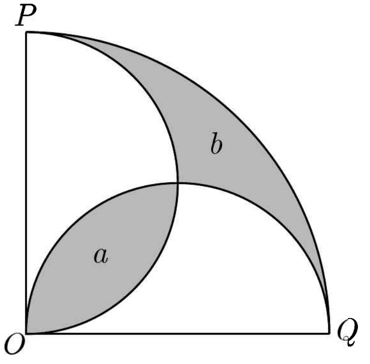


الحل: مساحة القطاع AOB تساوي $9\pi = \dfrac{90}{360} \times \pi \times 6^2$.

مساحة المثلث AOB تساوي $18 = \dfrac{1}{2} \times 6 \times 6$.

مساحة المقطع تساوي $9\pi - 18$. ◇

مثال (٢٠) [Aust.MC 1980]: رسمنا في الشكل المرفق، ربع دائرة OPQ ونصفي دائرة قطراهما OP و OQ. إذا كانت a و b مساحتي المنطقتين المظللتين فجد $\dfrac{a}{b}$.



الحل: لنفرض أن $2r$ هو نصف قطر ربع الدائرة. عندئذ، r هو نصف قطر كل من نصفي الدائرة.

لاحظ أن مساحة ربع الدائرة تساوي مساحة نصفي الدائرتين المرسومتين على OP و OQ مضافاً إلى ذلك مساحة المنطقة b ومطروحاً من ذلك مساحة المنطقة a (حسبناها مرتين). ولذا فإن

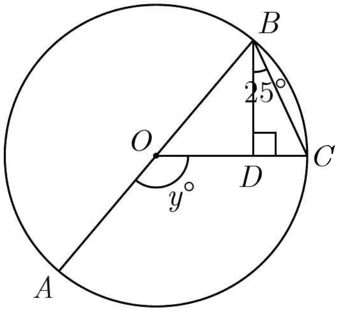
$$\frac{1}{4}\pi(2r)^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 + b - a$$
$$\pi r^2 = \pi r^2 + b - a$$

إذن، $b - a = 0$. ومن ثم $b = a$ ويكون $\dfrac{a}{b} = 1$. ◇

مسائل محلولة

(١) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{AOB}$ قطر. ما قياس الزاوية y ؟

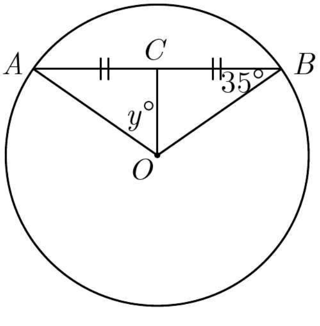
(أ) $110°$ (ب) $115°$ (ج) $120°$ (د) $130°$



الحل: الإجابة هي (د): $\widehat{BCD} = 180° - (90° + 25°) = 65°$.
$\triangle OBC$ متساوي الساقين. إذن، $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \widehat{DCB} = 65°$. ولذا فإن $\widehat{OBD} = 65° - 25° = 40°$. وبهذا فإن $y = 40° + 90° = 130°$ (خارجة للمثلث $\triangle ODB$).

(٢) ما قياس الزاوية y في الدائرة $C(O,r)$ ؟

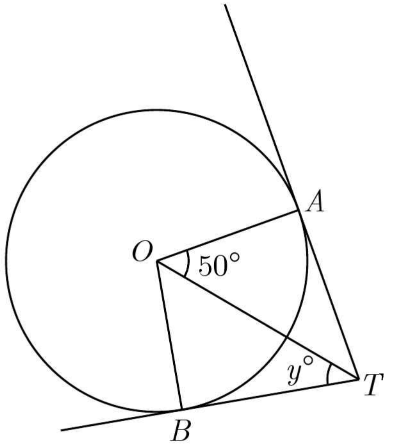
(أ) $35°$ (ب) $50°$ (ج) $55°$ (د) $60°$



الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\overline{OC}$ ينصف الوتر $\overline{AB}$ فإن $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ ويكون $\widehat{BCO} = 90^\circ$. $\widehat{A} = \widehat{B} = 35^\circ$ ($\triangle OAB$ متساوي الساقين). إذن، $y = 180^\circ - (90^\circ + 35^\circ) = 55^\circ$.

(٣) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{TA}$ و $\overline{TB}$ مماسان. ما قياس الزاوية y ؟

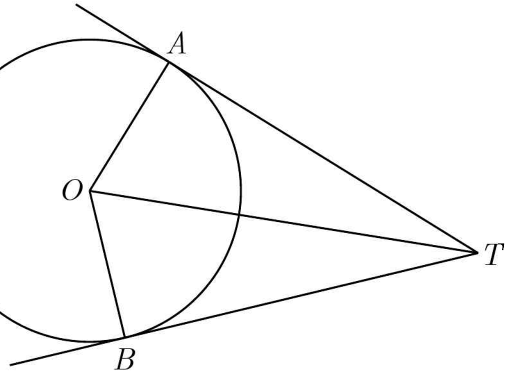
(أ) 40° (ب) 45° (ج) 50° (د) 55°



الحل: الإجابة هي (أ): بما أن نصف القطر عمودي على المماس فإن $\widehat{OAT} = 90^\circ$. ولذا فإن $\widehat{ATO} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$. إذن، $y = \widehat{ATO} = 40^\circ$.

(٤) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{AT}$ و $\overline{BT}$ مماسان، $r = 5$، $AT = 12$. ما طول OT ؟

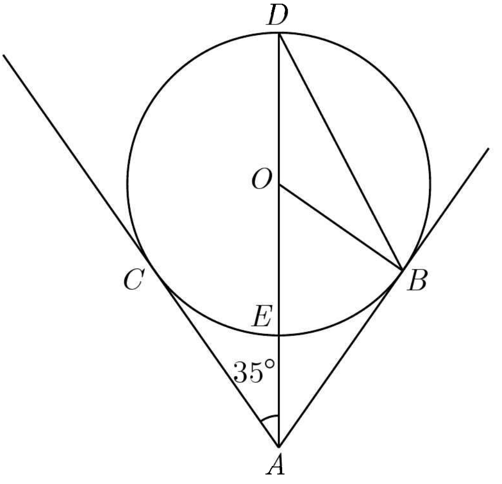
(أ) 5 (ب) 12 (ج) 13 (د) 15



الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\triangle OAT$ قائم الزاوية عند $\widehat{A}$ فإن $OT = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

(٥) $\overline{EOD}$ قطر في الدائرة $C(O, r)$، $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ مماسان للدائرة. ما قياس الزاوية $\widehat{D}$ ؟

(أ) $25°$ (ب) $27.5°$ (ج) $35°$ (د) $40°$



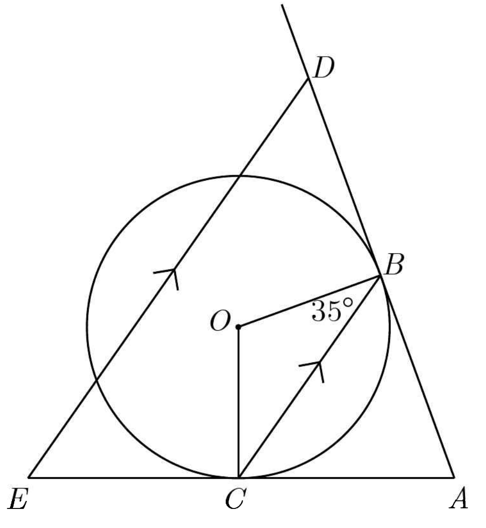
الحل: الإجابة هي (ب): $\overline{OB} \perp \overline{AB}$ و $\widehat{OAB} = 35°$. إذن،

$\widehat{AOB} = 180^\circ - (90^\circ + 35^\circ) = 55^\circ$. وبهذا فإن

$$\widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 27.5^\circ .$$

(٦) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{ABD}$ و $\overline{ACE}$ مماسان عند B و C على التوالي، $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$، $\widehat{CBO} = 35^\circ$. ما قياس الزاوية $\widehat{E}$ ؟

(أ) 55° (ب) 60° (ج) 65° (د) 70°

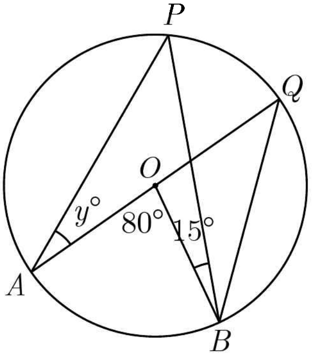


الحل: الإجابة هي (أ): $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^\circ$. $\triangle OBC$ متساوي الساقين، ولذا فإن $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = 35^\circ$. إذن، $\widehat{CBA} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$. أيضاً، $\triangle ABC$ متساوي الساقين، ولذا فإن $\widehat{BCA} = \widehat{CBA} = 55^\circ$. إذن، $\widehat{A} = 70^\circ$.
وبما أن $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ فإن $\widehat{D} = \widehat{CBA} = 55^\circ$. وبهذا نجد أن

$$\widehat{E} = 180^\circ - (55^\circ + 70^\circ) = 55^\circ .$$

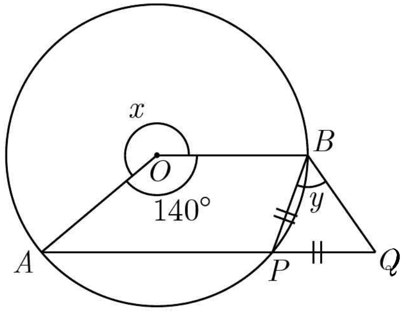
(٧) ما قياس الزاوية y في الدائرة $C(O,r)$ المبينة في الشكل المرفق ؟

(أ) 15° (ب) 25° (ج) 30° (د) 40°



الحل: الإجابة هي (ب): $\widehat{AQB} = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$. إذن، $\widehat{OBQ} = 40^\circ$ (لأن $\triangle OQB$ متساوي الساقين). إذن، $\widehat{PBQ} = 25^\circ$. ولكن y و $\widehat{PBQ}$ يقابلان القوس $\widehat{PQ}$. إذن، $y = \widehat{PBQ} = 25^\circ$.

(٨) في الدائرة $C(O,r)$ ، P تقع على $\overline{AQ}$. ما قياس الزاوية y ؟



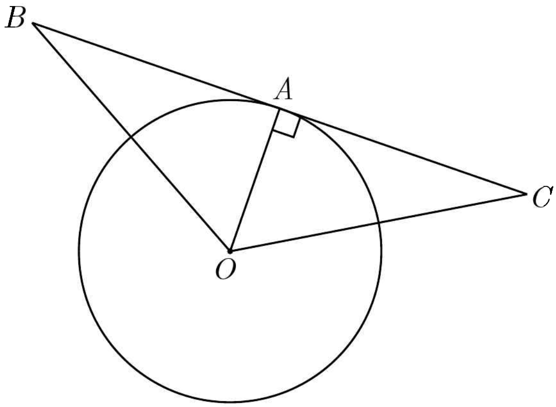
(أ) 35° (ب) 40° (ج) 45° (د) 55°

الحل: الإجابة هي (د): $x = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$. ولذا فإن $\widehat{BPA} = \frac{1}{2}x = 110^\circ$. وبما أن $\triangle PBQ$ متساوي الساقين فإن

$$y = \widehat{PQB} = \frac{1}{2}\widehat{BPA} = \frac{1}{2}\times 110^\circ = 55^\circ .$$

(٩) في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{BAC}$ مماس عند A للدائرة التي مركزها O. إذا كان نصف قطر الدائرة 2 وكان $\widehat{BOC} = 120^\circ$ وكان $BA = CA$ فإن OC يساوي:

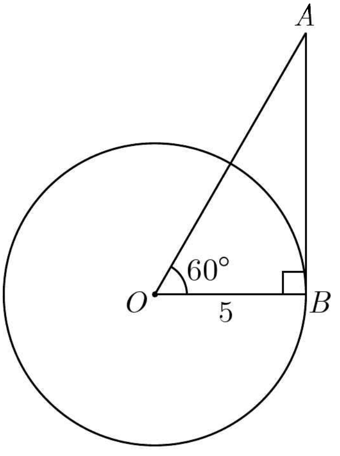
(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6



الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\overline{BC} \perp \overline{OA}$ و $BA = CA$ فإن $\overline{OA}$ متوسط وارتفاع في المثلث $\triangle OBC$. إذن، $OB = OC$. وبما أن $\overline{OA}$ منصف $\widehat{BOC}$ فإن $\widehat{AOC} = 60^\circ$. من ذلك نجد أن $\widehat{OCA} = 30^\circ$. إذن، $OC = 2OA = 2 \times 2 = 4$.

(١٠) قياس الزاوية بين نصف قطر الدائرة $\overline{OB}$ والقطعة المستقيمة $\overline{OA}$ يساوي 60°. $\overline{AB}$ مماس للدائرة عند B. إذا كان $OB = 5$ فما طول OA ؟

(أ) 5 (ب) 10 (ج) 15 (د) 20

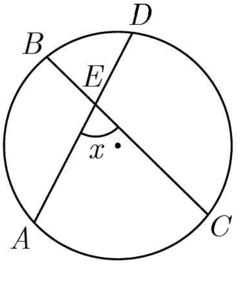


الحل: الإجابة هي (ب):

بما أن $\overline{AB}$ مماس للدائرة فإن $\widehat{B} = 90°$. إذن، $\widehat{A} = 30°$. وبهذا فإن $OA = 2OB = 2 \times 5 = 10$.

(١١) في الشكل المرفق، $\widehat{AB} = 94°$ و $\widehat{CD} = 120°$. ما قياس $\widehat{x}$ ؟

(أ) $70°$ (ب) $73°$ (ج) $80°$ (د) $85°$

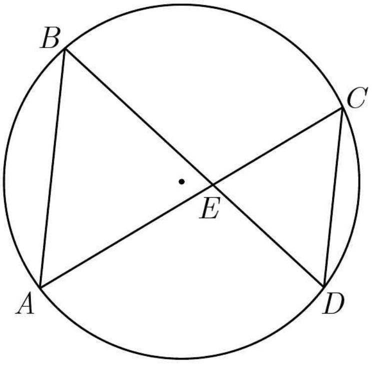


الحل: الإجابة هي (ب):

$$\widehat{AEB} = \widehat{DEC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AB} + \widehat{CD}\right) = \frac{1}{2}(94 + 120) = 107°$$

إذن، $\hat{x} = 180 - 107 = 73°$.

(١٢) في الدائرة المرفقة، $AB = 16$ ، $CE = 10$،



$CD = 12$. ما طول AE ؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) $\frac{40}{3}$ (د) 14

الحل: الإجابة هي (ج): من الواضح أن $\triangle DCE \sim \triangle BAE$.

ومن ذلك نجد أن

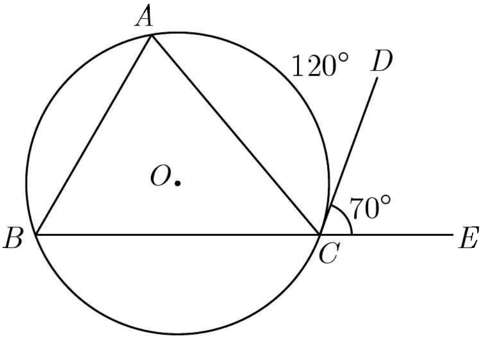
$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE}$$

$$\frac{16}{12} = \frac{AE}{10}$$

إذن، $AE = \frac{16 \times 10}{12} = \frac{40}{3}$.

(١٣) رسمنا $\triangle ABC$ داخل الدائرة $C(O,r)$، $\overline{DC}$ مماس للدائرة عند C، $\overline{BCE}$ قطعة مستقيمة، $\widehat{AC} = 120°$. $\widehat{DCE} = 70°$. ما قياس $\widehat{BAC}$ ؟

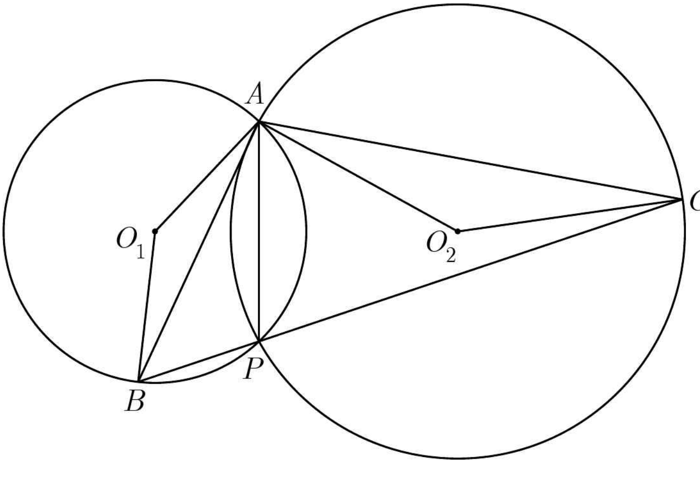
(أ) $50°$ (ب) $60°$ (ج) $70°$ (د) $75°$



الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AC} = \widehat{ACD}$. إذن، $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = 60°$. ولذا فإن $\widehat{ACB} = 180° - (60° + 70°) = 50°$. وبهذا فإن $\widehat{BAC} = 70°$.

(١٤) تتقاطع الدائرتان $C(O_1, r_1)$ و $C(O_2, r_2)$ في النقطتين A و P . $\overline{BPC}$ قطعة مستقيمة. إذا كان $\widehat{O_1AB} = x$ فإن $\widehat{O_2CA}$ يساوي ؟

(أ) $\frac{x}{3}$ (ب) $\frac{x}{2}$ (ج) x (د) $\frac{3x}{2}$



الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن $\widehat{O_2CA} = y$. الآن، $\widehat{O_1AB} = \widehat{O_1BA} = x$ و $\widehat{O_2AC} = \widehat{O_2CA} = y$. ولكن، $\widehat{AO_1B} = 180° - 2x$. ولذا فإن $\widehat{APB} = 180° - 2x$. وبهذا فإن قياس القوس الكبير $\widehat{AB}$ في الدائرة $C(O_1, r_1)$ يساوي $360° - (180° - 2x) = 180° + 2x$.
ولذا فإن

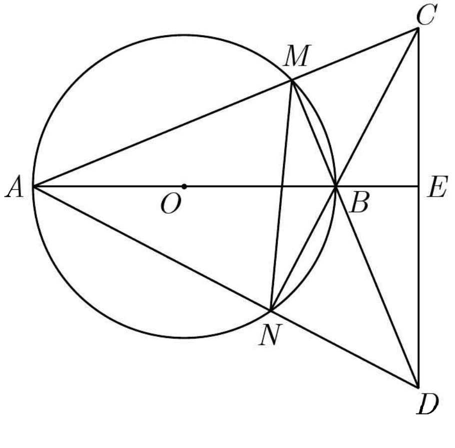
$\widehat{APB} = \frac{1}{2}(180° + 2x) = 90° + x$. ومن ذلك نجد أن

$$\widehat{APC} = 180° - (90° + x) = 90° - x\,.$$

ومن ذلك نجد أن $\widehat{AC} = 2(90° - x) = 180° - 2x$. ومن ثم فإن $\widehat{AO_2C} = 180° - 2x$. ولكن $\widehat{AO_2C} = 180° - 2y$. إذن، $180° - 2x = 180° - 2y$ ويكون $\widehat{O_2CA} = y = x$.

(١٥) $\overline{AOB}$ قطر في الدائرة التي مركزها O ويلاقي امتداده $\overline{CD}$ في النقطة E .
قياس $\widehat{AEC}$ يساوي:

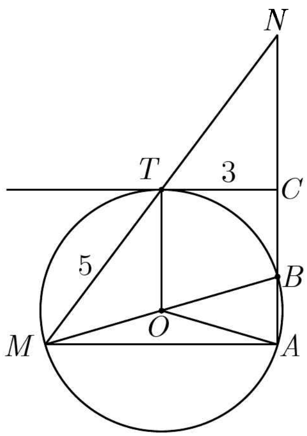
(أ) $80°$ (ب) $90°$ (ج) $95°$ (د) $100°$



الحل: الإجابة هي (ب): $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 90°$ (كل منهما تقابل نصف دائرة). إذن، $\overline{DM} \perp \overline{AC}$ و $\overline{CN} \perp \overline{AD}$. إذن، B هي نقطة التقاء أعمدة المثلث $\triangle ACD$. ولذا فإن $\overline{CD} \perp \overline{AE}$. وبهذا يكون $\widehat{AEC} = 90°$.

(١٦) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{TC}$ مماس عند T، $\overline{MOB}$ قطر، $\overline{ABCN} \parallel \overline{OT}$، N نقطة تقاطع $\overline{MTN}$ و $\overline{ABCN}$، $MT = 5$، $TC = 3$. ما طول AM ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 8 (د) 9



الحل: الإجابة هي (ب): بما أن $\overline{MO}$ و $\overline{TO}$ نصفا قطر في الدائرة فإن $\overline{MO} = \overline{TO}$. وبهذا فإن $\widehat{TMO} = \widehat{MTO}$. وبما أن $\overline{TO} \parallel \overline{NB}$ فإن $\widehat{MTO} = \widehat{MNB}$. إذن، $\widehat{TMO} = \widehat{MNB}$ ويكون $\triangle MBN$ متساوي الساقين فيه $MB = BN$. بما أن $\overline{OT} \parallel \overline{NB}$ فإن $\triangle MBN \sim \triangle MOT$. من ذلك نجد أن $1 = \dfrac{MT}{TN} = \dfrac{MO}{OB}$. إذن، $MT = TN = 5$. سنبرهن الآن أن

$\triangle NTC \sim \triangle NMA$. لاحظ أولاً أن $\overline{AB} \perp \overline{MA}$ (لأن $\overline{BM}$ قطر). وبما أن $\overline{TC}$ مماس فإن $\overline{TC} \perp \overline{TO}$. ولكن $\overline{AC} \parallel \overline{TO}$. إذن $\overline{AB} \perp \overline{TC}$. وبهذا نجد أن $\overline{TC} \parallel \overline{MA}$ ويكون $\triangle NTC \sim \triangle NMA$. من ذلك نجد أن $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{NT}{NM} = \frac{TC}{MA}$. وبالتالي فإن $MA = 2TC = 2 \times 3 = 6$.

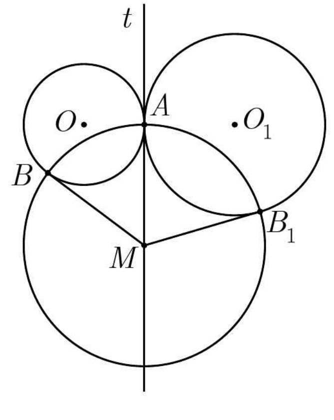
(١٧) في الشكل المرفق $C(O,r)$ و $C(O_1,r_1)$ دائرتان متماستان عند A و t هو المماس المشترك. M نقطة على t. الدائرة الثالثة $C(M,r_2)$ تقطع $C(O,r)$ عند A و B وتقطع $C(O_1,r_1)$ عند A و B_1. عندئذ،

(أ) $\overline{MB}$ مماس للدائرة $C(O,r)$ و $\overline{MB_1}$ مماس للدائرة $C(O_1,r_1)$.

(ب) $\overline{MB}$ مماس للدائرة $C(O,r)$ ولكن $\overline{MB_1}$ ليس مماساً للدائرة $C(O_1,r_1)$.

(ج) $\overline{MB}$ ليس مماساً للدائرة $C(O,r)$ ولكن $\overline{MB_1}$ مماس للدائرة $C(O_1,r_1)$.

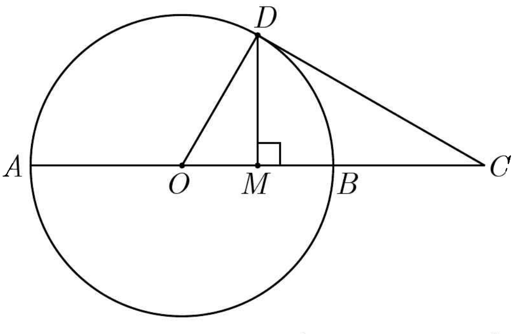
(د) $\overline{MB}$ ليس مماساً للدائرة $C(O,r)$ و $\overline{MB_1}$ ليس مماساً للدائرة $C(O_1,r_1)$.



الحل: الإجابة هي (أ): صل $\overline{OA}$، $\overline{OB}$، $\overline{OM}$. عندئذ، $\overline{MA} = \overline{MB} = r_2$، $\overline{OA} = \overline{OB} = r$. إذن، $\triangle MOA \equiv \triangle MOB$. من ذلك نجد $\widehat{OBM} = \widehat{OAM}$. ولكن $\overline{OA} \perp \overline{AM}$ (نصف قطر ومماس). إذن، $\overline{MB} \perp \overline{OB}$. وبهذا فإن $\overline{MB}$ مماس للدائرة $C(O,r)$. وبالمثل، $\overline{MB_1}$ مماس للدائرة $C(O,r_1)$.

(١٨) في الدائرة $C(O,r)$، A، O، M، B، C على استقامة واحدة، $BC = AO$. M منتصف $\overline{AC}$ و $\overline{DM} \perp \overline{AC}$. ما قياس $\widehat{ODC}$ ؟

(أ) $90°$ (ب) $95°$ (ج) $100°$ (د) $110°$



الحل: الإجابة (أ): لاحظ أن $AO = OB = BC = r$ وأن $OM = MB = \frac{r}{2}$. الآن، في $\triangle ODM$ لدينا $DM^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$. وفي $\triangle DMC$ لدينا

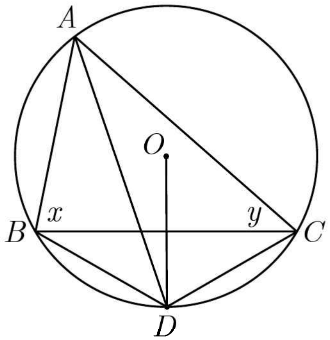
$DC^2 = \frac{3r^2}{4} + \frac{9r^2}{4} = 3r^2$. الآن، في $\triangle ODC$ لدينا

$$DC^2 + OD^2 = 3r^2 + r^2 = 4r^2 = OC^2.$$

إذن، $\triangle ODC$ قائم الزاوية عند $\widehat{D}$. وبهذا فإن $\widehat{ODC} = 90°$.

