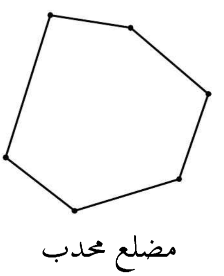
الفصل الثالث

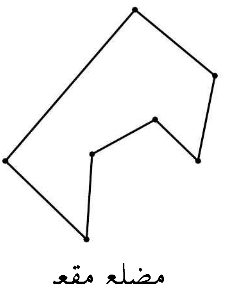
المضلعات

Polygons

لتكن $M_1, M_2, \cdots, M_n$ ، n من النقاط في مستوى حيث $n \geq 3$. نقول إن اتحاد القطع المستقيمة $\overline{M_1M_2} \cup \overline{M_2M_3} \cup \cdots \cup \overline{M_{n-1}M_n}$ حيث أي ثلاث نقاط متتالية ليست على استقامة واحدة وحيث $M_1 = M_n$ ، مضلع. تسمى كل من النقاط رأساً وكل من القطع المستقيمة ضلعاً. زوايا المضلع هي الزوايا التي تنشأ عن تقاطع أضلاع متجاورة. أقطار المضلع هي القطع المستقيمة بين أي رأسين غير متجاورين. يكون المضلع محدباً (convex) إذا قسم أي من أضلاعه المستوى إلى نصفين بحيث يقع المضلع تماماً في أحد نصفي المستوى. أي أن، أي قطعة مستقيمة تصل بين أي نقطتين داخليتين للمضلع تكون محتواة في المضلع. إذا لم يكن المضلع محدباً فإنه يسمى مقعراً (concave).



مضلع محدب

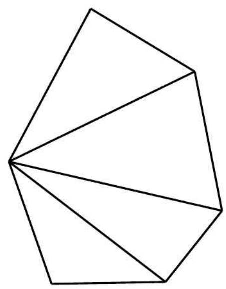


مضلع مقعر

المثلث هو مضلع مكون من ثلاثة أضلاع والرباعي هو مضلع مكون من أربعة أضلاع والخماسي هو مضلع مكون من خمسة أضلاع والسداسي هو مضلع مكون من ستة أضلاع وهكذا.

مبرهنة (١) [مجموع الزوايا الداخلية للمضلع]: مجموع الزوايا الداخلية لمضلع عدد أضلاعه n يساوي $(n-2)\times 180°$.

البرهان: اختر أي رأس من رؤوس المضلع وارسم جميع أقطاره من هذه النقطة.



إن ذلك يقسم المضلع إلى $n-2$ من المثلثات. وبهذا فإن مجموع زوايا المضلع الداخلية هو مجموع زوايا هذه المثلثات وهذا بدوره يساوي $(n-2)\times 180°$. □

مبرهنة (٢) [مجموع الزوايا الخارجية للمضلع]: مجموع الزوايا الخارجية لمضلع عدد أضلاعه n يساوي $360°$.

البرهان: عند كل رأس من رؤوس المضلع مجموع الزاويتين الداخلية والخارجية يساوي $180°$ (لأنها زاوية مستقيمة). لنفرض الآن أن A هو مجموع الزوايا الخارجية وعددها n وأن B هو مجموع الزوايا الداخلية وعددها n أيضاً. إذن، $A+B=n\times 180°$. ولكن $B=(n-2)\times 180°$. وبهذا يكون

$$A+(n-2)\times 180° = n\times 180°$$

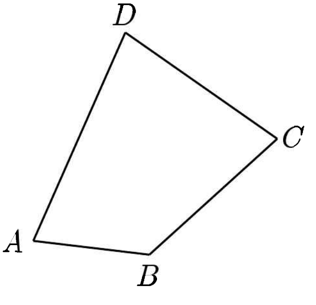
$$A = 2\times 180° = 360°$$ □

المضلعات المنتظمة [Regular Polygons]

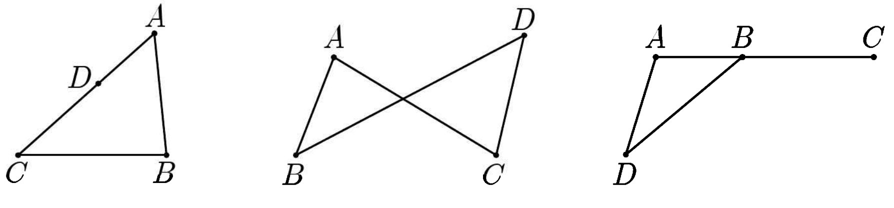
المضلع المنتظم هو مضلع محدب جميع أضلاعه متطابقة وقياس جميع زواياه متساوٍ. ولذا، إذا كان عدد أضلاع (زوايا) المضلع المنتظم هو n فإن قياس كل من زواياه الداخلية يساوي $\dfrac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$.

الرباعيات [Quadrilaterals]

الرباعي هو مضلع مكون من أربعة رؤوس. أي أن الرباعي $ABCD$ هو اتحاد القطع المستقيمة $\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CD}\cup\overline{DA}$ حيث أي ثلاث نقاط يجب أن لا تكون على استقامة واحدة وحيث $\overline{AB}\cap\overline{CD}=\phi$ و $\overline{BC}\cap\overline{DA}=\phi$.



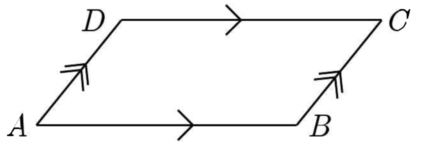
لاحظ أن كلاً من الأشكال التالية ليس رباعياً:



ملحوظة: من المبرهنة (١) نجد أن مجموع زوايا الرباعي يساوي 360°.

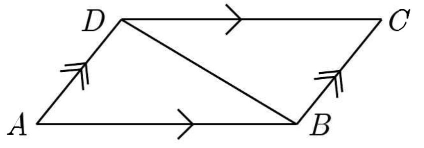
متوازيات الأضلاع [Parallelograms]

متوازي الأضلاع هو رباعي محدب فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. أي أن $ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



مبرهنة (٣): كل ضلعين متقابلين في متوازي أضلاع متطابقان.

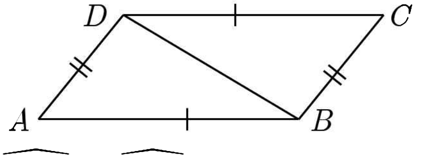
البرهان: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع. ارسم القطر $\overline{BD}$.



الآن، $\triangle CDB \equiv \triangle ABD$ (AAS). ومن التطابق نجد أن $AD = BC$ وأن $AB = DC$. □

مبرهنة (٤): إذا تطابق كل ضلعين متقابلين في رباعي محدب فإن الرباعي متوازي أضلاع.

البرهان: لنفرض أن $ABCD$ رباعي محدب فيه $AB = DC$ و $AD = BC$.

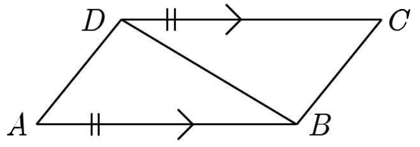


عندئذ، $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ ومن ثم $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$. وبما أنهما زاويتان

تبادليتان داخلياً فإن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. وبالمثل، $\widehat{ABD} \equiv \widehat{CDB}$ ومن ثم فإن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. □

مبرهنة (٥): إذا توازى وتطابق ضلعان متقابلان في رباعي محدب فإن الرباعي متوازي أضلاع.

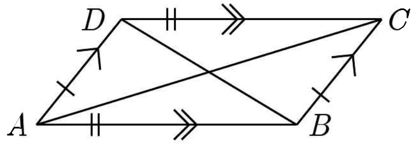
البرهان: لنفرض أن $ABCD$ رباعي محدب فيه $AB = DC$ و $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.



عندئذ، $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$. ومن ذلك يكون $AD = BC$ فنرى أن $ABCD$ متوازي أضلاع من مبرهنة (٤). □

مبرهنة (٦): في متوازي الأضلاع، كل زاويتين متقابلتين متساويتان وكل زاويتين متتاليتين متكاملتان.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ متوازي أضلاع.



بما أن كل ضلعين متقابلين متوازيان فإننا نجد أن كل زاويتين متتاليتين متكاملتان. ومن $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ نجد أن $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$. وبالمثل من $\triangle ADC \equiv \triangle CBA$ نجد أن $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$. □

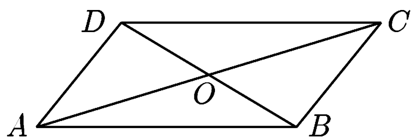
مبرهنة (٧): إذا تساوت كل زاويتين متقابلتين في رباعي محدب فإن الرباعي متوازي أضلاع.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ رباعي محدب حيث $\widehat{A} = \widehat{C}$ و $\widehat{B} = \widehat{D}$. بما أن $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360°$ فإن $2(\widehat{A} + \widehat{B}) = 360°$. أي أن $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$. وبالمثل، $\widehat{A} + \widehat{D} = 180°$. إذن، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. وبهذا فإن $ABCD$ متوازي أضلاع. □

ملحوظة: لاحظ أن معرفة قياس زاوية واحدة فقط من زوايا متوازي أضلاع يؤدي إلى معرفة قياس بقية الزوايا.

مبرهنة (٨): نقطة تقاطع قطري متوازي أضلاع تنصف القطرين.

البرهان: نفرض أن O هي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$.

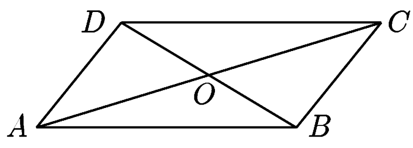


سنبرهن أن $OA = OC$ و $OB = OD$. بما أن $\widehat{ABO} = \widehat{CDO}$ و $\widehat{DCO} = \widehat{OAB}$ و $AB = DC$ فإن $\triangle COD \equiv \triangle AOB$. وبهذا فإن $OA = OC$ و $OB = OD$. □

ملحوظة: تسمى نقطة تلاقي قطري متوازي أضلاع، مركز متوازي الأضلاع.

مبرهنة (٩): إذا نصفت نقطة تلاقي قطري رباعي محدب القطرين فإن الرباعي متوازي أضلاع.

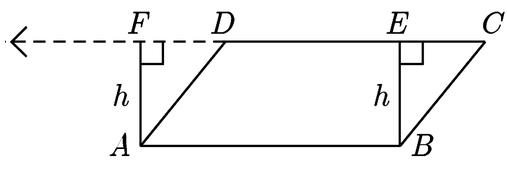
البرهان: لنفرض أن O نقطة تلاقي القطرين $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ في الرباعي المحدب $ABCD$ حيث $OA = OC$ و $OB = OD$. عندئذ،



$\triangle AOB \equiv \triangle COD$. ومن ذلك $\widehat{ABO} = \widehat{CDO}$ و $\widehat{DCO} = \widehat{OAB}$. أي أن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ وبالمثل $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. وبهذا فإن $ABCD$ متوازي أضلاع. $\square$

مساحة متوازي الأضلاع [Area of Parallelogram]

إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع فإن العمود النازل من أحد رؤوسه إلى الضلع (أو امتداد الضلع) المقابل للرأس يسمى ارتفاع (altitude) متوازي الأضلاع.



كل من $\overline{AF}$ و $\overline{BE}$ ارتفاع. في هذه الحالة، كل من $\overline{DC}$ و $\overline{AB}$ يسمى قاعدة.

مبرهنة (١٠): مساحة متوازي الأضلاع تساوي حاصل ضرب طول العمود وطول القاعدة النازل عليها.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ متوازي أضلاع وأن $\overline{EB}$ هو العمود النازل على القاعدة $\overline{DC}$ كما هو مبين في الشكل المرسوم قبل نص المبرهنة.

سنبرهن أن $[ABCD] = h \times DC$. من الشكل، نجد أن $\triangle BEC \equiv \triangle AFD$. من ذلك نجد أن $[ABCD] = [ABEF]$. الآن، برسم القطر $\overline{BF}$ نجد أن

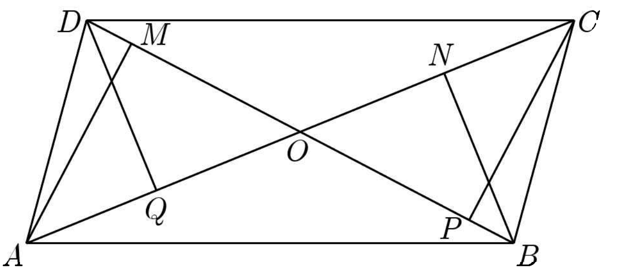
$\triangle ABF \equiv \triangle EFB$. وبهذا فإن $[ABF] = [EFB]$. ولكن

$$[ABF] = \frac{1}{2} \times h \times AB$$
$$[EFB] = \frac{1}{2} \times h \times EF = \frac{1}{2} \times h \times AB$$

لأن $AB = EF$. إذن،

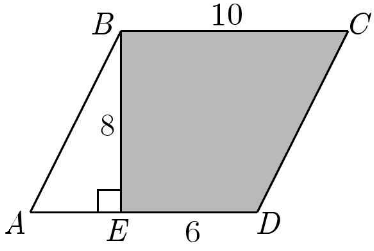
$$[ABCD] = [ABEF] = [ABF] + [EFB] = h \times AB \,. \qquad \square$$

مثال (١): في الشكل المرفق $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، $\overline{AM}$ و $\overline{CP}$ عموديان على $\overline{BD}$، بينما $\overline{DQ}$ و $\overline{BN}$ عموديان على $\overline{AC}$. أثبت أن $MNPQ$ متوازي أضلاع.



الحل: $\triangle MOA \equiv \triangle POC$ لأن كلاهما قائم الزاوية و $\widehat{MOA} = \widehat{POC}$ و $OA = OC$. من ذلك نجد أن $OM = OP$. وبالمثل، $\triangle ODQ \equiv \triangle OBN$. ومن ذلك نجد أن $OQ = ON$. إذن، O نقطة منتصف قطري الرباعي $MNPQ$، وبهذا فهو متوازي أضلاع. $\diamond$

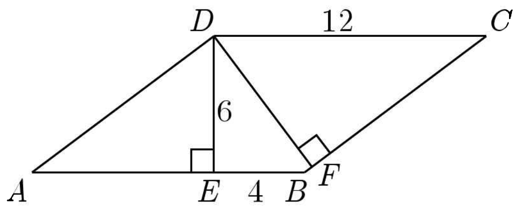
مثال (٢) [AJHSME 1989]: جد مساحة المنطقة المظللة $BEDC$ في متوازي الأضلاع $ABCD$.



الحل: بما أن $AD = 10$ فإن $AE = 10 - 6 = 4$. ويكون

$$[BEDC] = [ABCD] - [ABE] = 8 \times 10 - \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 64\,. \quad \diamond$$

مثال (٣) [AJHSME 1995]: في الشكل المرفق $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ و $\overline{DF} \perp \overline{BC}$. إذا كان $DC = 12$ ، $EB = 4$ ، $DE = 6$ فجد DF .



الحل: $[ABCD] = AB \times ED = DF \times BC = 12 \times 6 = 72$.

إذن، $DF \times BC = 72$. الآن، $\triangle AED$ قائم الزاوية. إذن،

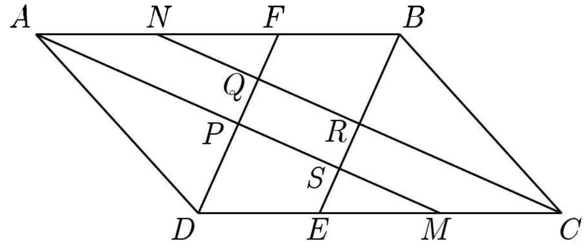
$$(AE)^2 + (ED)^2 = (AD)^2$$

$$(AD)^2 = 64 + 36 = 100$$

ولذا فإن $AD = BC = 10$. من ذلك يكون، $DF = \dfrac{72}{BC} = \dfrac{72}{10} = 7.2$. $\diamond$

مثال (٤) [Euclid 2000]: في الشكل المرفق، $ABCD$ متوازي أضلاع. نقاط تقاطع منصفات الزوايا هي رؤوس الرباعي $PQRS$. أثبت أن

. $\widehat{SPQ} = \widehat{PQR} = \widehat{QRS} = \widehat{RSP} = 90^\circ$



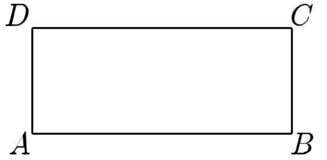
الحل: بما أن $\overline{DF}$ و $\overline{BE}$ منصفان للزاويتين $\widehat{ADC}$ و $\widehat{CBA}$ وأن $\widehat{ADC} = \widehat{CBA}$. إذن، $\widehat{ADF} = \widehat{CDF} = \widehat{ABE} = \widehat{CBE} = x^\circ$. وبالمثل، $\widehat{DAM} = \widehat{BAM} = \widehat{DCN} = \widehat{BCN} = y^\circ$. وبما أن $\widehat{CDF}$ و $\widehat{AFD}$ تبادليتان داخلياً فإن $\widehat{AFD} = \widehat{CDF} = x^\circ$. الآن، $2x + 2y = 180$. إذن، $x + y = 90$. وبهذا نجد في $\triangle PAF$ أن $\widehat{APF} = 90^\circ$. ومن ثم تكون $\widehat{SPQ} = 90^\circ$. وبطريقة مماثلة نجد أن $\widehat{PQR} = \widehat{QRS} = \widehat{RSP} = 90^\circ$. ◇

مثال (٥): جد PR في المثال (٤) إذا علمت أن $AB = 12$ و $BC = 8$.

الحل: بما أن $\overline{AM}$ منصف للزاوية $\widehat{DAB}$ فإن $\widehat{DAM} = \widehat{BAM} = y^\circ$. عندئذ، $\widehat{DMA} = y^\circ$ بالتبادل الداخلي. وبهذا فإن $\triangle ADM$ متساوي الساقين. وبالمثل، يمكن إثبات أن $\triangle CBN$ متساوي الساقين. وبهذا فإن $\triangle ADM \equiv \triangle CBN$. أيضاً، $\overline{AM} \parallel \overline{NC}$ بالتبادل الداخلي ومن ثم $\overline{AP} \parallel \overline{NR}$. وباستخدام المثلثات المتساوية الساقين (أو المتطابقة) نجد أن $AP = NR$. إذن، $APRN$ متوازي أضلاع. من ذلك نجد أن $AN = PR$. إذن، $AN = AB - NB = 12 - 8 = 4$. ◇

متوازيات أضلاع خاصة [Special Parallelograms]

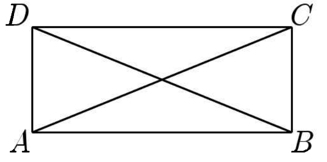
المستطيل [Rectangle]: هو متوازي أضلاع إحدى زواياه (ومن ثم جميع زواياه) قائمة. أي أن $ABCD$ مستطيل إذا وفقط إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\widehat{A} = 90^\circ$.



وبما أن المستطيل متوازي أضلاع فإنه يحقق جميع خواص متوازي الأضلاع. إضافة إلى ذلك فهو يحقق الخاصية التالية:

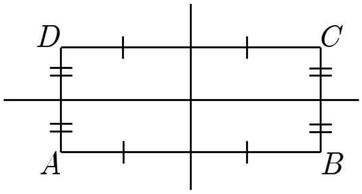
مبرهنة (١١): يكون متوازي الأضلاع مستطيلاً إذا وفقط إذا كان قطراه متساويين.

البرهان: لنفرض أن $ABCD$ مستطيل.



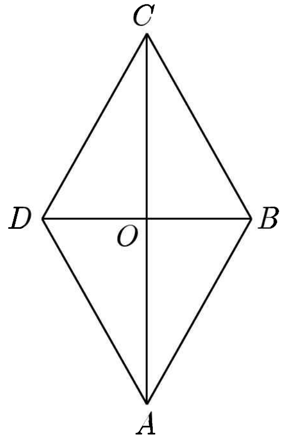
بما أن $AD = BC$، $AB = AB$ و $\widehat{A} = \widehat{B}$ فإن $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$. ومن ذلك نجد أن $AC = BD$. ولبرهان العكس، نفرض أن $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $AC = BD$. عندئذ، $AD = BC$، $AB = AB$، $BD = AC$. ومن ذلك يكون $\triangle CBA \equiv \triangle DAB$. إذن، $\widehat{DAB} = \widehat{CBD}$. وبما أنهما متكاملتان فإن كلاً منهما قائمة وبهذا يكون $ABCD$ مستطيلاً. □

للمستطيل محورا تناظر (axes of symmetry) هما المنصفان العموديان لأضلاع المستطيل.



بما أن ارتفاع المستطيل هو أحد أضلاعه فمساحة المستطيل هي حاصل ضرب ضلعين متعامدين من أضلاعه. عادة، يسمى الضلع الأطول بطول المستطيل والضلع الأقصر بعرض المستطيل. ولذا فإن مساحة المستطيل هي حاصل ضرب طوله في عرضه.

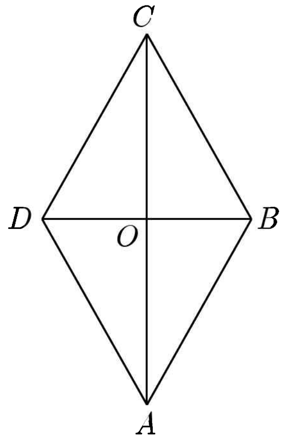
المعيَّن [Rhombus]: المعيَّن هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان ومن ثم فإن جميع أضلاعه متساوية. أي أن $ABCD$ معين إذا وفقط إذا كان $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ و $AB = BC = CD = DA$.



إضافة إلى خواص متوازي الأضلاع فإن المعيَّن يحقق بعض الخواص الأخرى.

مبرهنة (١٢): قطرا المعيَّن متعامدان وينصفان زوايا المعيَّن.

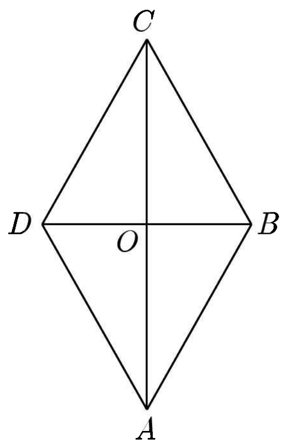
البرهان: لنفرض أن O هي نقطة تقاطع قطري المعيَّن $ABCD$.