(١٩) المثلث $\triangle ABC$ مرسوم داخل دائرة مركزها O. D منتصف القوس $\overset{\frown}{BC}$.
$\widehat{ABC} = x$، $\widehat{ACB} = y$. ما قياس $\widehat{ADO}$ ؟

(أ) $x + y$ (ب) $x - y$ (ج) $\frac{1}{2}(x - y)$ (د) $\frac{1}{2}(x + y)$

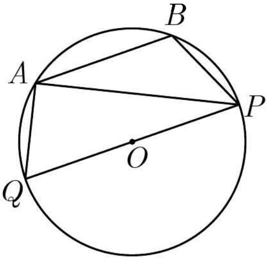


الحل: الإجابة هي (ج): بما أن D تنصف القوس $\overset{\frown}{BDC}$ فإن OD هو المنصف العمودي لـ $\overline{BC}$ ولذا ينصف $\widehat{BDC}$. كذلك $\widehat{BDA} = \widehat{ACB}$ إذ تقابلان نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$. الآن،

$$\begin{aligned}
\widehat{ADO} &= \widehat{BDO} - \widehat{BDA} = \frac{\widehat{BDC}}{2} - \widehat{BDA} \\
&= \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} - \widehat{BDA} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} - \widehat{BDA} \\
&= \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} - \widehat{BCA} = \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}\right) \\
&= \frac{1}{2}(x - y)
\end{aligned}$$

(٢٠) P نقطة على الدائرة $C(O, r)$. $\overline{AB} \parallel \overline{POQ}$. $(PA)^2 + (PB)^2$ يساوي:

(أ) r^2 (ب) $2r^2$ (ج) $3r^2$ (د) $4r^2$

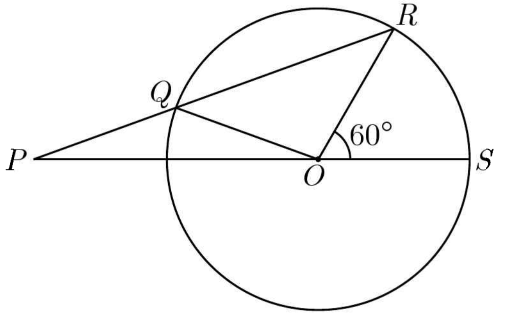


الحل: الإجابة هي (د): بما أن $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ فإن $PB = AQ$. وبما أن $\widehat{QAP} = 90^\circ$ فإن

$$(PA)^2 + (PB)^2 = (PA)^2 + (AQ)^2 = (QP)^2 = 4r^2 .$$

(٢١) [Aust.MC 1980] في الشكل المرفق POS مستقيم يمر في مركز الدائرة $C(O,r)$. رسمنا المستقيم PQR حيث $PQ = r$. إذا كان $\widehat{ROS} = 60^\circ$ فما قياس $\widehat{OPQ}$ ؟

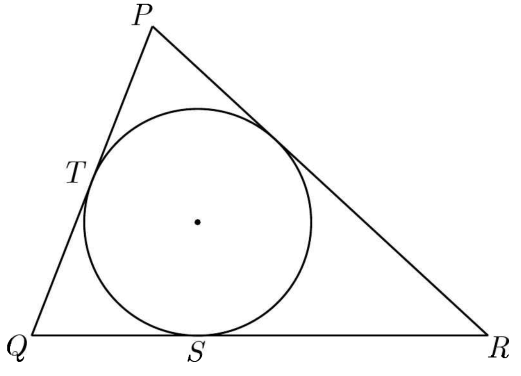
(أ) 10° (ب) 15° (ج) 20° (د) 25°



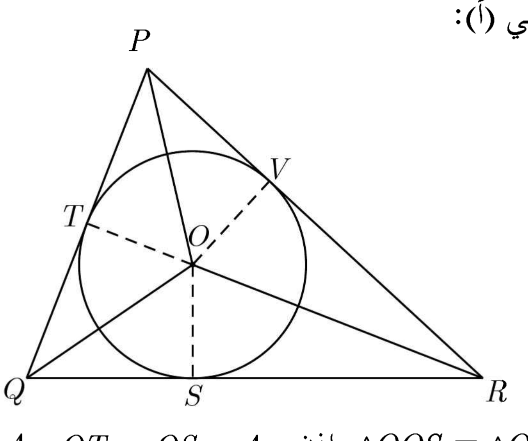
الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $PQ = OQ = OR = r$ فإن كلاً من $\triangle QOR$ و $\triangle QOP$ متساوي الساقين. الآن، إذا كانت $\widehat{P} = \widehat{QOP} = x^\circ$ فإن $\widehat{RQO} = \widehat{R} = 2x^\circ$. إذن، $60^\circ = 2x + x$. وبهذا فإن $\widehat{P} = x = 20^\circ$.

(٢٢) [Aust.MC 1981] في الشكل المرفق، رسمنا دائرة داخل المثلث $\triangle PQR$.
$SR = 7$ ، $QS = 4$ ، $TP = 4$. محيط $\triangle PQR$ يساوي:

(أ) 30 (ب) 11π (ج) 50 (د) 15π



الحل: الإجابة هي (أ):

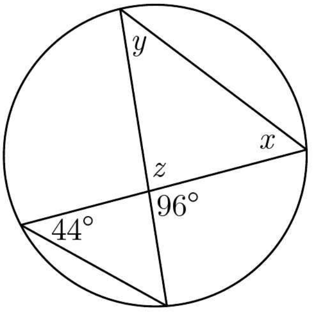


لاحظ أن $\triangle QOT \equiv \triangle QOS$ إذن، $QT = QS = 4$ ، $PV = PT = 4$ ،
$VR = SR = 7$. وبهذا فإن محيط المثلث يساوي

$$4 + 4 + 4 + 7 + 7 + 4 = 30\,.$$

(٢٣) [Aust.MC 1983] رسمنا أوتاراً في الدائرة كما هو مبين في الشكل المرفق.
قياس $\widehat{x}$ يساوي:

(أ) 40° (ب) 44° (ج) 48° (د) 52°

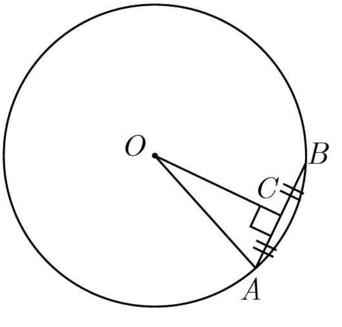


الحل: الإجابة هي (د): $y = 44^\circ$ لأنهما يقابلان القوس نفسه. $z = 180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$. إذن، $x = 180^\circ - 44^\circ - 84^\circ = 52^\circ$.

(٢٤) [Aust.MC 1978] رسمنا وتراً طوله 10 في دائرة قطرها 26. المسافة من الوتر إلى مركز الدائرة تساوي:

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 13 (د) 24

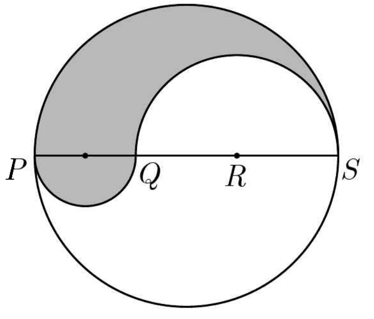
الحل: الإجابة هي (ب):



لنفرض أن C نقطة منتصف $\overline{AB}$ وأن $x = OC$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $x = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

(٢٥) [Aust.MC 1984] في الشكل المرفق، $\overline{PQRS}$ قطر في دائرة نصف قطرها r. $PQ = QR = RS$. رسمنا نصفي دائرتين على $\overline{PQ}$ و $\overline{QS}$ ونشأ عن ذلك المنطقة المظللة. ما محيط المنطقة المظللة ؟

(أ) $\frac{3\pi r}{2}$ (ب) $\frac{4\pi r}{3}$ (ج) $\frac{5\pi r}{3}$ (د) $2\pi r$

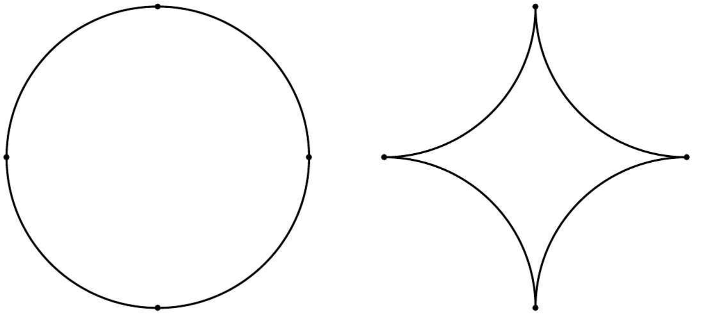


الحل: الإجابة هي (د): $PQ = QR = RS = \frac{2}{3}r$. محيط المنطقة المظللة

$$\frac{2\pi r}{2} + \frac{2\left(\frac{1}{3}\pi r\right)}{2} + \frac{2\left(\frac{2}{3}\pi r\right)}{2} = 2\pi r .$$

(٢٦) [AMC8 2012] قطعنا دائرة نصف قطرها 2 إلى أربعة أقواس متطابقة ثم وصلنا هذه الأقواس مع بعض لتكوين شكل النجمة المبين. ما النسبة بين مساحة شكل النجمة إلى مساحة الدائرة الأصلية ؟

(أ) $\frac{4-\pi}{\pi}$ (ب) $\frac{1}{\pi}$ (ج) $\frac{\pi-1}{\pi}$ (د) $\frac{3}{\pi}$

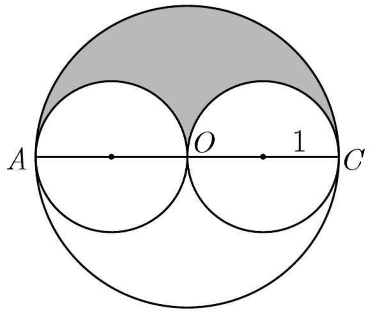


الحل: الإجابة هي (أ): ارسم مربعاً حول شكل النجمة. طول ضلع هذا المربع يساوي طول قطر الدائرة. أي 4. يكوّن هذا المربع أربعة أرباع دائرة حول شكل النجمة. أي أن مساحة هذه الأرباع الأربعة تساوي مساحة الدائرة التي نصف قطرها 2 وهذه المساحة هي 4π. مساحة المربع تساوي 16. إذن، مساحة شكل النجمة تساوي $16 - 4\pi$. وبهذا فالنسبة بين مساحة شكل النجمة ومساحة الدائرة هي

$$\frac{16-4\pi}{4\pi} = \frac{4-\pi}{\pi}.$$

(٢٧) [AJHSME 1986] $\overline{AC}$ قطر الدائرة الكبيرة. مركز كل من الدائرتين الصغيرتين يقع على $\overline{AC}$ وتتماسان عند مركز الدائرة الكبيرة O. نصف قطر كل من الدائرتين الصغيرتين يساوي 1. ما النسبة بين مساحة المنطقة المظللة ومساحة إحدى الدائرتين الصغيرتين ؟

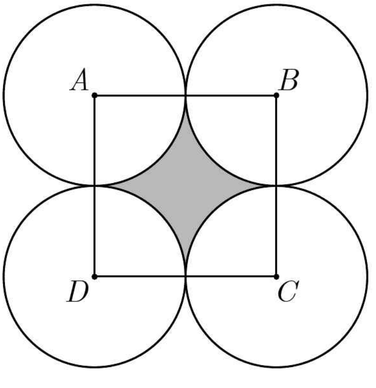
(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (ج) $\frac{3}{2}$ (د) 2



الحل: الإجابة هي (ب): مساحة كل من الدائرتين الصغيرتين تساوي π. مساحة الدائرة الكبيرة تساوي 4π. مساحة نصف الدائرة أعلى $\overline{AC}$ تساوي 2π. الجزء غير المظلل من نصف الدائرة أعلى $\overline{AC}$ هو نصفا الدائرتين الصغيرتين. أي أن مساحته تساوي π. إذن، مساحة الجزء المظلل يساوي $2\pi - \pi = \pi$. وبهذا فإن النسبة هي $1 = \frac{\pi}{\pi}$.

(٢٨) [Pascal 2013] في الشكل المرفق، $ABCD$ مربع طول ضلعه 2، كل من A ، B ، C ، D مركز لدائرة نصف قطرها 1. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $4 - 4\pi$ (ب) $4 - \pi$ (ج) $16 - 4\pi$ (د) $16 - \pi^2$

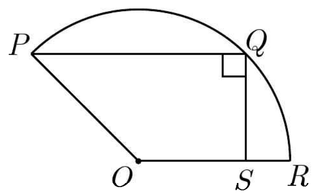


الحل: الإجابة هي (ب): مساحة المنطقة المظللة تساوي مساحة المربع $ABCD$

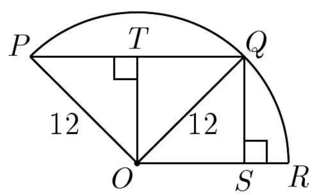
مطروحاً منها مساحة الشكل غير المظلل داخل المربع. مساحة المربع تساوي 4. بما أن $ABCD$ مربع زواياه قائمة ومن ثم فإن كلاً من المناطق غير المظللة داخل المربع هي ربع دائرة نصف قطرها 1. ولذا فمساحاتها مجتمعة تساوي مساحة دائرة نصف قطرها 1 وهذه تساوي π. إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي $4 - \pi$.

(٢٩) [Cayley 2012] في الشكل المرفق، P، Q، R ثلاث نقاط على الدائرة $C(O,12)$. S نقطة على $\overline{OR}$، $SQ \perp PQ$، $\widehat{POR} = 135°$. ما مساحة شبه المنحرف $OPQS$ ؟

(أ) 108 (ب) 112 (ج) 114 (د) 144



الحل: الإجابة هي (أ): ارسم $\overline{OQ}$ وارسم $\overline{OT}$ عمودياً على $\overline{PQ}$. $OP = OQ = 12$.



أيضاً، $\triangle OTP \equiv \triangle OTQ$. كما أن $TQSO$ مستطيل. إذن، $\widehat{TOP} = 135° - 90° = 45°$. بما أن مجموع زوايا $\triangle OTP$ يساوي $180°$ فإن $\widehat{OPT} = 180 - 90 - 45 = 45°$. إذن، $\triangle OTP$ متساوي الساقين وقائم. وبما

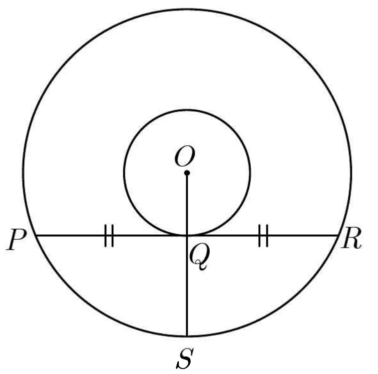
أن $\triangle OTP \equiv \triangle OTQ$ فإن $\triangle OTQ$ متساوي الساقين وقائم. بما أن $\widehat{TOP} = \widehat{TOQ} = 45°$ فإن $\widehat{QOS} = 135° - 45° - 45° = 45°$. إذن، $\triangle OQS$ متساوي الساقين وقائم. إذن، $\triangle OQS \equiv \triangle OTQ$. وبهذا فإن مساحة شبه المنحرف تساوي مجموع مساحات ثلاثة مثلثات متطابقة. الآن، لنفرض أن $OT = TP = x$. إذن، $OP = \sqrt{2}x$. ومن ذلك فإن $x = \dfrac{OP}{\sqrt{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}}$.

إذن، مساحة شبه المنحرف تساوي

$$3\left(\frac{1}{2} \times OT \times TP\right) = \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2} \times \frac{144}{2} = 108 .$$

(٣٠) [Fermat 2011] في الشكل المرفق، دائرتان تشتركان في المركز O، $\overline{PQR}$ وتر في الدائرة الكبيرة ومماس للدائرة الصغيرة عند Q، $PQ = QR$، $PR = 12$، $QS = 4$. ما طول نصف قطر الدائرة الكبيرة ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 6.5 (د) 7.2



الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن r هو نصف قطر الدائرة الكبيرة. صل $\overline{OP}$. عندئذ، $OP = OS = r$. بما أن Q منتصف $\overline{PR}$ فإن $\overline{OS} \perp \overline{PR}$.

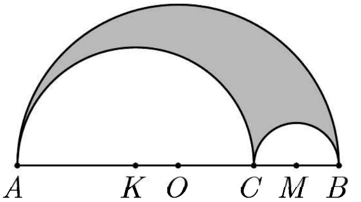
$PQ = 6$، $OQ = r - 4$. إذن،

$$(OQ)^2 + (PQ)^2 = (OP)^2$$
$$(r-4)^2 + 6^2 = r^2$$
$$r^2 - 8r + 16 + 36 = r^2$$

من ذلك نجد أن $r = \frac{52}{8} = 6.5$.

(٣١) [Fryer 2009] في الشكل المرفق، K، O، M مراكز أنصاف الدوائر المبينة. $OC = 32$، $CB = 36$. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) 700π (ب) 800π (ج) 850π (د) 900π



الحل: الإجابة هي (د): كل من $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ نصف قطر في الدائرة التي مركزها O. ولهذا فإن

$$OA = OB = OC + CB = 36 + 32 = 68$$

ومن ثم فإن

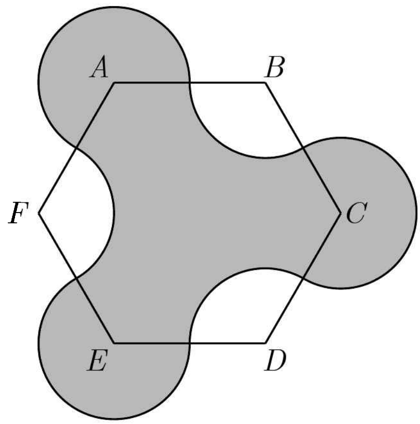
$$AC = AO + OC = 68 + 32 = 100$$
$$AK = \frac{1}{2}AC = 50$$

الآن، مساحة المنطقة المظللة تساوي

$$\frac{1}{2}\pi(OB)^2 - \frac{1}{2}\pi(AK)^2 - \frac{1}{2}\pi(MB)^2$$
$$= \frac{1}{2}\pi[(68)^2 - (50)^2 - (18)^2] = 900\pi$$

(٣٢) [Galois 2009] في الشكل المرفق، $ABCDEF$ سداسي منتظم طول ضلعه 2. كل من رؤوسه مركز دائرة نصف قطرها 1. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $6\sqrt{3}-2\pi$ (ب) $6\sqrt{3}-\pi$ (ج) $6\sqrt{3}+\pi$ (د) $6\sqrt{3}+2\pi$



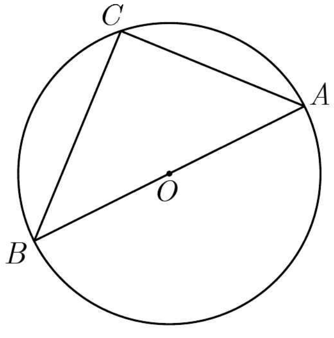
الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن قياس كل من الزوايا الداخلية للسداسي المنتظم هو $120°$. إذن، كل من المناطق غير المظللة داخل السداسي تقابل $\frac{1}{3}=\frac{120}{360}$ دائرة نصف قطرها 1. إذن، مجموع مساحات المناطق غير المظللة داخل السداسي تساوي $\pi = \pi\frac{1}{3}\times 3$. كما أن قياس كل من الزوايا الخارجية عند كل من رؤوس السداسي هو $240° = 360° - 120°$. ولذا فكل من المناطق الثلاث المظللة خارج السداسي تمثل $\frac{2}{3}=\frac{240}{360}$ دائرة ومن ثم فمجموع مساحاتها يساوي $2\pi = \pi\frac{2}{3}\times 3$. مساحة السداسي تساوي مساحة 6 مثلثات متطابقة طول ضلع كل منها يساوي 2 وهي $6\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\right)6$. إذن، مساحة المنطقة المظللة هي

$$6\sqrt{3} + 2\pi - \pi = 6\sqrt{3} + \pi\,.$$

(٣٣) [MAΘ 2012] رسمنا مثلثاً داخل دائرة $C(O,r)$ بحيث يكون أحد أضلاعه قطراً للدائرة. ما أكبر نسبة بين مساحة المثلث ومساحة الدائرة ؟

(أ) $\frac{4}{3\pi}$ (ب) $\frac{2}{3\pi}$ (ج) $\frac{1}{\pi}$ (د) $\frac{1}{2\pi}$

الحل: الإجابة هي (ج): بما أن رأسين من رؤوس المثلث هما طرفا قطر من أقطار الدائرة فإن الرأس الثالث يجب أن يقع على نصف دائرة (انظر الشكل المرفق).



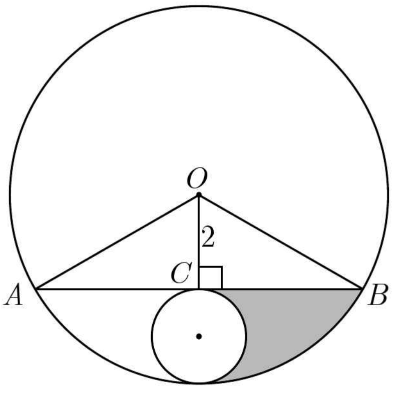
إذن، أكبر ارتفاع للمثلث $\triangle ABC$ هو نصف قطر الدائرة r. وبهذا تكون النسبة بين مساحة المثلث والدائرة هي

$$\frac{\frac{1}{2} \times r \times 2r}{\pi \times r^2} = \frac{1}{\pi}\,.$$

(٣٤) [MAΘ 2012] $\overline{AB}$ وتر في الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 4، $OC = 2$ و $\overline{ACB}$ يمس الدائرة الصغرى عند C. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $\frac{13\pi}{6} - 4\sqrt{3}$ (ب) $\frac{13\pi}{6} - 2\sqrt{3}$

(ج) $\frac{13\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ (د) $\frac{13\pi}{3} - 2\sqrt{3}$



الحل: الإجابة هي (ب): بما أن $OC = 2$ و $OB = 4$ فإن $\widehat{COB} = 60^\circ$. ومن ثم فإن $\widehat{AOB} = 120^\circ$. إذن، قياس القوس $\widehat{AB}$ يساوي 120° وتكون مساحة القطاع AOB هي $\frac{16\pi}{3} = \frac{120}{360} \times \pi \times 16$.

استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $CB = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

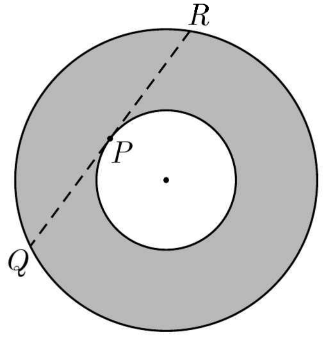
إذن، مساحة $\triangle AOB$ هي $4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2$.

مساحة المقطع AB تساوي $\frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{3} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$. بما أن OC يعامد AB و AB مماس للدائرة الصغرى فإن امتداد OC يمر بمركز الدائرة الصغرى وعلى هذا فإن نصف قطر الدائرة الصغرى يساوي 1 ومن ثم فمساحتها تساوي π. إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي

$$\frac{1}{2}\left(\frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{3} - \pi\right) = \frac{13\pi}{6} - 2\sqrt{3}.$$

(٣٥) [Aust.MC 1984] $\overline{QPR}$ مماس للدائرة الصغيرة عند P ويقطع الدائرة الكبيرة عند R و Q وطوله 14. الدائرتان تشتركان في المركز. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

(أ) $\frac{49\pi}{4}$ (ب) 49 (ج) 49π (د) 196π

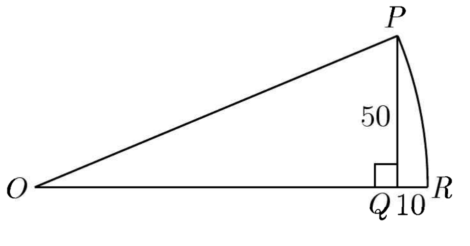


الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن r_1 و r_2 هما نصفا قطري الدائرتين الصغيرة والكبيرة على التوالي. بما أن $PQ = 7$ فنجد من مبرهنة فيثاغورس أن $r_1^2 + 7^2 = r_2^2$. أي أن $r_2^2 - r_1^2 = 49$. الآن، مساحة المنطقة المظللة هي

$$\pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) = 49\pi .$$

(٣٦) [Aust.MC 1980] في الشكل المرفق، R و P نقطتان على دائرة مركزها O. $PQ = 50$ ، $QR = 10$. ما طول نصف قطر الدائرة ؟

(أ) 120 (ب) 130 (ج) 240 (د) 250

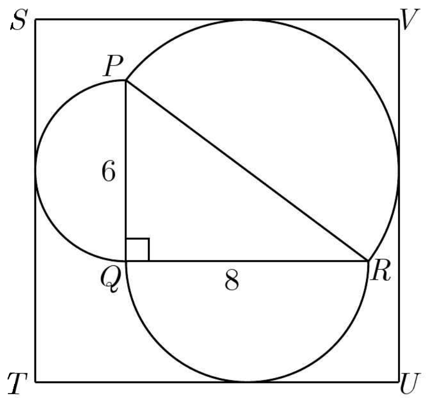


الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن نصف قطر الدائرة هو x. إذن، $OQ = x - 10$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لدينا

$$\begin{aligned}(x-10)^2 + (50)^2 &= x^2\\ x^2 - 20x + 100 + 2500 &= x^2\\ 20x &= 2600\\ x &= \frac{2600}{20} = 130.\end{aligned}$$

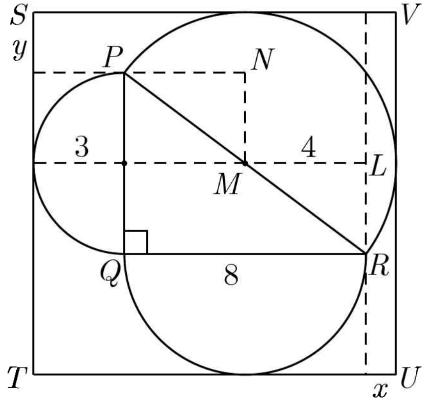
(٣٧) [Aust.MC 1983] في الشكل المرفق، $\triangle PQR$ قائم الزاوية عند Q. رسمنا أنصاف دوائر بحيث تكون أقطارها أضلاع المثلث. أضلاع المستطيل $STUV$ مماسات لأنصاف الدوائر كما هو مبين، $\overline{QR} \parallel \overline{SV} \parallel \overline{TU}$ و $\overline{PQ} \parallel \overline{ST} \parallel \overline{VU}$. إذا كان $PQ = 6$ و $QR = 8$ فما مساحة المستطيل $STUV$ ؟

(أ) 121 (ب) 132 (ج) 144 (د) 156



الحل: الإجابة هي (ج): في الشكل المرفق أبعاد كل من المثلثين القائمين $\triangle PNM$ و $\triangle MLR$ هي $3, 4, 5$. إذن، $5 = x + 4 = y + 3$ ومن ذلك يكون $y = 2$

و $x = 1$. الآن،

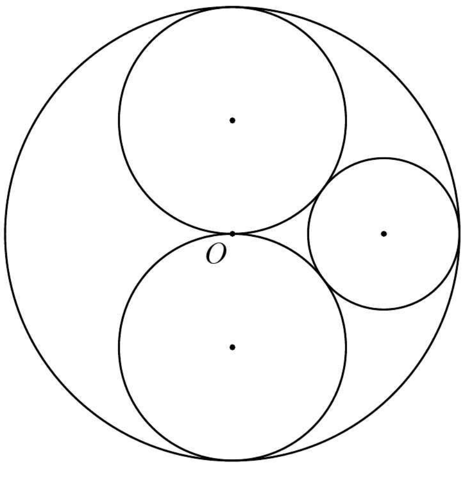


$$TU = 3 + 8 + x = 12$$
$$ST = y + 6 + 4 = 12$$

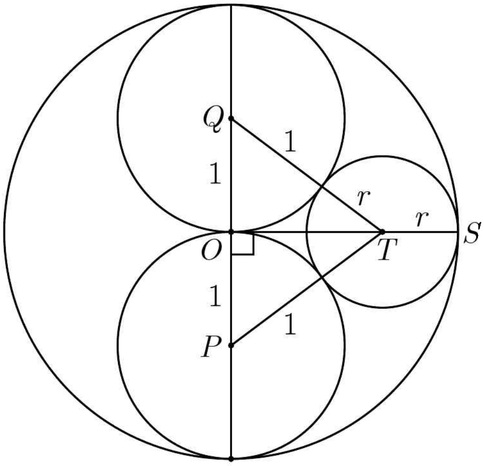
إذن، مساحة المستطيل $STUV$ تساوي 144.

(٣٨) [Aust.MC 1981] رسمنا داخل دائرة مركزها O ونصف قطرها 2 دوائر كما هو مبين في الشكل المرفق. نصف قطر أصغر الدوائر الثلاث يساوي:

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) 1



الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن نصف قطر الصغرى هو r.

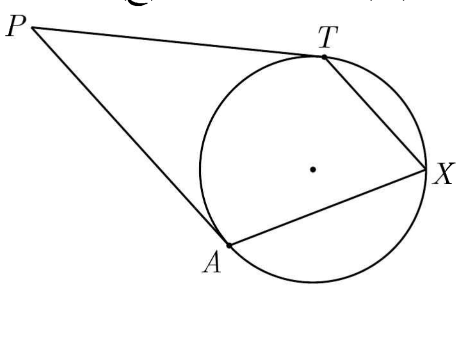


بما أن $OS = 2$ فإن $OT = 2 - r$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$(2-r)^2 + 1^2 = (r+1)^2$$
$$4 - 4r + r^2 + 1 = r^2 + 2r + 1$$
$$r = \frac{2}{3}.$$

(٣٩) [MAΘ 1990] $\overline{PT}$ و $\overline{PA}$ مماسان للدائرة عند T و A، $\widehat{P} = 42°$.
ما قياس $\widehat{TXA}$ ؟

(أ) $69°$ (ب) $72°$ (ج) $75°$ (د) $80°$

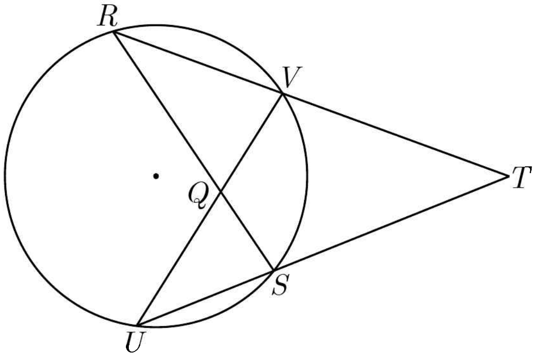


الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن $\overset{\frown}{TA} = x$. عندئذ، $\overset{\frown}{TXA} = 360° - x$. بما أن $\widehat{TPA} = \dfrac{\overset{\frown}{TXA} - \overset{\frown}{TA}}{2} = \dfrac{360 - 2x}{2}$ فإن $42 = 180 - x$ وبهذا فإن $x = 138$. إذن،

$$\widehat{TXA} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{TA} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\times 138 = 69°.$$

(٤٠) [Mathcounts 1989] في الشكل المرفق، $\Delta UTV \equiv \Delta RTS$، $\widehat{R} = 36°$، $\widehat{T} = 42°$. ما قياس $\widehat{RQV}$ ؟

(أ) $33°$ (ب) $45°$ (ج) $50°$ (د) $66°$



الحل: الإجابة هي (د):

بما أن $\widehat{R} = 36°$ فإن $\overset{\frown}{SV} = 2\times 36° = 72°$. الآن، $\widehat{T} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{RU} - \overset{\frown}{SV}\right)$.

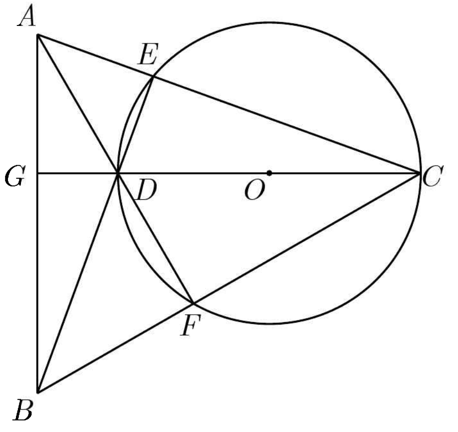
من ذلك نجد أن $42° = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{RU} - 72°\right)$. وبهذا فإن $\overset{\frown}{RU} = 156°$. إذن،

$$\widehat{RQV} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{RV} + \overset{\frown}{US}\right) = \frac{1}{2}(360° - 156° - 72°) = 66°.$$

(٤١) [MAΘ 1987] في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، $\widehat{EAD} = 40°$ و

$\widehat{FC} = 120^\circ$ و $\widehat{ED} = 40^\circ$. ما قياس $\widehat{DAB}$ ؟

(أ) 30° (ب) 35° (ج) 40° (د) 42°



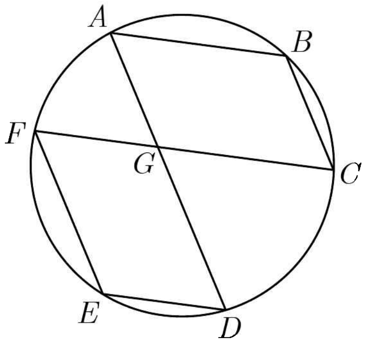
الحل: الإجابة هي (أ): بما أن كلاً من $\widehat{DEC}$ و $\widehat{DFC}$ زاوية مرسومة في نصف دائرة فإن قياس كل منهما يساوي 90° . بما أن $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ و $\overline{AF} \perp \overline{BC}$ (ارتفاعات في ΔABC) فإن $\overline{CG} \perp \overline{AB}$. أي أن $\widehat{DGA} = 90^\circ$. الآن،

$\widehat{CDF} = \frac{1}{2}\widehat{FC} = 60^\circ$. وبهذا فإن $\widehat{ADG} = 60^\circ$. إذن،

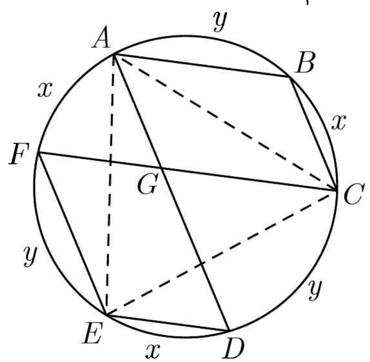
$\widehat{DAB} = 90 - \widehat{ADG} = 30^\circ$.

(٤٢) [MAΘ 1990] في الشكل المرفق، $ABCG$ و $FGDE$ متوازيا أضلاع حيث A ، B ، C ، D ، E ، F نقاط على الدائرة. $\widehat{AB} + \widehat{ED}$ يساوي:

(أ) 80° (ب) 100° (ج) 120° (د) 140°



الحل: الإجابة هي (ج): ارسم $\overline{AC}$، $\overline{CE}$، $\overline{AE}$.

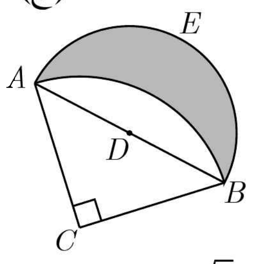


بما أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ فإن $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$. وبما أن $\widehat{CAD} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$ و $\widehat{ACB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ فإن $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. وبالمثل نجد أن $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF} = y$ و $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE} = x$. وبما أن $3x + 3y = 360°$ نجد أن

$$x + y = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DE} = 120° .$$

(٤٣) [MAΘ 1990] في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ متساوي الساقين وقائم عند $\widehat{C}$. D منتصف $\overline{AB}$ ومركز نصف الدائرة $\overset{\frown}{AEB}$. C مركز ربع الدائرة التي وترها $\overline{AB}$ ، $AB = 2\sqrt{2}$. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) π (د) 2π



الحل: الإجابة هي (ب): بما أن $AB = 2\sqrt{2}$ وتر في المثلث $\triangle ABC$ القائم الزاوية والمتساوي الساقين فإن $AC = CB = 2$. وبهذا فإن

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

مساحة ربع الدائرة هي مساحة ربع دائرة نصف قطرها $BC = 2$. أي $\frac{1}{4}\pi \times 2^2 = \pi$. مساحة نصف الدائرة التي قطرها $AB = 2\sqrt{2}$ هي

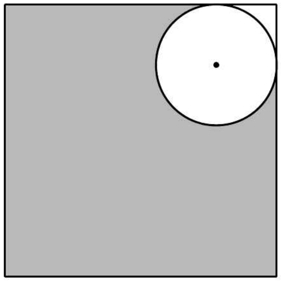
$$\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \pi$$

الآن، مساحة المنطقة المظللة تساوي

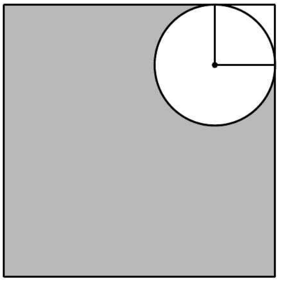
$$2 + \pi - \pi = 2 .$$

(٤٤) [Mathcounts 1992] طول ضلع المربع المبين في الشكل المرفق يساوي 9 ونصف قطر الدائرة يساوي 2 . ما مساحة الشكل المظلل ؟

(أ) $77 - 5\pi$ (ب) $77 - 3\pi$ (ج) $77 + 3\pi$ (د) $77 + 5\pi$



الحل: الإجابة هي (ب):

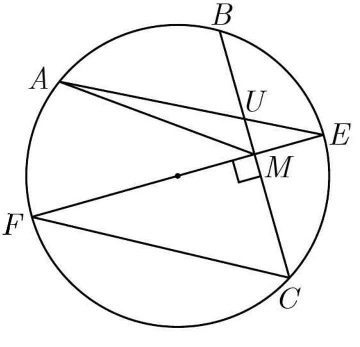


ارسم نصف قطر الدائرة كما هو مبين. الجزء غير المظلل هو مربع طول ضلعه 2 وثلاثة أرباع دائرة نصف قطرها 2 . إذن، مساحة الجزء المظلل هي

$$9^2 - \left(\frac{3}{4} \times 2^2 \times \pi + 2^2\right) = 77 - 3\pi\,.$$

(٤٥) [AHSME 1963] في الشكل المرفق، الوتر $\overline{EF}$ منصف عمودي للوتر $\overline{BC}$ ويقطعه في النقطة M . U نقطة تقاطع $\overline{BM}$ و $\overline{EA}$. عندئذ، مهما كانت النقطة U بين B و M فإن $\triangle EUM$ يشبه المثلث:

(أ) $\triangle EFA$ (ب) $\triangle EFC$ (ج) $\triangle ABM$ (د) $\triangle ABU$



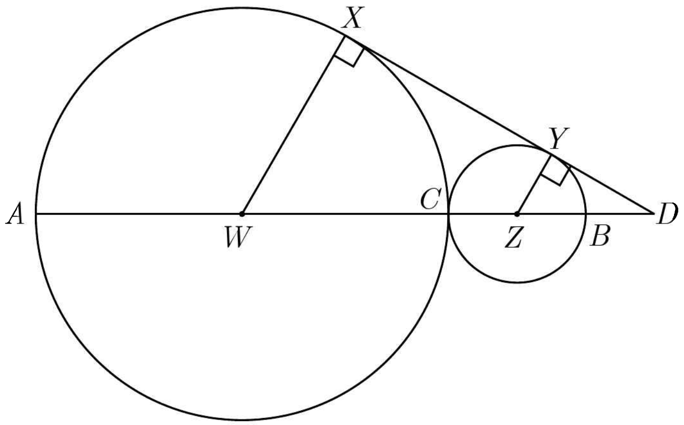
الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $\widehat{EMU} = \widehat{EAF} = 90^\circ$ و $\widehat{UEM} = \widehat{AEF}$.

إذن، $\triangle EFA \sim \triangle EUM$.

(٤٦) [AHSME 1954] $\overline{ACB}$ قطعة مستقيمة بحيث $AC = 3CB$. رسمنا دائرتين متماستين قطراهما $\overline{AC}$ و $\overline{CB}$ ورسمنا مماساً مشتركاً للدائرتين بحيث يلاقي امتداد $\overline{AB}$ عند النقطة D . إذا كان نصف قطر الدائرة الصغيرة r فإن BD يساوي:

(أ) $\frac{r}{2}$ (ب) r (ج) $\frac{3r}{2}$ (د) $2r$

الحل: الإجابة هي (ب):



لنفرض أن Z و W مركزا الدائرتين. لدينا $\overline{XY} \perp \overline{ZY}$ و $\overline{XY} \perp \overline{WX}$.

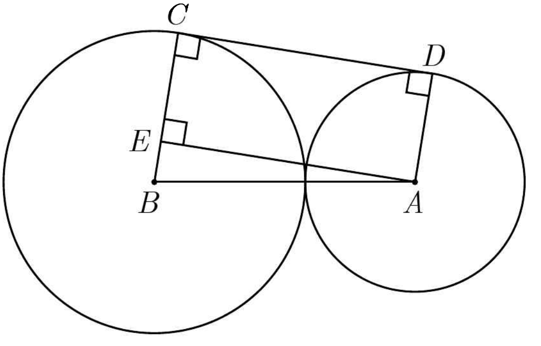
وبما أن $\widehat{WXY} = \widehat{ZYD}$ و $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ فإن $\triangle WXD \sim \triangle ZYD$.

وبما أن $ZY = r$ فإن $WX = 3r$. وبما أن $\frac{DW}{WX} = \frac{DZ}{ZY}$ فإن $\frac{DB + 5r}{3r} = \frac{DB + r}{r}$. ومن ذلك نجد أن $DB = r$.

(٤٧) [MAΘ 1990] ما طول المماس المشترك لدائرتين متماستين نصفا قطريهما هما 8 و 11 ؟

(أ) $\sqrt{22}$ (ب) $2\sqrt{22}$ (ج) $3\sqrt{22}$ (د) $4\sqrt{22}$

الحل: الإجابة هي (د):

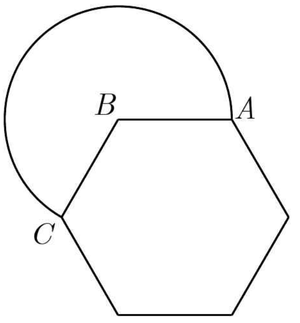


بما أن $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ و $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ فإننا برسم $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ نرى أن $ADCE$ مستطيل. الآن، $EC = AD = 8$. ولذا فإن $EB = BC - 8 = 3$. وبهذا فإن $CD = EA = \sqrt{19^2 - 3^2} = 4\sqrt{22}$.

(٤٨) [MAΘ 1992] ربطنا ماعزاً بحبل مثبت عند إحدى زوايا مبنى على شكل سداسي منتظم طول ضلعه 2 . إذا كان طول الحبل يساوي 2 فما مساحة المنطقة التي تستطيع أن تتحرك فيها الماعز ؟

(أ) $\frac{16}{3}\pi$ (ب) 5π (ج) $\frac{8}{3}\pi$ (د) 2π

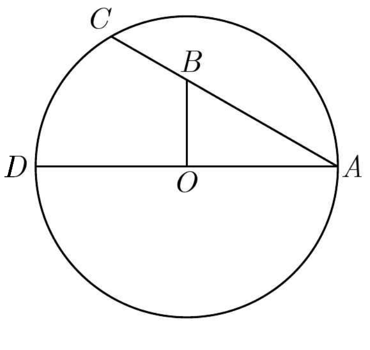
الحل: الإجابة هي (ج):



المنطقة التي تستطيع الماعز التحرك فيها هي المنطقة المحدودة بقوس الدائرة التي مركزها B والضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$. بما أن قياس زاوية السداسي المنتظم هو $120°$. فإن مساحة الجزء من الدائرة التي مركزها B الذي يقع داخل السداسي هي ثلث مساحة الدائرة. إذن، المساحة المطلوبة هي $\frac{2}{3}$ مساحة الدائرة. أي أن $\frac{8}{3}\pi = \frac{2}{3}\times\pi\times 2^2$.

(٤٩) [AHSME 1985] في الدائرة $C(O,r)$ المبينة، $\overline{AD}$ قطر، $\overline{ABC}$ وتر، $BO = 5$، $\widehat{ABO} = \widehat{CD} = 60°$. ما طول BC ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

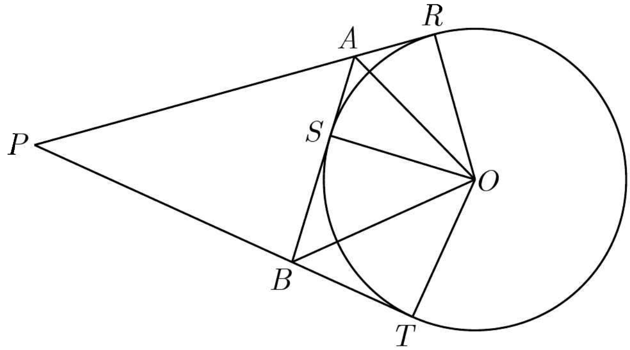


الحل: الإجابة هي (د): ارسم القطعة $\overline{OC}$. بما أن $\widehat{COD} = \widehat{CD} = 60°$ فإن $\widehat{CAD} = \frac{1}{2}\times 60° = 30°$. وبما أن $\widehat{ACO} + \widehat{CAO} = \widehat{COD}$ فإن

$\widehat{ACO} = 30°$. وبما أن $\widehat{CBO} + \widehat{ABO} = 180°$ فإن $\widehat{CBO} = 120°$. إذن، $\widehat{BOC} = 180° - 30° - 120° = 30°$. وبهذا فإن المثلث $\triangle OBC$ متساوي الساقين ويكون $BC = OB = 5$.

(٥٠) [AHSME 1956] أنشأنا المثلث $\triangle PAB$ من المماسات $\overline{PR}$ ، $\overline{PT}$ ، $\overline{AB}$ للدائرة التي مركزها O . إذا كان $\widehat{APB} = 40°$ فما قياس $\widehat{AOB}$ ؟

(أ) $70°$ (ب) $72°$ (ج) $73°$ (د) $75°$

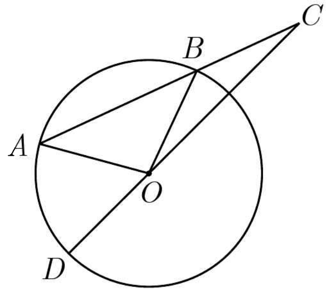


الحل: الإجابة هي (أ): في الرباعي $OTPR$ كل من $\widehat{OTP}$ و $\widehat{ORP}$ قائمة وبما أن مجموع زوايا الرباعي يساوي $360°$ فإن $\widehat{ROT} = 140°$. من مبرهنة (٩) نعلم أن $\widehat{ROA} = \widehat{SOA}$ وأن $\widehat{BOT} = \widehat{SOB}$. إذن،

$$\widehat{AOB} = \widehat{SOA} + \widehat{BOS} = \frac{1}{2}\widehat{ROT} = 70° .$$

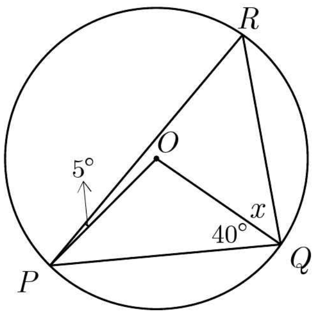
(٥١) [AHSME 1955] في الدائرة المرفقة $C(O,r)$ ، مددنا الوتر $\overline{AB}$ إلى C بحيث يكون $BC = r$. $\overline{COD}$ مستقيم، $\widehat{ACO} = 20°$. ما قياس $\widehat{AOD}$ ؟

(أ) $40°$ (ب) $50°$ (ج) $55°$ (د) $60°$



الحل: الإجابة هي (د): بما أن $OB = BC = r$ وأن $\widehat{C} = 20°$ فإن $\widehat{BOC} = 20°$. ولذا فإن $\widehat{ABO} = 40°$. وبما أن $OB = OA$ فإن $\widehat{OAB} = 40°$. إذن، $\widehat{AOD} = \widehat{OAB} + \widehat{C} = 40° + 20° = 60°$.

(٥٢) [Aust.MC 1988] في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، إذا كان $\widehat{OPR} = 5°$ و $\widehat{OQP} = 40°$ فما قيمة x ؟

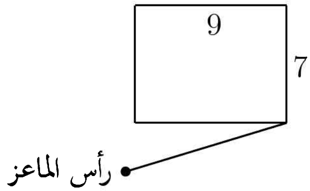


(أ) $30°$ (ب) $35°$ (ج) $40°$ (د) $45°$

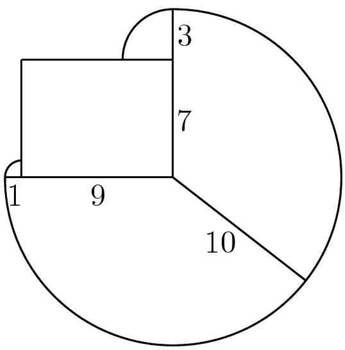
الحل: الإجابة هي (د): ارسم نصف القطر $\overline{OR}$ عندئذ، كل من $\triangle OPQ$، $\triangle OQR$، $\triangle ORP$ متساوي الساقين. بما أن مجموع زوايا المثلث $\triangle PQR$ يساوي $180°$ فإن $2(40 + 5 + x) = 180°$. ومن ذلك نجد أن $x = 45°$.

(٥٣) [Aust.MC 1989] ربطنا ماعزاً بحبل مثبت عند أحد أركان كوخ مستطيل طوله 9 وعرضه 7 وطول الحبل 10. الكوخ محاط بأرض عشبية. ما مساحة الأرض العشبية التي بإمكان الماعز الوصول إليها ؟

(أ) $\frac{155}{2}\pi$ (ب) $\frac{229}{2}\pi$ (ج) 155π (د) 229π



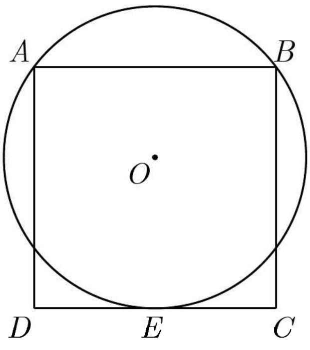
الحل: الإجابة هي (أ): لاحظ أن مساحة المنطقة التي يستطيع الماعز الوصول إليها هي:



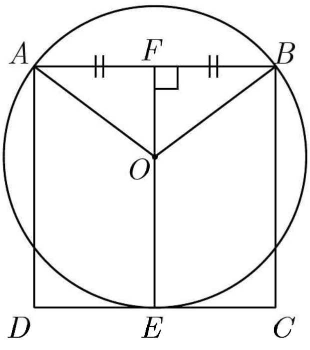
$$\frac{3}{4}\pi \times 10^2 + \frac{1}{4}\pi \times 1^2 + \frac{1}{4}\pi \times 3^2 = \frac{155}{2}\pi\,.$$

(٥٤) [Aust.MC 1989] في الشكل المرفق، O مركز الدائرة. $ABCD$ مربع حيث $\overline{CED}$ مماس للدائرة. النسبة بين مساحة المربع ومساحة الدائرة هي:

(أ) $\frac{64}{25\pi}$ (ب) $\frac{8}{5\pi}$ (ج) $\frac{5}{3\pi}$ (د) $\frac{25}{9\pi}$



الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن F نقطة منتصف $\overline{AB}$. ولنفرض



أن x هو طول ضلع المربع وأن r هو نصف قطر الدائرة. الآن، $OF = EF - OE = x - r$. وباستخدام مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle OFB$ نجد أن

$$r^2 = \frac{x^2}{4} + (x-r)^2$$

$$r^2 = \frac{5}{4}x^2 - 2xr + r^2$$

$$\frac{5}{4}x^2 - 2xr = 0$$

$$x\left(x - \frac{8}{5}r\right) = 0$$

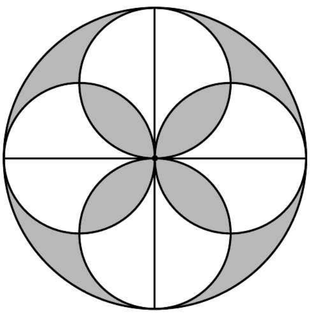
$$x = \frac{8}{5}r.$$

من ذلك نجد أن،

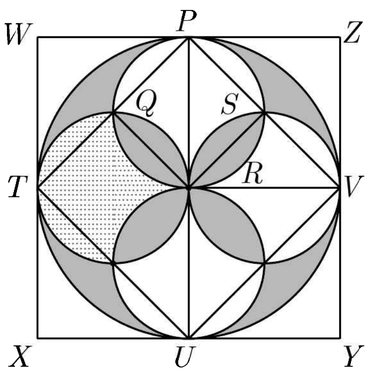
$$\frac{[ABCD]}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{x^2}{\pi r^2} = \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2 r^2}{\pi r^2} = \frac{64}{25\pi}.$$

(٥٥) [Aust.MC 1987] نصف قطر الدائرة الكبيرة في الشكل المرفق هو r. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $(\pi - 4)r^2$ **(ب)** $(\pi - 3)r^2$ **(ج)** $(\pi - 2)r^2$ **(د)** $(\pi - 1)r^2$



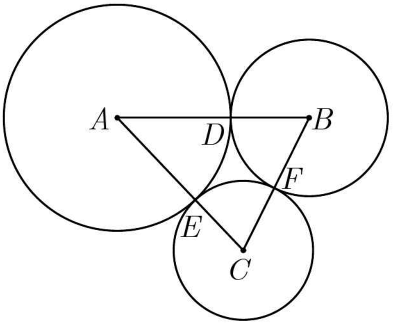
الحل: الإجابة هي (ج): أنشئ المربعات $PQRS$، $PTUV$، $WXYZ$ كما هو مبين.