بما أن O منتصف القطرين فإن $OB = OD$ و $OA = OC$ و $AB = AD$. من ذلك نجد أن $\triangle DOA \equiv \triangle BOA$. إذن، $\widehat{BAO} = \widehat{DAO}$. أي أن $\overline{AO}$ ينصف الزاوية $\widehat{BAD}$. إضافة إلى ذلك $\widehat{DOA} = \widehat{BOA}$. وبما أنهما متكاملتان فإن قياس كل منهما يساوي 90° . أي أن $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. □

مبرهنة (١٣): إذا تعامد قطرا متوازي أضلاع فإنه معين.

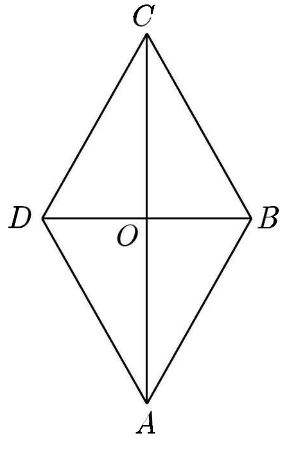
البرهان: لنفرض أن $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.



عندئذ، نقطة تقاطع القطرين O هي منتصف $\overline{BD}$. من ذلك نجد أن $\triangle BOA \equiv \triangle DOA$ لأن $OB = OD$ و $OA = OA$ وهما مثلثان قائما الزاوية. إذن، $AB = AD$ وبهذا يكون $ABCD$ معين. □

مبرهنة (١٤): إذا نصَّف قطر متوازي أضلاع أحد زواياه فهو معين.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$.



بما أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ فإن $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$. إذن، $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$. وبهذا فإن $\triangle ABC$ متساوي الساقين فيه $AB = BC$. وبهذا نجد أن $ABCD$ معين. □

للمعين محورا تناظر هما قطراه.

مبرهنة (١٥) [مساحة المعين]: إذا كان $ABCD$ معيناً فيه القطران $DB = d_1$ و $AC = d_2$ فإن $[ABCD] = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$.

البرهان: بما أن $\triangle ABC \equiv \triangle DBC$ فإن

$$[ABCD] = 2[DBC] = 2 \times \frac{1}{2} \times d_1 \times \left(\frac{1}{2} d_2\right) = \frac{1}{2} d_1 \times d_2 \,. \qquad \square$$

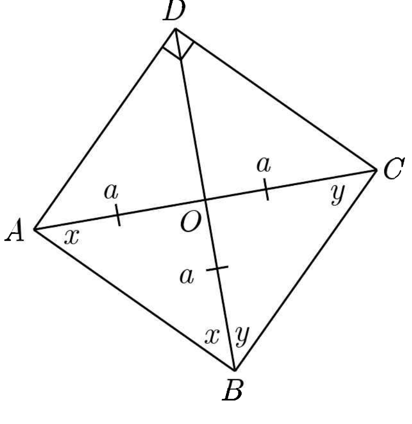
المربع [Square]: المربع هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان. أي أن $ABCD$ مربع إذا وفقط إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ، $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ، $\widehat{A} = 90^\circ$ ، $AB = BC$. لاحظ أن جميع الأضلاع متساوية وأن جميع الزوايا قائمة. من السهل أن نرى أن المربع هو معين زواياه قائمة. وبهذا فهو يتمتع بجميع خصائص المعين. للمربع أربعة محاور تناظر هي المنصفان العموديان للأضلاع والقطران. ومن الواضح أيضاً أن مساحة المربع تساوي مربع طول ضلعه.

مثال (٦): في الشكل المرفق، $ABCD$ رباعي محدب، O نقطة تقاطع القطرين، $AO = BO = CO$ و $\widehat{ADC} = 90^\circ$.

(أ) جد قياس $\widehat{ABC}$.

(ب) هل O منتصف القطعة $\overline{BD}$ ؟

(ج) هل $ABCD$ مربع ؟



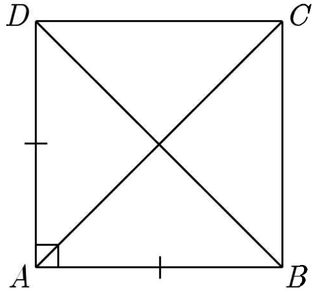
الحل:

(أ) بما أن $\triangle AOB$ و $\triangle BOC$ متساويا الساقين فإن $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = x^\circ$ وأن $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = y^\circ$. لنفرض أيضاً أن $OA = OB = OC = a$. الآن، في $\triangle ABC$ لدينا $2x + 2y = 180^\circ$. إذن، $\widehat{ABC} = x + y = 90^\circ$.

(ب) بما أن $\triangle ADC$ قائم الزاوية وأن $\overline{OD}$ ينصف $\overline{AC}$ فإن $OD = a$. وبهذا فإن O منتصف القطعة $\overline{BD}$.

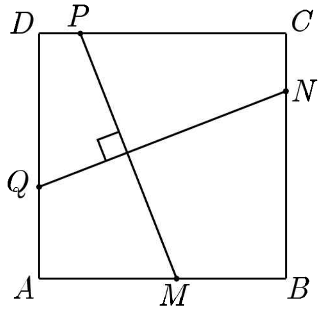
(ج) مما سبق نجد أن $ABCD$ رباعي مركزه ينصف قطريه ومن ثم فهو معين. وبما أن $\widehat{ADC} = 90^\circ$ فإنه مربع. ◇

مثال (٧): في الشكل المرفق، $ABCD$ رباعي محدب، فيه $AB = AD$، $\widehat{DAB} = 90^\circ$، $\triangle DAB \equiv \triangle BCD$. احسب قياس زوايا $ABCD$.

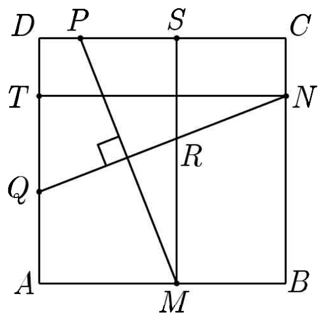


الحل: بما أن $\triangle DAB \equiv \triangle BCD$ فإن $\triangle BCD$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين. إذن، $ABCD$ مربع ومن ثم جميع زواياه قائمة. ◇

مثال (٨): في الشكل المرفق، $ABCD$ مربع، فيه $\overline{MP} \perp \overline{QN}$. أثبت أن $MP = QN$.

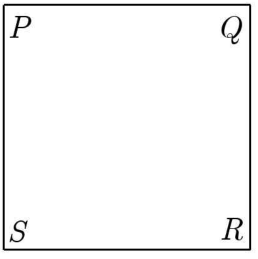


الحل: خذ S نقطة على $\overline{DC}$ و T نقطة على $\overline{AD}$ بحيث يكون $\overline{MS} \perp \overline{DC}$ و $\overline{NT} \perp \overline{DA}$ و R نقطة تقاطع $\overline{QN}$ و $\overline{MS}$.



بما أن $MS = NT$ و $\widehat{PMS} = 90° - \widehat{QRM} = 90° - \widehat{SRN} = \widehat{TNQ}$ فإن $\triangle SPM \equiv \triangle TQN$. وبهذا فإن $MP = QN$. ◇

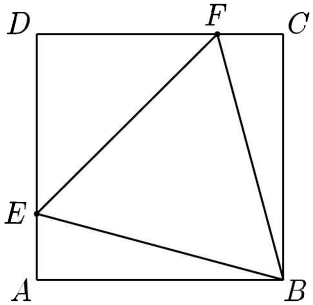
مثال (٩) [AJHSME 1998]: الشكل المرفق هو قطعة ورق مربعة $PQRS$. طابقنا الزاوية P على الزاوية R والزاوية Q على الزاوية S . مساحة الشكل الناتج تساوي 9 سم٢. جد محيط المربع $PQRS$.



الحل: الشكل الناتج هو مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين مساحته 9 سم٢. وبما أن المربع يطابق أربعة مثلثات من هذا النوع فمساحته

تساوي $36 = 9 \times 4$. إذن، طول ضلعه يساوي 6 سم ومحيطه يساوي $24 = 6 \times 4$ سم. ◇

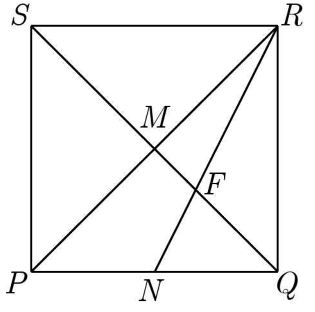
مثال (١٠) [AMC10A 2004]: في الشكل المرفق، $ABCD$ مربع حيث $\triangle BEF$ متساوي الأضلاع و $ED = DF$. ما نسبة مساحة $\triangle DEF$ إلى مساحة $\triangle ABE$ ؟



الحل: لنفرض أن $AB = a$ وأن $ED = DF = x$. باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن $x^2 + x^2 = (EF)^2 = (EB)^2 = a^2 + (a-x)^2$.
إذن، $x^2 = 2a(a-x)$. من ذلك يكون

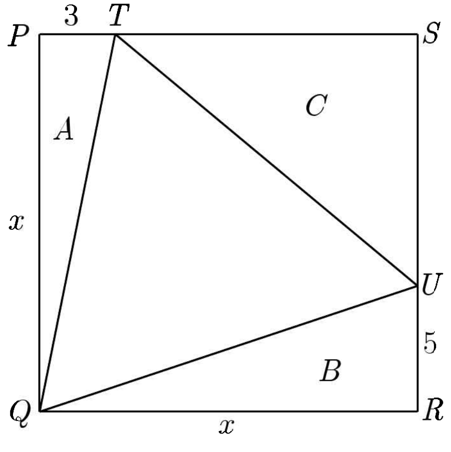
$$\frac{[DFE]}{[ABE]} = \frac{\frac{1}{2} \times x \times x}{\frac{1}{2} \times a \times (a-x)} = \frac{x^2}{a(a-x)} = \frac{2a(a-x)}{a(a-x)} = 2\,. \quad \diamond$$

مثال (١١) [Aust.MC 2000]: في الشكل المرفق، $PQRS$ مربع، M نقطة تقاطع القطرين، N منتصف PQ و F نقطة تقاطع $\overline{NR}$ و $\overline{QS}$. إذا كانت مساحة المثلث $\triangle MFR$ تساوي 1 وحدة مربعة فما مساحة المربع ؟



الحل: ارسم $\overline{PF}$. بما أن $\triangle PFM \equiv \triangle RFM$ وأن $[RMF] = 1$ فإن $[PFM] = 1$. نفرض الآن أن $[QFN] = [PFN] = x$. عندئذ، بما أن $[RPN] = [RQN]$ فإن $x + [RFQ] = x + 2$. أي أن $[RFQ] = 2$. وبهذا تكون $[RMQ] = 3$. إذن $[PQRS] = 4 \times 3 = 12$. ◇

مثال (١٢) [Euclid 2000]: طول ضلع المربع $PQRS$ المبين في الشكل يساوي x. قسمنا المربع إلى أربعة مثلثات كما هو مبين في الشكل حيث مجموع مساحتي المنطقتين A وَ B يساوي مساحة المنطقة C. إذا كان $PT = 3$ وَ $RU = 5$ فما قيمة x ؟



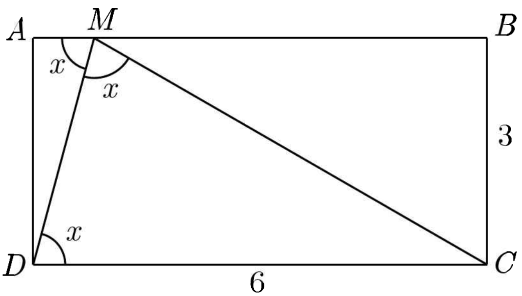
الحل: $TS = x - 3$ وَ $US = x - 5$.

الآن، $[\text{A}] = \frac{1}{2} \times 3 \times x$ ، $[B] = \frac{1}{2} \times 5 \times x$ ، $[C] = \frac{1}{2}(x-5)(x-3)$.
بما أن $[A] + [B] = [\text{C}]$ فإن

$$\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x = \frac{1}{2}(x-5)(x-3)$$
$$x^2 - 16x + 15 = 0$$
$$(x-15)(x-1) = 0$$

إذن، $x = 1$ أو $x = 15$. وبما أن $x \neq 1$ فإن $x = 15$. ◇

مثال (١٣) [AMC10B 2011]: في الشكل المرفق، $ABCD$ مستطيل فيه $AB = 6$ وَ $BC = 3$. اخترنا النقطة M على AB حيث $\widehat{AMD} = \widehat{CMD}$. ما قياس الزاوية $\widehat{AMD}$ ؟



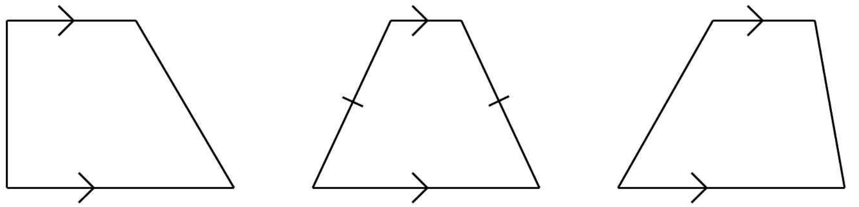
الحل: نفرض أن $\widehat{AMD} = x$. عندئذ، $\widehat{CDM} = x$ بالتبادل الداخلي. وبهذا فإن $\triangle CMD$ متساوي الساقين فيه $MC = DC = 6$. الآن، $\triangle MCB$ فيه، $BC = 3$ وَ $MC = 6$ وَ $\widehat{B} = 90°$. إذن، $\triangle MCB$ مثلث $30° - 60° - 90°$ حيث $\widehat{BMC} = 30°$ وَ $\widehat{BCM} = 60°$. وأخيراً، في $\triangle DMC$ لدينا

$$x + x + 30° = 180°$$
$$x = 75°.$$

◇

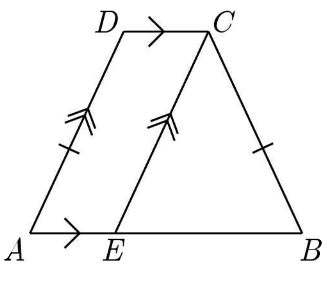
أشباه المنحرفات [Trapezoids]

شبه المنحرف هو رباعي فيه ضلعان متوازيان وضلعان غير متوازيين. يسمى كل من الضلعين المتوازيين قاعدة شبه المنحرف ويسمى كل من الضلعين غير المتوازيين ساق شبه المنحرف. إذا كان أحد الساقين عمودياً على القاعدتين فنقول إن شبه المنحرف قائم وإذا كان الساقان متطابقين فنقول إن شبه المنحرف متساوي الساقين.



مبرهنة (١٦): في شبه المنحرف المتساوي الساقين تتساوى زاويتا القاعدة.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ شبه منحرف حيث $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ و $AD = BC$.

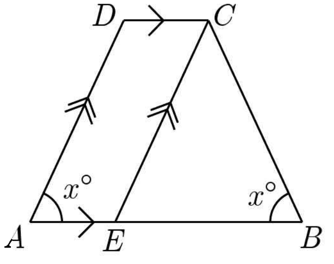


لنفرض أن E نقطة تقاطع القاعدة $\overline{AB}$ مع المستقيم المار بالنقطة C ويوازي $\overline{AD}$. عندئذ، $AECD$ متوازي أضلاع. من ذلك نجد أن $AD = EC$. إذن، $BC = EC$ ويكون $\triangle ECB$ متساوي الساقين. إذن، $\widehat{CEB} = \widehat{CBE}$. وبما أن $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$ فإن $\widehat{CEB} = \widehat{DAB}$. ومن ذلك نجد أن $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$. إضافة إلى ذلك $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$، وبهذا فإن $\widehat{DAB}$ و $\widehat{ADC}$ متكاملتان ومن ثم فإن $\widehat{CBA}$

و $\widehat{DCB}$ متكاملتان. إذن، $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$. □

مبرهنة (١٧): إذا تطابقت زاويتا إحدى قاعدتي شبه منحرف فإن شبه المنحرف متساوي الساقين.

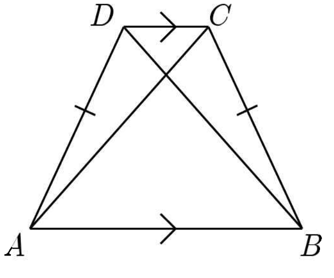
البرهان: نفرض أن $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$ والنقطة E كما في المبرهنة (١٦).



بما أن $\overline{EC} \parallel \overline{AD}$ فإن $\widehat{CEB} = x$. وبهذا فالمثلث $\triangle CEB$ متساوي الساقين فيه $EC = BC$. ولكن $EC = AD$. من ذلك نجد أن $AD = BC$ ويكون $ABCD$ متساوي الساقين. □

مبرهنة (١٨): قطرا شبه المنحرف المتساوي الساقين متطابقان.

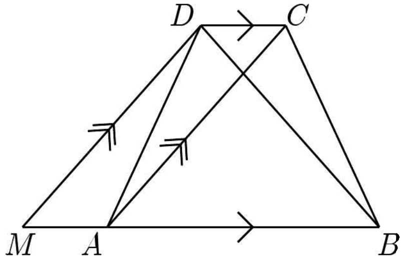
البرهان: نفرض أن $AD = BC$ في شبه المنحرف $ABCD$.



استناداً إلى المبرهنة (١٦) لدينا $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$ ومن ثم فإن $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$.
من ذلك نجد أن $AC = BD$. □

مبرهنة (١٩): إذا تطابق قطرا شبه المنحرف فإنه متساوي الساقين.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $AC = BD$. لتكن M نقطة تقاطع امتداد $\overline{AB}$ والمستقيم المرسوم من D موازياً للقطر $\overline{AC}$ كما هو مبين في الشكل.

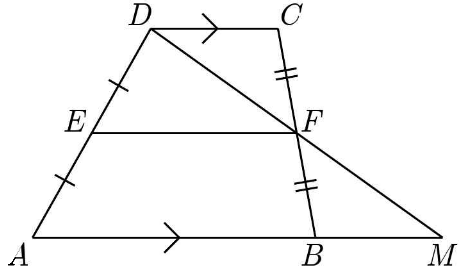


بما أن $MACD$ متوازي أضلاع فإن $MD = AC$ ومن ثم فإن $MD = DB$ ويكون $\triangle MDB$ متساوي الساقين. ومن ذلك فإن $\widehat{DMB} = \widehat{DBM}$. ولكن $\widehat{DMB} = \widehat{CAB}$ إذن $\widehat{DBA} = \widehat{CAB}$. الآن، $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$ لأن $AB = AB$ و $DB = AC$ و $\widehat{DBA} = \widehat{CAB}$. إذن، $DA = CB$ ويكون شبه المنحرف $ABCD$ متساوي الساقين. □

تسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ساقي شبه المنحرف بالمستقيم الوسطي (midline).

مبرهنة (٢٠): المستقيم الوسطي في شبه المنحرف يوازي القاعدتين وطوله يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ شبه منحرف حيث $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و E و F منتصفا $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ على التوالي. لنفرض أن M نقطة تقاطع DF مع امتداد AB كما هو مبين في الشكل.

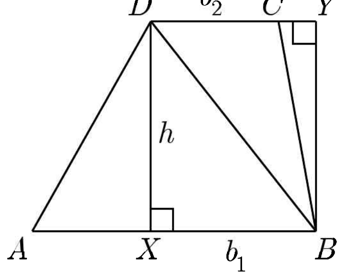


الآن، $\triangle DCF \equiv \triangle MBF$ لأن $\widehat{DCF} = \widehat{MBF}$ و $CF = FB$ و $\widehat{DFC} = \widehat{MFB}$. إذن، $DF = FM$ و $DC = BM$. عندئذ، $\overline{EF}$ واصل بين منتصفي ضلعي المثلث $\triangle DAM$ ومن ثم فهو يوازي $\overline{AB}$. أيضاً،

$$EF = \frac{AM}{2} = \frac{AB + BM}{2} = \frac{AB + DC}{2}. \qquad \square$$

مبرهنة (٢١) [مساحة شبه المنحرف]: مساحة شبه المنحرف تساوي حاصل ضرب نصف مجموع طولي قاعدتيه في طول ارتفاعه.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ شبه منحرف حيث $AB = b_1$ و $CD = b_2$ وارتفاعه h. ليكن $\overline{BY}$ العمود النازل من B على امتداد $\overline{DC}$ كما هو مبين في الشكل.

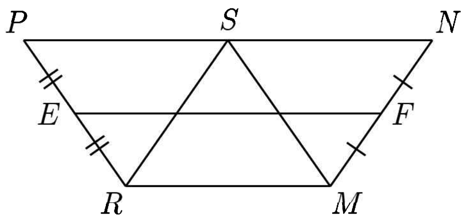


الآن،

$$
\begin{aligned}
[ABCD] &= [ABD] + [DBC] \\
&= \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h \\
&= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)
\end{aligned}
$$

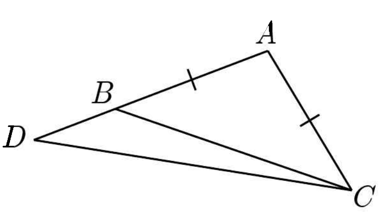
لأن المثلثين $\triangle ABD$ و $\triangle DBC$ لهما طول الارتفاع نفسه وهو h. □

مثال (١٤): في الشكل المرفق، $MNPR$ شبه منحرف فيه $\overline{MR} \parallel \overline{NP}$ و $MN = RP$، $MR = 6$. $\overline{MS} \parallel \overline{PR}$، $\overline{RS} \parallel \overline{MN}$. احسب طول المستقيم الوسطي EF.

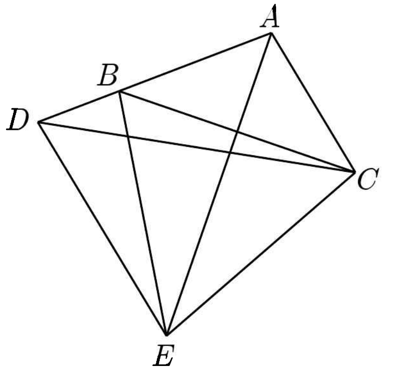


الحل: لاحظ أن كلاً من $PSMR$ و $SNMR$ متوازي أضلاع. إذن، $PS = SN = 6$. وبهذا فإن $EF = \frac{RM + PN}{2} = \frac{6+12}{2} = 9$. ◇

مثال (١٥): في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ متساوي الساقين حيث $AB = AC$ و $\widehat{A} = 100^\circ$. $AD = BC$. احسب قياس $\widehat{ADC}$.

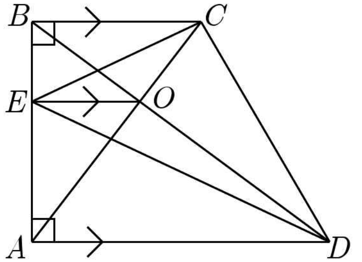


الحل: ارسم $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ بحيث يكون $ADEC$ شبه منحرف متساوي الساقين كما هو مبين في الشكل.