لنفرض أن A مساحة الدائرة الكبيرة وأن B مساحة المنطقة المنقطة وأن C مساحة المنطقة المظللة عندئذ،

$$\begin{aligned} C &= A - 4B \\ &= A - 4[PQRS] \\ &= A - [PTUV] \\ &= A - \frac{1}{2}[WXYZ] \\ &= \pi r^2 - \frac{1}{2}(2r)^2 = (\pi - 2)r^2 \end{aligned}$$

(٥٦) [Aust.MC 1989] في الشكل المرفق، رؤوس المثلث $\triangle ABC$ هي مراكز الدوائر الثلاث وأطوال أضلاعه هي 8، 9، 13. نصف قطر الدائرة الكبيرة يساوي:

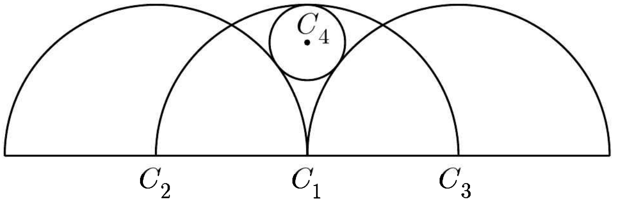


(أ) 6 (ب) 6.5 (ج) 7 (د) 7.5

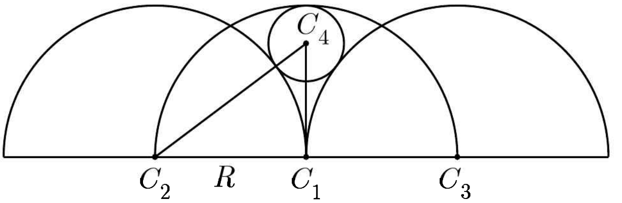
الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن x، y، z هي أنصاف أقطار الدوائر حيث z هو نصف قطر الدائرة الكبيرة. عندئذ، $x + y = 8$، $x + z = 9$، $y + z = 13$. بحل هذه المعادلات نجد أن $z = 7$.

(٥٧) [Aust.MC 1987] في الشكل المرفق C_1، C_2، C_3 مراكز ثلاثة أنصاف دوائر متطابقة، و C_4 مركز الدائرة الصغيرة. إذا كان R نصف قطر كل من أنصاف الدوائر المتطابقة و r نصف قطر الدائرة الصغيرة فإن $\frac{r}{R}$ يساوي:

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{5}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{3}$



الحل: الإجابة هي (ج):



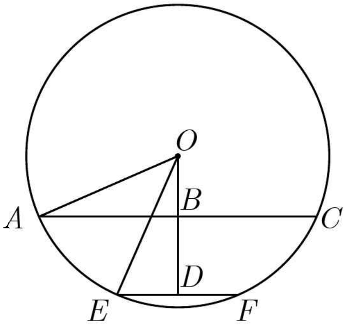
$\triangle C_1C_2C_4$ قائم الزاوية أطوال أضلاعه هي $R-r$ ، R ، $R+r$. إذن،

$$
\begin{aligned}
(R-r)^2 + R^2 &= (R+r)^2 \\
R^2 - 2rR + r^2 + R^2 &= R^2 + 2rR + r^2 \\
R^2 &= 4Rr \\
\frac{r}{R} &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

(٥٨) [Aust.MC 1985] رسمنا وتراً في دائرة نصف قطرها 10 ويبعد 6 عن مركزها. بعد ذلك رسمنا وتراً آخر طوله نصف طول الوتر الأول. ما المسافة بين الوتر الثاني ومركز الدائرة ؟

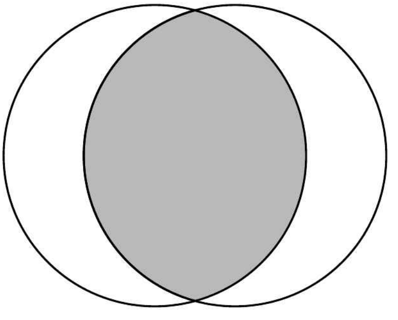
(أ) 8 (ب) 9 (ج) 3π (د) $\sqrt{84}$

الحل: الإجابة هي (د):



لنفرض أن طول الوتر $AC = 2x$. إذن، $EF = x$. الآن، $\triangle AOB$ قائم الزاوية. ولذا فإن $AB = x$، $ED = \frac{x}{2}$. في المثلث AOB نجد أن، $x^2 + 6^2 = 10^2$. ولذا فإن $x = 8$ و $\frac{x}{2} = 4$. الآن، في $\triangle EOD$ نجد أن $OD = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84}$.

(٥٩) [Pascal 2012] الشكل المرفق يبين تقاطع دائرتين متطابقتين. مساحة المنطقة المظللة تساوي مجموع مساحتي المنطقتين غير المظللتين. إذا كانت مساحة المنطقة المظللة تساوي 216π فما محيط كل من الدائرتين ؟

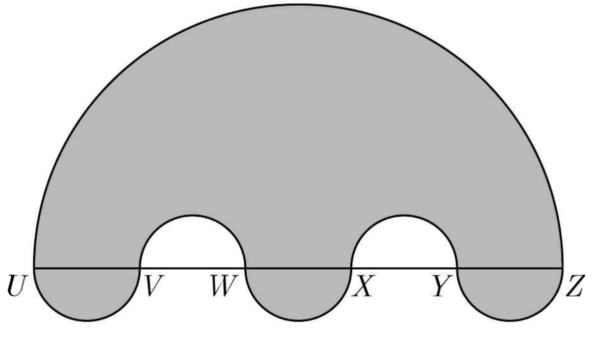


(أ) 18π (ب) 27π (ج) 36π (د) 108π

الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن نصف قطر كل من الدائرتين يساوي r. بما أن مساحة الدائرتين متساوية وأن المنطقة المظللة مشتركة بين الدائرتين فإن المنطقتين غير المظللتين متساويتان في المساحة ومجموع مساحتيهما يساوي مساحة المنطقة المظللة وهذا يساوي 216π. إذن، مساحة كل من المنطقتين غير المظللتين يساوي $\frac{1}{2} \times 216\pi = 108\pi$. مساحة أي من الدائرتين تساوي مجموع مساحة المنطقة المظللة ومساحة إحدى المنطقتين غير المظللتين. أي $324\pi = 216\pi + 108\pi$. إذن، $\pi r^2 = 324\pi$. ومن ذلك فإن $r = 18$. وبهذا يكون محيط الدائرة هو $2\pi r = 36\pi$.

(٦٠) [Pascal 2010] في الشكل المرفق، U، V، W، X، Y، Z على استقامة واحدة حيث $UV = VW = WX = XY = YZ = 5$. أنشأ أنصاف الدوائر التي أقطارها $\overline{UZ}$، $\overline{UV}$، $\overline{VW}$، $\overline{WX}$، $\overline{XY}$، $\overline{YZ}$ كما هو مبين. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $\frac{325}{4}\pi$ (ب) $\frac{375}{4}\pi$ (ج) $\frac{325}{2}\pi$ (د) $\frac{625}{4}\pi$

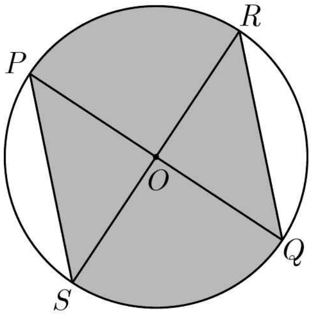


الحل: الإجابة هي (أ): مساحة نصف الدائرة التي قطرها d يساوي $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \frac{1}{8}\pi d^2$. إذن، مساحة كل من أنصاف الدوائر الصغيرة (وعددها خمسة) تساوي $\frac{1}{8}\pi(5^2) = \frac{25}{8}\pi$. مساحة المنطقة المظللة تساوي مساحة نصف الدائرة الكبيرة مضافاً إليها مساحة إحدى أنصاف الدوائر الصغيرة. أي أن

$$\frac{1}{8}\pi(25^2) + \frac{25}{8}\pi = \frac{650}{8}\pi = \frac{325}{4}\pi\,.$$

(٦١) [Pascal 2009] في الشكل المرفق، $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ قطران متعامدان في دائرة نصف قطرها 4. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $8+4\pi$ (ب) $8+8\pi$ (ج) $16+4\pi$ (د) $16+8\pi$



الحل: الإجابة هي (د): مساحة المنطقة المظللة تساوي

$$[\triangle POS] + [\triangle ROQ] + [\widehat{POR}] + [\widehat{SOQ}].$$

كل من المثلثين قائم طول كل من ساقيه يساوي نصف قطر الدائرة وهو 4. إذن،

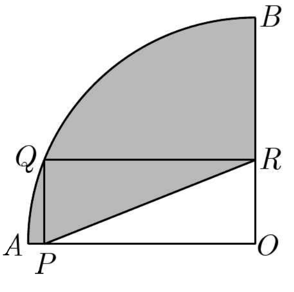
$$[\triangle POS] + [\triangle ROQ] = \frac{1}{2}\times 4\times 4 + \frac{1}{2}\times 4\times 4 = 16\,.$$

مساحة كل من القطاعين يساوي مساحة ربع دائرة لأن $360 \times \frac{1}{4} = 90$. إذن،

$$[\widehat{POR}] + [\widehat{SOQ}] = \frac{1}{4}\pi \times 4^2 + \frac{1}{4}\pi \times 4^2 = 8\pi\,.$$

إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي $16 + 8\pi$.

(٦٢) [Cayley 2005] في الشكل المرفق، $\widehat{AOB}$ ربع دائرة نصف قطرها 10. $PQRO$ مستطيل محيطه 26. محيط المنطقة المظللة يساوي:



(أ) $7 + 5\pi$ (ب) $13 + 5\pi$ (ج) $17 + 5\pi$ (د) $17 + 25\pi$

الحل: الإجابة هي (ج): محيط الشكل المظلل يساوي $\widehat{AQB} + AP + PR + RB$. بما أن $\widehat{AOB}$ ربع دائرة نصف قطرها 10 فإن $\widehat{AQB} = \frac{1}{4}(2\pi \times 10) = 5\pi$. بما أن $PQRO$ مستطيل فإن $PR = QO = 10$. الآن،

$$\begin{aligned} AP + RB &= (AO - PO) + (BO - RO) \\ &= (AO + BO) - (PO + RO) \end{aligned}$$

ولكن $13 = \frac{1}{2}(\text{محيط المستطيل}) = PO + RO$. إذن،

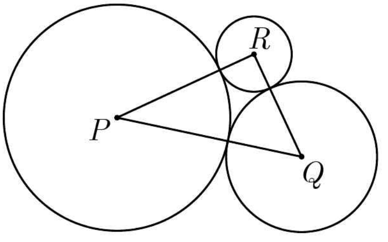
$$AP + RB = 10 + 10 - 13 = 7\,.$$

وبهذا فإن محيط المنطقة المظللة يساوي

$$10 + 7 + 5\pi = 17 + 5\pi\,.$$

(٦٣) [Fermat 2008] في الشكل المرفق، ثلاث دوائر مراكزها P، Q، R وأنصاف أقطارها 3، 2، 1 على التوالي. ما مساحة $\triangle PQR$ ؟

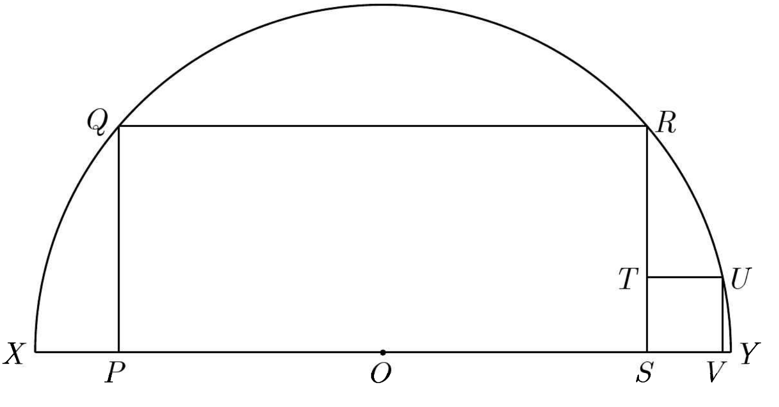
(أ) 4 (ب) 6 (ج) 10 (د) 12



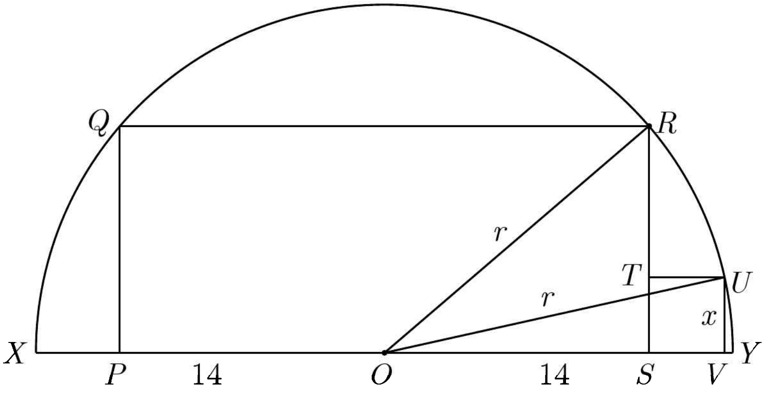
الحل: الإجابة هي (ب): لاحظ أن $PQ = 3 + 2 = 5$، $PR = 3 + 1 = 4$، $QR = 2 + 1 = 3$. إذن، أطوال أضلاع المثلث هي 3، 4، 5. وبما أن $3^2 + 4^2 = 5^2$ فإن المثلث قائم الزاوية. إذن، $\left[\triangle PQR\right] = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$.

(٦٤) [Fermat 2005] في الشكل المرفق، نصف دائرة قطرها $\overline{XY}$، $PQRS$ مستطيل، $PQ = 12$، $QR = 28$. $STUV$ مربع. مساحة $STUV$ تساوي:

(أ) 4 (ب) 9 (ج) 16 (د) 25



الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن O هو مركز الدائرة و r نصف قطرها و x طول ضلع المربع. المطلوب هو إيجاد x^2.



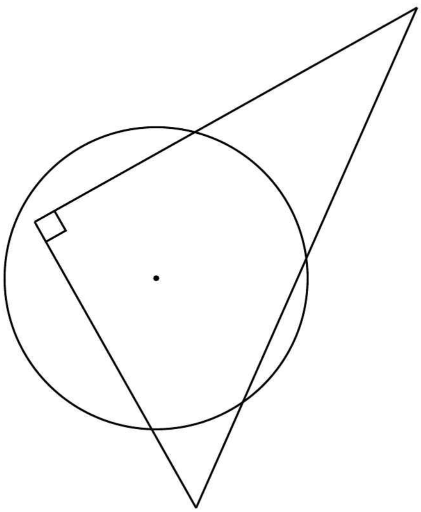
لاحظ أن $PO = OS = 14$. في المثلث $\triangle ORS$ لدينا $r^2 = 14^2 + 12^2 = 340$. وفي $\triangle OVU$ لدينا

$$r^2 = (14+x)^2 + x^2$$
$$340 = 196 + 28x + x^2 + x^2$$
$$x^2 + 14x - 72 = 0$$
$$(x+18)(x-4) = 0$$

إذن، $x = 4$. ومن ثم فإن $x^2 = 16$.

(٦٥) [Fermat 2004] لدينا مثلث أطوال أضلاعه هي 6، 8، 10 على التوالي. رسمنا دائرة بحيث تكون مساحة المنطقة داخل الدائرة وخارج المثلث تساوي مساحة المنطقة داخل المثلث وخارج الدائرة. نصف قطر الدائرة يساوي:

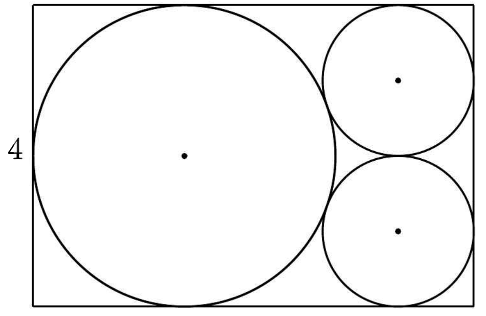
(أ) $\sqrt{\frac{24}{\pi}}$ (ب) $\sqrt{\frac{26}{\pi}}$ (ج) $\sqrt{\frac{28}{\pi}}$ (د) $\sqrt{\frac{30}{\pi}}$



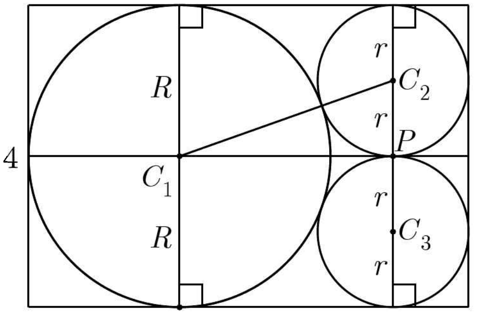
الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن A هي مساحة المنطقة داخل المثلث وخارج الدائرة وأن B هي مساحة المنطقة خارج المثلث وداخل الدائرة. عندئذ، بالفرض B هي مساحة المنطقة خارج الدائرة وداخل المثلث. ولذا فإن $A + B$ تساوي مساحة الدائرة وتساوي أيضاً مساحة المثلث. إذن، مساحة الدائرة تساوي مساحة المثلث. ولكن $6^2 + 8^2 = 10^2$. وبهذا فالمثلث قائم الزاوية مساحته تساوي $24 = 8 \times 6 \times \frac{1}{2}$. إذن، $\pi r^2 = 24$ ويكون $r = \sqrt{\frac{24}{\pi}}$.

(٦٦) [Fermat 2001] في الشكل المرفق ثلاث دوائر متماسة، الدائرتان الصغيرتان متطابقتان. الدوائر محاطة بمستطيل عرضه 4. ما طول المستطيل ؟

(أ) $2 + \sqrt{8}$ (ب) $3 + \sqrt{8}$ (ج) $2 + \sqrt{10}$ (د) $3 + \sqrt{10}$



الحل: الإجابة هي (ب): نفرض أن R هو نصف قطر الدائرة الكبيرة و r هو نصف قطر كل من الدائرتين الصغيرتين.



الآن $2R = 4$ و $4r = 4$. إذن، $R = 2$ و $r = 1$. طول المستطيل هو

$$R + C_1P + r = 3 + C_1P\,.$$

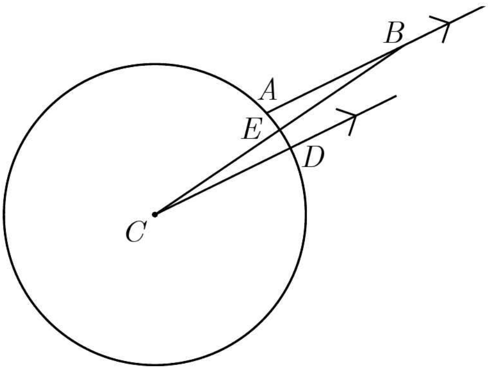
الآن، $C_1C_2 = R + r = 3$. ومن مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$C_1P = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$$

إذن، طول المستطيل يساوي $3 + \sqrt{8}$.

(٦٧) [MAΘ 2011] في الشكل المرفق، C مركز الدائرة، طول $\widehat{ED}$ يساوي 6 كيلو مترات، $\widehat{ABE} = 8^\circ$، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. ما محيط الدائرة ؟

(أ) 160 (ب) 260 (ج) 270 (د) 370

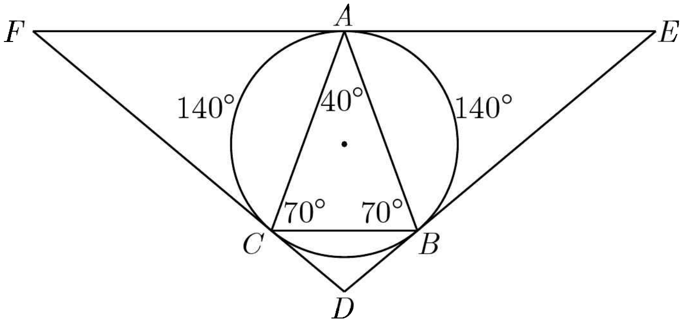


الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ فإن $\widehat{ABE} = \widehat{ECD}$. إذن، $\frac{1}{45} = \frac{8}{360} = \widehat{DE}$ من محيط الدائرة. إذن، محيط الدائرة يساوي $270 = 45 \times 6$.

(٦٨) [MAΘ 2011] رسمنا المثلث $\triangle ABC$ المتساوي الساقين داخل دائرة حيث $\widehat{B} = \widehat{C} = 70°$. ما قياس الزاوية الكبرى للمثلث المنشأ بالمماسات للدائرة عند النقاط A، B، C ؟

(أ) $35°$ (ب) $40°$ (ج) $70°$ (د) $100°$

الحل: الإجابة هي (د):



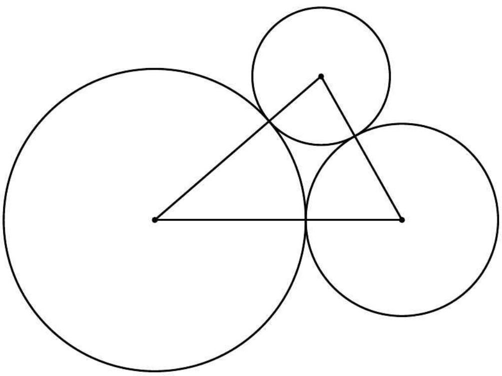
$\widehat{BC} = 2\widehat{A} = 80^\circ$. عندئذ، $\widehat{AB} = \widehat{AC} = 140^\circ$. وبهذا فإن

$\widehat{F} = \widehat{E} = \frac{1}{2}(220^\circ - 140^\circ) = 40^\circ$. إذن، $\widehat{D} = 100^\circ$.

(٦٩) [MAΘ 2011] ثلاث دوائر متماسة خارجياً. النسب بين مساحاتها هي $25 : 49 : 121$، محيط الدائرة الصغرى يساوي 10π. ما محيط المثلث الذي رؤوسه مراكز الدوائر ؟

(أ) 46 (ب) 48 (ج) 49 (د) 50

الحل: الإجابة هي (أ):



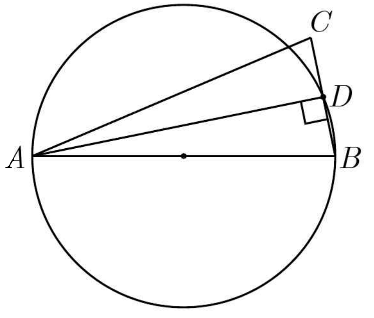
النسبة بين أنصاف أقطار الدوائر هي

$\sqrt{25} : \sqrt{49} : \sqrt{121}$. أي $5 : 7 : 11$. وبما أن محيط الدائرة الصغرى هو 10π فإن نصف قطرها يساوي 5. إذن، أنصاف أقطار الدوائر هي 5، 7، 11 على التوالي. ومن ذلك نجد أن أطوال أضلاع المثلث هي 12، 16، 18 ويكون محيطه يساوي 46.

(٧٠) [MAΘ 2011] $\triangle ABC$ متساوي الساقين حيث الساق $\overline{AB}$ هو قطر دائرة. D نقطة تقاطع $\overline{BC}$ مع الدائرة. إذا كان نصف قطر الدائرة $r = 5$ و $BC = 4$ فإن AD يساوي:

(أ) 2 (ب) 4 (ج) $4\sqrt{6}$ (د) $7\sqrt{2}$

الحل: الإجابة هي (ج):

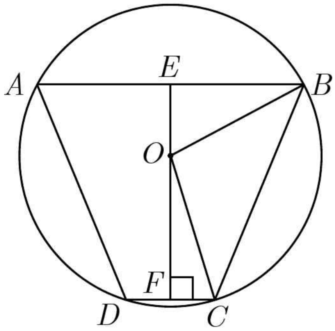


$AB = 2r = 10$. وبما أن $BD = \frac{1}{2}BC = 2$ وأن $\triangle ADB$ قائم فإن $AD = \sqrt{10^2 - 2^2} = 4\sqrt{6}$.

(٧١) [MAΘ 2011] رسمنا شبه منحرف متساوي الساقين داخل دائرة نصف قطرها 17. المسافة بين القاعدة الكبرى ومركز الدائرة يساوي 8، طول القاعدة الصغرى يساوي 10 والقاعدتان على جهتين مختلفتين من الدائرة وتوازيان قطر الدائرة. ما مساحة شبه المنحرف ؟

(أ) $140 + 40\sqrt{66}$ (ب) $160 + 40\sqrt{66}$

(ج) $180 + 40\sqrt{66}$ (د) $200 + 40\sqrt{66}$



الحل: الإجابة هي (ب):

$$FC = \frac{1}{2}DC = 5$$

$$OF = \sqrt{17^2 - 5^2} = 2\sqrt{66}$$

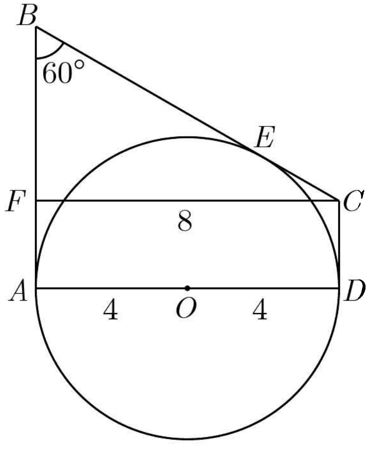
إذن، ارتفاع شبه المنحرف يساوي $8 + 2\sqrt{66}$. $EB = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.