بما أن $AD = BC$ وأن $AD = EC$ فإن $\triangle BCE$ متساوي الساقين. ولكن $\widehat{BCE} = 100 - 40 = 60^\circ$. إذن، $\triangle BCE$ متساوي الأضلاع و $EC = EB$. إذن، $\triangle ABE \equiv \triangle ACE$ ($\overline{EA}$ منصف $\widehat{BEC}$). من ذلك نجد أن $\widehat{AEC} = 30^\circ$. وبهذا فإن $\widehat{ADC} = 30^\circ$. ◇

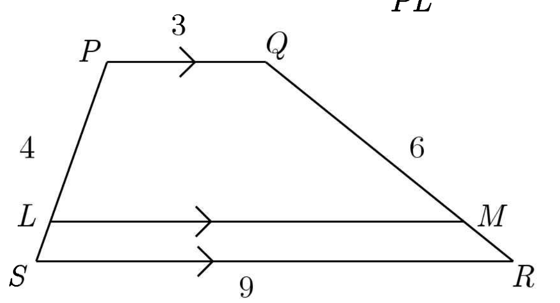
مثال (١٦): $ABCD$ شبه منحرف قائم حيث $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ ، O نقطة تقاطع القطرين، $\overline{EO} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$. أثبت أن $\overline{EO}$ ينصف $\widehat{CED}$.



الحل: بما أن $\triangle AOD \sim \triangle COB$ فإن $\frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC}$. وبما أن $EO \parallel BC$ فإن $\frac{AE}{EB} = \frac{AO}{OC}$. إذن، $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{BC}$. وبما أن $\widehat{DAE} = \widehat{CBE}$ فإن $\triangle DEA \sim \triangle CEB$. من ذلك نرى أن $\widehat{DEA} = \widehat{CEB}$ وأن متممتيهما أيضاً

متطابقتان. إذن، $\widehat{DEO} = \widehat{CEO}$. وبهذا يكون $\overline{EO}$ منصفاً للزاوية $\widehat{CED}$. ◇

مثال (١٧) [Aust.MC 2000]: $PQRS$ شبه منحرف طولا ضلعيه المتوازيين هما 3 سم و 9 سم وطولا ساقيه 4 سم و 6 سم كما هو مبين. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR} \parallel \overline{LM}$. محيط شبه المنحرف $LMRS$ يساوي محيط شبه المنحرف $LMQP$. ما قيمة النسبة $\frac{LS}{PL}$ ؟



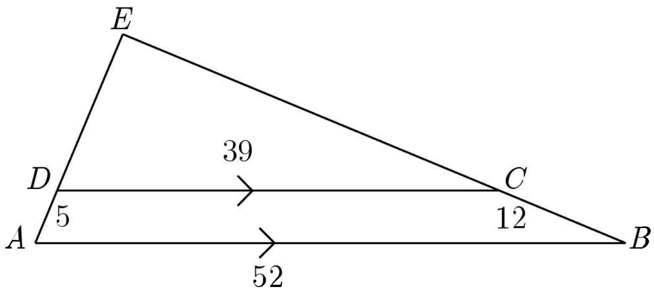
الحل: لنفرض أن $LS = 2x$. الآن، $\frac{MR}{QR} = \frac{LS}{PS}$. أي أن $\frac{MR}{6} = \frac{2x}{4}$. ومن ذلك نجد أن $MR = 3x$. بما أن محيطي $LMRS$ و $LMQP$ متساويان فإن

$$6 - 3x + 3 + 4 - 2x + LM = 2x + 9 + 3x + LM .$$

أي أن $x = 0.4$. إذن، $\frac{LS}{PL} = \frac{0.8}{4 - 0.8} = \frac{0.8}{3.2} = \frac{1}{4}$. ◇

مثال (١٨) [AMC10A 2002]: $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$، فيه $AB = 52$ ، $BC = 12$ ، $CD = 39$ ، $DA = 5$. احسب مساحة $ABCD$.

الحل: افرض أن E نقطة تلاقي امتدادي $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$



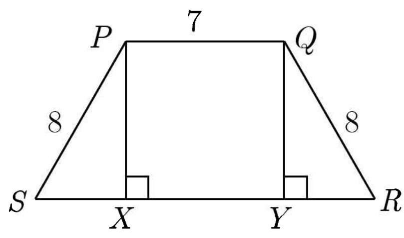
بما أن $AB \parallel CD$ فإن $\triangle AEB \sim \triangle DEC$. من ذلك نجد أن $\frac{3}{4} = \frac{39}{52} = \frac{CE}{CE+12}$. إذن، $CE = 36$. أيضاً، $\frac{3}{4} = \frac{DE}{DE+5}$. وبهذا فإن $DE = 15$. الآن، أطوال أضلاع المثلث $\triangle CDE$ هي $15, 36, 39$. وبما أن $15^2 + 36^2 = 39^2$ فإن $\triangle CDE$ قائم الزاوية عند $\widehat{E}$. إذن،

$$\begin{aligned}[ABCD] &= [ABE] - [CDE] \\ &= \frac{1}{2} \times 48 \times 20 - \frac{1}{2} \times 36 \times 15 = 210\end{aligned}$$

◇

مثال (١٩) [Euclid 2012]: $PQRS$ شبه منحرف قاعدتاه $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$. إذا كان $PQ = 7$ ، $QR = PS = 8$ ، $SR = 15$ فما طول القطر $\overline{PR}$ ؟

الحل: ارسم عمودين من P و Q إلى القاعدة $\overline{SR}$ كما هو مبين في الشكل.



الآن، $PQYX$ مستطيل، وبهذا فإن $XY = PQ = 7$ و $PX = QY$. من الواضح أن $\triangle QYR \equiv \triangle PXS$. من ذلك نجد أن $SX = YR$. الآن،

$$SX + XY + YR = SR$$
$$2SX + 7 = 15$$
$$SX = 4$$

استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

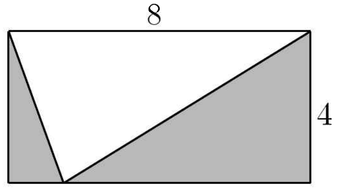
$$(PX)^2 = (PS)^2 - (SX)^2 = 64 - 16 = 48 .$$

بما أن $\overline{PR}$ هو وتر المثلث القائم الزاوية $\triangle PXR$ فإن

$$PR = \sqrt{(PX)^2 + (XR)^2} = \sqrt{48 + 121} = 13 .$$ ◇

مسائل محلولة

(١) [Gauss 2012] طول المستطيل المرفق يساوي 8 وعرضه يساوي 4. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

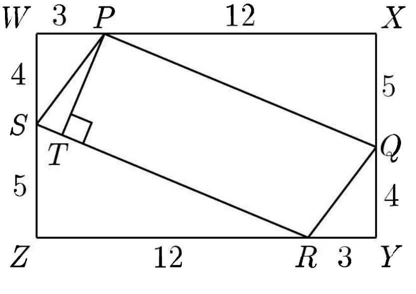


(أ) 16 (ب) 24 (ج) 30 (د) 32

الحل: الإجابة هي (أ): المنطقة غير المظللة هي مثلث مساحته تساوي $\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$، مساحة المستطيل هي $32 = 4 \times 8$. إذن، مساحة المنطقة المظللة هي $32 - 16 = 16$.

(٢) [Gauss 2012] رسمنا متوازي أضلاع $PQRS$ داخل المستطيل $WXYZ$ كما هو مبين في الشكل المرفق. إذا كان $\overline{SR} \perp \overline{PT}$ فما طول ST ؟

(أ) $\frac{12}{13}$ (ب) $\frac{13}{12}$ (ج) $\frac{16}{13}$ (د) $\frac{13}{5}$



الحل: الإجابة هي (ج): استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لكل من المثلثين $\triangle PWS$ و

$\triangle SZR$ نجد أن

$$PS = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$SR = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

مساحة المثلث $\triangle PWS$ هي $[PWS] = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

مساحة المثلث $\triangle RYQ$ هي $[RYQ] = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

مساحة المثلث $\triangle SZR$ هي $[SZR] = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$

مساحة المثلث $\triangle QXP$ هي $[QXP] = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$

من ذلك نجد أن مساحة متوازي الأضلاع $SPQR$ هي

$$[SPQR] = 15 \times 9 - \left(6 + 6 + 30 + 30\right) = 63$$

ولكن

$$[SPQR] = PT \times SR$$
$$63 = PT \times 13$$

إذن، $PT = \frac{63}{13}$. وبهذا نجد استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle PST$ أن

$$ST = \sqrt{5^2 - \left(\frac{63}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{169}} = \frac{16}{13}.$$

(٣) [Aust.MC 1984] أي من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون عدد أقطار مضلع محدب ؟

(أ) 5 (ب) 9 (ج) 27 (د) 45

الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن عدد أضلاع المضلع هو n. كل رأس من رؤوس

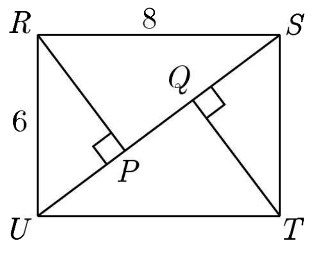
المضلع يقع عليه $n-3$ قطراً (القطع المستقيمة من الرأس إلى جميع الرؤوس الأخرى ما عدا الرأسين المجاورين هي أقطار في المضلع). إذن، عدد أقطار المضلع يساوي $\frac{n(n-3)}{2}$ وبتجريب الأعداد نجد أن

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
عدد الأقطار	2	5	9	14	20	27	35	44	54

إذن، العدد 45 لا يمكن أن يكون عدد أقطار لمضلع محدب.

(٤) [Aust.MC 1980] في المستطيل $RSTU$ المرفق، $RS = 8$ ، $RU = 6$ ، كل من $\overline{RP}$ و $\overline{QT}$ عمودي على $\overline{SU}$ ، $UP = QS$. PQ يساوي:

(أ) 1.5 (ب) 2.8 (ج) 3.6 (د) 6.4



الحل: الإجابة هي (ب): نفرض أن $QS = UP = x$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $US = 10$ إذن، $PQ = 10 - 2x$. الآن، $\Delta UPR \sim \Delta URS$. من ذلك نجد أن $\frac{UR}{US} = \frac{UP}{UR}$. أي أن $\frac{6}{10} = \frac{x}{6}$. وبهذا فإن $x = 3.6$ ويكون $PQ = 10 - 2\times 3.6 = 2.8$.

حل آخر: استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لدينا $PR^2 = UR^2 - UP^2 = 36 - x^2$ و $RS^2 = RP^2 + PS^2$. أي أن

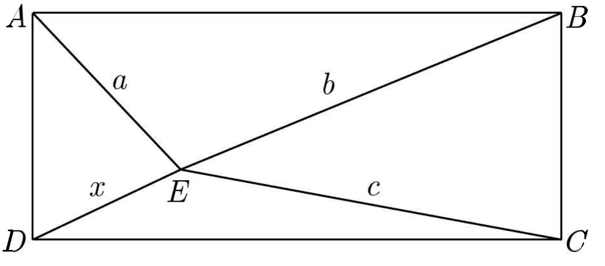
$$64 = \left(36 - x^2\right) + (10 - x)^2 = 36 - x^2 + 100 - 20x + x^2 .$$

من ذلك نجد أن $x = 3.6$ ويكون $PQ = 10 - 2 \times 3.6 = 2.8$.

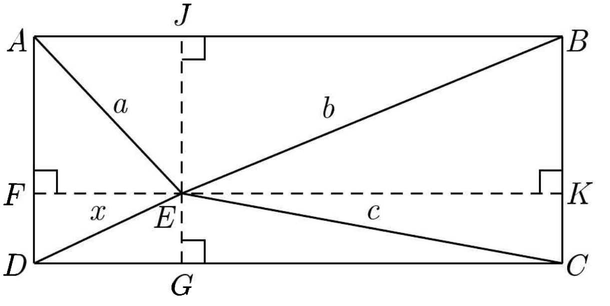
(٥) [Aust.MC 1979] في المستطيل $ABCD$ المرفق، E نقطة داخل المستطيل، $AE = a$ ، $BE = b$ ، $CE = c$ ، $DE = x$. عندئذ:

(أ) $x = a - b + c$ (ب) $x = b + c - a$

(ج) $x^2 = a^2 - b^2 + c^2$ (د) $x^2 = a^2 + b^2 - c^2$



الحل: الإجابة هي (ج): ارسم النقاط F ، G ، J ، K كما هو مبين.



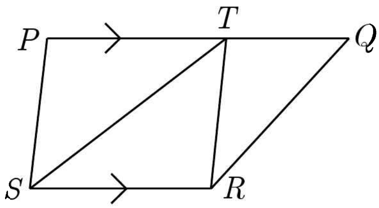
عندئذ، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لدينا

$$\begin{aligned} x^2 + b^2 &= (DG^2 + GE^2) + (EK^2 + KB^2) \\ &= FE^2 + GE^2 + GC^2 + AF^2 \\ &= (FE^2 + AF^2) + (GE^2 + GC^2) \\ &= a^2 + c^2 \end{aligned}$$

إذن، $x^2 = a^2 + c^2 - b^2$.

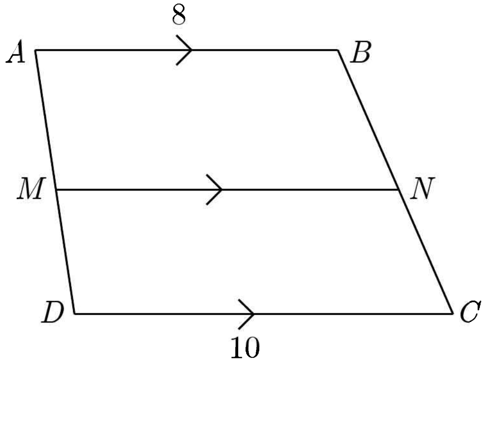
(٦) [Aust.MC 1981] في الشكل المرفق، $PQRS$ شبه منحرف فيه $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$، $PQ = 20$ سم، $SR = 12$ سم ومساحة المثلث $\triangle RST$ تساوي 60 سم^{٢}. ما مساحة شبه المنحرف $PQRS$ بالسنتمترات المربعة ؟

(أ) 160 (ب) 170 (ج) 180 (د) 320



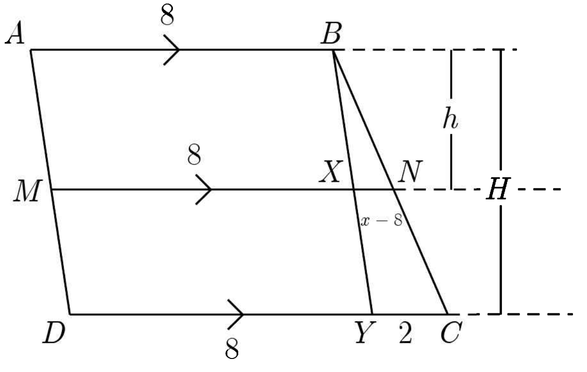
الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن h هو ارتفاع شبه المنحرف $PQRS$. عندئذ، h هو ارتفاع المثلث $\triangle RST$. من ذلك نجد أن $\frac{1}{2} \times 12 \times h = 60$. أي أن $h = 10$. إذن، $[PQRS] = \frac{1}{2}(20+12) \times 10 = 160$.

(٧) [Aust.MC 1979] في الشكل المرفق، $ABCD$ شبه منحرف، $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$. $\overline{MN}$ يقسم مساحة شبه المنحرف $ABCD$ إلى نصفين متساويين. إذا كان $AB = 8$ و $DC = 10$ فما طول MN ؟



(أ) $\sqrt{80}$ (ب) 9 (ج) $\sqrt{82}$ (د) 10

الحل: الإجابة هي (ج): أنشئ $\overline{BY} \parallel \overline{AD}$ وافرض أن ارتفاع $\triangle BXN$ يساوي h وأن ارتفاع $\triangle BYC$ يساوي H وافرض أن $MN = x$ كما هو مبين في الشكل أدناه.



بما أن $\triangle BYC \sim \triangle BXN$ فإن $\frac{h}{H} = \frac{x-8}{2}$. أي أن $h = \frac{x-8}{2} \times H$. وبما أن $[ABCD] = 2[ABNM]$ فإن

$$\frac{2(x+8)}{2} \times h = \frac{(8+10)}{2} \times H$$

$$(x+8)\frac{(x-8)}{2} \times H = 9 \times H$$

$$x^2 - 64 = 18$$

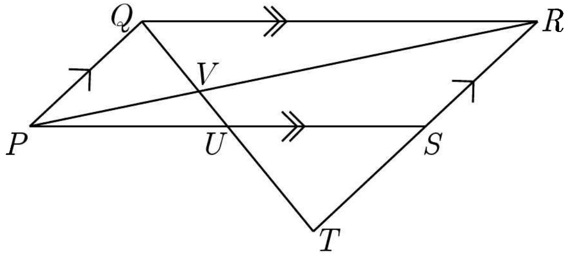
$$x^2 = 82$$

$$x = \sqrt{82}$$

(٨) [Aust.MC 1980] $PQRS$ متوازي أضلاع. V، U، T نقاط تقاطع $\overline{QT}$ مع $\overline{PR}$، $\overline{PS}$، $\overline{RS}$ على التوالي كما هو مبين في الشكل المرفق. إذا

كان $QU = 3$ و $QT = 6$ فإن QV يساوي ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 2.5 (د) 3



الحل: الإجابة هي (ب): بما أن $\triangle TQR \sim \triangle TUS$ فإن

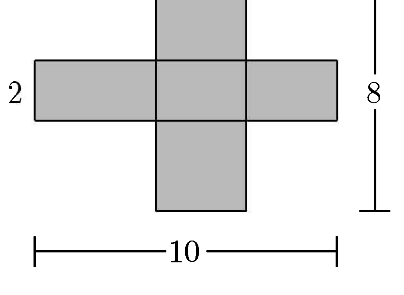
$$\frac{TS}{TR} = \frac{TU}{TQ} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

وبما أن $\triangle TRV \sim \triangle QPV$ فإن

$$\frac{QV}{TV} = \frac{QP}{TR} = \frac{TS}{TR} = \frac{1}{2}$$

إذن، $TS = \frac{1}{2}TR$. وبهذا فإن $QP = RS = TS$ ويكون $QV = \frac{1}{3}QT = 2$.

(٩) [AJHSME 1988] الشكل المظلل المرفق هو تقاطع مستطيلين متعامدين. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

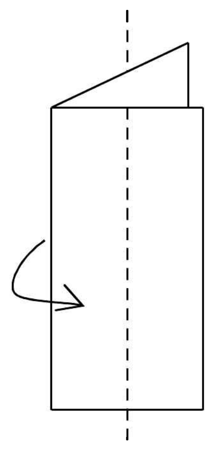


(أ) 23 (ب) 38 (ج) 44 (د) 46

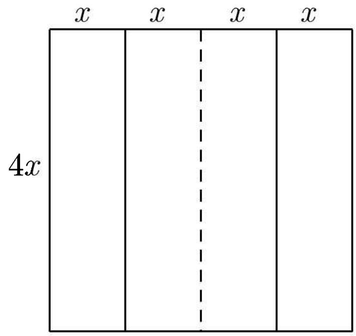
الحل: الإجابة هي (ب): المنطقة المظللة هي اتحاد مستطيلين مشتركين في مستطيل صغير. وبهذا فمساحة المنطقة هي $38 = 3 \times 2 - 8 \times 3 + 10 \times 2$.

(١٠) [AJHSME 1989] طوينا قطعة ورق مربعة الشكل من منتصفها عمودياً، بعد ذلك قطعنا الورقة المطوية إلى نصفين من الخط المنقط كما هو مبين في الشكل. ينشأ عن هذه العملية ثلاثة مستطيلات، أحدهما كبير واثنان صغيران. ما النسبة بين محيط أحد المستطيلين الصغيرين إلى محيط المستطيل الكبير ؟

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{5}{6}$



الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أن المستطيلات التي سنحصل عليها هي الثلاثة مستطيلات المبينة في الشكل أدناه.



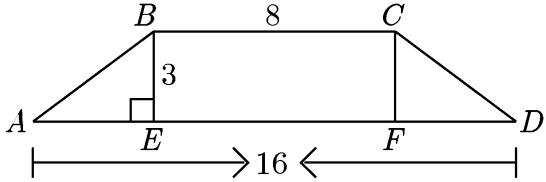
محيط أحد المستطيلين الصغيرين هو $2(x+4x)=10x$.

محيط المستطيل الكبير هو $2(2x+4x)=12x$.

إذن، النسبة بين المحيطين هي $\frac{10x}{12x}=\frac{5}{6}$.

(١١) [AMC8 1999] في شبه المنحرف $ABCD$ المرفق، $AB=CD$. محيط شبه المنحرف $ABCD$ يساوي:

(أ) 30 (ب) 32 (ج) 34 (د) 48



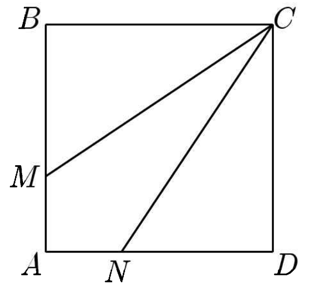
الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن $AE=FD=4$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لدينا

$$AB=CD=\sqrt{3^2+4^2}=5 .$$

إذن، محيط شبه المنحرف $ABCD$ هو $16+8+5+5=34$.