إذن، $AB = 30$. وبهذا فإن

$$[ABCD] = \frac{1}{2}(10+30)\left(8+2\sqrt{66}\right) = 160 + 40\sqrt{66} \,.$$

(٧٢) [MAΘ 2011] في الشكل المرفق، $\overline{AOD}$ قطر في الدائرة طوله 8، $\overline{AB}$، $\overline{DC}$، $\overline{BEC}$ مماسات للدائرة عند النقاط A، D، E على التوالي، $\widehat{B} = 60°$. ما مساحة شبه المنحرف $ABCD$ ؟

(أ) $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ (ب) $22\sqrt{3}$ (ج) $\frac{67\sqrt{3}}{3}$ (د) $24\sqrt{3}$

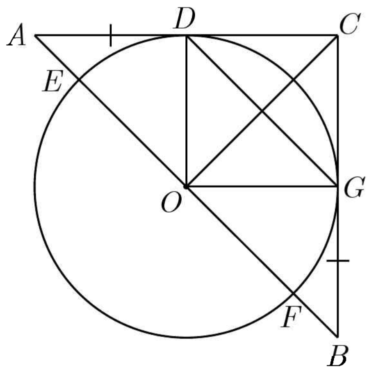


الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن $DC = x$. عندئذ، $CE = x$ و $AF = x$. $\triangle CBF$ مثلث $30° - 60° - 90°$. ولذا فإن $FB = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$، $BC = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$. وبما أن $AB = BE$ فإن $x - \dfrac{16}{\sqrt{3}} = x + \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. وبهذا فإن $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. إذن،

$$[ABCD] = \frac{1}{2}\left(\frac{12}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \times 8 = \frac{64\sqrt{3}}{3}.$$

(٧٣) [MAΘ 2011] في الشكل المرفق، $\overline{CA}$، $\overline{CB}$ مماسان للدائرة التي مركزها O عند D و G على التوالي، $\widehat{FG} = 45°$، $\widehat{DG} = 90°$، $DG = 8$، $AD = BG$. ما محيط الشكل المحاط بالقطعتين $\overline{AD}$ و $\overline{AE}$ والقوس $\widehat{ED}$؟

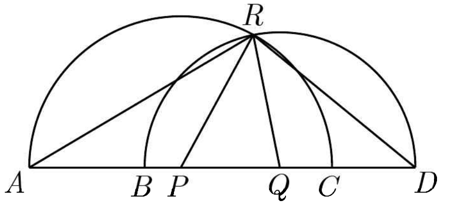
(أ) $4 + \pi\sqrt{2}$ (ب) $5 + \pi\sqrt{2}$ (ج) $6 + \pi\sqrt{2}$ (د) $8 + \pi\sqrt{2}$



الحل: الإجابة هي (د): ارسم $\overline{OD}$، $\overline{OC}$، $\overline{OG}$. بما أن $AD = BG$ فإن $\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{FG} = 45^\circ$. بما أن $\widehat{DOG} = \overset{\frown}{DG} = 90^\circ$ فإن $ODCG$ مربع طول قطره $DG = 8$. إذن، طول ضلعه يساوي $4\sqrt{2}$. وبهذا فإن نصف قطر الدائرة يساوي $4\sqrt{2}$. كما أن $\widehat{EAD} = 45^\circ$ ومن ثم $AD = 4\sqrt{2}$. الآن، من تشابه المثلثات نجد أن $AB = 16$. ومن ذلك $AE = 8 - 4\sqrt{2}$. وبما أن $\overset{\frown}{ED} = 45^\circ$ فإن طوله يساوي $\left(4\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi\sqrt{2}$. إذن، محيط الشكل المطلوب هو $4\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{2} + \pi\sqrt{2} = 8 + \pi\sqrt{2}$.

(٧٤) [Euclid 2010] في الشكل المرفق، النقاط B، P، Q، C واقعة على القطعة المستقيمة $\overline{AD}$. P مركز نصف الدائرة التي قطرها $\overline{AC}$ و Q مركز نصف الدائرة التي قطرها $\overline{BD}$. R نقطة تقاطع نصفي الدائرتين، $\widehat{PRQ} = 40^\circ$. ما قياس $\widehat{ARD}$ ؟

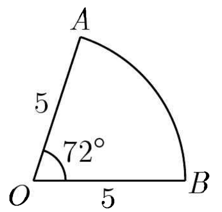
(أ) 95° (ب) 100° (ج) 105° (د) 110°



الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن $\widehat{PAR} = x^\circ$ وأن $\widehat{QDR} = y^\circ$. بما أن كلاً من $\overline{PR}$ و $\overline{PA}$ نصف قطر في الدائرة الكبيرة فإن $\triangle PAR$ متساوي الساقين. ولذا فإن $\widehat{PRA} = \widehat{PAR} = x^\circ$. وبما أن كلاً من $\overline{QD}$ و $\overline{QR}$ نصف قطر في الدائرة الصغيرة فإن $\triangle QRD$ متساوي الساقين. ومن ذلك $\widehat{QDR} = \widehat{QRD} = y^\circ$. الآن، مجموع زوايا المثلث $\triangle ARD$ يساوي 180°. ولذا نجد أن $x + (x + 40 + y) + y = 180^\circ$. أي أن $x + y = 70^\circ$. وبهذا فإن $\widehat{ARD} = x^\circ + 40^\circ + y^\circ = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$.

(٧٥) [Euclid 2007] في الشكل المرفق قطاع من دائرة مركزها O ونصف قطرها 5. ما محيط القطاع ؟

(أ) $5 + \pi$ (ب) $5 + 2\pi$ (ج) $10 + \pi$ (د) $10 + 2\pi$



الحل: الإجابة هي (د): محيط القطاع هو

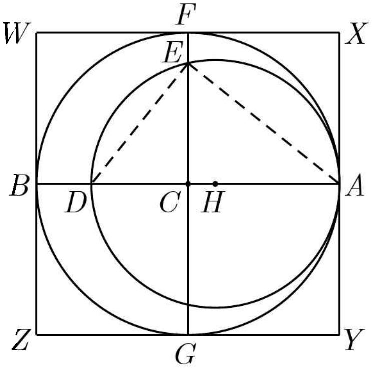
$$OA + OB + \widehat{AB} = 5 + 5 + \widehat{AB} = 10 + \widehat{AB}.$$

بما أن $\frac{72^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{5}$ فإن $\widehat{AB}$ يساوي $\frac{1}{5}$ محيط دائرة نصف قطرها 5. أي

$2\pi = 5 \times 2\pi \times \frac{1}{5}$. إذن، محيط القطاع يساوي $10 + 2\pi$.

(٧٦) [Euclid 2006] في الشكل المرفق $XYZW$ مربع يحيط بدائرتين حيث C مركز الدائرة الكبيرة و H مركز الدائرة الصغيرة، $FE = 5$، $BD = 9$. ما طول ضلع المربع $XYZW$ ؟

(أ) 25 (ب) 50 (ج) 60 (د) 100



الحل الأول

الإجابة هي (ب): لنفرض أن نصف قطر الدائرة الكبيرة $AC = x$. عندئذ، $CD = x - 9$ و $CE = x - 5$. الآن، $\triangle ECD \sim \triangle ACE$ لأن $\widehat{AED} = 90°$ (تقابل نصف دائرة). وإذا كان $\widehat{CDE} = \alpha$ فإن $\widehat{DEC} = 90 - \alpha$ و $\widehat{CEA} = \alpha$. أيضاً $\widehat{EAC} = 90 - \alpha$. ولهذا فالمثلثان متشابهان ونحصل على

$$\frac{CD}{EC} = \frac{EC}{AC}$$

$$\frac{x-9}{x-5} = \frac{x-5}{x}$$

$$x^2 - 9x = x^2 - 10x + 25$$

$$x = 25$$

ولذا فإن طول ضلع المربع يساوي قطر الدائرة الكبيرة. أي $2x = 50$.

الحل الثاني

باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$(AD)^2 = (AE)^2 + (ED)^2$$
$$(AE)^2 = (AC)^2 + (CE)^2$$
$$(ED)^2 = (CE)^2 + (CD)^2$$

إذن،

$$(AD)^2 = (AC)^2 + (CE)^2 + (CE)^2 + (CD)^2$$
$$(2x - 9)^2 = x^2 + 2(x - 5)^2 + (x - 9)^2$$

ومن ذلك، نحصل على $x = 25$. ومن ثم فإن $2x = 50$.

(٧٧) [AMC10A, AMC12A 2002] طول قوس قياسه بالدرجات يساوي $45°$ في دائرة A يساوي طول قوس قياسه بالدرجات يساوي $30°$ في دائرة B . ما النسبة بين مساحة الدائرة A إلى مساحة الدائرة B ؟

(أ) $\frac{4}{9}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{5}{6}$ (د) $\frac{3}{2}$

الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن r هو نصف قطر الدائرة A و s هو نصف قطر الدائرة B .

طول قوس الدائرة A هو $\frac{45}{360} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{4}$.

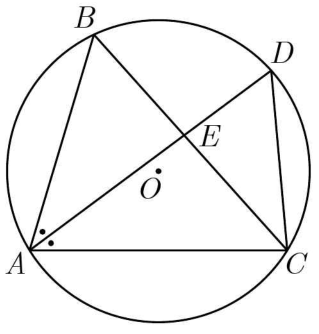
طول قوس الدائرة B هو $\frac{30}{360} \times 2\pi s = \frac{\pi s}{6}$.

وبما أن الطولين متساويان فإن $\frac{\pi s}{6} = \frac{\pi r}{4}$. أي أن $\frac{2}{3} = \frac{r}{s}$. وبهذا فالنسبة بين مساحة A إلى مساحة B هي $\frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2}$.

(٧٨) [AMC10B 2004] رسمنا $\triangle ABC$ داخل دائرة $C(O,r)$. D نقطة على الدائرة حيث $\overline{AD}$ ينصف $\widehat{BAC}$. إذا كان $AB = 7$، $AC = 8$، $BC = 9$ فما قيمة $\frac{AD}{CD}$ ؟

(أ) $\frac{9}{8}$ (ب) $\frac{5}{3}$ (ج) $\frac{17}{7}$ (د) $\frac{5}{2}$

الحل: الإجابة هي (ب):



$\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (يقابلان القوس $\widehat{AC}$). وبما أن $\widehat{EAB} = \widehat{CAD}$ فإن $\triangle ABE \sim \triangle ADC$. من ذلك نجد أن $\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{CD}$. ولكن من مبرهنة منصف الزاوية في المثلث $\triangle ABC$ نجد أن $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC}$. إذن،

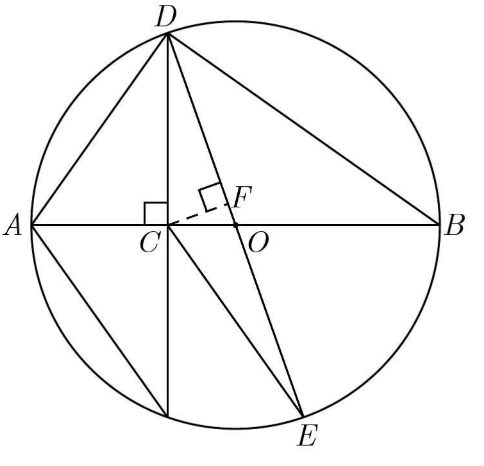
$$BE = \frac{AB}{AC} \times EC = \frac{AB}{AC}(BC - BE)$$

وأيضاً $BE = \frac{AB \times BC}{AB + AC}$. من ذلك نجد أن

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BE}=\frac{AB+AC}{BC}=\frac{7+8}{9}=\frac{5}{3}.$$

(٧٩) [AMC10A 2005] $\overline{AB}$ قطر في الدائرة $C(O,r)$، C نقطة على $\overline{AB}$ حيث $2AC=BC$. D و E نقطتان على الدائرة حيث $\overline{DC}\perp\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ قطر. ما قيمة $\frac{[\triangle DCE]}{[\triangle ABD]}$ ؟

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{2}$

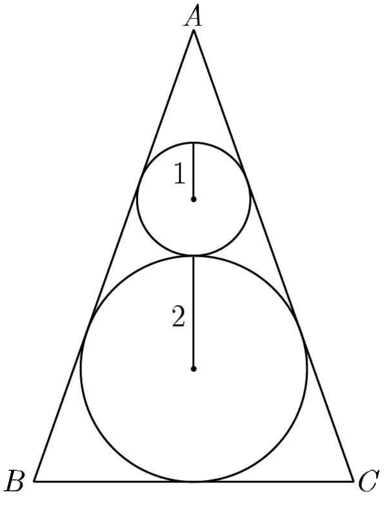


الحل: الإجابة هي (ج): أحد أضلاع كل من $\triangle DCE$ و $\triangle ABD$ هو قطر في الدائرة. ولذا النسبة بين مساحتيهما هي النسبة بين ارتفاعيهما. أي أن $\frac{CF}{DC}=\frac{[\triangle DCE]}{[\triangle ABD]}$. بما أن $\triangle DCO\sim\triangle CFO$ فإن

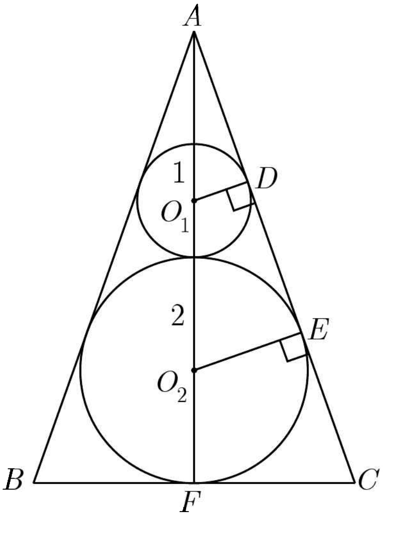
$$\frac{CF}{DC}=\frac{CO}{DO}=\frac{AO-AC}{DO}=\frac{\frac{1}{2}AB-\frac{1}{3}AB}{\frac{1}{2}AB}=\frac{1}{3}.$$

(٨٠) [AMC10A 2006] دائرة نصف قطرها 1 تمس دائرة نصف قطرها 2. أضلاع $\triangle ABC$ مماسات للدائرتين كما هو مبين. $AB = AC$. ما مساحة المثلث $\triangle ABC$ ؟

(أ) $\frac{35}{2}$ (ب) $15\sqrt{2}$ (ج) $\frac{64}{3}$ (د) $16\sqrt{2}$



الحل: الإجابة هي (د):



لاحظ أن $\triangle AFC \sim \triangle AEO_2 \sim \triangle ADO_1$. من ذلك نجد أن $\frac{DO_1}{EO_2} = \frac{AO_1}{AO_2}$.

أي أن $\frac{1}{2} = \frac{AO_1}{AO_1 + 3}$. ولذا فإن $AO_1 = 3$. واستناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد

أن $AD = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$. أيضاً، $\frac{DO_1}{CF} = \frac{AD}{AF}$. أي أن $\frac{1}{CF} = \frac{2\sqrt{2}}{8}$.

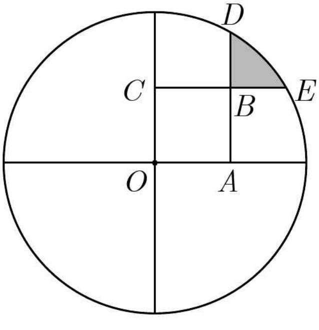
ولذا فإن $CF = 2\sqrt{2}$. وبهذا فإن

$$\begin{aligned}\left[\triangle ABC\right] &= \frac{1}{2}(AF)(BC) = \frac{1}{2}(AF)(2CF) = (AF)(CF)\\ &= 8 \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\end{aligned}$$

(٨١) [AMC10B 2006] في الشكل المرفق، $C(O,2)$ دائرة، $OABC$ مربع طول ضلعه 1. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$ (ب) $\frac{\pi}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)$

(ج) $\pi(2 - \sqrt{3})$ (د) $\frac{\pi}{3} - 1 + \sqrt{3}$



الحل: الإجابة هي (أ): لاحظ أن مساحة المنطقة المظللة هي

(مساحة القطاع DOE) $- [\triangle DOE] + [\triangle DBE]$.

الآن، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$(DA)^2 = (CE)^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

إذن، $DA = CE = \sqrt{3}$. من الواضح أن كلاً من $\triangle DOA$ و $\triangle EOC$ هو مثلث $30° - 60° - 90°$ حيث $\widehat{EOC} = \widehat{DOA} = 60°$. وبما أن $OABC$ مربع فإن $\widehat{COA} = 90°$. إذن،

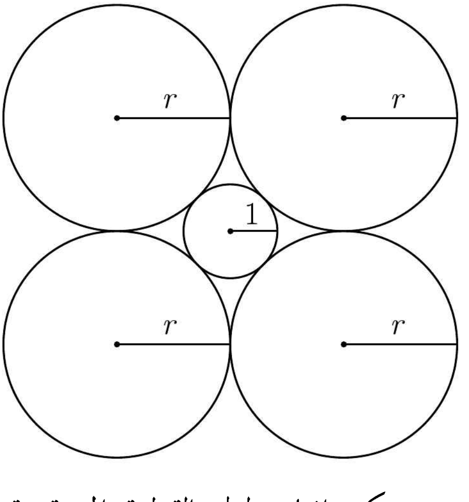
$$\widehat{EOA} = \widehat{COA} - \widehat{DOA} = 30° \text{ و } \widehat{DOE} = \widehat{DOA} - \widehat{EOA} = 30°.$$

وبما أن $AB = CB = 1$ فإن $DB = EB = \sqrt{3} - 1$. إذن، مساحة المنطقة المظللة هي

$$\frac{30}{360} \times \pi \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 30° + \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}.$$

(٨٢) [AMC10B 2007] دائرة نصف قطرها 1 محاطة بأربع دوائر نصف قطر كل منها r. ما قيمة r ؟

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) $1 + \sqrt{2}$ (ج) $\sqrt{6}$ (د) $2 + \sqrt{2}$



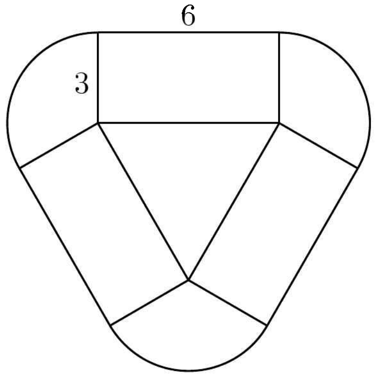
الحل: الإجابة هي (ب): يمكن إيجاد طول القطعة المستقيمة بين مركز الدائرة

الصغرى ومركز إحدى الدوائر المحيطة بطريقتين: من ناحية هذه القطعة تساوي $1+r$ ومن ناحية أخرى فهو نصف قطر مربع طول ضلعه $2r$. أي $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+4r^2} = \sqrt{2}r$. إذن، $\sqrt{2}\,r = 1+r$. أي أن $r = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1+\sqrt{2}$.

(٨٣) [AMC10A 2008] مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 6. ما مساحة المنطقة المكونة من جميع النقاط خارج المثلث وتبعد ثلاث وحدات من نقطة على المثلث ؟

(أ) $36+24\sqrt{3}$ (ب) $54+9\pi$ (ج) $56+9\pi$ (د) $60+9\pi$

الحل: الإجابة هي (ب): المنطقة مكونة من ثلاثة مستطيلات من النوع 3×6 وثلاثة أقواس قياس كل منها $120°$ تقابل دوائر نصف قطر كل منها 3.

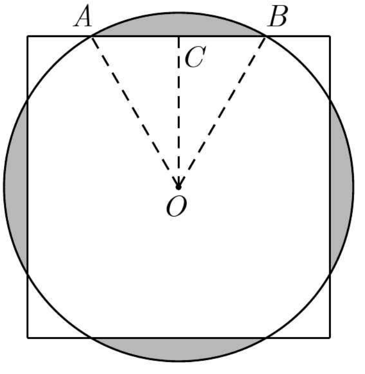


إذن المساحة هي

$$3\left[3\times 6+\frac{120°}{360°}\times 3^2\pi\right] = 54+9\pi\,.$$

(٨٤) [AMC10B 2010] مركز مربع طول ضلعه 1 هو مركز دائرة نصف قطرها $\frac{\sqrt{3}}{3}$ كما هو مبين في الشكل المرفق. ما مساحة المناطق داخل الدائرة وخارج المربع ؟

(أ) $\frac{\pi}{3}-1$ (ب) $\frac{2\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ج) $\frac{\pi}{18}$ (د) $\frac{2\pi}{9}$



الحل: الإجابة هي (ب): طول قطر المربع يساوي $\sqrt{2}$. مساحة المناطق المظللة المطلوبة هي 4 أمثال مساحة القطاع $\widehat{OAB}$ مطروحاً منها 4 أمثال مساحة المثلث $\triangle OAB$. لاحظ أن $AC = CB$ وأن $OC = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$ (نصف طول ضلع المربع) وأن $OB = \frac{\sqrt{3}}{3}$. من مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$CB = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

بما أن $AB = AO = BO$ فإن $\triangle ABO$ متساوي الأضلاع.

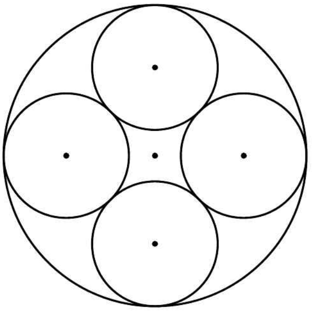
مساحة القطاع $\widehat{OAB}$ تساوي $\frac{\pi}{18} = \left(\frac{60}{360}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\pi$.

مساحة المثلث $\triangle OAB$ تساوي $\frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$.

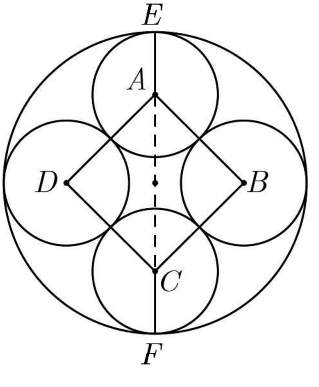
إذن مساحة المناطق المظللة هي $\frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\left(\frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)$.

(٨٥) [AMC10A 2009] الشكل المرفق مكون من أربع دوائر متطابقة محاطة بدائرة كبيرة كما هو مبين. ما النسبة بين مجموع مساحات الأربع دوائر الصغيرة ومساحة الدائرة الكبيرة ؟

(أ) $3 - 2\sqrt{2}$ (ب) $2 - \sqrt{2}$ (ج) $4\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$ (د) $2\sqrt{2} - 2$



الحل: .الإجابة هي (ج): ارسم بعض أنصاف أقطار الدوائر الصغيرة كما هو مبين وافرض أن r هو نصف قطر كل من الدوائر الصغيرة وأن R هو نصف قطر الدائرة الكبيرة.



من تماثل الشكل، $ABCD$ مربع طول ضلعه $2r$. ولذا فإن طول قطره يساوي $2\sqrt{2}r$. إذن، $2R = r + 2\sqrt{2}r + r = 2r + 2\sqrt{2}r$. ولذا فإن $R = r(1+\sqrt{2})$. مساحة الدائرة الكبيرة تساوي

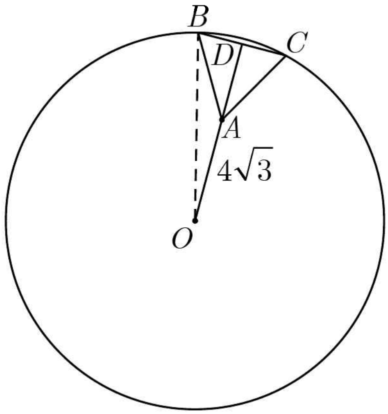
$$A = \pi R^2 = \pi r^2(1+\sqrt{2})^2 = \pi r^2(3+2\sqrt{2})$$

مجموع مساحات الدوائر الصغيرة تساوي $B = 4\pi r^2$. إذن،

$$\begin{aligned}\frac{B}{A} &= \frac{4\pi r^2}{\pi r^2(3+2\sqrt{2})}\\ &= \frac{4}{3+2\sqrt{2}} = \frac{4}{3+2\sqrt{2}} \times \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = 4(3-2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

(٨٦) [AMC10B 2010] في الشكل المرفق دائرة مركزها O ومساحتها 156π. $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع حيث $\overline{BC}$ وتر في الدائرة، $\overline{OA} = 4\sqrt{3}$. ما طول ضلع المثلث $\triangle ABC$ ؟

(أ) $2\sqrt{3}$ (ب) 6 (ج) $4\sqrt{3}$ (د) 12



الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن x هو طول ضلع المثلث وأن r هو نصف

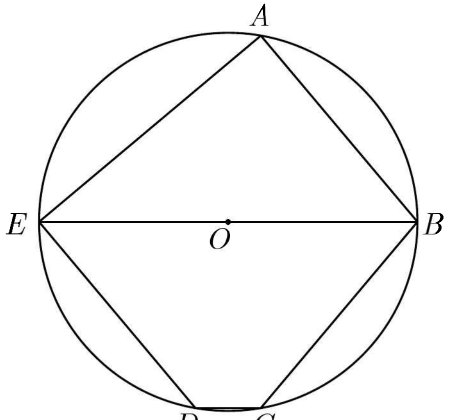
قطر الدائرة. بما أن $\pi r^2 = 156\pi$ فإن $r = \sqrt{156}$. لاحظ أيضاً أن $OD \perp BC$ ومن ثم فإن $BD = DC = \frac{x}{2}$. إذن، $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. الآن باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{156}\right)^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + 4\sqrt{3}\right)^2\\ 156 &= \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^2 + 12x + 48\\ x^2 + 12x - 108 &= 0\\ (x-6)(x+18) &= 0\end{aligned}$$

إذن، $x = 6$.