(١٢) [AMC8 1999] طول ضلع المربع $ABCD$ المرفق يساوي 3، القطعتان

$\overline{CM}$ و $\overline{CN}$ تقسمان المربع إلى ثلاث مناطق متساوية المساحة. ما طول CM ؟

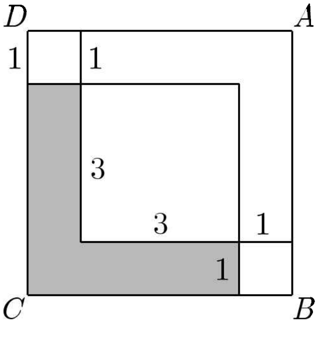


(أ) $\sqrt{12}$ (ب) $\sqrt{13}$ (ج) $\sqrt{14}$ (د) $\sqrt{15}$

الحل: الإجابة هي (ب): مساحة المربع تساوي $9 = 3 \times 3$. ولذا فإن مساحة كل من المناطق الثلاث تساوي $3 = 3 \div 9$. الآن، مساحة $\triangle CBM$ هي $\frac{1}{2} \times BC \times BM$. إذن، $3 = \frac{1}{2} \times 3 \times BM$. وبهذا فإن $BM = 2$. الآن، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $CM = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

(١٣) [AMC8 2000] رسمنا داخل المربع $ABCD$ ثلاثة مربعات كما هو مبين في الشكل. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

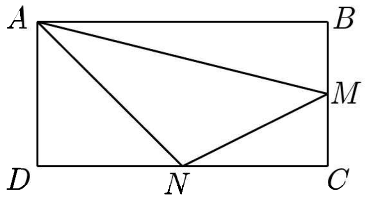
(أ) 7 (ب) 10 (ج) 14 (د) 15



الحل: الإجابة هي (أ): طول ضلع المربع $ABCD$ يساوي $5 = 1 + 3 + 1$.
إذن، مساحته تساوي 25. مساحة الثلاثة مربعات الداخلية هي $11 = 9 + 1 + 1$.
إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي $7 = \frac{1}{2} \times 14 = \frac{1}{2}(25 - 11)$.

(١٤) [AMC8 2000] مساحة المستطيل $ABCD$ المبين في الشكل المرفق تساوي 72. مساحة المثلث $\triangle AMN$ حيث M وَ N نقطتا منتصفا القطعتين $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ تساوي:

(أ) 21 (ب) 27 (ج) 30 (د) 36



الحل: الإجابة هي (ب): ليكن $AB = 2y$، $BC = 2x$. عندئذ
$[ABM] = xy$ و $[MNC] = \frac{1}{2}xy$ و $[ADN] = xy$. فنحصل على

$$[AMN] = 4xy - xy - xy - \frac{1}{2}xy = \frac{3}{2}xy$$

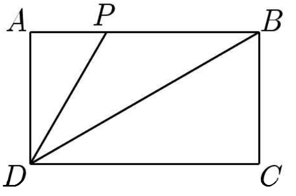
لكن

$$[ABCD] = 72 = (2x)(2y)$$

ومنه $xy = 18$ وبالتالي $[AMN] = \frac{3}{2} \cdot 18 = 27$.

(١٥) [AMC10 2000] في المستطيل $ABCD$ المرفق، $AD = 1$، P نقطة على $\overline{AB}$. $\overline{DB}$ و $\overline{DP}$ يثلثان الزاوية $\widehat{ADC}$. ما محيط المثلث $\triangle BDP$ ؟

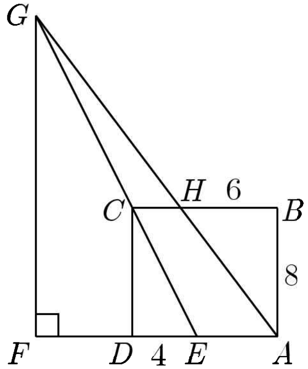
(أ) $2+\frac{4\sqrt{3}}{2}$ (ب) $2+2\sqrt{2}$ (ج) $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ (د) $2+\frac{5\sqrt{3}}{3}$



الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $\widehat{ADP}=\widehat{PDB}=\widehat{BDC}=30^\circ$ فإن $PD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ وإن $DB=2$. إذن، $DC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. كما أن $AP=\frac{\sqrt{3}}{3}$. إذن، $PB=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. وبهذا فإن محيط المثلث $\triangle BDP$ يساوي

$$2+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=2+\frac{4\sqrt{3}}{2}.$$

(١٦) [AMC10A 2003] في المستطيل $ABCD$ المبين في الشكل، $AB=8$، $BC=9$، H نقطة على $\overline{BC}$ حيث $BH=6$، E نقطة على $\overline{AD}$ حيث $DE=4$، يتقاطع المستقيمان EC و AH في النقطة G، F نقطة على المستقيم AD حيث $\overline{GF}\perp\overline{AF}$. ما طول GF ؟



(أ) 30 (ب) 28 (ج) 24 (د) 20

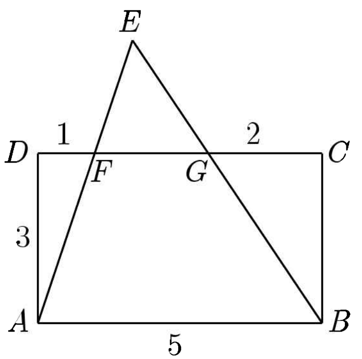
الحل: الإجابة هي (د): لدينا $\widehat{AHB} = \widehat{GHC}$ بالتقابل بالرأس. كما أن $\widehat{F} = \widehat{B} = 90^\circ$ وأن $\widehat{BHA} = \widehat{HAD}$ لأنهما تبادليتان داخلياً. إذن، $\triangle GFA \sim \triangle ABH$. أيضاً $\triangle GCH \sim \triangle GEA$، كما أن $EA = 5$ وأن $CH = 3$. الآن،

$$\frac{GH}{GA} = \frac{CH}{EA} = \frac{3}{5}$$

ولذا فإن $\frac{HA}{GA} = \frac{2}{5}$. ولكن $HA = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. إذن، $GA = 10 \times \frac{5}{2} = 25$. ولكن $\frac{GF}{AB} = \frac{GA}{AH}$. أي أن $\frac{GF}{8} = \frac{25}{10}$. وبهذا فإن $GF = \frac{25 \times 8}{10} = 20$.

(١٧) [AMC10B 2003] في المستطيل $ABCD$ المرفق، $AB = 5$ ، $BC = 3$. F و G نقطتان على $\overline{CD}$ حيث $DF = 1$ و $GC = 2$. E نقطة تقاطع المستقيمين AF و BG. ما مساحة المثلث $\triangle AEB$ ؟

(أ) 10 (ب) $\frac{21}{2}$ (ج) 12 (د) $\frac{25}{2}$



الحل: الإجابة هي (د): بما أن $AB \parallel FG$ فإن $\triangle EAB \sim \triangle EFG$. من ذلك نرى أن

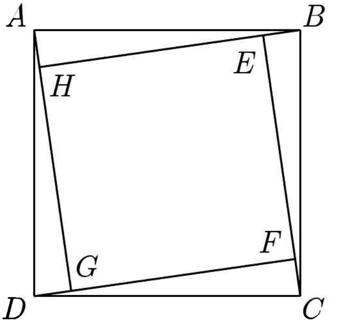
$$\frac{EF}{EA} = \frac{EG}{EB} = \frac{FG}{AB} = \frac{2}{5}$$

لنفرض أن h هو ارتفاع المثلث $\triangle EAB$. عندئذ، من التناسب نجد أن $\frac{h-3}{h} = \frac{2}{5}$. وبهذا فإن $h = 5$. إذن،

$$[EAB] = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$

(١٨) [AMC10A 2005] طول ضلع المربع $ABCD$ المبين في الشكل المرفق يساوي $\sqrt{50}$، $BE = 1$. ما مساحة المربع الداخلي $EFGH$ ؟

(أ) 25 (ب) 32 (ج) 36 (د) 40



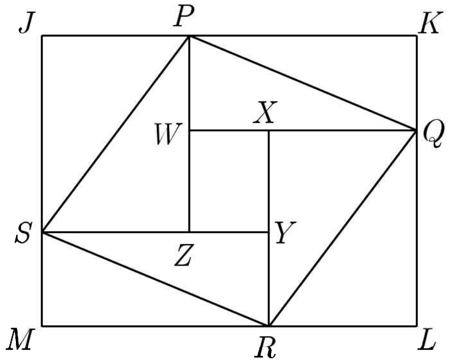
الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أولاً أن المثلثات القائمة الأربعة متطابقة (لماذا ؟). بما أن $BE = 1$ فإن $AH = 1$. أيضاً، $HB = HE + BE = HE + 1$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لدينا

$$\begin{aligned} 1^2 + (HE+1)^2 &= 50 \\ HE + 1 &= 7 \\ HE &= 6 \end{aligned}$$

وبهذا فإن مساحة المربع $EFGH$ تساوي $36 = 6^2$.

(١٩) [Pascal 2010] رسمنا المعين $PQRS$ داخل المستطيل $JKLM$ كما هو مبين في الشكل. $\overline{JM} \parallel \overline{PZ} \parallel \overline{XR}$، $\overline{JK} \parallel \overline{QW} \parallel \overline{YS}$. إذا كان $JP = 39$، $JS = 52$، $KQ = 25$ فما محيط المستطيل $WXYZ$ ؟

(أ) 48 (ب) 58 (ج) 84 (د) 96



الحل: الإجابة هي (د): استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle SJP$ لدينا $SP = \sqrt{52^2 + 39^2} = 65$. وبما أن $PQRS$ معين فإن $SP = PQ = QR = SR = 65$. وباستخدام مبرهنة فيثاغورس مرة أخرى للمثلث $\triangle PKQ$ نجد أن $KP = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$. بما أن $\overline{KQ} \parallel \overline{PW}$ و $\overline{PK} \parallel \overline{WQ}$ فإن $PKQW$ مستطيل ويكون $PW = KQ = 25$. وبالمثل، $JPZS$ مستطيل ومن ثم $PZ = JS = 52$. إذن، $WZ = PZ - PW = 52 - 25 = 27$. أيضاً، $SYRM$ مستطيل. بما أن $\overline{JM} \parallel \overline{KL}$ و $\overline{JK} \parallel \overline{ML}$ و $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$ فإن $\widehat{MSR} = \widehat{KQP}$ وإن $\widehat{SRM} = \widehat{QPK}$. الآن، $\triangle SMR \equiv \triangle QKP$ (ASA). إذن،

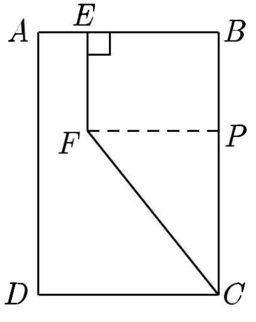
$MR = KP = 60$. وبهذا يكون

$$ZY = SY - SZ = MR - JP = 60 - 39 = 21\,.$$

إذن، محيط المستطيل $WXYZ$ يساوي $2(21+27) = 96$.

(٢٠) [Pascal 2007] قسمنا المستطيل $ABCD$ إلى منطقتين $AEFCD$ و $EBCF$ متساويتي المساحة كما هو مبين في الشكل المرفق. إذا كان $EB = 40$، $AD = 80$، $EF = 30$ فما طول AE ؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 20 (د) 24



الحل: الإجابة هي (ب): ارسم $\overline{AB} \parallel \overline{FP}$ ويقطع $\overline{BC}$ في النقطة P. الآن، $EBPF$ مستطيل، ومن ثم فإن $EB = FP = 40$ و $EF = BP = 30$. كما أن $PC = 80 - 30 = 50$. الآن،

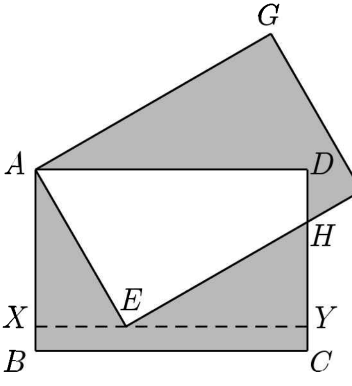
$$[EBCF] = [EBPF] + [FPC]$$
$$= 30 \times 40 + \frac{1}{2} \times 40 \times 50 = 2200$$

ومن ذلك فإن مساحة المستطيل $ABCD$ هي $2 \times 2200 = 4400$. إذن، $AB = \dfrac{4400}{80} = 55$ ويكون $AE = AB - EB = 55 - 40 = 15$.

(٢١) [Cayley 2007] في الشكل المرفق، دورنا المستطيل $ABCD$ حول A لنحصل على المستطيل $AEFG$ حيث $\widehat{BAE} = 30°$ ، $AB = 12$ ، $BC = 18$. مساحة المنطقة المظللة تساوي ؟

(أ) $432 - 132\sqrt{3}$ (ب) $532 - 132\sqrt{3}$

(ج) $536 - 132\sqrt{3}$ (د) $538 - 132\sqrt{3}$



الحل: الإجابة هي (أ): لاحظ أولاً أن المنطقة غير المظللة $AEHD$ مشتركة بين المستطيلين، وبهذا فمساحة المنطقتين المظللتين متساوية لأن للمستطيلين المساحة نفسها. وبهذا فإن مساحة المنطقة المظللة تساوي $2[AEHCB]$. الآن، ارسم القطعة المستقيمة $\overline{XEY}$ موازية للقطعة $\overline{BC}$. بما أن $\triangle AEX$ هو مثلث $30° - 60° - 90°$ فإن $EX = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ وإن $AX = \sqrt{3}EX = 6\sqrt{3}$. إذن، $XB = AB - AX = 12 - 6\sqrt{3}$. أيضاً، في $\triangle EYH$ ،

$$\widehat{HEY} = 180° - (\widehat{AEX} + \widehat{AEF}) = 180° - (60° + 90°) = 30° ،$$

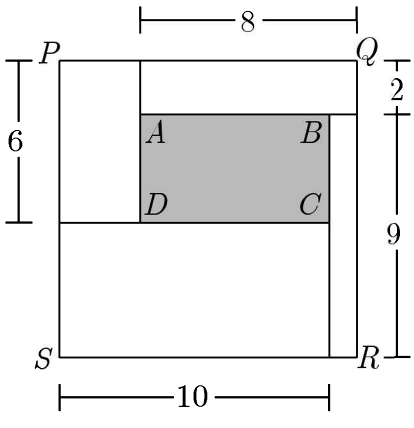
$EY = XY - XE = 18 - 6 = 12$. وبهذا فإن $HY = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ لأن

$\triangle EYH$ هو مثلث $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$. ومن ذلك نجد أن مساحة المنطقة المظللة هي

$$\begin{aligned}2[AEHCB] &= 2\Big[[\triangle AEX]+[XYCB]+[\triangle EHY]\Big]\\ &= 2\left[\frac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{3}+18(12-6\sqrt{3})+\frac{1}{2}\times 12\times 4\sqrt{3}\right]\\ &= 2\Big[18\sqrt{3}+216-108\sqrt{3}+24\sqrt{3}\Big]\\ &= 432-132\sqrt{3}\end{aligned}$$

(٢٢) [Fermat 2011] قسمنا المربع $PQRS$ إلى خمسة مستطيلات كما هو مبين في الشكل. مساحة المستطيل المظلل هي:

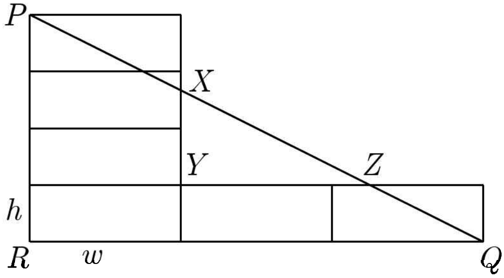
(أ) 16 (ب) 22 (ج) 28 (د) 49



الحل: الإجابة هي (ج): $QR = 2+9 = 11$. $AD = 6-2 = 4$. $DC = 8-(11-10) = 7$. إذن، مساحة المستطيل $ABCD$ هي $4\times 7 = 28$.

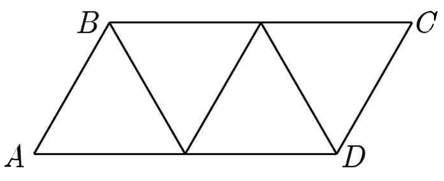
(٢٣) [Fermat 2011] طول كل من المستطيلات الستة المبينة في الشكل المرفق يساوي w وعرض كل منها يساوي h. إذا كان $YZ = 2XY$ فإن $\frac{h}{w}$ يساوي:

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{3}{8}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{3}{4}$



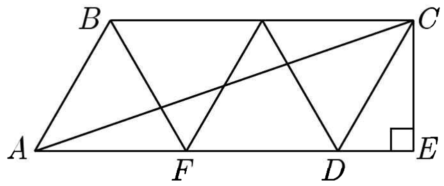
الحل: الإجابة هي (ب): لاحظ أن $\triangle XYZ \sim \triangle PRQ$ لأن $\widehat{PQR} = \widehat{XZY}$. من ذلك نجد أن $\frac{ZY}{QR} = \frac{XY}{PR} = \frac{XZ}{PQ}$. أي أن $\frac{ZY}{XY} = \frac{QR}{PR}$. ولكن، $ZY = 2XY$، $QR = 3w$، $PR = 4h$. إذن، $2 = \frac{2XY}{XY} = \frac{3w}{4h}$. وبهذا فإن $\frac{3}{8} = \frac{h}{w}$.

(٢٤) [Fermat 1999] قسمنا متوازي الأضلاع $ABCD$ إلى أربعة مثلثات متساوية الأضلاع طول ضلع كل منها يساوي 1 كما هو مبين في الشكل. ما طول القطر AC ؟



(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{5}$ (ج) $\sqrt{7}$ (د) $\sqrt{10}$

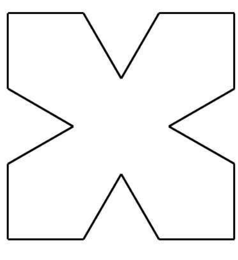
الحل: الإجابة هي (ج): من C أنشئ مستقيماً عمودياً على AD ويلاقي امتداد AD في النقطة E.



بما أن $\widehat{BAF} = 60°$ وأن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ فإن $\widehat{CDE} = 60°$. إذن، $\triangle CDE$ هو مثلث $30° - 60° - 90°$ فيه $CD = 1$. من ذلك نجد أن $CE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ وأن $DE = \dfrac{1}{2}$. إذن، $AE = \dfrac{5}{2}$ ونجد استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس أن

$$AC = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{7}.$$

(٢٥) [Euclid 2011] قطعنا قطعة من وسط كل من أضلاع مربع لإنشاء مثلثات متساوية الأضلاع طول ضلع كل منها يساوي 1 كما هو مبين في الشكل. إذا كان طول ضلع المربع يساوي 3 فما محيط الشكل الناتج ؟

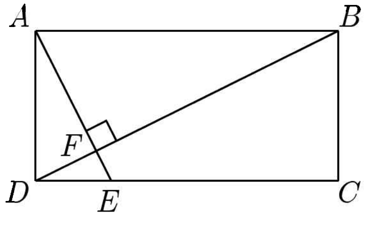


(أ) 12 (ب) 14 (ج) 16 (د) 18

الحل: الإجابة هي (ج): طول كل من القطع المبينة يساوي 1 وعددها 16. إذن، محيط الشكل يساوي 16.

(٢٦) [Euclid 2010] في الشكل المرفق، $ABCD$ مستطيل، $\overline{AE} \perp \overline{BD}$، $AF = 4$ ، $DF = 2$. ما مساحة الشكل الرباعي $BCEF$ ؟

(أ) 19 (ب) 22 (ج) 23 (د) 25



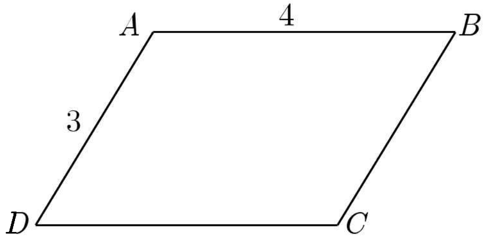
الحل: الإجابة هي (أ): استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $AD = \sqrt{(AF)^2 + (DF)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$. لنفرض أن $\widehat{FAD} = x$. عندئذ، $\widehat{BAF} = 90° - x$، $\widehat{ADF} = 90° - x$، $\widehat{BDC} = 90° - (90° - x) = x$. إذن، $\triangle BFA \sim \triangle AFD \sim \triangle DFE$. من ذلك نجد أن $\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{DA}{DF}$. أي أن $AB = \dfrac{4 \times 2\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5}$. أيضاً، $\dfrac{FD}{FA} = \dfrac{FE}{FD}$ ويكون $FE = \dfrac{2 \times 2}{4} = 1$. إذن،

$$\begin{aligned}[BCEF] &= [\triangle DCB] - [\triangle DFE] \\ &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 19\end{aligned}$$

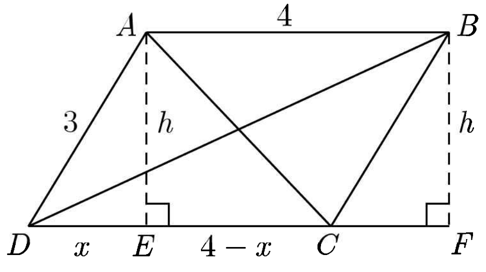
(٢٧) في الشكل المرفق $ABCD$ متوازي أضلاع فيه، $a = 3$ ، $b = 4$. ما قيمة

؟ $(AC)^2 + (BD)^2$

(أ) 25 (ب) 30 (ج) 40 (د) 50



الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن h هو ارتفاع متوازي الأضلاع وأن $DE = x$ كما هو مبين في الشكل أدناه.



استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس في المثلث $\triangle AED$ نجد أن $h^2 + x^2 = 9$. بما أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ نجد أن $\widehat{ADC} = \widehat{BCF}$. إذن، $\triangle BFC \equiv \triangle AED$. الآن، بتطبيق مبرهنة فيثاغورس للمثلثين $\triangle AEC$ و $\triangle BDF$ نجد أن

$$\begin{aligned}(AC)^2 &= h^2 + (4-x)^2\\ (BD)^2 &= h^2 + (4+x)^2\end{aligned}$$

إذن،

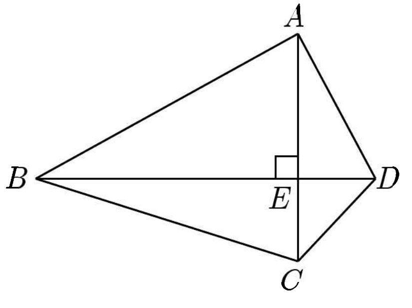
$$\begin{aligned}(AC)^2 + (BD)^2 &= h^2 + 16 - 8x + x^2 + h^2 + 16 + 8x + x^2\\ &= 2h^2 + 2x^2 + 32\end{aligned}$$

ولكن، $h^2 = 9 - x^2$. إذن،

$$(AC)^2 + (BD)^2 = 2(9 - x^2) + 2x^2 + 32 = 50 .$$

(٢٨) في الشكل المرفق، $ABCD$ شكل رباعي قطراه متعامدان. إذا كان $AC = 4$ ، $BD = 6$ فما مساحة الشكل الرباعي $ABCD$ ؟

(أ) 12 (ب) 24 (ج) 48 (د) 72

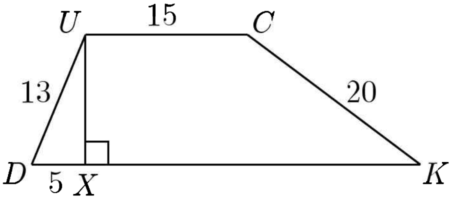


الحل: الإجابة هي (أ): لاحظ أن

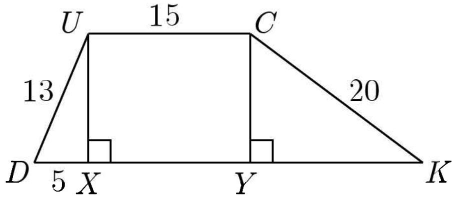
$$\begin{aligned}[ABCD] &= [\triangle ADC] + [\triangle ACB] \\ &= \frac{1}{2} \times ED \times AC + \frac{1}{2} BE \times AC \\ &= \frac{1}{2} \times AC \times [ED + EB] = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12 .\end{aligned}$$

(٢٩) [Mathcounts 1992] ما مساحة شبه المنحرف المبين في الشكل المرفق ؟

(أ) 180 (ب) 210 (ج) 276 (د) 306



الحل: الإجابة هي (د): ارسم عموداً من C على DK ويلاقي DK في النقطة Y. عندئذ،



$$UX = CY = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \quad \text{وَ} \quad YK = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$$

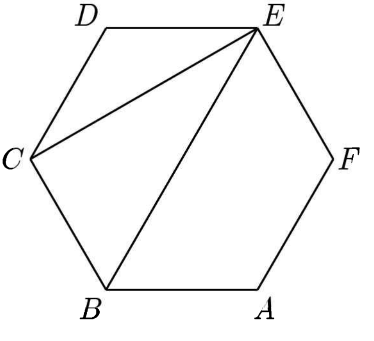
إذن،

$$\begin{aligned}[DUCK] &= [UDX] + [UCYX] + [CKY] \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 + 15 \times 12 + \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 306\end{aligned}$$

(٣٠) [Mathcounts 1986] إذا كان $ABCDEF$ سداسياً منتظماً طول ضلعه يساوي 6 فما مساحة المثلث $\triangle BCE$ ؟

(أ) $12\sqrt{3}$ (ب) $16\sqrt{3}$ (ج) $18\sqrt{3}$ (د) $20\sqrt{3}$

الحل: الإجابة هي (ج):



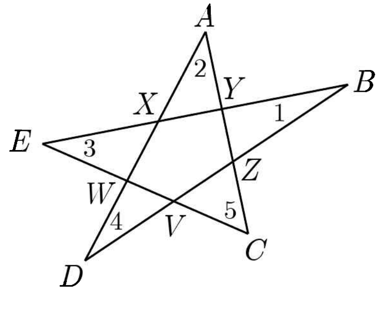
قياس كل من زوايا السداسي يساوي $120^\circ = \dfrac{4\times 180}{6}$. بما أن $\triangle CDE$ متساوي الساقين فإن $\widehat{DCE} = \widehat{DEC} = 30^\circ$. إذن $\widehat{ECB} = 90^\circ$. وبما أن السداسي منتظم فإن $\overline{BE}$ ينصف $\widehat{B}$. ولذا فإن $\widehat{CBE} = 60^\circ$. ومن ذلك $\widehat{CEB} = 30^\circ$. إذن، $\triangle EBC$ هو مثلث $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$. الآن، بما أن $BC = 6$ فإن $CE = 6\sqrt{3}$ ويكون $[EBC] = \dfrac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

(٣١) [MAΘ 1990] ثماني محدب يحوي زاويتين متطابقتين. قياس كل من زواياه الأخرى يساوي ثلاثة أضعاف قياس إحدى الزاويتين المتطابقتين. ما قياس كل من الزوايا الكبرى ؟

(أ) 54° (ب) 108° (ج) 162° (د) 100°

الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن x هو قياس كل من الزاويتين المتطابقتين. إذن، $3x$ هو قياس كل من الزوايا الست الأخرى. من ذلك نرى أن $20x = 2x + 18x = 180\times(8-2)$. أي أن $20x = 1080$. ومن ذلك نجد أن $x = 54^\circ$ ويكون $3x = 3\times 54 = 162^\circ$.

(٣٢) [MAΘ 1987] ما مجموع قياس الزوايا 1، 2، 3، 4، 4، 5 في شكل النجمة المرفق ؟



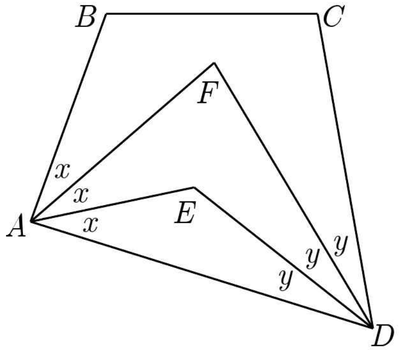
(أ) 180° (ب) 210° (ج) 270° (د) 360°

الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن المجموع هو x. لاحظ أن مجموع زوايا المثلثات الخمسة $\triangle AWC$ ، $\triangle EVB$ ، $\triangle DZA$ ، $\triangle CYE$ ، $\triangle BXD$ هو ضعف المجموع x مضافاً إليه مجموع زوايا الخماسي $VWXYZ$. إذن،

$$\begin{aligned} 2x + 540^\circ &= 900^\circ \\ x &= 180^\circ \end{aligned}$$

(٣٣) [Mathcounts 1991] في الشكل الرباعي $ABCD$ المرفق، $\widehat{ABC} = 110^\circ$ ، $\widehat{BCD} = 100^\circ$. ما قياس الزاوية $\widehat{AFD}$ ؟

(أ) 60° (ب) 70° (ج) 75° (د) 80°



الحل: الإجابة هي (د): في $\triangle AFD$ لدينا

$$\widehat{AFD} + \widehat{FDA} + \widehat{FAD} = \widehat{AFD} + 2x + 2y = 180^\circ$$

إذن، $\widehat{AFD} = 180^\circ - 2(x+y)$. ولكن في الشكل الرباعي $ABCD$ لدينا $\widehat{B} + \widehat{C} + 3x + 3y = 360^\circ$. من ذلك نجد أن

$$x + y = \frac{360^\circ - 110^\circ - 100^\circ}{3} = 50^\circ$$

إذن، $\widehat{AFD} = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ$.

(٣٤) [AHSME 1952] مساحة شبه منحرف تساوي 1400 متراً مربعاً وارتفاعه يساوي 50 متراً. إذا كان طول كل من قاعدتيه عدداً صحيحاً يقبل القسمة على 8 فما مجموع القيم الممكنة لأطوال القاعدة الكبرى ؟

(أ) 48 (ب) 56 (ج) 88 (د) 120

الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن طول القاعدة الكبرى هو $8a$ والصغرى $8b$. عندئذ،

$$\frac{1}{2} \times 50 \times (8a + 8b) = 1400$$
$$a + b = 7$$

وبما أن كلاً من a و b عدد صحيح موجب وأن $a > b$ فإن الحلول الممكنة هي ($a = 6$ و $b = 1$) أو ($a = 5$ و $b = 2$) أو ($a = 4$ و $b = 3$). إذن، مجموع قيم a هي $15 = 6 + 5 + 4$. وبهذا مجموع القيم الممكنة للقاعدة $8a$ هو $8 \times 15 = 120$.

(٣٥) [AHSME 1953] مساحة مثلث تساوي مساحة شبه منحرف. شبه المنحرف و المثلث لهما الارتفاع نفسه. طول قاعدة المثلث يساوي 18. ما متوسط طولي قاعدتي شبه المنحرف ؟

(أ) 9 (ب) 18 (ج) 27 (د) 36

الحل: الإجابة هي (أ): نفرض أن b_1 و b_2 طولا قاعدتي شبه المنحرف وأن h هو ارتفاع كل من المثلث وشبه المنحرف. إذن،

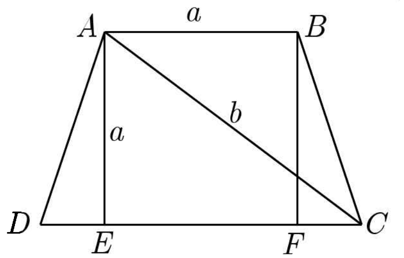
$$\frac{1}{2} \times h \times 18 = \frac{1}{2} \times h \times (b_1 + b_2)$$

من ذلك نجد أن $9 = \frac{b_1 + b_2}{2}$.

(٣٦) [AHSME 1953] إذا طابقت القاعدة الكبرى في شبه منحرف متساوي الساقين أحد القطرين وطابقت القاعدة الصغرى ارتفاع شبه المنحرف فإن النسبة بين القاعدة الصغرى إلى القاعدة الكبرى هي:

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{5}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

الحل: الإجابة هي (ب):



لنفرض $AB = AE = a$ وأن $DC = AC = b$. لاحظ أولاً أن $EF = a$.

وبما أن $\triangle BCF \equiv \triangle ADE$ فإن $DE = FC = \frac{b-a}{2}$. إذن، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$b^2 = a^2 + \left[a + \frac{b-a}{2}\right]^2 = a^2 + \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$4b^2 = 5a^2 + b^2 + 2ab$$

$$5a^2 + 2ab - 3b^2 = 0$$

$$(5a - 3b)(a + b) = 0$$

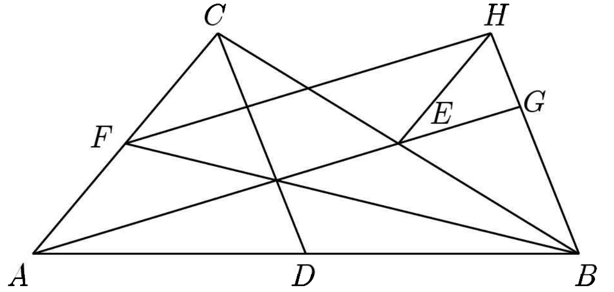
إذن، $5a - 3b = 0$. ويكون $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

(٣٧) [AHSME 1955] في الشكل المرفق، ABC مثلث، $\overline{AE}$، $\overline{BF}$، $\overline{CD}$ منصفات أضلاع المثلث، $\overline{FH} \parallel \overline{AE}$، $FH = AE$. أي من العبارات

التالية يمكن أن تكون خاطئة:

(أ) $AEHF$ متوازي أضلاع (ب) $HE = HG$

(ج) $BH = DC$ (د) $FG = \frac{3}{4}AB$



الحل: الإجابة هي (ب): العبارة (أ) صائبة لأن $\overline{FH} \parallel \overline{AE}$ وأن $FH = AE$. العبارة (ج) صائبة لأنه عند تمديد $\overline{HE}$ موازياً للقطعة $\overline{AC}$ فإنه يلاقي $\overline{AB}$ في النقطة D. وبهذا فإن $\overline{DC}$ و $\overline{BH}$ ضلعان متقابلان في المثلثين المتطابقين $\triangle ACD$ و $\triangle HDB$. العبارة (د) صائبة لأن

$$FG = FE + EG = AD + \frac{1}{2}DB = \frac{3}{4}AB.$$

(٣٨) [AHSME 1957] كونا ثمانياً منتظماً بقطع مثلثات متطابقة قائمة ومتساوية الساقين من زوايا مربع. إذا كان طول ضلع المربع يساوي 1 فإن طول ساق كل من هذه المثلثات يساوي:

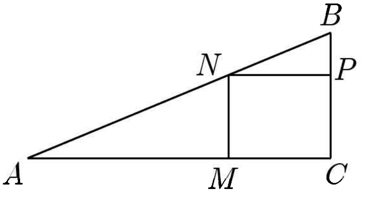
(أ) $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$ (ب) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ (ج) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (د) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن طول ساق المثلث يساوي x. عندئذ، طول

ضلع الثماني يساوي $2x - 1$. ولكن $2x - 1$ هو طول وتر المثلث القائم. إذن، $\sqrt{2}x = \sqrt{x^2 + x^2} = 2x - 1$. وبهذا فإن $x = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

(٣٩) [AHSME 1957] في المثلث القائم $\triangle ABC$ المرفق، $BC = 5$، $AC = 12$، $AM = x$، $\overline{MN} \perp \overline{AC}$، $\overline{NP} \perp \overline{BC}$، N نقطة على $\overline{AB}$. إذا كان $y = MN + NP$ فإن محيط المستطيل $MNPC$ يساوي:

(أ) $5x + 12$ (ب) $\dfrac{5x}{12} + \dfrac{12}{5}$ (ج) $\dfrac{144 - 7x}{6}$ (د) $\dfrac{5x}{12} + 6$



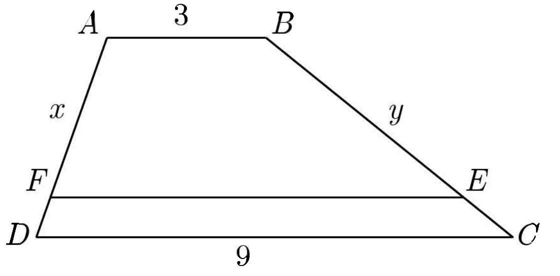
الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن $\triangle ABC \sim \triangle ANM$. ولذا فإن $\dfrac{BC}{NM} = \dfrac{AC}{AM}$. أي أن $\dfrac{5}{NM} = \dfrac{12}{x}$. وبهذا فإن $NM = \dfrac{5x}{12}$. أيضاً، $NP = MC = 12 - x$. وبهذا يكون محيط المستطيل هو

$$2y = 2(MN + NP) = 2\left(12 - x + \frac{5x}{12}\right) = \frac{144 - 7x}{6}$$

(٤٠) [AHDME 1957] طولا قاعدتي شبه منحرف 3 و 9 وطولا الساقين 4 و 6. رسمنا مستقيماً موازياً للقاعدتين ويقسم شبه المنحرف إلى شبهي منحرفين متساويي المحيط. هذا المستقيم يقسم الساقين بنسبة:

(أ) $\dfrac{4}{3}$ (ب) $\dfrac{3}{2}$ (ج) $\dfrac{4}{1}$ (د) $\dfrac{6}{1}$

الحل: الإجابة هي (ج):



بما أن محيط $ABEF$ يساوي محيط $EFDC$ فإن

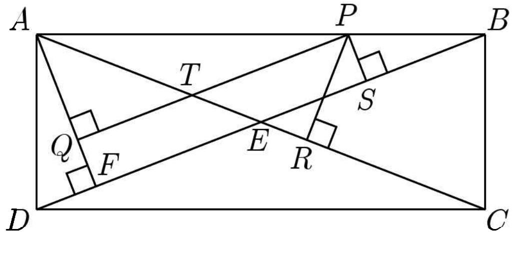
$$3 + x + y + EF = (4 - x) + 9 + (6 - y) + EF$$
$$x + y = 8$$

وبما أن $\frac{x}{y} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ فإن $\frac{2}{3}y + y = 8$. أي أن $y = \frac{24}{5}$. وبهذا فإن

$$\frac{y}{6 - y} = \left(\frac{24}{5}\right) \Big/ \left(\frac{6}{5}\right) = \frac{24}{6} = \frac{4}{1}.$$

(٤١) [AHSME 1958] في الشكل المرفق، $ABCD$ مستطيل، P نقطة على $\overline{AB}$، $\overline{PS} \perp \overline{BD}$، $\overline{PR} \perp \overline{AC}$، $\overline{AF} \perp \overline{BD}$، $\overline{PQ} \perp \overline{AF}$. طول $PR + PS$ يساوي:

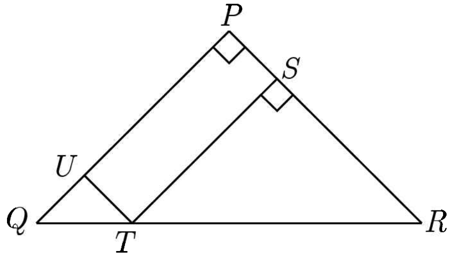
(أ) PQ (ب) AE (ج) EF (د) AF



الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أن $\triangle PTR \sim \triangle ATQ$. ولذا فإن $\frac{PT}{AT} = \frac{PR}{AQ}$. وبما أن $\widehat{PAT} = \widehat{PBS} = \widehat{APT}$ فإن $PT = AT$. ولذا فإن $PR = AQ$ ، $PS = QF$. إذن، $PR + PS = AQ + QF = AF$.

(٤٢) [Aust.MC 1987] رسمنا المستطيل $PSTU$ داخل المثلث القائم والمتساوي الساقين $\triangle QPR$. إذا كان $PR = 12$ و $PS = x$ فإن مساحة المستطيل تساوي:

(أ) $12x - x^2$ (ب) $x^2 - 12x$ (ج) $72 - x^2$ (د) $12x - 2x^2$

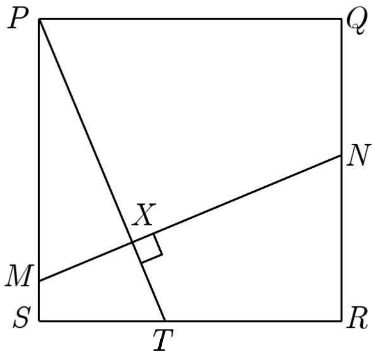


الحل: الإجابة هي (أ): $SR = 12 - x$. وبما أن $\widehat{STR} = \widehat{SRT} = 45°$ فإن $\triangle STR$ متساوي الساقين ويكون $ST = 12 - x$. إذن،

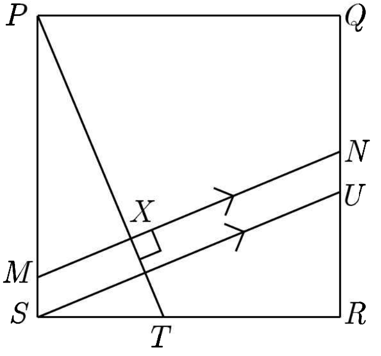
$$[PSTU] = x(12 - x) = 12x - x^2 .$$

(٤٣) [Aust.MC 1991] طول ضلع المربع $PQRS$ يساوي 12 سم. T نقطة على $\overline{RS}$ حيث ST يساوي 5 سم، $\overline{MN} \perp \overline{PT}$. إذا كان $MX = 4$ فإن XN يساوي:

(أ) 5 (ب) 7 (ج) 9 (د) 11



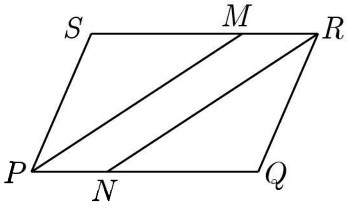
الحل: الإجابة هي (ج): ارسم $\overline{MN} \parallel \overline{SU}$. عندئذ، $SU = MN$ وَ $\triangle PST \equiv \triangle SRU$.



إذن، $SU = PT$. ولكن $PT = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. ومن ذلك يكون $MN = 13$ و $XN = 13 - 4 = 9$.

(٤٤) في الشكل المرفق، $PQRS$ متوازي أضلاع، $\overline{PM}$ منصف الزاوية $\widehat{P}$، $\overline{RN}$ منصف الزاوية $\widehat{R}$. إذا كان $SR = 6$ و $SM = 4$ فإن PN يساوي:

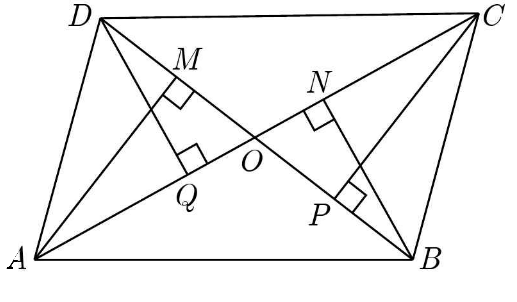
(أ) 1 (ب) 1.5 (ج) 2 (د) 2.5



الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\widehat{R} = \widehat{P}$ فإن $\widehat{MPS} = \widehat{NRQ}$. أيضاً، $\widehat{S} = \widehat{Q}$ و $PS = QR$. إذن، $\triangle SPM \equiv \triangle QRN$. ومن ذلك نجد أن $SM = NQ = 4$. إذن، $PN = PQ - NQ = 6 - 4 = 2$.

(٤٥) في الشكل المرفق $ABCD$ شكل رباعي محدب، فيه المسافتان من A و C إلى القطر $\overline{BD}$ متساويتان والمسافتان من B و D إلى القطر $\overline{AC}$ متساويتان. إذا كان $DC = 5$ فإن AB يساوي:

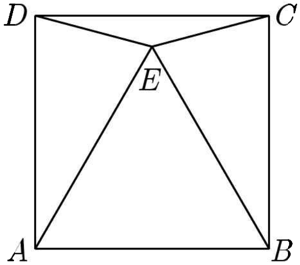
(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) المعلومات غير كافية



الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن $\triangle AOM \equiv \triangle COP$ لأن $\widehat{AOM} = \widehat{COP}$ و $AM = CP$، والمثلثان قائما الزاوية. إذن، $OA = OC$. وبالمثل، $OB = OD$. من ذلك يكون $ABCD$ متوازي أضلاع. إذن، $AB = DC = 5$.

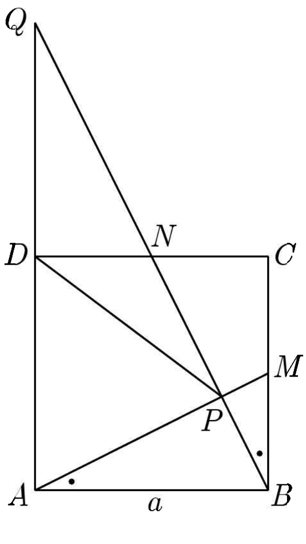
(٤٦) E نقطة داخل المربع $ABCD$ بحيث أن $\triangle ABE$ متساوي الأضلاع. إذا كان $DE = 3$ فإن CE يساوي:

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) المعلومات غير كافية



الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $AD = AB = AE = EB = BC$ وأن $\widehat{DAE} = \widehat{CBE} = 30°$ فإن $\triangle DAE \equiv \triangle CBE$ ويكون $CE = DE = 3$.

(٤٧) $ABCD$ مربع طول ضلعه a، M نقطة منتصف $\overline{BC}$، N نقطة منتصف $\overline{CD}$. إذا كانت P نقطة تقاطع $\overline{AM}$ و $\overline{BN}$ فإن DP يساوي:

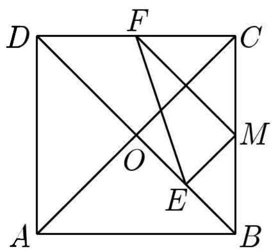


(أ) $\frac{a}{2}$ (ب) a (ج) $2a$ (د) a^2

الحل: الإجابة هي (ب): ارسم Q نقطة تقاطع امتدادي $\overline{AD}$ و $\overline{BN}$. الآن، $\triangle ABM \equiv \triangle BCN$. من ذلك نجد أن $\widehat{PAB} = \widehat{PBM}$. إذن، $\widehat{PAB} + \widehat{PBA} = 90°$. وبهذا فإن $\widehat{APB} = 90°$. الآن، $\triangle QDN \equiv \triangle BCN$. ولذا فإن $QD = BC = a$. إذن، $\triangle QPA$ مثلث قائم الزاوية حيث $\overline{PD}$ منصف $\overline{AQ}$. وبهذا فإن $PD = \frac{AQ}{2} = a$.