(٨٧) [AMC10B 2011] في الدائرة التي مركزها O، $\overline{DC} \parallel \overline{EB}$، $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$. $\frac{\widehat{AEB}}{\widehat{ABE}} = \frac{4}{5}$. ما قياس $\widehat{BCD}$ ؟

(أ) $120°$ (ب) $125°$ (ج) $130°$ (د) $135°$



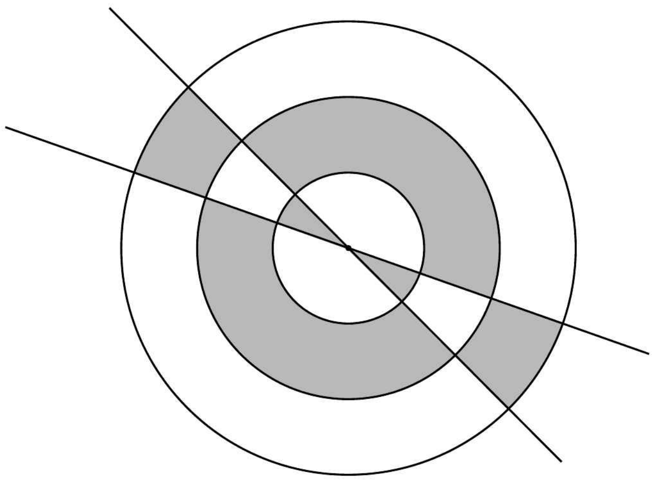
الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن $\widehat{AEB} = 4x$ وأن $\widehat{ABE} = 5x$. الآن

$\widehat{EAB} = 90^\circ$ (تقابل نصف دائرة). إذن، $4x + 5x + 90^\circ = 180^\circ$. وبهذا فإن $x = 10$ ويكون $\widehat{ABE} = 50^\circ$ و $\widehat{AEB} = 40^\circ$. بما أن $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ فإن $\widehat{ABE} = \widehat{BED} = 50^\circ$ ، ولكن $\widehat{BED} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ إذ أن $BEDC$ رباعي دائري. إذن،

$$\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{BED} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

(٨٨) [AMC10A 2004] مستقيمان مختلفان يمران بالمركز المشترك لثلاث دوائر أنصاف أقطارها 1، 2، 3 على التوالي. مساحة المناطق المظللة تساوي $\frac{8}{13}$ من مساحة المناطق غير المظللة. ما قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين بالراديان (π راديان $= 180^\circ$) ؟

(أ) $\frac{\pi}{8}$ (ب) $\frac{\pi}{7}$ (ج) $\frac{\pi}{6}$ (د) $\frac{\pi}{5}$



الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن S هي مساحة المناطق المظللة وأن U هي مساحة المناطق غير المظللة وأن θ هي الزاوية الحادة بين المستقيمين. مساحة الدائرة

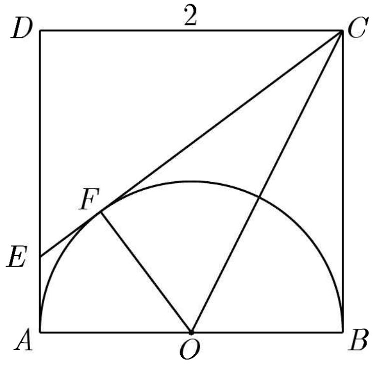
الكبيرة تساوي 9π. إذن، $S+U=9\pi$. وبما أن $S=\frac{8}{13}U$ فإن $\frac{21}{13}U=9\pi$. أي أن $U=\frac{39}{7}\pi$ وأن $S=\frac{8}{13}\times\frac{39}{7}\pi=\frac{24}{7}\pi$. الآن، مساحة المناطق المظللة تساوي:

$$\frac{2\theta}{2\pi}\times\pi+\frac{2(\pi-\theta)}{2\pi}\times(4\pi-\pi)+\frac{2\theta}{2\pi}(9\pi-4\pi)=3\theta+3\pi\,.$$

إذن، $\frac{24}{7}\pi=3\theta+3\pi$. وبهذا فإن $\theta=\frac{\pi}{7}$.

(٨٩) [AMC10A, AMC12A 2004] رسمنا نصف دائرة قطرها $\overline{AB}$ داخل المربع $ABCD$ الذي طول ضلعه 2، $\overline{CE}$ مماس لنصف الدائرة يقطع $\overline{AD}$ عند E. ما طول CE ؟

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) $\sqrt{6}$ (ج) $\frac{5}{2}$ (د) $5-\sqrt{5}$



الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن $AE=x$. الآن $FC=BC=2$، $AE=EF=x$. باستخدام مبرهنة فيثاغورس في المثلث $\triangle CDE$ نجد أن

$$(2-x)^2+2^2=(2+x)^2$$

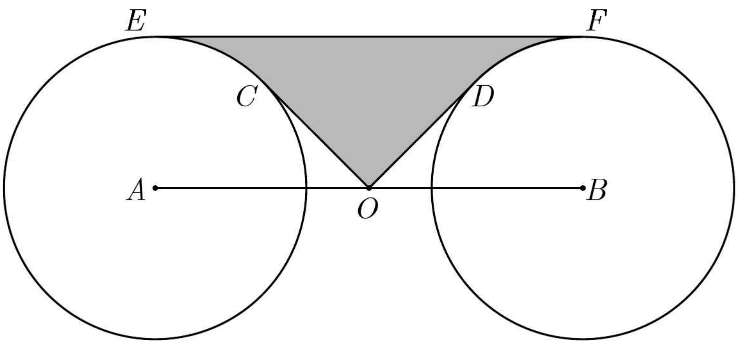
من ذلك نجد أن $x = \frac{1}{2}$. وبهذا فإن

$$CE = FC + x = \frac{5}{2}.$$

(٩٠) [AMC10A 2007] دائرتان مركزاهما A و B ونصف قطر كل منهما 2. O نقطة منتصف $\overline{AB}$، $OA = 2\sqrt{2}$، $\overline{OC}$ مماس للدائرة التي مركزها A و $\overline{OD}$ مماس للدائرة التي مركزها B، $\overline{EF}$ مماس مشترك للدائرتين. ما مساحة المنطقة المظللة $ECODF$ ؟

(أ) $8\sqrt{2} - 2 - \frac{\pi}{2}$ (ب) $4\sqrt{2} + \frac{\pi}{8}$

(ج) $4\sqrt{2}$ (د) $8\sqrt{2} - 4 - \pi$



الحل: الإجابة هي (د): مساحة المنطقة المطلوبة هي

$$[ABFE] - \left(\widehat{AEC} + [\triangle ACO] + [\triangle BDO] + \widehat{BED}\right).$$

من الواضح أن $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$. إذن، $ABFE$ مستطيل مساحته

$$2 \times (AO + OB) = 2 \times 2(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}\,.$$

بما أن $\overline{OC}$ مماس للدائرة A فإن $\triangle ACO$ مثلث قائم. وبما أن $AO = 2\sqrt{2}$ و

$AC = 2$ فإن $\triangle ACO$ مثلث $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$. إذن،

$$[\triangle ACO] = \frac{1}{2} 2 \times 2 = 2$$

ومن الواضح أن $[\triangle BDO] = [\triangle ACO] = 2$.

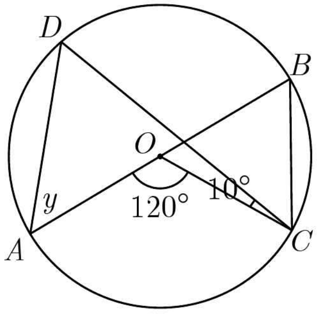
مساحة القطاع $\widehat{AEC}$ تساوي مساحة القطاع $\widehat{BFD}$ وتساوي $\frac{1}{8}$ مساحة أي من دائرتيهما. أي أن مساحة كل منهما تساوي $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{8} \times \pi \times 4$. إذن، مساحة المنطقة المظللة المطلوبة هي

$$8\sqrt{2} - \left(\frac{\pi}{2} + 2 + 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 8\sqrt{2} - 4 - \pi\,.$$

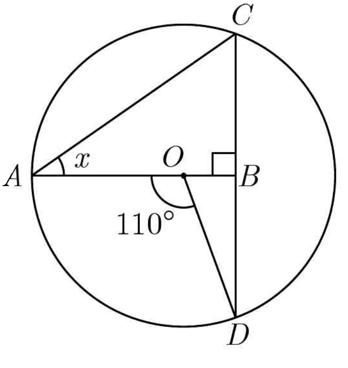
مسائل غير محلولة

(١) في الشكل المرفق O مركز الدائرة، $\overline{AOB}$ قطر. ما قياس $\hat{y}$ ؟

(أ) 50° (ب) 55° (ج) 60° (د) 65°



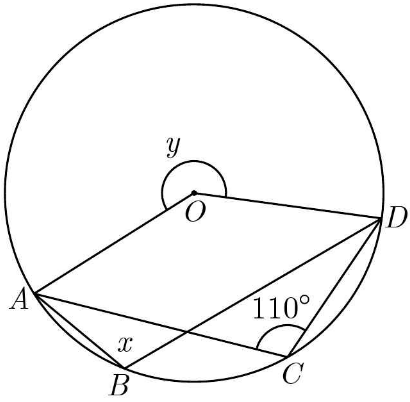
(٢) في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، $\overline{AOB}$ قطر. ما قياس $\hat{x}$ ؟



(أ) 20° (ب) 25° (ج) 30° (د) 35°

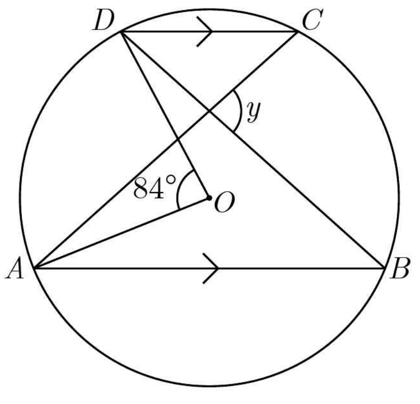
(٣) إذا كان O هو مركز الدائرة فما قياس $y - x$ ؟

(أ) 80° (ب) 100° (ج) 110° (د) 120°



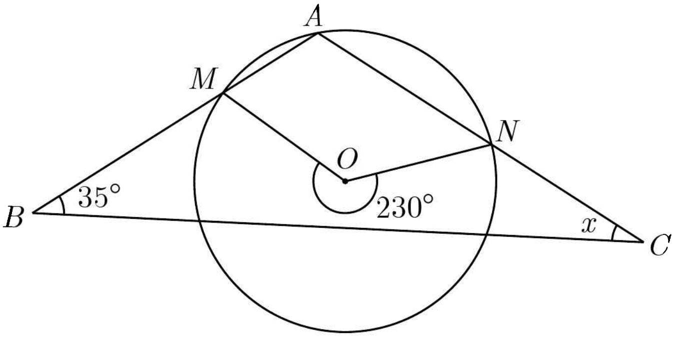
(٤) O مركز الدائرة، $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. ما قياس الزاوية $\hat{y}$ ؟

(أ) $80°$ (ب) $84°$ (ج) $96°$ (د) $106°$

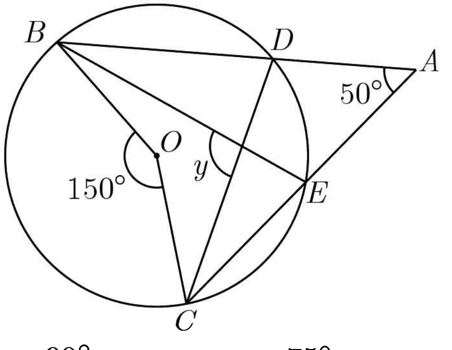


(٥) O مركز الدائرة، N ، M نقطتا تقاطع $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ مع الدائرة. ما قياس $\hat{x}$ ؟

(أ) $20°$ (ب) $25°$ (ج) $30°$ (د) $35°$

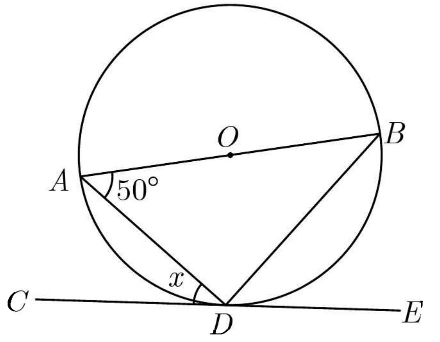


(٦) ما قياس $\hat{y}$ في الشكل المرفق حيث O هو مركز الدائرة ؟



(أ) $50°$ (ب) $75°$ (ج) $90°$ (د) $100°$

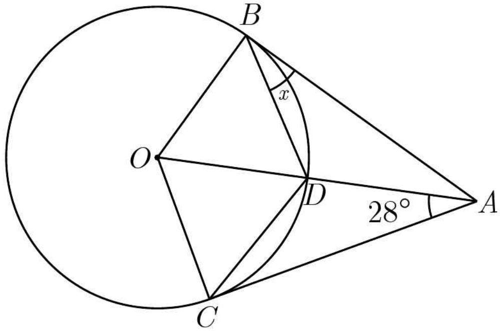
(٧) في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، $\overline{CDE}$ مماس للدائرة عند D. ما قياس $\hat{x}$ ؟



(أ) 30° (ب) 40° (ج) 50° (د) 60°

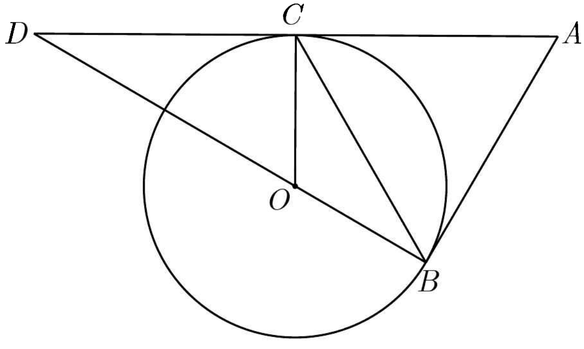
(٨) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ مماسان عند B و C على التوالي.
قياس $\widehat{x}$ يساوي:

(أ) 20° (ب) 24° (ج) 28° (د) 31°



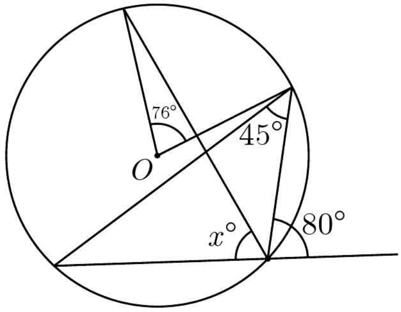
(٩) في الدائرة $C(O,4)$، $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ مماسان عند B و C على التوالي،
$AC = BC$. ما طول AD ؟

(أ) $4\sqrt{3}$ (ب) $6\sqrt{3}$ (ج) $8\sqrt{3}$ (د) $10\sqrt{3}$



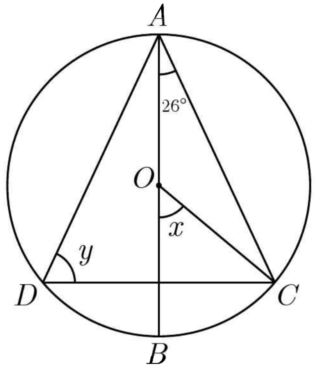
(١٠) في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، ما قياس $\widehat{x}$ ؟

(أ) 35° (ب) 45° (ج) 60° (د) 62°

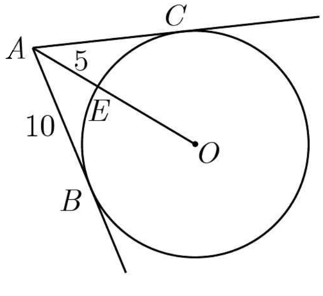


(١١) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{AOB}$ قطر ينصف الوتر $\overline{DC}$. ما قيمة $x+y$ ؟

(أ) 90° (ب) 100° (ج) 110° (د) 115°



(١٢) $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ مماسان للدائرة التي مركزها O عند B و C على التوالي، $AE = 5$ ، $AB = 10$. ما طول قطر الدائرة ؟

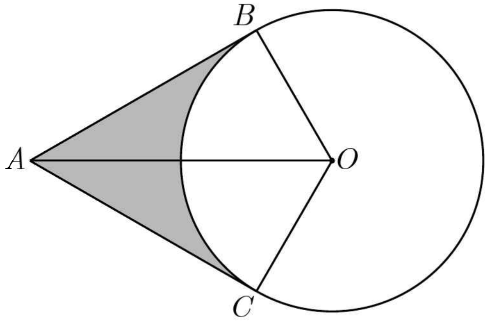


(أ) 15 (ب) 16 (ج) 18 (د) 20

(١٣) في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ مماسان للدائرة $C(O,5)$ عند B و C على التوالي، $\widehat{BAO} = 30°$. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

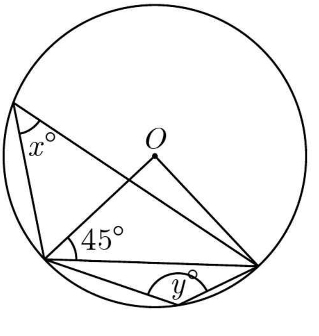
(أ) $\frac{23}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$ (ب) $\frac{25}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$

(ج) $\frac{23}{3}\left(3\sqrt{3} + \pi\right)$ (د) $\frac{25}{3}\left(3\sqrt{3} + \pi\right)$



(١٤) في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، ما قيمة $y - x$ ؟

(أ) $70°$ (ب) $80°$ (ج) $90°$ (د) $135°$



(١٥) $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ ، $\overline{BC}$ مماسات للدائرة التي مركزها O عند M ، N ، P على

التوالي. إذا كان $x = AM$ ، $y = BP$ ، $z = CN$ فما محيط المثلث $\triangle ABC$ ؟

(أ) $\frac{x+y+z}{3}$ (ب) $\frac{x+y+z}{2}$

(ج) $x+y+z$ (د) $2(x+y+z)$

(١٦) $\overline{OB}$ نصف قطر في الدائرة $C(O,3)$. $\overline{AB}$ مماس للدائرة عند B ، $OA = 6$. ما قياس $\widehat{AOB}$ ؟

(أ) $30°$ (ب) $45°$ (ج) $60°$ (د) $90°$

(١٧) $\overline{CA}$ و $\overline{CB}$ مماسان للدائرة التي مركزها O عند A و B على التوالي، الموازي للقطعة $\overline{AC}$ المرسوم من B يلاقي امتداد $\overline{CO}$ في النقطة D. إذا كان $AC = 4$ فما طول AD ؟

(أ) 4 (ب) 6 (ج) 8 (د) 12

(١٨) لتكن C نقطة على دائرة قطرها $\overline{AB}$. لنفرض أن نصف المستقيم $\overrightarrow{AC}$ يقطع الدائرة $C(A, AB)$ عند D ويقطع المماس المنشأ من B عند E. إذا كان $\widehat{ABC} = \widehat{CBD} = \widehat{DBE}$ فما قياس $\widehat{BAC}$ ؟

(أ) $30°$ (ب) $45°$ (ج) $60°$ (د) $90°$

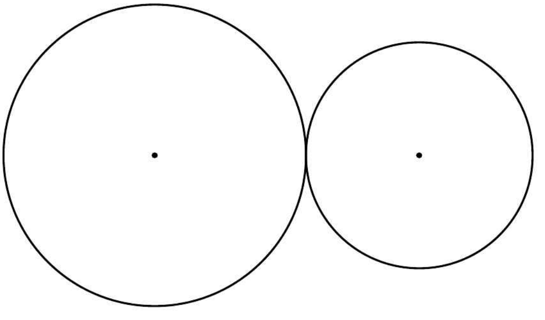
(١٩) $\overline{POA}$ قطر في الدائرة $C(O,r)$. M نقطة على $\overrightarrow{POM}$ حيث $\overline{OM} = 2r$. $\overline{MNQ}$ مماس للدائرة عند N ويلاقي المماس المرسوم من P عند Q. ما طول QM ؟

(أ) $\sqrt{3}r$ (ب) $2\sqrt{3}r$ (ج) $3\sqrt{3}r$ (د) $4\sqrt{3}r$

(٢٠) M ، N ، P ثلاث نقاط مختلفة على الدائرة $C(O,r)$. $MN = NP = 6$ و $\widehat{MNP} = 120°$. Q نقطة تقاطع $\overline{ON}$ مع $\overline{MP}$. ما طول QO ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(٢١) [MAΘ 2005] قرصان دائريان متماسان كما هو مبين في الشكل، نصف قطر القرص الكبير 40 سم ونصف قطر القرص الصغير 30 سم. إذا دار القرص الصغير 4 دورات فما عدد الدورات التي دارها القرص الكبير ؟



(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) 3 (د) 4

(٢٢) $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ قطران متعامدان في الدائرة $C(O,r)$. M نقطة على القوس الصغير $\widehat{AB}$. E نقطة تقاطع $\overrightarrow{AM}$ مع $\overrightarrow{CB}$ و F نقطة تقاطع $\overline{AB}$ مع $\overline{CB}$. ما قياس $\widehat{EFB}$ ؟

(أ) $30°$ (ب) $45°$ (ج) $60°$ (د) $70°$

(٢٣) $\triangle ABC$ مرسوم داخل دائرة حيث $\widehat{A} = 70^\circ$ ، $\widehat{B} = 50^\circ$. منصفات زوايا المثلث تقطع الدائرة في النقاط A' ، B' ، C' وأعمدة المثلث تقطع الدائرة في النقاط A'' ، B'' ، C'' . ما قياس $\widehat{C''A''}$ ؟

(أ) 80° (ب) 120° (ج) 140° (د) 160°

(٢٤) $\overline{AB}$ مماس للدائرة $C(O,6)$ عند النقطة B . إذا كان $\widehat{OAB} = 45^\circ$ فما طول AB ؟

(أ) 3 (ب) $3\sqrt{2}$ (ج) 6 (د) $6\sqrt{2}$

(٢٥) لنفرض أن رؤوس المثلث $\triangle ABC$ تقع على الدائرة $C(O,r)$. $\overline{COQ}$ ، $\overline{BOP}$ ارتفاعان يلاقيان $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ في النقطتين Q و P على التوالي. إذا كان $BQ = 3$ و $PC = 4$ فما قيمة $AQ + AP$ ؟

(أ) 6 (ب) 7 (ج) 8 (د) 12

(٢٦) $\overline{AOB}$ قطر في الدائرة $C(O,r)$ ، $\overline{MPN}$ وتر عمودي على $\overline{AOB}$ ويلاقيه في النقطة P . إذا كان $\widehat{OMP} = 20^\circ$ فما قياس $\widehat{MON}$ ؟

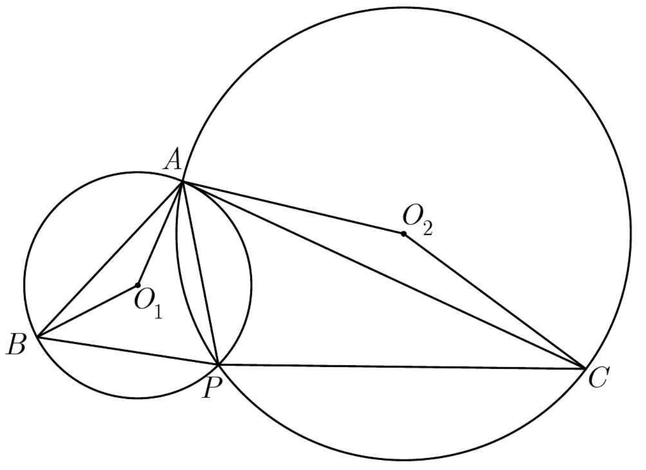
(أ) 70° (ب) 90° (ج) 120° (د) 140°

(٢٧) $\overline{MN}$ مماس للدائرة $C(O,3)$ عند M . $\overline{AB}$ وتر في الدائرة يوازي $\overline{MN}$. P نقطة تلاقي $\overline{AB}$ مع امتداد $\overrightarrow{MO}$. إذا كان $AM = 5$ فما طول OP ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (ج) $\frac{7}{6}$ (د) $\frac{3}{2}$

(٢٨) في الشكل المرفق، تتقاطع الدائرتان $C(O_1,3)$ و $C(O_2,6)$ في النقطتين A و P، $\overline{AP}$ منصف للزاوية $\widehat{BAC}$. $\frac{BP}{PC}$ يساوي:

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{5}{6}$



(٢٩) $C(O,r)$ و $C(O',r')$ دائرتان متماستان عند النقطة A. رسمنا مستقيماً يمر بالنقطة A ويقطع $C(O,r)$ في النقطة B و $C(O',r')$ في النقطة B'.

عندئذ،

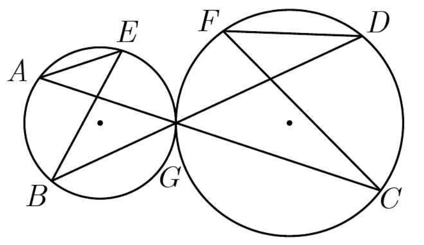
(أ) $\overline{OB} \parallel \overline{O'B'}$ (ب) $\overline{OB} \perp \overline{O'B'}$

(ج) $\widehat{OBA} \neq \widehat{B'AO'}$ (د) $\widehat{OBA} \neq \widehat{O'B'A}$

(٣٠) في الشكل المرفق:

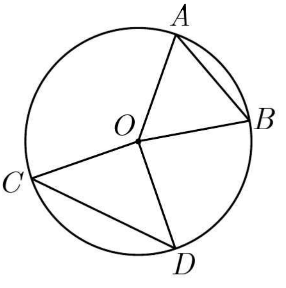
(أ) $\widehat{E} = \widehat{D}$ (ب) $\widehat{E} = \widehat{F}$

(ج) $\widehat{E} \neq \widehat{DGC}$ (د) $\widehat{F} \neq \widehat{AGB}$



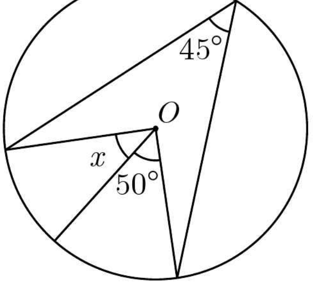
(٣١) في الدائرة $C(O,4)$، $\widehat{AB} = 60°$ ، $\widehat{CD} = 90°$. ما قيمة $AB + CD$ ؟

(أ) $4\sqrt{2} - 4$ (ب) $4\sqrt{2}$ (ج) $4\sqrt{2} + 4$ (د) 8



(٣٢) [Aust.MC 1993] في الشكل المرفق، O مركز الدائرة. قيمة x تساوي:

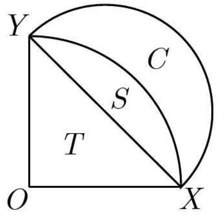
(أ) $20°$ (ب) $25°$ (ج) $35°$ (د) $40°$



(٣٣) [Aust.MC 1996] $\overline{OX}$ و $\overline{OY}$ نصفا قطري ربع دائرة، رسمنا نصف دائرة

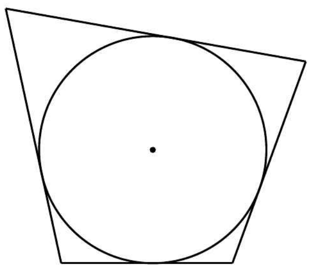
قطرها $\overline{XY}$ كما هو مبين. إذا كانت T ، S ، C ترمز للمثلث، القطاع، الهلال على التوالي فإن مساحة T إلى مساحة C تساوي:

(أ) $\frac{3}{\pi}$ (ب) 1 (ج) $\frac{13}{4\pi}$ (د) $\frac{15}{4\pi}$



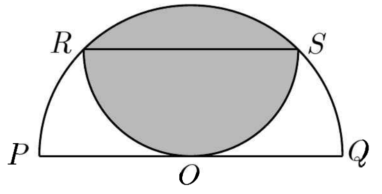
(٣٤) [Aust.MC 1996] في الشكل المرفق، النسبة بين محيط الشكل الرباعي إلى محيط الدائرة تساوي 4 إلى 3. النسبة بين مساحة الشكل الرباعي إلى مساحة الدائرة تساوي:

(أ) 4 إلى π (ب) $3\sqrt{2}$ إلى π (ج) 16 إلى 9 (د) 4 إلى 3



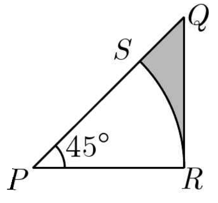
(٣٥) [Aust.MC 1993] في الشكل المرفق، كل من $\widehat{PRSQ}$ و $\widehat{ROS}$ نصف دائرة، $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$ ، نصف قطر الدائرة الكبيرة 1. ما مساحة المنطقة المظللة:

(أ) $\frac{\pi - 1}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) 1 (د) $\frac{\pi}{2} - 1$

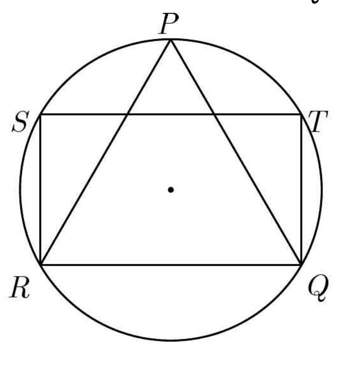


(٣٦) [Aust.MC 1998] المثلث $\triangle PQR$ قائم الزاوية عند $\widehat{R}$. $\widehat{QPR} = 45^\circ$. $\widehat{RS}$ قوس لدائرة مركزها P ونصف قطرها $\overline{PR}$ ويقطع $\overline{PQ}$ عند النقطة S . إذا كانت A هي مساحة المنطقة غير المظللة و B مساحة المنطقة المظللة فإن $\frac{A}{B}$ تساوي:

(أ) 1 (ب) $\frac{\pi}{8}$ (ج) $\frac{2\pi}{4-\pi}$ (د) $\frac{\pi}{4-\pi}$



(٣٧) [Aust.MC 1996] رؤوس $\triangle PRQ$ المتساوي الأضلاع تقع على محيط دائرة نصف قطرها 1. S و T نقطتان على الدائرة حيث $QRST$ مستطيل. ما مساحة المستطيل $QRST$ ؟



(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\sqrt{3}$ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) 2

(٣٨) [Aust.MC 1997] نافذة على شكل مربع طول ضلعه 60 محاط من الأعلى بقوس دائرة نصف قطرها 50. قوس الدائرة أصغر من نصف دائرة. ما أقصى ارتفاع للنافذة ؟

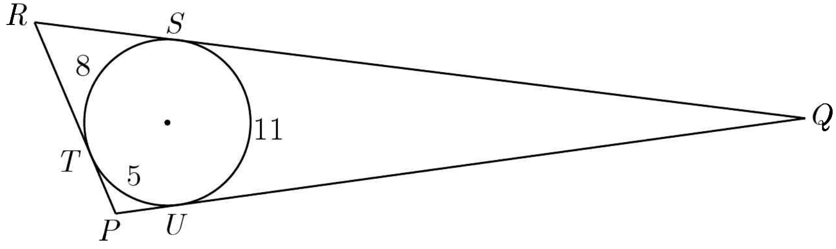
(أ) 70 (ب) 80 (ج) 85 (د) 90

(٣٩) [Aust.MC 1995] $\triangle PQR$ القائم الزاوية عند Q والمتساوي الساقين $PQ = QR = 6$ يحيط بدائرة مركزها O. ما طول نصف قطر الدائرة ؟

(أ) $2\sqrt{3}$ (ب) $3\sqrt{2}$ (ج) $6 - 3\sqrt{2}$ (د) 3

(٤٠) [Aust.MC 1994] أضلاع $\triangle PQR$ مماسات للدائرة $C(O,r)$ عند النقاط S، T، U. إذا كان $\overset{\frown}{US} : \overset{\frown}{ST} : \overset{\frown}{TU}$ هي $11 : 8 : 5$ فما النسبة $\overset{\frown}{UQS} : \overset{\frown}{SRT} : \overset{\frown}{TPU}$ ؟

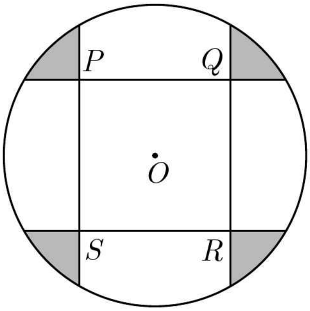
(أ) $1 : 4 : 7$ (ب) $2 : 5 : 8$ (ج) $2 : 3 : 7$ (د) $1 : 5 : 9$



(٤١) [Aust.MC 1994] للدائرة $C(O,1)$ والمربع $PQRS$ المركز نفسه. طول ضلع المربع 1. مددنا أضلاع المربع لتلاقي الدائرة كما هو مبين. ما مساحة

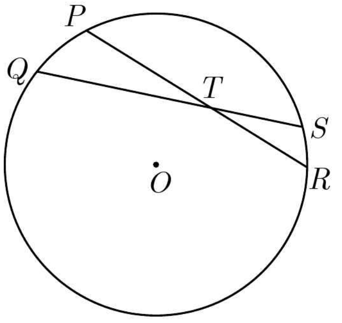
المناطق المظللة ؟

(أ) $\frac{\pi}{8}$ (ب) $\frac{\pi}{3}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$ (د) π



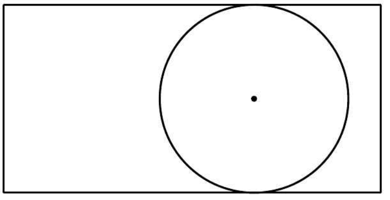
(٤٢) [Aust.MC 1995] $\overline{PR}$ و $\overline{QS}$ وتران في الدائرة $C(O,5)$ يتقاطعان في النقطة T. إذا كان $\widehat{PTQ}=20^\circ$ فما طول $\widehat{PQ}+\widehat{RS}$ ؟

(أ) $\frac{5\pi}{9}$ (ب) $\frac{4\pi}{5}$ (ج) $\frac{8\pi}{9}$ (د) $\frac{10\pi}{9}$



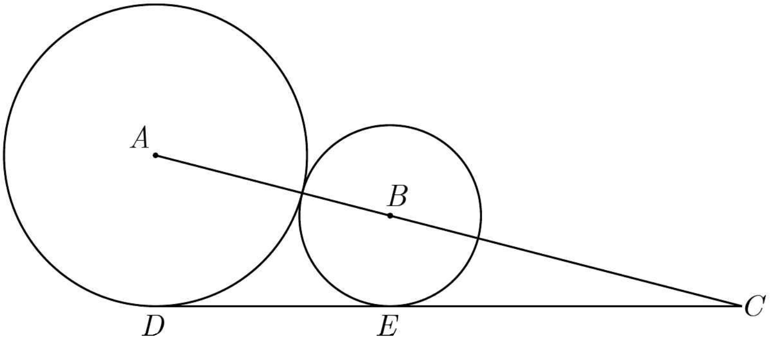
(٤٣) [AMC10B 2012] رسمنا دائرة نصف قطرها 5 داخل مستطيل كما هو مبين في الشكل. النسبة بين طول المستطيل إلى عرضه هي $2:1$. ما مساحة المستطيل ؟

أ) 100 ب) 125 ج) 150 د) 200

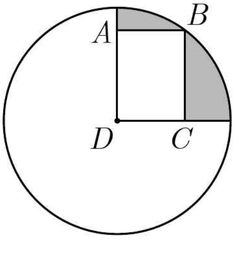


(٤٤) [AMC10A 2012] $C(A,5)$ و $C(B,3)$ دائرتان متماستان، $\overline{DE}$ مماس مشترك لهما عند D و E ويلاقي امتداد $\overrightarrow{AB}$ في النقطة C. ما طول BC ؟

أ) 4.8 ب) 10.2 ج) 12 د) 14.4



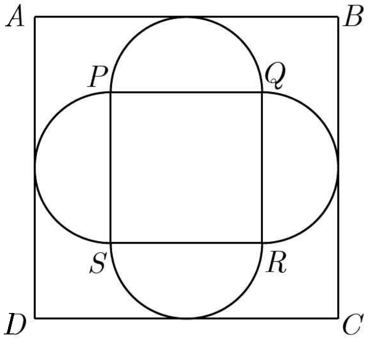
(٤٥) [AJHSME 1987] $ABCD$ مستطيل، D مركز الدائرة، B نقطة على الدائرة، $AD = 4$ ، $CD = 3$. ما مساحة المنطقتين المظللتين ؟



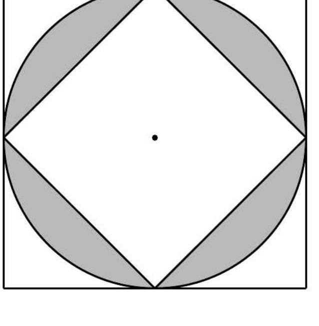
(أ) $\frac{25\pi}{4} - 12$ (ب) $\frac{23\pi}{4} - 12$ (ج) $\frac{25\pi}{4}$ (د) $\frac{27\pi}{4}$

(٤٦) [AJHSME 1994] رسمنا أربعة أنصاف دوائر أقطارها أضلاع المربع $PQRS$ الذي طول ضلعه 4 كما هو مبين. ثم رسمنا المربع $ABCD$ بحيث تكون أضلاعه مماسات لأنصاف الدوائر كما هو مبين. ما مساحة المربع $ABCD$ ؟

(أ) 32 (ب) 36 (ج) 48 (د) 64



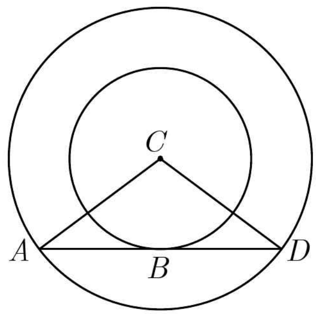
(٤٧) [AMC8 2011] في الشكل المرفق، نصف قطر الدائرة يساوي 1. كل من الشكلين الرباعيين مربع. A مساحة المناطق المظللة داخل الدائرة و B مساحة المناطق بين المربعين. ما قيمة $\frac{A}{B}$ ؟



(أ) $\pi - 2$ (ب) $\frac{\pi - 3}{2}$ (ج) $\frac{\pi - 2}{2}$ (د) π

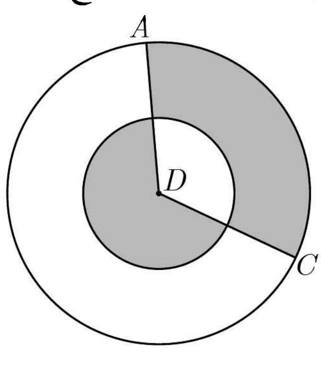
(٤٨) [AMC8 2010] في الشكل المرفق، C مركز مشترك للدائرتين، الوتر $\overline{AD}$ مماس للدائرة الصغرى عند B ، $AC = 10$ ، $AD = 16$. ما مساحة المنطقة الواقعة بين الدائرتين ؟

(أ) 49π (ب) 64π (ج) 81π (د) 100π



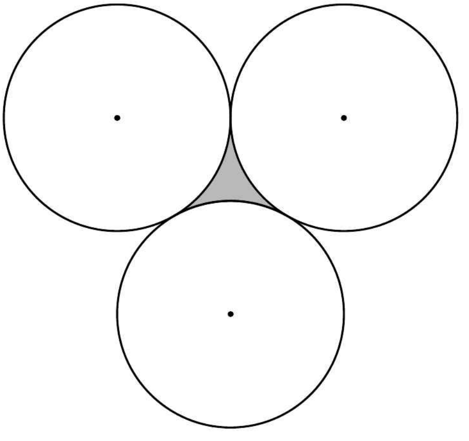
(٤٩) [Pascal 2007] $C(D,1)$ و $C(D,2)$ لهما المركز نفسه D. مساحة المنطقتين المظللتين تساوي $\frac{5}{12}$ من مساحة الدائرة الكبيرة. ما القياس المناسب للزاوية $\widehat{ADC}$ ؟

(أ) $90°$ (ب) $108°$ (ج) $120°$ (د) $135°$



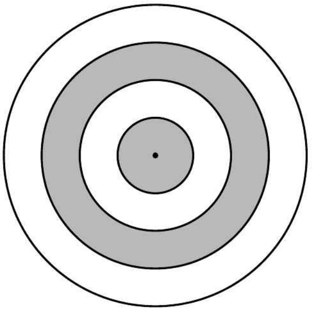
(٥٠) [Pascal 2006] الدوائر الثلاث المبينة في الشكل المرفق متطابقة. محيط كل منها يساوي 36. ما محيط المنطقة المظللة ؟

(أ) 6 (ب) 18 (ج) 24 (د) 36



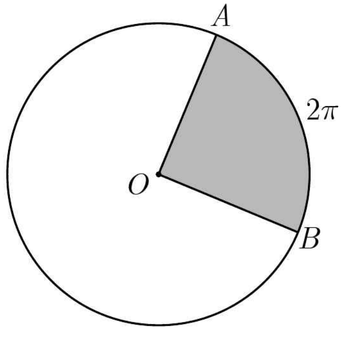
(٥١) [Cayley 2003] في الشكل المرفق، لدينا أربع دوائر لها المركز نفسه أنصاف أقطارها 1، 2، 3، 4. إذا كانت A مساحة الدائرة الكبيرة و B مساحة المنطقتين المظللتين فإن $\dfrac{B}{A}$ يساوي:

(أ) $\dfrac{1}{4}$ (ب) $\dfrac{7}{16}$ (ج) $\dfrac{3}{8}$ (د) $\dfrac{5}{8}$



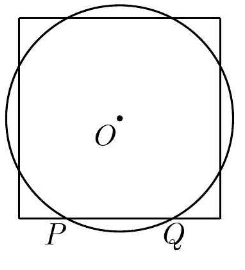
(٥٢) [Cayley 2002] في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، زاوية القطاع المظلل $\widehat{AOB}$ تساوي 90° وطول القوس $\widehat{AB}$ يساوي 2π وحدة. ما مساحة القطاع المظلل $\widehat{AOB}$ ؟

(أ) 4π (ب) 6π (ج) 8π (د) 16π



(٥٣) [Fermat 2009] في الشكل المرفق، الدائرة والمربع لهما المركز نفسه O والمساحة نفسها. نصف قطر الدائرة 1 وتقطع أحد أضلاع المربع بالنقطتين P و Q. ما طول PQ ؟

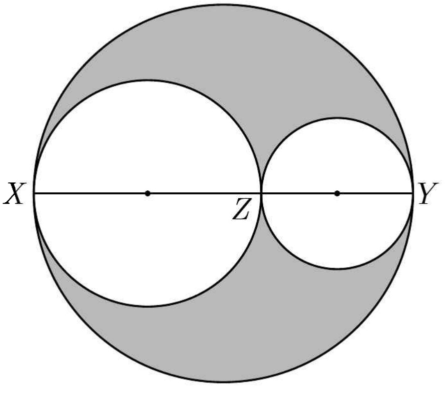
(أ) $\sqrt{4-\pi}$ (ب) 1 (ج) $2-\sqrt{\pi}$ (د) $\sqrt{2}$



(٥٤) [Fermat 2008] في الشكل المرفق، z تقع على $\overline{XY}$، أقطار الدوائر الثلاث هي $\overline{XZ}$، $\overline{ZY}$، $\overline{XY}$. $XZ = 12$، $ZY = 8$. A مساحة المناطق

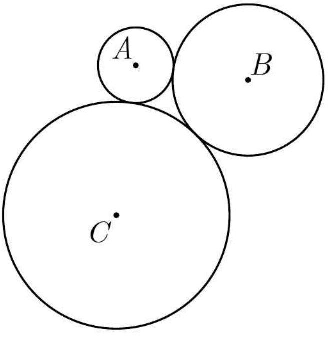
المظللة، B مساحة المناطق غير المظللة. $\frac{A}{B}$ يساوي:

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{12}{13}$ (د) 1



(٥٥) [Fermat 2000] A، B، C مراكز ثلاث دوائر متماسة كما هو مبين في الشكل، أنصاف أقطارها 2، 4، 6 على التوالي. في المثلث $\triangle ABC$:

(أ) $\widehat{A}$ حادة (ب) $\widehat{B} = 90°$ (ج) $\widehat{A} = 90°$ (د) جميع زواياه حادة



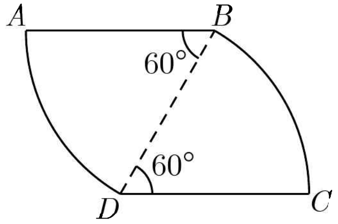
(٥٦) [Fryer 2005] ثلاث دوائر لها المركز نفسه. نصفا قطري الدائرتين الكبيرتين هما 13 و 12. مساحة الحلقة بين الدائرتين الكبيرتين تساوي مساحة الدائرة

الصغيرة. ما طول نصف قطر الدائرة الصغيرة ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 9

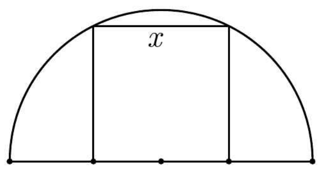
(٥٧) [Galois 2007] وصلنا قطاعين من دائرة نصف قطرها 12 كما هو مبين في الشكل المرفق. ما مساحة الشكل $ABCD$ ؟

(أ) 12π (ب) 24π (ج) 36π (د) 48π



(٥٨) [MAΘ 2009] $ABCD$ مربع مرسوم داخل نصف دائرة كما هو مبين. إذا كان طول ضلع المربع يساوي x وقطر الدائرة يساوي D فما قيمة $\frac{x}{D}$ ؟

(أ) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (ب) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ج) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (د) $\sqrt{5}$

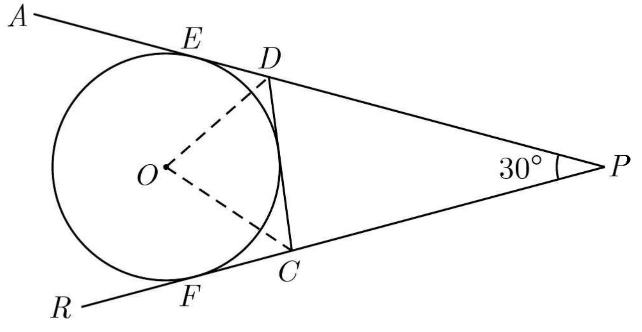


(٥٩) [MAΘ 2009] محيط قطاع دائري يساوي 28 سم ومساحته تساوي 49 سم². ما طول هذا القطاع بالسنتمتر ؟

(أ) 7 (ب) 14 (ج) 22 (د) 26

(٦٠) [MAΘ 2008] أضلاع $\triangle PCD$ مماسات للدائرة التي مركزها O. إذا كان $\widehat{P} = 30^\circ$ فما قياس $\widehat{DOC}$ ؟

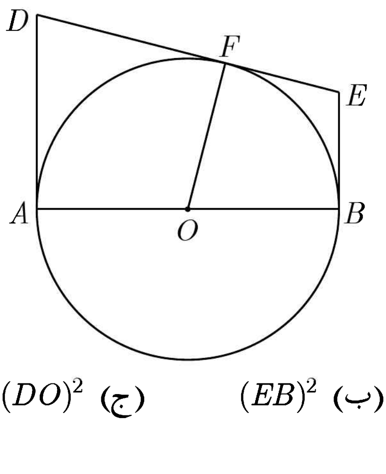
(أ) 60° (ب) 65° (ج) 70° (د) 75°



(٦١) [MAΘ 2008] دائرتان $C(O_1, 20)$ و $C(O_2, 15)$ تتقاطعان في نقطتين. ما الفرق بين مساحتي المنطقتين غير المشتركتين بين الدائرتين ؟

(أ) 25π (ب) 175π (ج) 450π (د) 625π

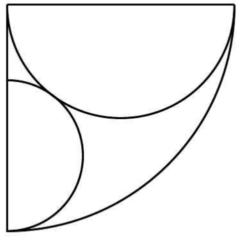
(٦٢) [MAΘ 2008] في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة التي مركزها O، $\overline{AD}$ ، $\overline{DE}$ ، $\overline{BE}$ مماسات للدائرة. $FD \times FE$ يساوي:



(أ) $(DA)^2$ (ب) $(EB)^2$ (ج) $(DO)^2$ (د) $(FO)^2$

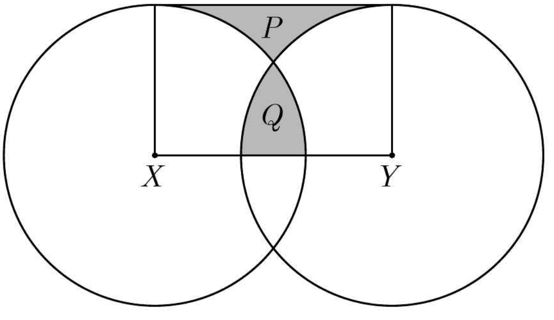
(٦٣) [Aust.MC 1999] قطر نصف الدائرة الكبيرة يساوي نصف قطر ربع الدائرة في الشكل المرفق وكل منهما يساوي 2. ما نصف قطر نصف الدائرة الصغيرة ؟

(أ) $\frac{2}{\pi}$ (ب) $\frac{7}{10}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{\pi}{5}$



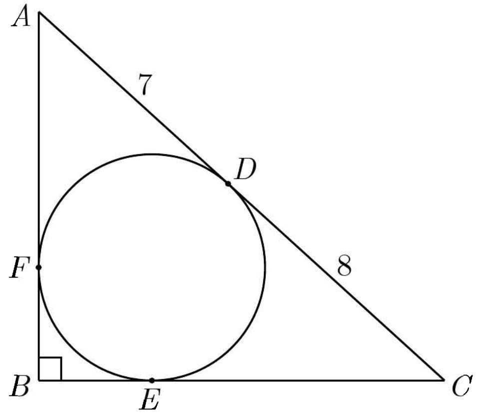
(٦٤) [Aust.MC 1999] في الشكل المرفق، دائرتان متطابقتان مركزاهما X و Y ونصف قطر كل منهما 1. مساحة المنطقة المظللة P تساوي مساحة المنطقة المظللة Q. ما طول XY ؟

(أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) 1.4 (ج) 1.5 (د) $\frac{\pi}{2}$

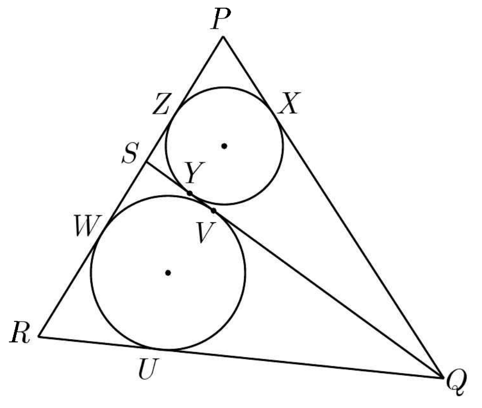


(٦٥) [Aust.MC 2001] $\triangle ABC$ قائم الزاوية عند B وأضلاعه مماسات للدائرة عند D، E، F على التوالي. $AD = 7$ ، $DC = 8$. ما مساحة $\triangle ABC$ ؟

(أ) 28 (ب) 49 (ج) 56 (د) 60



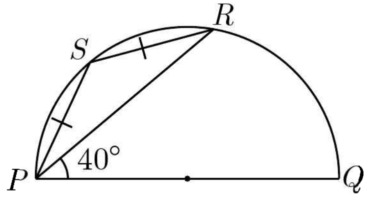
(٦٦) [Aust.MC 2003] المثلث $\triangle PQR$ متساوي الساقين فيه $PQ = QR$. S نقطة على $\overline{PR}$ حيث $PS = 15$ ، $SR = 21$. $\overline{PQ}$ و $\overline{QS}$ و $\overline{SP}$ مماسات للدائرة الصغيرة عند X و Y و Z على التوالي. $\overline{RQ}$ و $\overline{QS}$ و $\overline{SR}$ مماسات للدائرة الكبيرة عند U و V و W على التوالي. ما طول YV ؟



(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

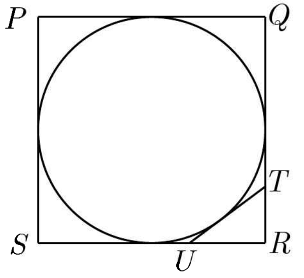
(٦٧) [Aust.MC 2001] في الشكل المرفق، $\overline{PQ}$ قطر نصف الدائرة، $PS = SR$ ، $\widehat{QPR} = 40^\circ$. ما قياس $\widehat{SRP}$ ؟