(٤٨) O هي نقطة تقاطع قطري المربع $ABCD$، E نقطة منتصف $\overline{BO}$ و F نقطة منتصف $\overline{CD}$. إذا كان $AB = \sqrt{10}$ فإن EF يساوي:

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 2.5 (د) $\sqrt{10}$

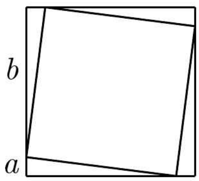


الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن M نقطة منتصف $\overline{BC}$. الآن، $\overline{MF}$ القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعي المثلث $\triangle BCD$. إذن $\overline{MF} \parallel \overline{BD}$ و $MF = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2}$. وبالمثل، EM القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعي المثلث $\triangle BOC$. إذن، $\overline{EM} \parallel \overline{OC}$ و $EM = \frac{\sqrt{20}}{4}$. الآن، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle EMF$ نجد أن

$$EF = \sqrt{FM^2 + EM^2} = \sqrt{\frac{20}{4} + \frac{20}{16}} = \sqrt{\frac{100}{16}} = \frac{10}{4} = 2.5\,.$$

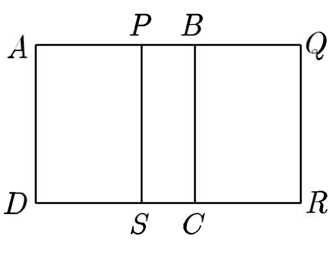
(٤٩) [AMC8 2012] رسمنا مربعاً مساحته 4 داخل مربع مساحته 5 كما هو مبين في الشكل المرفق. كل رأس من رؤوس المربع الصغير يقسم ضلع المربع الكبير إلى قطعتين طول القطعة الصغرى a وطول القطعة الكبرى b. ما قيمة ab ؟

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) 1



الحل: الإجابة هي (ج): طول ضلع المربع الكبير يساوي $\sqrt{5}$ وطول ضلع المربع الصغير يساوي 2. إذن، $a + b = \sqrt{5}$ و $a^2 + b^2 = 4$. من ذلك نجد أن $a^2 + 2ab + b^2 = 5$ و $a^2 + b^2 = 4$. أي أن $2ab + 4 = 5$. وبهذا فإن $ab = \frac{1}{2}$.

(٥٠) [AMC8 2011] في الشكل المرفق، كونا المستطيل $AQRD$ الذي بعداه 15 و 25 من تقاطع المربعين المتطابقين $ABCD$ و $PQRS$. ما نسبة مساحة المستطيل $PBCS$ إلى مساحة المستطيل $AQRD$ ؟



(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{3}$

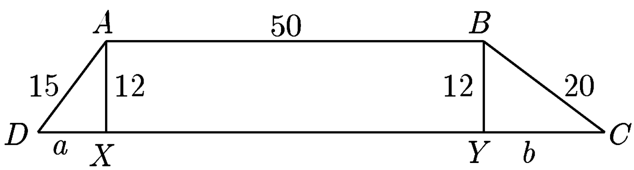
الحل: الإجابة هي (أ): نفرض أن $AP = x$ وأن $PB = y$. عندئذ، $x + y = 15$ و $2x + y = 25$. من ذلك نجد أن $x = 10$ و $y = 5$. الآن

$$\frac{[PBCS]}{[AQRD]} = \frac{5 \times 15}{15 \times 25} = \frac{1}{5}.$$

(٥١) [AMC8 2011] $ABCD$ شبه منحرف فيه، $AD = 15$، $AB = 50$، $BC = 20$ وارتفاعه 12. ما مساحته ؟

(أ) 600 (ب) 650 (ج) 700 (د) 750

الحل: الإجابة هي (د):



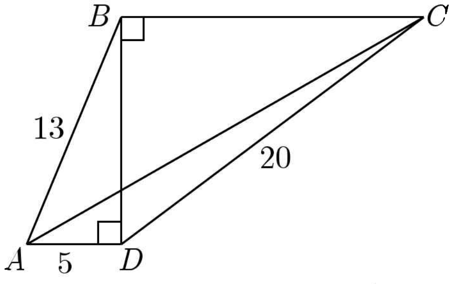
$$a = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$$
$$b = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$$

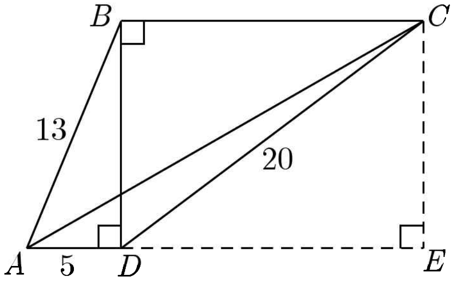
من ذلك نجد أن $DC = 9 + 50 + 16$. وبهذا فمساحة شبه المنحرف هي

$$\frac{1}{2} \times (AB + DC) \times 12 = \frac{1}{2} \times 125 \times 12 = 750.$$

(٥٢) [Cayley 2005] في الشكل المرفق، $AB = 13$، $DC = 20$، $AD = 5$. طول AC أقرب إلى:

(أ) 20 (ب) 22 (ج) 23 (د) 24





الحل: الإجابة هي (د): ارسم عموداً من C يلاقي امتداد AD في النقطة E. من المثلث القائم $\triangle ADB$ نجد أن

$$BD = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 = CE$$

ومن المثلث القائم $\triangle DBC$ نجد أن

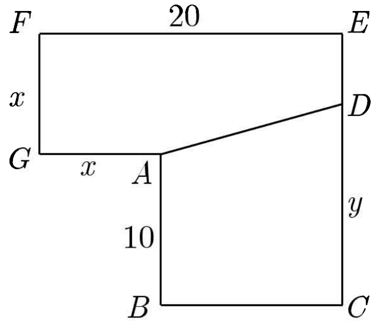
$$BC = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16 = DE$$

وأخيراً من المثلث القائم $\triangle AEC$ نجد أن

$$AC = \sqrt{21^2 + 12^2} = \sqrt{585} \approx 24.4 .$$

(٥٣) [Cayley 2004] في الشكل المرفق، $ABCDEFG$ غرفة فيها $\widehat{E}$ قائمة وكل من ركنيها عند C و F مربع، $EF = 20$، $AB = 10$، $AG = GF$، مساحتها 280. قسمنا الغرفة بحائط AD إلى غرفتين متساويتي المساحة. ما طول DC ؟

(أ) 12 (ب) $\frac{40}{3}$ (ج) 15 (د) $\frac{50}{3}$



الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن $AG = GF = x$ وأن $DC = y$. عندئذ، الغرفة هي مستطيل بعداه $FE = 20$ و $AB + FG = 10 + x$ مطروحاً منه مستطيل بعداه $AG = x$ و $AB = 10$. وبما أن مساحة الغرفة تساوي 280 فإن:

$$\begin{aligned} 20(10 + x) - 10x &= 280 \\ 10x + 200 &= 280 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

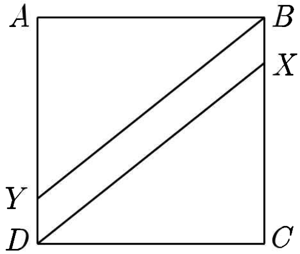
الآن، $ABCD$ شبه منحرف قاعدتيه 10 و y ومساحته تساوي 140 (نصف مساحة الغرفة) وارتفاعه $BC = FE - x = 12$. إذن،

$$\frac{1}{2} \times 12 \times (10 + y) = 140$$

ومن ذلك نجد أن $y = \dfrac{40}{3}$.

(٥٤) [Cayley 2003] في الشكل المرفق $ABCD$ مربع طول ضلعه 10. إذا كان $AY = CX = 8$ فما مساحة الشكل الرباعي $BXDY$ ؟

(أ) 16 (ب) 20 (ج) 24 (د) 40

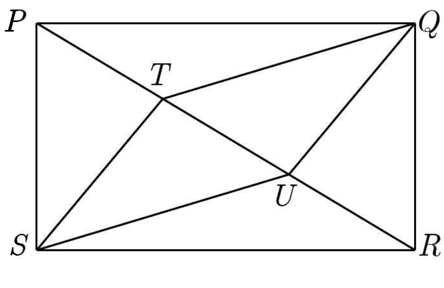


الحل: الإجابة هي (ب): لاحظ أن

$$\begin{aligned}[BXDY] &= [ABCD] - [DCX] - [BAY] \\ &= (10)^2 - \frac{1}{2}\times 10\times 8 - \frac{1}{2}\times 10\times 8 \\ &= 100 - 40 - 40 = 20\end{aligned}$$

(٥٥) [Fermat 2010] في الشكل المرفق، $PQRS$ مستطيل فيه $PQ = 5$، $QR = 3$. قسمنا القطر $\overline{PR}$ إلى ثلاث قطع متطابقة، $PT = TU = UR$. مساحة الشكل الرباعي $STQU$ تساوي:

(أ) $\frac{5}{2}$ (ب) 5 (ج) $\frac{17}{3}$ (د) $\sqrt{34}$



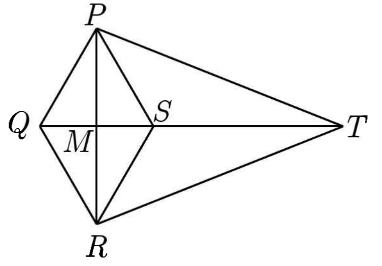
الحل: الإجابة هي (ب): لاحظ أولاً أن

$$[PQR] = [PSR] = \frac{1}{2}\times 5\times 3 = \frac{15}{2}.$$

لاحظ أيضاً أن $[PTQ] = [TUQ] = [URQ]$ لأن $PT = TU = UR$ وارتفاع كل منها هو المسافة من Q إلى القطر $\overline{PR}$. إذن، $[TUQ] = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} = \frac{5}{2}$. وبالمثل، $[TUS] = \frac{5}{2}$. وبهذا فإن $[STQU] = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$.

(٥٦) [Fermat 2010] في الشكل المرفق، $PQRS$ معين، $PS = SQ = 6$، $PT = RT = 14$. ST يساوي:

(أ) $7\sqrt{3} - 3$ (ب) $4\sqrt{10} - 3$ (ج) 10 (د) 11



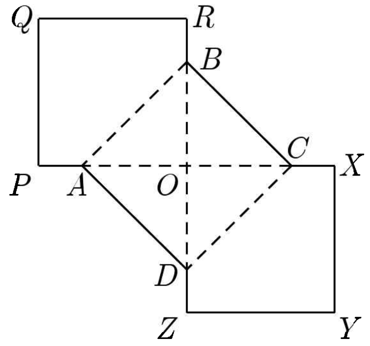
الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $PQRS$ معين فإن M نقطة منتصف القطرين المتعامدين PR و QS. من ذلك نجد أن $QM = MS = \frac{1}{2}QS = 3$. الآن، باستخدام مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle PMS$ نجد أن $PM = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$. وباستخدام مبرهنة فيثاغورس مرة أخرى للمثلث $\triangle PMT$ نجد أن $MT = \sqrt{14^2 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{169} = 13$. إذن،

$$ST = MT - MS = 13 - 3 = 10.$$

(٥٧) [Fermat 2007] في الشكل المرفق، لدينا ثلاثة مربعات طول ضلع كل منها

3، O مركز المربع $ABCD$. محيط الشكل $QRBCXYZDAPQ$ أقرب إلى:

(أ) 21 (ب) 23 (ج) 24 (د) 30



الحل: الإجابة هي (أ): محيط الشكل المطلوب هو

$$QR + RB + BC + CX + XY + ZY + ZD + DA + AP + PQ$$
$$= 18 + RB + CX + ZD + AP$$

بما أن O مركز المربع $ABCD$ فإن $OA = OB = OC = OD$. وبما أن $OP = OR = OX = OZ$ فإن $AP = RB = CX = ZD$. وبهذا فإن محيط الشكل المطلوب يساوي $18 + 4AP$. الآن، $\triangle AOB$ مثلث متساوي الساقين قائم. أي أنه مثلث $45° - 45° - 90°$. إذن، $AO = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

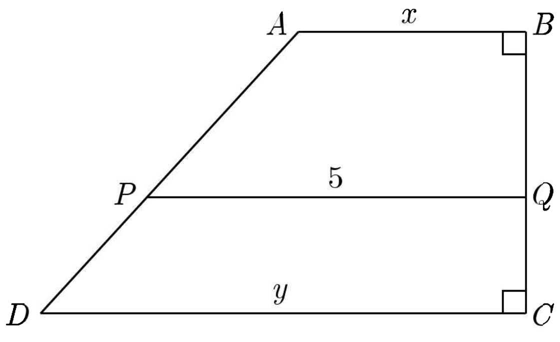
ومن ثم $AP = 3 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. وبهذا يكون المحيط المطلوب هو

$$18 + 4\left(3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 30 - 6\sqrt{2} \approx 21.515 .$$

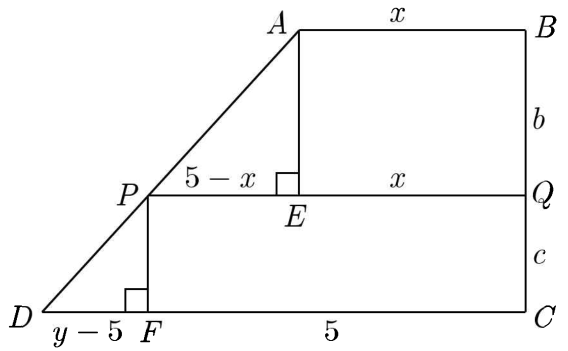
(٥٨) [Euclid 2009] $ABCD$ شبه منحرف قائم. $\overline{DC} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ و

$\overline{PQ}$ يقسم شبه المنحرف إلى شبهي منحرفين متساويي المساحة. إذا كان $PQ = 5$ ، $AB = x$ ، $DC = y$ فإن $x^2 + y^2$ يساوي:

(أ) 25 (ب) 35 (ج) 45 (د) 50



الحل: الإجابة هي (د):



ارسم العمود $\overline{AE}$ على $\overline{PQ}$ والعمود $\overline{PF}$ على $\overline{DC}$. الآن، كل من $ABQE$ و $PQCF$ مستطيل. من ذلك يكون $PE = 5 - x$ و $DF = y - 5$. لنفرض أن $BQ = b$ و $QC = c$. الآن،

$$[APQB] = \frac{1}{2}(x + 5) \times b$$

$$[PQCD] = \frac{1}{2}(5+y)\times c$$

وبما أن المساحتين متساويتان نجد أن $\frac{1}{2}(x+5)\times b = \frac{1}{2}(5+y)\times c$. أي أن $\frac{x+5}{5+y} = \frac{c}{b}$. بما أن $\triangle AEP \sim \triangle PFD$ فإن $\frac{AE}{PE} = \frac{PF}{DF}$. أي أن $\frac{c}{y-5} = \frac{b}{5-x}$، أي $\frac{c}{b} = \frac{y-5}{5-x}$. إذن،

$$\frac{x+5}{5+y} = \frac{y-5}{5-x}$$

$$(x+5)(5-x) = (y-5)(5+y)$$

$$25 - x^2 = y^2 - 25$$

$$x^2 + y^2 = 50.$$

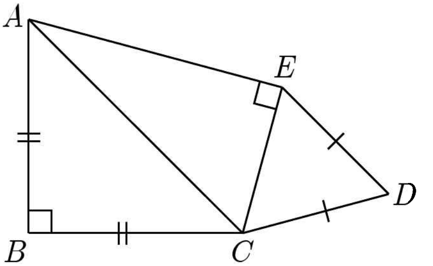
(٥٩) [Euclid 2007] في الشكل المرفق، $AB = BC = 2\sqrt{2}$، $CD = DE$، $\widehat{CDE} = 60^\circ$، $\widehat{EAB} = 75^\circ$. محيط الشكل $ABCDEA$ يساوي:

(أ) $4 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

(ب) $5 + 4\sqrt{2} + \sqrt{3}$

(ج) $4 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

(د) $5 + 4\sqrt{2} + \sqrt{3}$



الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $\triangle ABC$ متساوي الساقين فإن $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

إذن، $4 = \left(2\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = AC = \sqrt{2}AB$. الآن،

$$\widehat{CAE} = \widehat{EAB} - \widehat{BAC} = 75° - 45° = 30° .$$

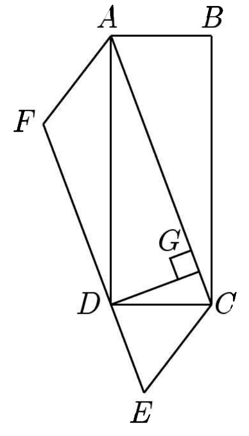
إذن، $\triangle ACE$ هو مثلث $30° - 60° - 90°$. من ذلك نجد أن، $EC = \frac{1}{2}AC = 2$ وأن $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = 2\sqrt{3}$. الآن، $\triangle CDE$ فيه $CD = ED$ و $\widehat{EDC} = 60°$ ، ولذا فهو متساوي الأضلاع ويكون، $ED = CD = EC = 2$. بالتالي محيط الشكل المطلوب هو

$$\begin{aligned}&AB + BC + CD + DE + EA\\&= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 + 2 + 2\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

(٦٠) [MAΘ 2012] $ABCD$ مستطيل مساحته 96 . $ACEF$ متوازي أضلاع حيث $\overline{EF}$ يمر بالنقطة D . ما مساحة $ACEF$ ؟

(أ) 48 (ب) 72 (ج) 96 (د) 108

الحل: الإجابة هي (ج):



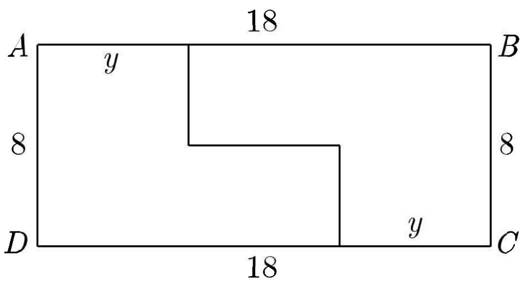
عيّن نقطة G على $\overline{AC}$ بحيث يكون $\overline{DG}$ ارتفاع المثلث $\triangle ADC$. بما أن $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ فإن $\overline{DG} \perp \overline{EF}$. إذن، $\overline{DG}$ هو ارتفاع متوازي الأضلاع $ACEF$. الآن،

$$[ABCD] = 2[ADC] = 2 \times \frac{1}{2} \times DG \times AC$$
$$= DG \times AC = [ACEF]$$

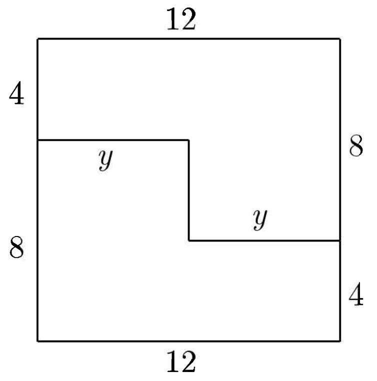
وبهذا فإن $[ACEF] = 96$.

(٦١) [AMC10A, AMC12A 2006] المستطيل $ABCD$ فيه $AB = 18$، $BC = 8$. قسمنا المستطيل $ABCD$ إلى سداسيين متطابقين كما هو مبين في الشكل بحيث يمكن تغيير موقع السداسيين دون أن يتقاطعا لإنشاء مربع. ما قيمة y ؟

(أ) 6 (ب) 7 (ج) 8 (د) 9



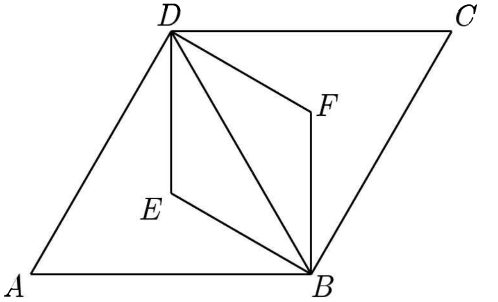
الحل: الإجابة هي (أ): بما أن السداسيين سيكونان مربعاً دون أن يتقاطعا فإن المساحة لن تتغير. مساحة المستطيل تساوي $18 \times 8 = 144$. وبهذا فإن مساحة المربع هي 144 ويكون طول ضلعه يساوي 12. الطريقة الوحيدة لإنشاء هذا المربع هي



وبهذا فإن y يساوي نصف طول ضلع المربع أي أن $y = \frac{1}{2} \times 12 = 6$.

(٦٢) [AMC10B 2006] المعين $ABCD$ يشبه المعين $BFDE$. مساحة المعين $ABCD$ تساوي 24، $\widehat{BAD} = 60^\circ$. ما مساحة المعين $BFDE$ ؟

(أ) 6 (ب) $4\sqrt{3}$ (ج) 8 (د) $6\sqrt{3}$

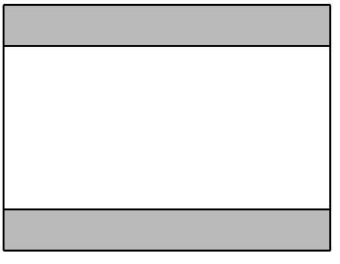


الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن $\widehat{DAB} = \widehat{DCB} = 60^\circ$. ولذا فإن $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 120^\circ$. لاحظ أيضاً أن $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ وكل منهما مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي طول ضلع المعين $ABCD$ وليكن s . إذن، $BD = s$. طول AC يساوي ضعف ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع الذي

طول ضلعه s. إذن، $AC = 2 \times \frac{s\sqrt{3}}{2} = s\sqrt{3}$. نسبة القطر الأكبر للمعين $BFDE$ إلى القطر الأكبر للمعين $ABCD$ هي $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{s}{s\sqrt{3}}$. إذن، النسبة بين المساحتين هي $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$. وبهذا فإن مساحة المعين $BFDE$ تساوي $8 = \frac{24}{3}$.