(أ) 25° (ب) 30° (ج) 35° (د) 40°



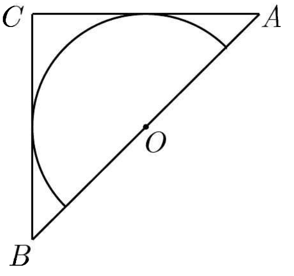
(٦٨) [Aust.MC 2004] أضلاع المربع $PQRS$ مماسات للدائرة وأيضاً $\overline{UT}$ مماس للدائرة، $RU = \frac{1}{4}RS$. RT يساوي:

(أ) $\frac{2}{9}RQ$ (ب) $\frac{3}{10}RQ$ (ج) $\frac{1}{3}RQ$ (د) $\frac{2}{5}RQ$



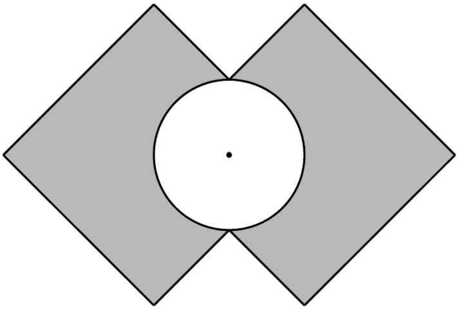
(٦٩) [AMC8 2005] المثلث $\triangle ABC$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين فيه، $AC = BC$ ، $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ مماسان لنصف الدائرة التي مركزها O ومساحتها 2π . ما مساحة $\triangle ABC$ ؟

(أ) 6 (ب) 8 (ج) 3π (د) 4π



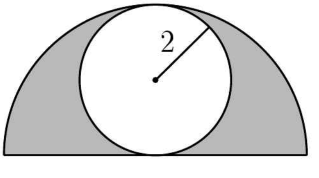
(٧٠) [AMC8 2004] الشكل المرفق يبين مربعين طول ضلع كل منهما 4 ويتقاطعان في زاويتين قائمتين عند منتصفي ضلعيهما. قطر الدائرة هو القطعة بين نقطتي التقاطع. ما مساحة المنطقة المظللة في الشكل ؟

(أ) $16-4\pi$ (ب) $16-2\pi$ (ج) $28-4\pi$ (د) $28-2\pi$



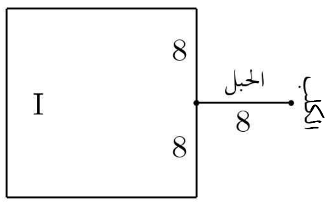
(٧١) [AMC10A 2009] في الشكل المرفق، نصف قطر الدائرة الصغيرة يساوي 2. الكسر الذي يمثل نسبة مساحة الجزء المظلل إلى مساحة نصف الدائرة الكبيرة هو

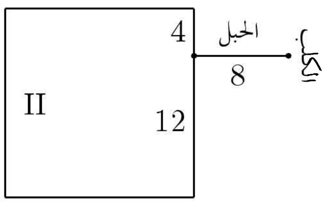
(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (ج) $\frac{2}{\pi}$ (د) $\frac{2}{3}$



(٧٢) [AMC10A 2006] أراد وائل أن يربط كلبه بحبل مثبت عند أحد أضلاع مربع طول ضلعه 16. اقترح عليه صديقه أحمد أن يختار نقطة منتصف أحد الأضلاع ليثبت الحبل كما هو مبين في الشكل I ولكنه اعتقد أنه بتثبيت الحبل كما هو مبين في الشكل II فإنه سيحصل على مساحة أكبر يتحرك فيها الكلب. أي الاقتراحين أفضل وما هي المساحة الأكبر ؟

(أ) I، 32π (ب) I، 38π (ج) II، 36π (د) II، 40π



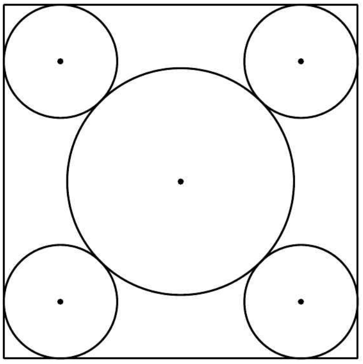


(٧٣) [AMC10A, AMC12A 2008] A و B نقطتان على دائرة مركزها O، $\widehat{AOB} = 60^\circ$. دائرة أخرى تمس الدائرة الأولى داخلياً و $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ مماسان لها. ما النسبة بين مساحة الدائرة الصغيرة إلى الدائرة الكبيرة ؟

(أ) $\frac{1}{16}$ (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) $\frac{1}{8}$ (د) $\frac{1}{6}$

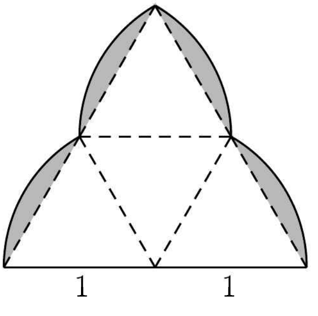
(٧٤) [AMC10A 2007] في الشكل المرفق، أربع دوائر متطابقة نصف قطر كل منها 1 وكل منها تمس ضلعين من أضلاع المربع وتمس دائرة نصف قطرها 2 كما هو مبين في الشكل. ما مساحة المربع ؟

(أ) $22 + 12\sqrt{2}$ (ب) $16 + 16\sqrt{3}$ (ج) 48 (د) $36 + 16\sqrt{2}$



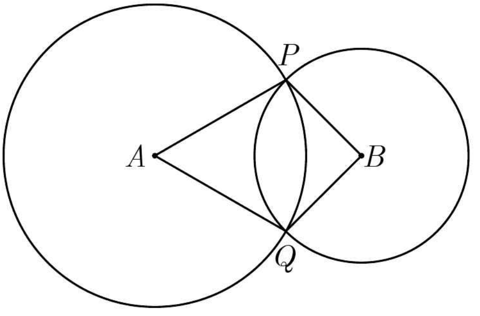
(٧٥) [AMC10A 2005] أنشأنا الشكل المرفق برسم قطاعات دائرية حول أضلاع مثلثات متساوية الأضلاع ومتطابقة طول ضلع كل منها 1. ما مساحة الجزء المظلل ؟

(أ) $\frac{1}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{2}{3}\pi$ (ج) π (د) $\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$



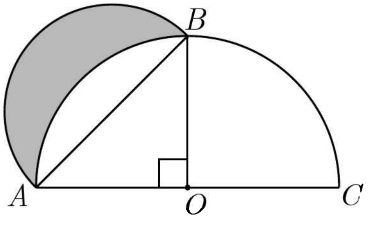
(٧٦) [Pascal 2003] في الشكل المرفق، دائرتان $C(A,R)$ و $C(B,r)$ تتقاطعان في النقطتين P و Q حيث $\widehat{PAQ} = 60°$ و $\widehat{PBQ} = 90°$. ما النسبة بين مساحة $C(A,R)$ إلى مساحة $C(B,r)$

(أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{2}{1}$ (د) $\frac{3}{1}$



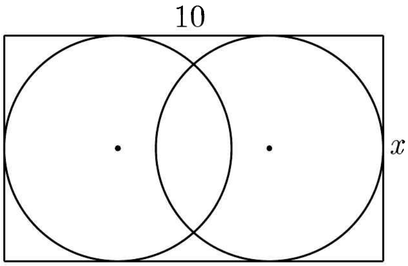
(٧٧) [Pascal 2002] في الشكل المرفق، $\overline{AOC}$ قطر نصف الدائرة الأولى التي مركزها O ونصف قطرها 1 و $\overline{AB}$ قطر نصف الدائرة الثانية. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$ (د) $\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}$



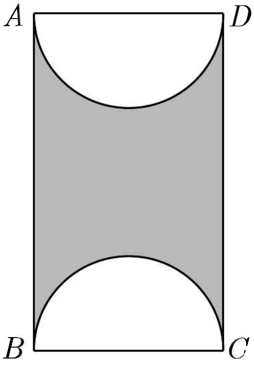
(٧٨) [Pascal 2001] دائرتان متطابقتان محاطتان بمستطيل طوله 10 وعرضه x كما هو مبين في الشكل. إذا كانت المسافة بين مركزيهما تساوي $\frac{2x}{3}$ فإن x تساوي:

(أ) $\frac{15}{4}$ (ب) 5 (ج) 6 (د) $\frac{15}{2}$



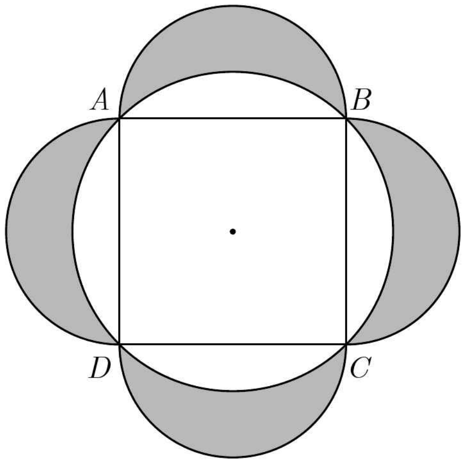
(٧٩) [Pascal 2000] $ABCD$ مستطيل فيه $AD = 10$. مساحة المنطقة المظللة تساوي 100. أصغر مسافة بين نصفي الدائرة تساوي:

(أ) $2.5\pi - 5$ (ب) 2.5π (ج) $2.5\pi + 5$ (د) 5π



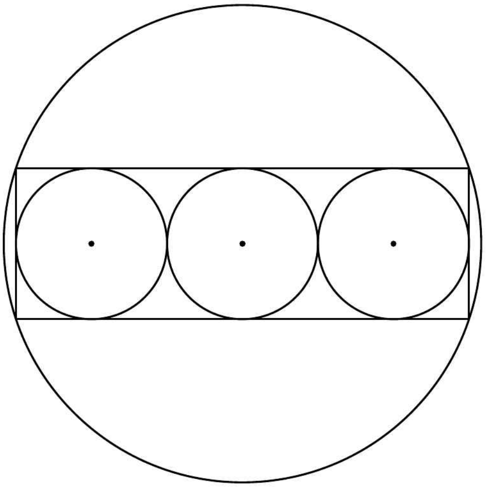
(٨٠) [Cayley 2001] طول ضلع المربع $ABCD$ المرسوم داخل الدائرة يساوي 2. أضلاع المربع هي أقطار لأنصاف دوائر كما هو مبين. ما مساحة المناطق المظللة ؟

(أ) $2\pi - 4$ (ب) $2\pi - 2$ (ج) π (د) 4



(٨١) [Cayley 1999] رسمنا ثلاث دوائر متماسة نصف قطر كل منها 10 بحيث تقع مراكزها على استقامة واحدة داخل مستطيل ثم أحطنا المستطيل بدائرة أخرى كما هو مبين في الشكل. مساحة الدائرة الكبيرة تساوي:

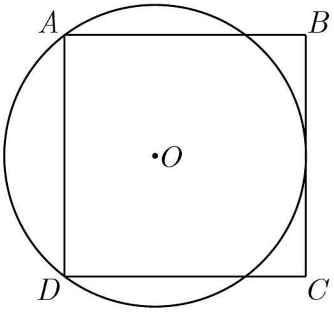
(أ) 1000π (ب) 1300π (ج) 1600π (د) 1700π



(٨٢) [Cayley 1998] طول ضلع المربع $ABCD$ يساوي 8. $\overline{BC}$ مماس لدائرة

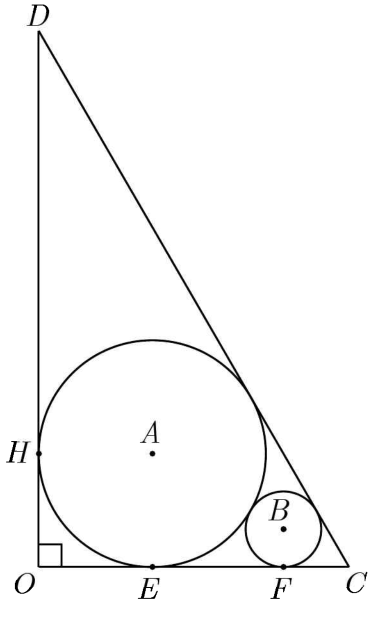
مركزها O وتمر بالنقطتين A و D. ما طول نصف قطر الدائرة ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6



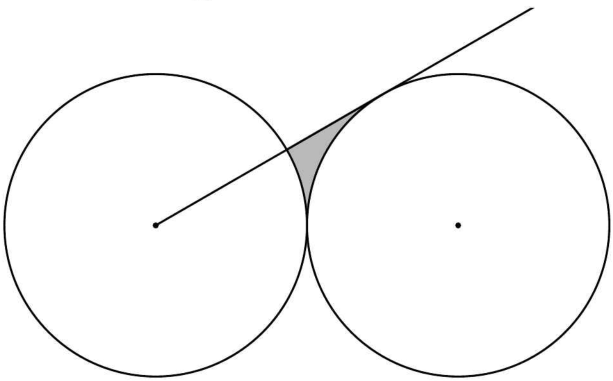
(٨٣) [Fermat 2001] الدائرتان $C(A,3)$ و $C(B,1)$ متماستان كما هو مبين. $\overline{OC}$ يمس الدائرتين عند E و F و $\overline{OD}$ يمس الدائرة $C(A,3)$ عند H وعمودي على $\overline{OC}$، $\overline{CD}$ مماس للدائرتين كما هو مبين. ما طول OD ؟

(أ) $8\sqrt{3}$ (ب) $3+6\sqrt{3}$ (ج) $6+3\sqrt{3}$ (د) $9+3\sqrt{3}$



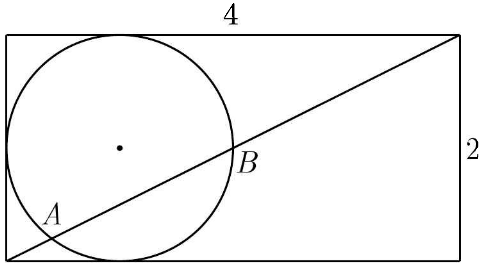
(٨٤) [Fermat 2000] دائرتان متماستان نصف قطر كل منها 10. رسمنا مماساً من مركز إحداهما إلى الدائرة الثانية. ما مساحة المنطقة المظللة مقربة إلى أقرب عدد صحيح ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8



(٨٥) [Fermat 2000] دائرة تمس ثلاثة من أضلاع مستطيل طوله 4 وعرضه 2 كما هو مبين. يقطع قطر المستطيل الدائرة في النقطتين A و B. ما طول الوتر AB ؟

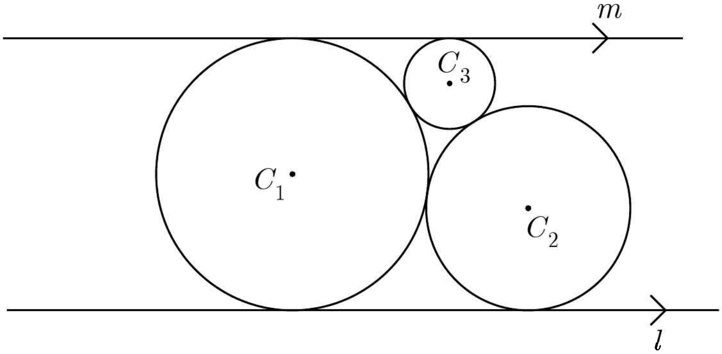
(أ) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ب) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (ج) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (د) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$



(٨٦) [Fermat 1999] $C(C_1,r)$ و $C(C_2,9)$ و $C(C_3,4)$ ثلاث دوائر متماسة

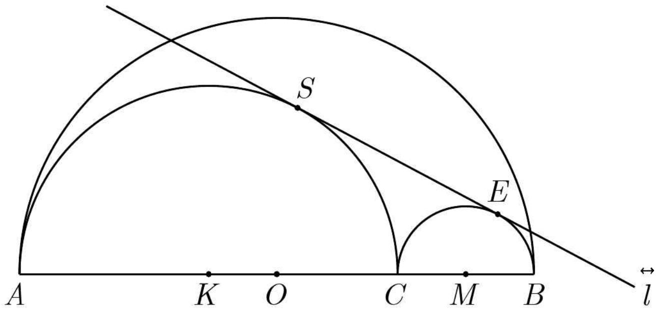
كما هو مبين، $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ حيث $\overleftrightarrow{m}$ مماس للدائرتين $C(C_1, r)$ و $C(C_3, 4)$ و $\overleftrightarrow{l}$ مماس للدائرتين $C(C_1, r)$ و $C(C_2, 9)$. ما طول r ؟

(أ) 10 (ب) 11 (ج) 12 (د) 13



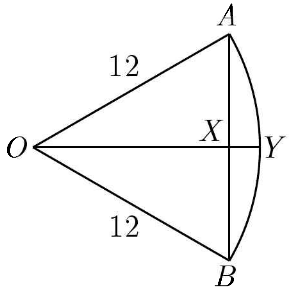
(٨٧) [Fryer 2009] في الشكل المرفق، O ، K ، M مراكز ثلاثة أنصاف دوائر. $OC = 32$ ، $CB = 36$. $\overleftrightarrow{l}$ مماس للدائرتين الصغيرتين عند S و E حيث $\overline{KS}$ و $\overline{ME}$ عموديان على $\overleftrightarrow{l}$. ما مساحة الشكل الرباعي $KSEM$ ؟

(أ) 600 (ب) 960 (ج) 1080 (د) 2040



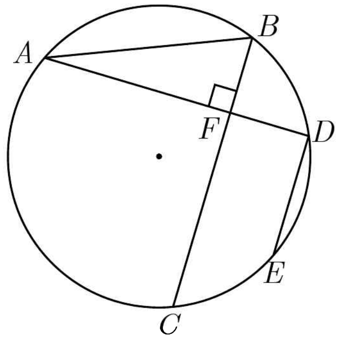
(٨٨) [Galois 2007] في الشكل المرفق، AOB قطاع الدائرة $C(O,12)$، $\widehat{AOB} = 60°$. $\overline{OY}$ عمودي على $\overline{AB}$ ويقطعه عند X . ما طول XY ؟

(أ) $8 - 6\sqrt{3}$ (ب) $9 - 6\sqrt{3}$ (ج) $10 - 6\sqrt{3}$ (د) $12 - 6\sqrt{3}$



(٨٩) [Euclid 2006] في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ وتران في الدائرة، D نقطة على الدائرة حيث $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ و E نقطة على الدائرة حيث $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. ما قياس $\widehat{EAC} + \widehat{ABC}$ ؟

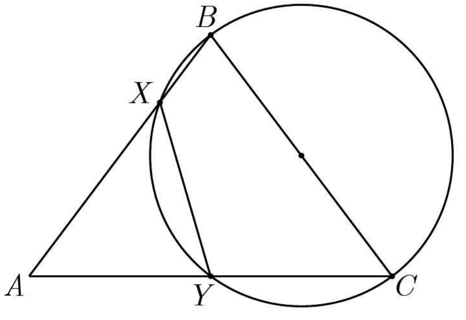
(أ) $80°$ (ب) $90°$ (ج) $95°$ (د) $100°$



(٩٠) [Euclid 2001] $\triangle ABC$ متساوي الساقين فيه $AB = BC = 25$ و $AC = 30$. $\overline{BC}$ قطر في دائرة يقطع $\overline{AB}$ عند X ويقطع $\overline{AC}$ عند

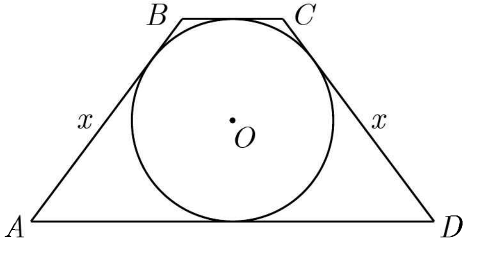
Y. ما طول XY ؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 20 (د) 25



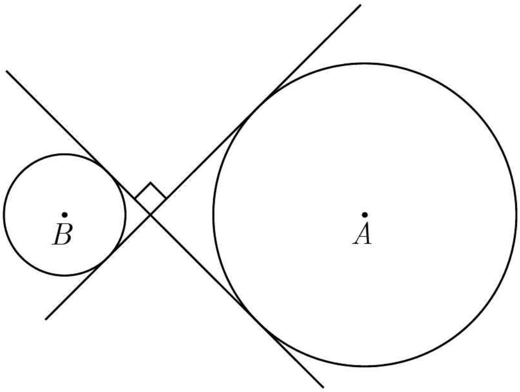
(٩١) [Euclid 2000] $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين فيه $AB = CD = x$. مساحة $ABCD$ تساوي 80 . $C(O,4)$ دائرة تمس الأضلاع الأربعة لشبه المنحرف. ما قيمة x ؟

(أ) 7 (ب) 8 (ج) 9 (د) 10



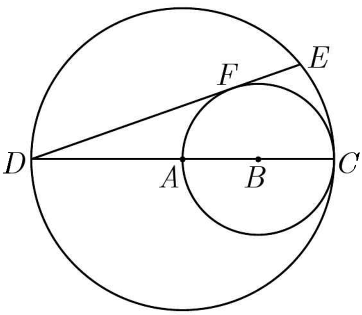
(٩٢) [Euclid 1999] المماسان للدائرتين $C(A,5)$ و $C(B,2)$ يتقاطعان بزاوية قياسها $90°$ كما هو مبين. ما طول AB ؟

(أ) 5 (ب) $5\sqrt{2}$ (ج) 7 (د) $7\sqrt{2}$



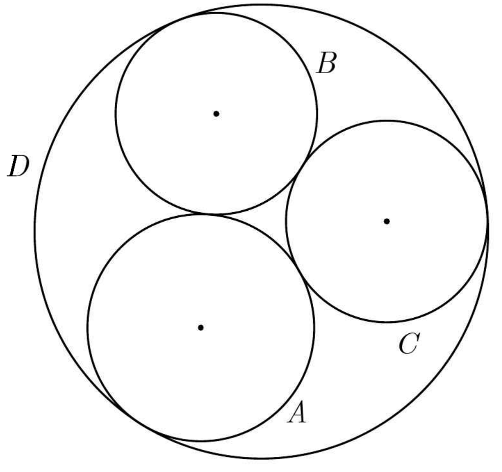
(٩٣) [Euclid 1998] في الشكل المرفق، $\overline{DC}$ قطر في الدائرة الكبيرة التي مركزها A و $\overline{AC}$ قطر في الدائرة الصغيرة التي مركزها B. $\overline{DE}$ مماس للدائرة الصغيرة عند F، $DC = 12$. ما طول DE ؟

(أ) $6\sqrt{2}$ (ب) $7\sqrt{2}$ (ج) $8\sqrt{2}$ (د) $9\sqrt{2}$

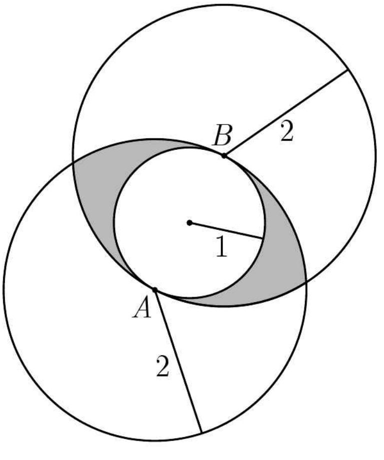


(٩٤) [AMC10A 2004] A، B، C ثلاث دوائر متماسة خارجياً وتمس الدائرة D داخلياً كما هو مبين في الشكل. الدائرتان B و C متطابقتان. الدائرة A نصف قطرها يساوي 1 وتمر بمركز الدائرة D. ما طول نصف قطر الدائرة B ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{7}{9}$ (د) $\frac{8}{9}$



(٩٥) [AMC10B 2004] دائرة نصف قطرها 1 تمس داخلياً دائرتين نصف قطر كل منهما 2 عند A و B حيث $\overline{AB}$ هو قطر الدائرة الصغيرة كما هو مبين. ما مساحة المنطقة المظللة ؟



(أ) $\frac{5}{3}\pi - 3\sqrt{2}$ (ب) $\frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

(ج) $\frac{8}{3}\pi - 3\sqrt{2}$ (د) $\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

إجابات المسائل غير المحلولة

(١) أ	(٢) د	(٣) ج	(٤) ب	(٥) ج
(٦) د	(٧) ب	(٨) د	(٩) ج	(١٠) د
(١١) د	(١٢) أ	(١٣) ب	(١٤) ج	(١٥) د
(١٦) ج	(١٧) أ	(١٨) ج	(١٩) ب	(٢٠) أ
(٢١) د	(٢٢) ب	(٢٣) د	(٢٤) د	(٢٥)ب
(٢٦) د	(٢٧) ج	(٢٨) ب	(٢٩) أ	(٣٠) ب
(٣١) ج	(٣٢) د	(٣٣) ب	(٣٤) د	(٣٥) أ
(٣٦) د	(٣٧) ب	(٣٨) أ	(٣٩) ج	(٤٠) أ
(٤١) ج	(٤٢) د	(٤٣) د	(٤٤) ج	(٤٥) أ
(٤٦) د	(٤٧) ج	(٤٨) ب	(٤٩) ج	(٥٠) ب
(٥١) ج	(٥٢) أ	(٥٣) أ	(٥٤) ج	(٥٥) ج
(٥٦) أ	(٥٧) د	(٥٨) ب	(٥٩) ب	(٦٠) د
(٦١) ب	(٦٢) د	(٦٣) ج	(٦٤) د	(٦٥) ج
(٦٦) ب	(٦٧) أ	(٦٨) ج	(٦٩) ب	(٧٠) د
(٧١) أ	(٧٢) ج	(٧٣) ب	(٧٤) أ	(٧٥) ب
(٧٦) ج	(٧٧) ب	(٧٨) ج	(٧٩) ب	(٨٠) د
(٨١) أ	(٨٢) ج	(٨٣) د	(٨٤) د	(٨٥) د
(٨٦) ج	(٨٧) د	(٨٨) د	(٨٩) ب	(٩٠) ب
(٩١) د	(٩٢) د	(٩٣) ج	(٩٤) د	(٩٥) ب