(٦٣) [AMC10A, AMC12A 2008] نسبة عرض الصورة التلفزيونية إلى ارتفاعها في التلفزيونات القديمة هي 4 إلى 3. أما نسبة عرض الصورة التلفزيونية إلى ارتفاعها في معظم الأفلام ليست 4 إلى 3، ولهذا عند عرض فيلم على شاشة تلفزيون تظهر شريحتان معتمتان لهما الارتفاع نفسه أعلى وأسفل الشاشة، كما هو موضح في الشكل المرفق. لنفرض أن نسبة عرض الصورة التلفزيونية إلى ارتفاعها لأحد الأفلام هي 2 إلى 1 وقطر شاشة التلفزيون القديم المعروضة عليه هو 27 بوصة. كم بوصة ارتفاع كل من الشريحتين المعتمتين ؟

(أ) 2.25 (ب) 2.5 (ج) 2.7 (د) 3

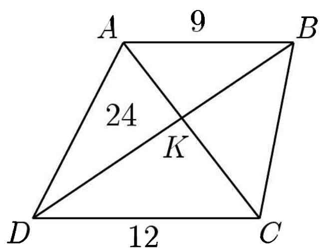


الحل: الإجابة هي (ج): نفرض أن عرض الشاشة هو $4x$ وارتفاعها هو $3x$ وأن عرض صورة الفيلم هو $2y$ وارتفاعها هو y. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن قطر الشاشة هو $5x = \sqrt{9x^2 + 16x^2} = 27$. إذن، $x = \dfrac{27}{5}$. بما أن عرض الشاشة يساوي عرض الصورة فإن $4x = 2y$. أي أن $y = 2x$. إذن، ارتفاع كل من الشريحتين هو

$$\frac{3x - y}{2} = \frac{3x - 2x}{2} = \frac{x}{2} = \frac{27}{10} = 2.7\,.$$

(٦٤) [AMC10A 2008] قاعدتا شبه المنحرف $ABCD$ هما $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ والنقطة K هي نقطة تقاطع القطرين. إذا كان $AB = 9$، $DC = 12$، مساحة $\triangle AKD$ هي 24 فما مساحة شبه المنحرف $ABCD$ ؟

(أ) 92 (ب) 94 (ج) 96 (د) 98



الحل: الإجابة هي (د): بما أن $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ فإن $\triangle CKD \sim \triangle ABK$. إذن

$$\frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KD} = \frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}\,.$$

لاحظ أنه إذا وجد مثلثان يشتركان في الارتفاع فإن النسبة بين مساحتيهما تساوي النسبة بين قاعدتيهما. الآن، ارتفاعا المثلثين $\triangle AKB$ و $\triangle AKD$ من A إلى $\overline{BD}$

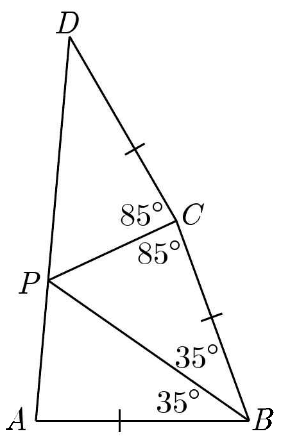
متساويان. إذن، $\frac{[AKB]}{[AKD]} = \frac{KB}{KD} = \frac{3}{4}$. إذن، $[AKB] = \frac{3}{4} \times 24 = 18$.

وبالمثل، $[DKC] = \frac{4}{3} \times 24 = 32$ و $[BKC] = 24$ إذن، $[ABCD] = 24 + 32 + 24 + 18 = 98$.

(٦٥) [AMC10B 2008] $ABCD$ شكل رباعي فيه $AB = BC = CD$ و $\widehat{ABC} = 70^\circ$ و $\widehat{BCD} = 170^\circ$. ما قياس الزاوية $\widehat{BAD}$ ؟

(أ) 80° (ب) 85° (ج) 90° (د) 95°

الحل: الإجابة هي (ب): ارسم منصف كل من الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{BCD}$ ليتلاقيا في P كما هو مبين في الشكل أدناه.



سنبرهن الآن أن $P \in \overline{AD}$. لاحظ أن $\triangle ABP \equiv \triangle CBP$ بضلعين والزاوية المحصورة. أيضاً، $\triangle CBP \equiv \triangle CDP$. الآن،

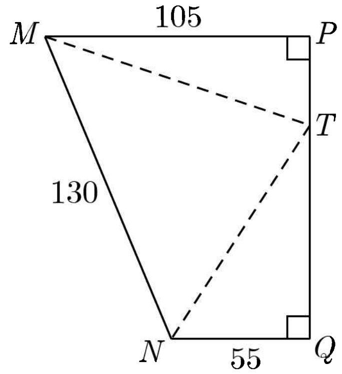
$\widehat{CPB} = 180^\circ - (85^\circ + 35^\circ) = 60^\circ$. $\widehat{PAB} = \widehat{PCB} = 85^\circ$.

$\widehat{APB} = 60^\circ$، $\widehat{CDP} = 35^\circ$، $\widehat{CPD} = 60^\circ$. إذن، $\widehat{APD} = 180^\circ$ ومن ثم

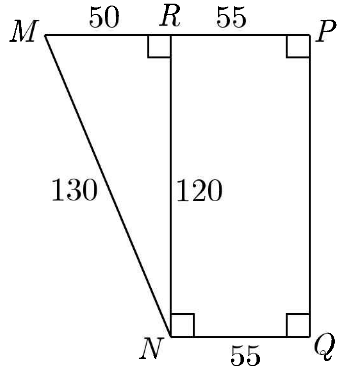
$\overline{AD} \ni P$. وبهذا فإن $\widehat{BAD} = \widehat{PAB} = 85°$.

(٦٦) [Cayley 1999] يمر خط الغاز الرئيس خلال القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$. من نقطة T على $\overline{PQ}$ يتفرع خطان، أحدهما لتزويد البيت M والثاني لتزويد البيت N بالغاز. ما أصغر مجموع لطولي الخطين $TM + TN$ ؟

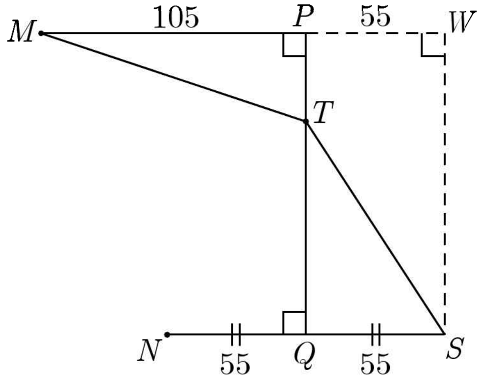
(أ) 200 (ب) 202 (ج) 210 (د) 214



الحل: الإجابة هي (أ): نعين أولاً النقطة R على $\overline{PM}$ بحيث يكون $RPQN$ مستطيلاً. عندئذ، $MR = 105 - 55 = 50$. وبهذا فإن $RN = \sqrt{130^2 - 50^2} = 120$.



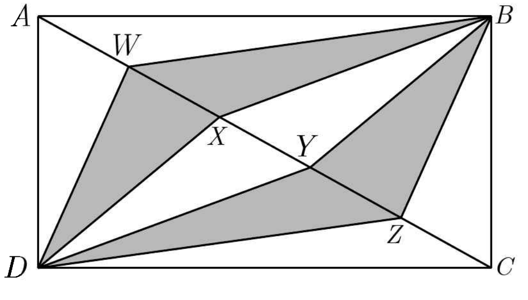
الآن، نفرض أن S هي صورة انعكاس N على $\overline{PQ}$. بما أن $\triangle TNQ \equiv \triangle TSQ$ فإن $TN = TS$. ولذا فإن $TM + TN = TM + TS$.



الآن، من الواضح أن $TM + TS$ يكون أصغرياً عندما تكون النقاط M، T، S على استقامة واحدة. وفي هذه الحالة فإن $TM + TS = MS$. وبإنشاء المثلث $\triangle MSW$ نجد أن $MS = \sqrt{160^2 + 120^2} = 200$.

(٦٧) [Cayley 1998] طول المستطيل $ABCD$ يساوي 9 وعرضه يساوي 5. تقسم النقاط W، X، Y، Z القطر $\overline{AC}$ إلى خمس قطع متساوية الأطوال. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $\frac{36}{5}$ (ب) 18 (ج) 21 (د) 36



الحل: الإجابة هي (ب): لاحظ أولاً أن مساحة $\triangle ABC$ هي $\frac{45}{2} = 5 \times 9 \times \frac{1}{2} = [ABC]$. الآن، جميع المثلثات $\triangle ABW$، $\triangle WBX$، $\triangle XBY$، $\triangle YBZ$، $\triangle ZBC$ لها القواعد والارتفاعات نفسها. مساحة كل من هذه المثلثات يساوي $\frac{9}{2} = \frac{45}{2} \times \frac{1}{5}$. بالمثل مساحة كل من المثلثات $\triangle ADW$، $\triangle WDX$، $\triangle XDY$، $\triangle YDZ$، $\triangle ZDC$ تساوي $\frac{9}{2}$. إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي $18 = \frac{9}{2} \times 4$.

مسائل غير محلولة

(١) [AMC10B 2007] $ABCDE$ خماسي محدب متساوي الأضلاع فيه $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$. ما قياس الزاوية $\widehat{E}$ ؟

(أ) $90°$ (ب) $108°$ (ج) $120°$ (د) $150°$

(٢) [AMC10B, AMC12B 2007] $ABCD$ شكل رباعي فيه $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 3\widehat{C} = 4\widehat{D}$. قياس $\widehat{A}$ أقرب إلى

(أ) $125°$ (ب) $144°$ (ج) $153°$ (د) $173°$

(٣) [AMC10A 2008] مربع S_1 مساحته 16. نصفنا كل ضلع من أضلاعه لإنشاء مربع أصغر S_2 رؤوسه نقاط منتصفات أضلاع S_1 . أنشأنا المربع S_3 من S_2 بالطريقة نفسها. ما مساحة المربع S_3 ؟

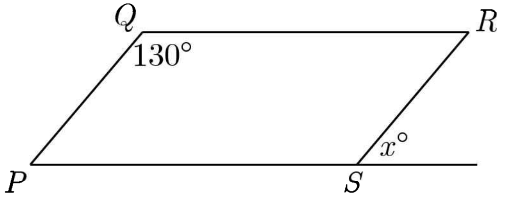
(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٤) [AMC10B, AMC12B 2009] حديقة مستطيلة قطعنا منها مثلثين متطابقين متساويي الساقين لزراعتهما بالورد كما هو مبين في الشكل المرفق. الجزء المتبقي من الحديقة هو شبه منحرف طول ضلعيه المتوازيين 15 و 25 . نسبة مساحة المنطقة المزروعة بالورد إلى مساحة شبه المنحرف هي:

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{2}$

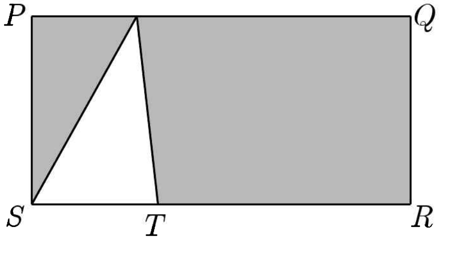
(٥) [Aust.MC 1992] $PQRS$ متوازي أضلاع فيه $\widehat{Q} = 130^\circ$. ما قياس الزاوية $\widehat{x}$ ؟

(أ) 30° (ب) 45° (ج) 50° (د) 130°



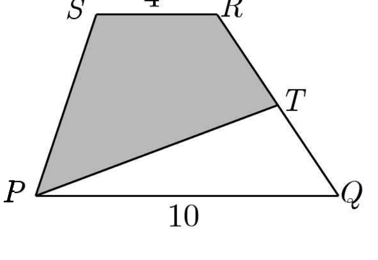
(٦) [Aust.MC 1993] في المستطيل $PQRS$ المبين في الشكل المرفق، $PQ = 2QR$ ، $ST = 6$ ، $TR = 12$. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

(أ) 54 (ب) 81 (ج) 135 (د) 150



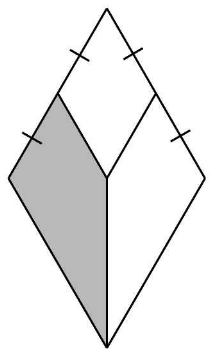
(٧) [Aust.MC 1994] $PQRS$ شبه منحرف، $SR = 4$ ، $PQ = 10$ ، ارتفاعه يساوي 6، T منتصف $\overline{RQ}$. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

(أ) 26 (ب) 27 (ج) 34 (د) 42



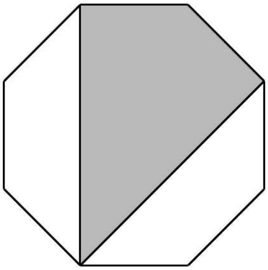
(٨) [Aust.MC 1996] يتكون شعار إحدى شركات النشر من معين مرسوم داخله الحرف Y كما هو مبين في الشكل حيث نقطة التقاء خطوط الحرف Y هي مركز المعين. نسبة مساحة المنطقة المظللة من الشعار إلى مساحة الشعار الكلية تساوي:

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{3}{8}$ (د) $\frac{5}{12}$



(٩) [Aust.MC 1993] الشكل المرفق ثماني منتظم طول ضلعه 4. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

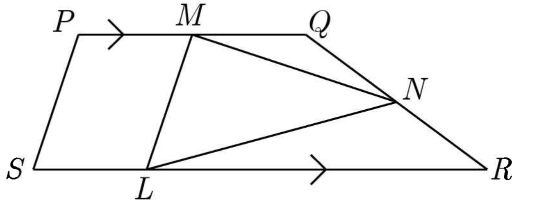
(أ) 16 (ب) $8\left(1+\sqrt{2}\right)$ (ج) 24 (د) $16\left(1+\sqrt{2}\right)$



(١٠) [Aust.MC 1998] $PQRS$ شبه منحرف فيه $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$ ، $SR = 2PQ$ ،

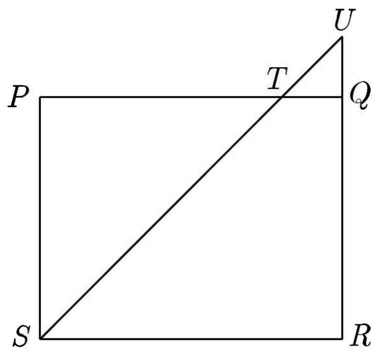
$PM = MQ$، $QN = NR$، $LR = 3LS$. إذا كان $PQ = 1$ فإن نسبة مساحة $\triangle LMN$ إلى مساحة شبه المنحرف $PQRS$ هي:

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$



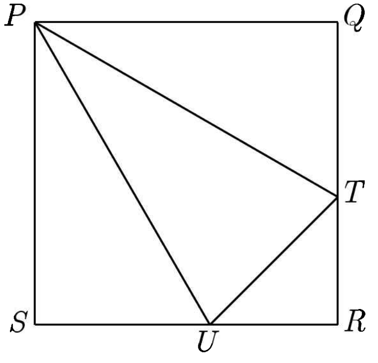
(١١) [Aust.MC 1992] مساحة المستطيل $PQRS$ تساوي 80 ومساحة المثلث $\triangle SRU$ تساوي 50 . ما مساحة المثلث $\triangle TUQ$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 5 (د) 8



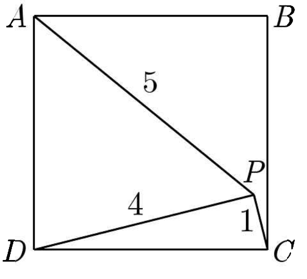
(١٢) [Aust.MC 1992] في الشكل المرفق، $PQRS$ مربع، $\triangle PTU$ متساوي الساقين فيه $PT = PU$، $\overline{PT}$ و $\overline{PU}$ يثلثان الزاوية $\widehat{P}$. إذا كانت مساحة المثلث $\triangle PTU$ تساوي 1 فإن مساحة المربع $PQRS$ تساوي:

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5



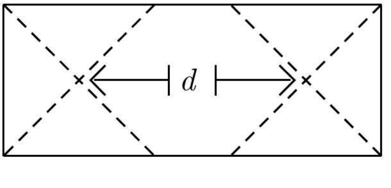
(١٣) [Aust.MC 1994] لتكن P نقطة داخل المربع $ABCD$ حيث $AP = 5$ ، $PC = 1$ ، $DP = 4$. ما مساحة المربع $ABCD$ ؟

(أ) 9 (ب) 15 (ج) 17 (د) 19



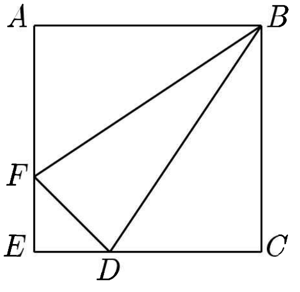
(١٤) [Aust.MC 1996] القطع المستقيمة المنقطة منصفات لزوايا مستطيل طوله m وعرضه n . المسافة d تساوي:

(أ) $m - 0.5n$ (ب) $m - 2n$ (ج) $m - n$ (د) $m - \sqrt{2}n$



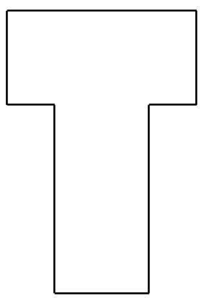
(١٥) [AMC8 2008] في المربع $ABCE$، $AF = 2FE$، $CD = 2DE$.
نسبة مساحة المثلث $\triangle BFD$ إلى مساحة المربع $ABCE$ هي:

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{2}{9}$ (ج) $\frac{5}{18}$ (د) $\frac{1}{3}$



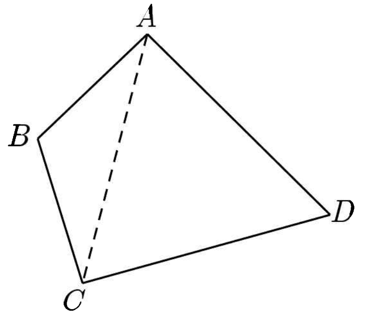
(١٦) [AMC8 2006] كونا الحرف T المبين في الشكل المرفق بوضع مستطيلين من النوع 2×4 بجانب بعضهما البعض. ما محيط الحرف T ؟

(أ) 16 (ب) 20 (ج) 22 (د) 24



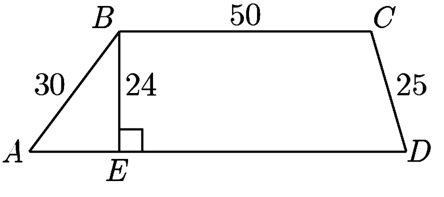
(١٧) [AMC8 2005] في الشكل الرباعي $ABCD$، $AB = BC = 10$، $CD = DA = 17$، $\widehat{ADC} = 60^\circ$. ما طول القطر AC ؟

(أ) 17 (ب) 17.5 (ج) 18 (د) 18.5



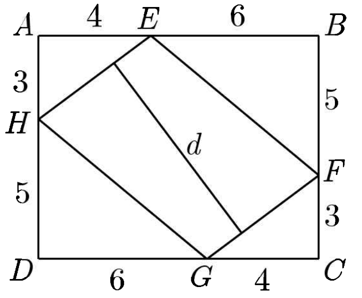
(١٨) [AMC8 2005] ما محيط شبه المنحرف $ABCD$ المبين في الشكل المرفق ؟

(أ) 180 (ب) 188 (ج) 196 (د) 200



(١٩) [AMC8 2004] في الشكل المرفق $ABCD$ مستطيل، $EFGH$ متوازي أضلاع، d عمودي على كل من $\overline{HE}$ و $\overline{FG}$. ما طول d ؟

(أ) 7.1 (ب) 7.6 (ج) 7.8 (د) 8.1

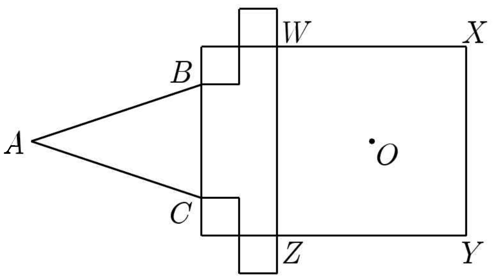


(٢٠) [AMC8 2003] مساحة شبه المنحرف $ABCD$ تساوي 164، ارتفاعه 8، $AB = 10$، $CD = 20$. ما طول BC ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 13 (د) 14

(٢١) [AMC8 2003] في الشكل المرفق، مساحة المربع $WXYZ$ تساوي 25. طول ضلع كل من المربعات الأربعة الصغيرة يساوي 1 وأضلاعها إما موازية لأضلاع المربع الكبير أو تنطبق عليها. في $\triangle ABC$، $AB = BC$ وعند ثنيه على الضلع $\overline{BC}$ تنطبق النقطة A على مركز المربع $WXYZ$ في النقطة O. ما مساحة $\triangle ABC$ ؟

(أ) $\frac{15}{4}$ (ب) $\frac{21}{4}$ (ج) $\frac{27}{4}$ (د) $\frac{21}{2}$



(٢٢) [AHSME 1966] طول مستطيل $ABCD$ يساوي 5 وعرضه يساوي 3. قسمنا القطر $\overline{AC}$ إلى ثلاث قطع متساوية $AE = EF = FC$. مساحة المثلث $\triangle BEF$ تساوي:

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{5}{3}$ (ج) $\frac{5}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{34}}{3}$

(٢٣) [AHSME 1967] $ABCD$ شكل رباعي قطراه $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ يتقاطعان في النقطة O. إذا كان $BO = 4$ ، $OD = 6$ ، $AO = 8$ ، $OC = 3$ ، $AB = 6$ فإن AD يساوي:

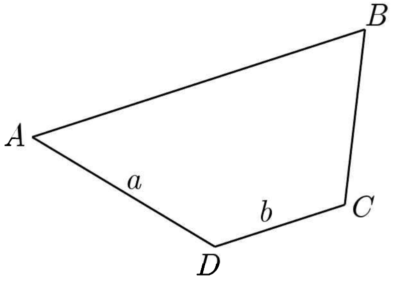
(أ) 9 (ب) $6\sqrt{3}$ (ج) $8\sqrt{2}$ (د) $\sqrt{166}$

(٢٤) [AHSME 1968] مضلع محدب عدد أضلاعه n وقياس زواياه الداخلية متتابعة حسابية فرقها المشترك يساوي 5. إذا كان قياس الزاوية الداخلية الكبرى يساوي $160°$ فإن n يساوي:

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 12 (د) 16

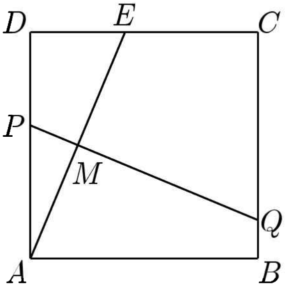
(٢٥) [AHSME 1970] في الشكل المرفق، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\widehat{D} = 2\widehat{B}$ ، $AD = a$ ، $DC = b$. طول AB يساوي:

(أ) $\frac{1}{2}a + 2b$ (ب) $2a - b$ (ج) $4b - \frac{1}{2}a$ (د) $a + b$



(٢٦) [AHSME 1972] طول ضلع المربع $ABCD$ يساوي 12، E نقطة على $\overline{DC}$ حيث $DE = 5$ ، $\overline{PQ}$ منصف عمودي للقطعة $\overline{AE}$ ويلاقي $\overline{AE}$ في النقطة M. $\frac{PM}{MQ}$ يساوي:

(أ) $\frac{5}{12}$ (ب) $\frac{5}{13}$ (ج) $\frac{5}{19}$ (د) $\frac{5}{21}$

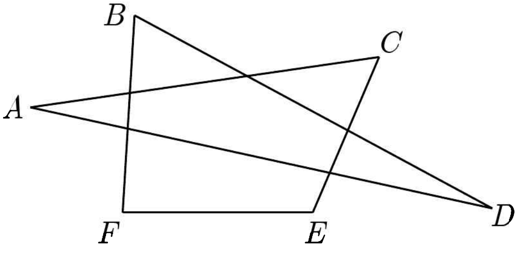


(٢٧) [AHSME 1972] $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ حيث $AB = 2DC$. E نقطة تقاطع القطرين. إذا كان $AC = 11$ فإن EC يساوي:

(أ) $3\frac{2}{3}$ (ب) $3\frac{3}{4}$ (ج) 4 (د) $4\frac{1}{4}$

(٢٨) [AHSME 1972] مجموع قياس الزوايا $\widehat{A}$ ، $\widehat{B}$ ، $\widehat{C}$ ، $\widehat{D}$ ، $\widehat{E}$ ، $\widehat{F}$ في الشكل المرفق يساوي $90n$. ما قيمة n ؟

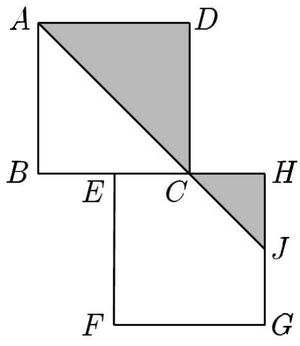
(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5



(٢٩) [Gauss 2011] مساحة المربع $ABCD$ تساوي مساحة المربع $EFGH$. الرؤوس B ، E ، C ، H على استقامة واحدة. مددنا القطر $\overline{AC}$ إلى

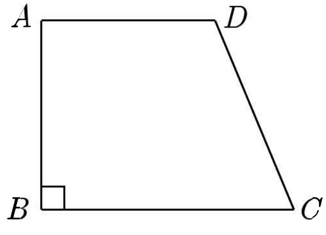
نقطة منتصف $\overline{HG}$ وهي J. نسبة مساحة المنطقة المظللة إلى المساحة الكلية هي:

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{5}{16}$ (ج) $\frac{2}{5}$ (د) $\frac{3}{8}$



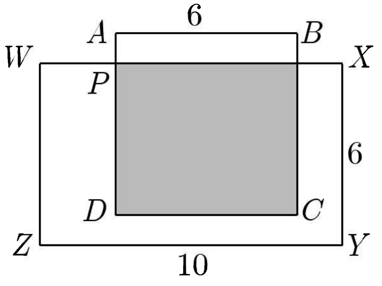
(٣٠) [Gauss 2011] ارتفاع شبه المنحرف القائم $ABCD$ يساوي 12، $AB = 16$، مساحته تساوي 162. ما محيطه ؟

(أ) 50 (ب) 51 (ج) 52 (د) 56



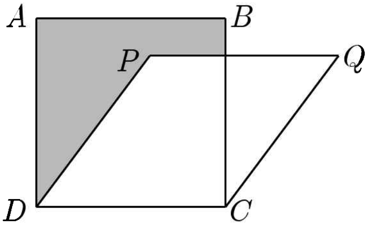
(٣١) [Gauss 2007] في الشكل المرفق، $ABCD$ مربع طول ضلعه 6، $WXYZ$ مستطيل، $ZY = 10$، $XY = 6$. $\overline{AD} \perp \overline{WX}$. إذا كانت مساحة المنطقة المظللة تساوي نصف مساحة $WXYZ$ فما طول AP ؟

(أ) 1 (ب) 1.5 (ج) 2 (د) 2.5

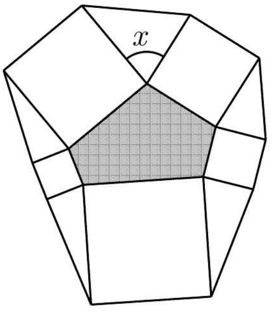


(٣٢) [Gauss 2003] مساحة المربع $ABCD$ المبين في الشكل تساوي 25. إذا كان $PQCD$ معيناً مساحته 20 فما مساحة المنطقة المظللة:

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 11 (د) 12



(٣٣) [Gauss 1998] أحطنا خماسياً متساوي الزوايا بمثلثات ومربعات كما هو مبين في الشكل. ما قياس الزاوية x ؟



(أ) 60° (ب) 72° (ج) 75° (د) 90°

(٣٤) [MAΘ 1990] ما مساحة معين طول ضلعه يساوي 13 وطول أحد قطريه يساوي 24 ؟

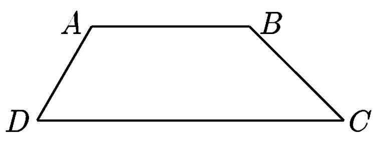
(أ) 120 (ب) 180 (ج) 210 (د) 240

(٣٥) [MAΘ 1987] قطر مزرعة مستطيلة الشكل يساوي 37. طول المزرعة ينقص بمقدار 1 عن ثلاثة أمثال عرضها. ما طول السلك الشائك الذي نحتاجه لإحاطة المزرعة ؟

(أ) 47 (ب) 63 (ج) 82 (د) 94

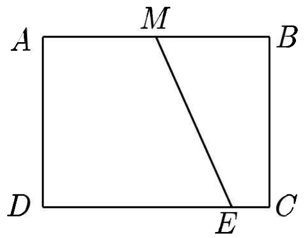
(٣٦) [AHSME 1984] في الشكل المرفق، $ABCD$ شبه منحرف، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$، $AB = 5$ ، $BC = 3\sqrt{2}$ ، $\widehat{BCD} = 45^\circ$ ، $\widehat{CDA} = 60^\circ$. ما طول DC ؟

(أ) 8 (ب) $8+\sqrt{3}$ (ج) 9 (د) $9+\sqrt{3}$



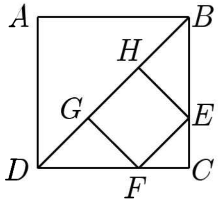
(٣٧) [Mathcounts 1984] في الشكل المرفق، $ABCD$ مستطيل فيه $AM = MB = 12$ ، $BC = 18$ ، $DE = x$. ما قيمة x التي تجعل مساحة المنطقة $AMED$ تساوي ضعف مساحة المنطقة $MBCE$ ؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 20 (د) 25



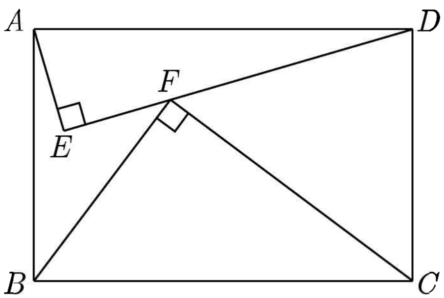
(٣٨) [Mandelbrot #1] في الشكل المرفق كل من $ABCD$ و $EFGH$ مربع حيث $AB = 1$. مساحة $EFGH$ تساوي:

(أ) $\frac{1}{9}$ (ب) $\frac{2}{9}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{4}{9}$



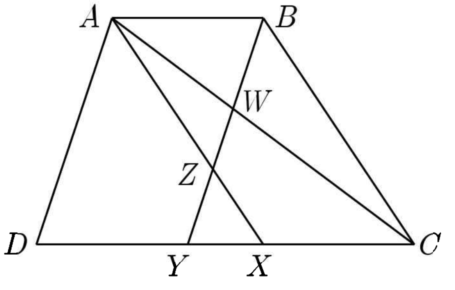
(٣٩) [Pascal 2005] في الشكل المرفق، أنشأنا المثلثين القائمين $\triangle AED$ ، $\triangle BFC$ داخل المستطيل $ABCD$ حيث F نقطة واقعة على $\overline{DE}$. إذا كان $AE = 21$ ، $ED = 72$ ، $BF = 45$ فما طول AB ؟

(أ) 48 (ب) 50 (ج) 52 (د) 54



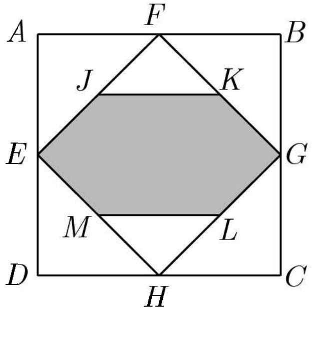
(٤٠) [Pascal 2004] في الشكل المرفق $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $AB = 2$ ، $CD = 5$. $\overline{BC} \parallel \overline{AX}$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BY}$. نسبة مساحة $\triangle AZW$ إلى مساحة شبه المنحرف $ABCD$ هي:

(أ) $\frac{7}{105}$ (ب) $\frac{8}{105}$ (ج) $\frac{9}{105}$ (د) $\frac{10}{105}$

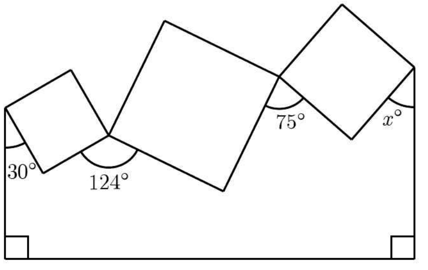


(٤١) [Pascal 2000] مساحة المربع $ABCD$ تساوي 64 . رؤوس المربع $EFGH$ هي منتصفات أضلاع المربع $ABCD$. J ، K ، L ، M هي منتصفات أضلاع المربع $EFGH$. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

(أ) 16 (ب) 20 (ج) 24 (د) 32



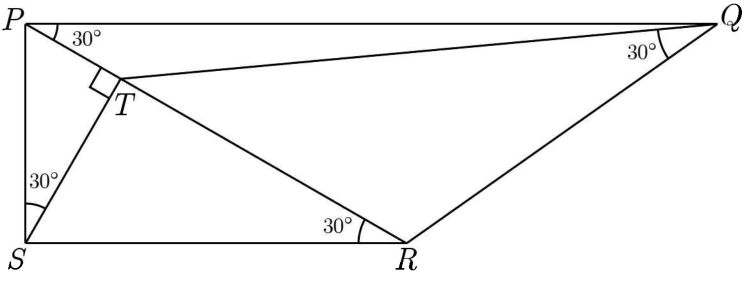
(٤٢) [Aust.MC 2000] ثبتنا المربعات الثلاثة المبينة في الشكل المرفق بعمودين رأسيين. ما قياس الزاوية x ؟



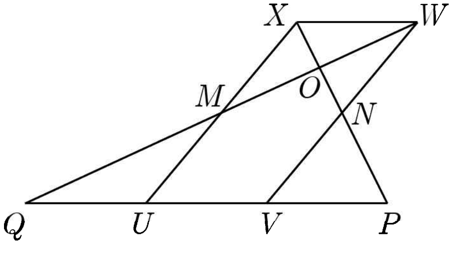
(أ) $39°$ (ب) $41°$ (ج) $43°$ (د) $46°$

(٤٣) [Aust.MC 2000] $PQRS$ شكل رباعي فيه $\widehat{QPS} = \widehat{PSR} = 90°$.
T نقطة على القطر $\overline{PR}$، $\overline{ST} \perp \overline{PR}$، $PS = 1$. ما طول PQ ؟

(أ) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (ب) $2\sqrt{3}-1$ (ج) $\sqrt{3}+1$ (د) $2\sqrt{3}+1$



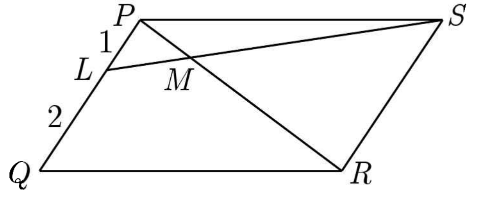
(٤٤) [Aust.MC 2002] في الشكل المرفق، $UVWX$ متوازي أضلاع مساحته 24 . M منتصف $\overline{UX}$ و N منتصف $\overline{VW}$. مساحة $\triangle QPO$ تساوي:



(أ) 21 (ب) 24 (ج) 27 (د) 36

(٤٥) [Aust.MC 2005] $PQRS$ متوازي أضلاع، L نقطة على $\overline{PQ}$ حيث $PL = 1$ و $LQ = 2$. M نقطة تقاطع $\overline{PR}$ و $\overline{LS}$. نسبة طول PM إلى طول MR هي:

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{3}{5}$



(٤٦) [MAΘ 1992] $ABCD\cdots$ مضلع منتظم فيه $\widehat{ACD} = 120°$. ما عدد أضلاعه ؟

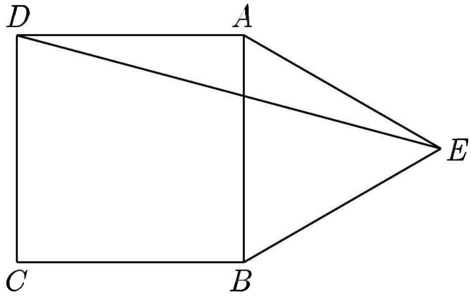
(أ) 5 (ب) 6 (ج) 8 (د) 9

(٤٧) [AHSME 1973] مجموع زوايا مضلع محدب ما عدا زاوية واحدة يساوي $2190°$. عدد أضلاع المضلع يساوي:

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 12 (د) 15

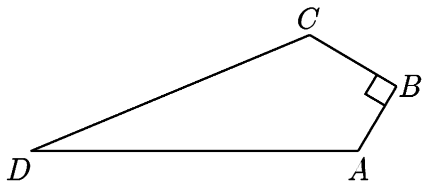
(٤٨) [AHSME 1979] في الشكل المرفق، $ABCD$ مربع، $\triangle ABE$ متساوي الأضلاع. قياس $\widehat{AED}$ يساوي:

(أ) $15°$ (ب) $20°$ (ج) $22°$ (د) $25°$



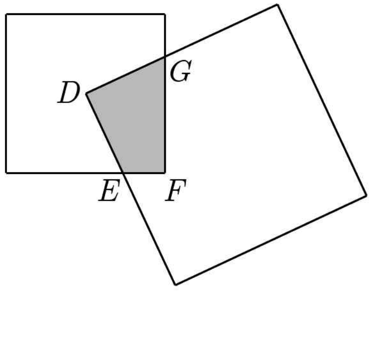
(٤٩) [AHSME 1980] في الشكل الرباعي المحدب المرفق، $AB = 3$ ، $BC = 4$ ، $CD = 12$ ، $AD = 13$ ، $\widehat{CBA} = 90°$. ما مساحة الشكل الرباعي $ABCD$ ؟

(أ) 24 (ب) 30 (ج) 36 (د) 42



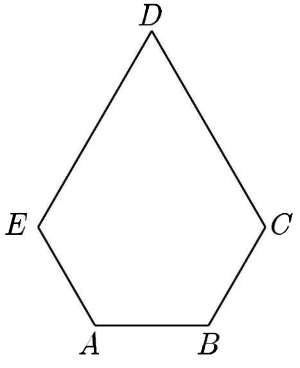
(٥٠) [MAΘ 1987] يتقاطع مربع طول ضلعه 4 مع مربع طول ضلعه 3 كما هو مبين في الشكل حيث D مركز المربع الصغير. ما مساحة المنطقة المظللة $DGFE$ ؟

(أ) 2 (ب) 2.25 (ج) 2.5 (د) 2.75



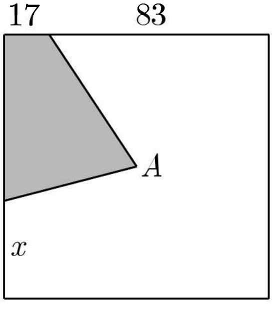
(٥١) [AHSME 1993] $ABCDE$ خماسي محدب فيه $\widehat{A} = \widehat{B} = 120°$ ، $AE = AB = BC = 2$ ، $CD = DE = 4$. ما مساحة $ABCDE$ ؟

(أ) 7 (ب) $7\sqrt{3}$ (ج) 8 (د) $8\sqrt{3}$



(٥٢) [Mathcounts 1992] في الشكل المرفق، A مركز مربع طول ضلعه يساوي 100. ما قيمة x إذا كانت مساحة المنطقة المظللة تساوي $\frac{1}{5}$ مساحة المربع ؟

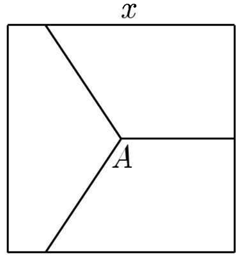
(أ) 32 (ب) 35 (ج) 37 (د) 40



(٥٣) [AHSME 1998] طول ضلع المربع المرفق يساوي 1. قسمنا المربع إلى ثلاث

مناطق مساحاتها متساوية كما هو مبين في الشكل حيث A مركز المربع. ما قيمة x ؟

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{5}{6}$

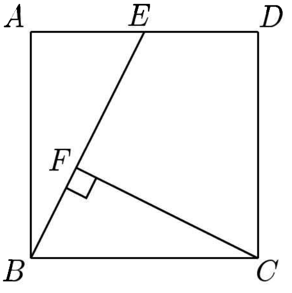


(٥٤) [AHSME 1998] الشكل الرباعي $ABCD$ فيه، $\widehat{A} = 120^\circ$، $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$، $AB = 13$، $AD = 46$. ما طول AC ؟

(أ) 60 (ب) 62 (ج) 64 (د) 65

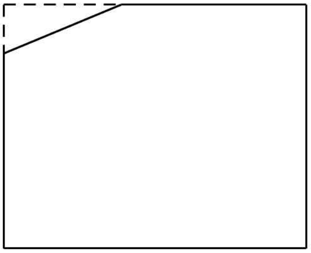
(٥٥) [AHSME 1997] $ABCD$ مربع طول ضلعه 2، E نقطة منتصف $\overline{AD}$، F نقطة على $\overline{BE}$، $\overline{BE} \perp \overline{CF}$. مساحة الشكل الرباعي $CDEF$ تساوي:

(أ) 2 (ب) $\frac{11}{5}$ (ج) $\sqrt{5}$ (د) $\frac{9}{4}$



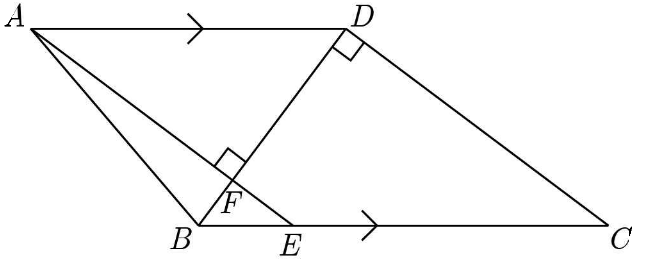
(٥٦) [AHSME 1995] كونا خماسياً بقطع مثلث من زاوية مستطيل كما هو مبين في الشكل. أطوال أضلاع الخماسي هي 13، 19، 20، 25، 31 (ليس بالضرورة بهذا الترتيب). مساحة الخماسي تساوي:

(أ) 459　　(ب) 600　　(ج) 720　　(د) 745



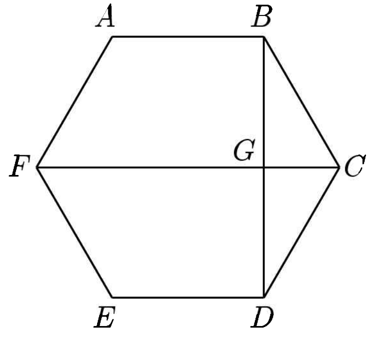
(٥٧) [Cayley 2002] في شبه المنحرف $ABCD$ المبين في الشكل $\overline{DC} \perp \overline{BD}$، $\overline{AF} \perp \overline{BD}$. $AB = 41$، $AD = 50$، $BF = 9$. ما مساحة الرباعي $FECD$ ؟

(أ) 900　　(ب) 960　　(ج) 1300　　(د) 1560



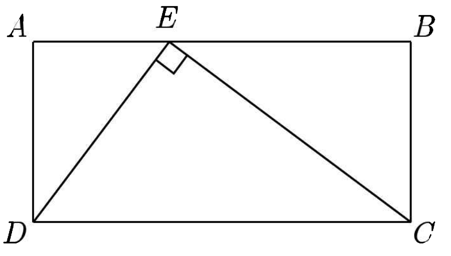
(٥٨) [Cayley 2000] في السداسي المنتظم $ABCDEF$، G نقطة تقاطع القطرين $\overline{FC}$ و $\overline{BD}$ ما قيمة $\frac{[FEDG]}{[BCG]}$ ؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 7



(٥٩) [Fermat 2004] في الشكل المرفق، $ABCD$ مستطيل، E نقطة على $\overline{AB}$، $\widehat{CED} = 90°$، $DE = 3$، $EC = 4$. ما طول AD ؟

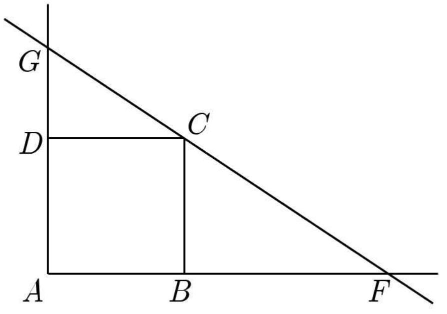
(أ) 1.8 (ب) 2.2 (ج) 2.4 (د) 2.8



(٦٠) [Euclid 2007] في الشكل المرفق، القطعة المستقيمة $\overline{FCG}$ تمر برأس المربع $ABCD$ حيث F نقطة على امتداد $\overline{AB}$ و G نقطة على امتداد $\overline{AD}$.

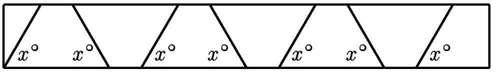
$\dfrac{1}{AG} + \dfrac{1}{AF}$ يساوي:

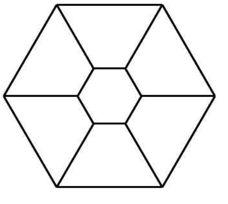
(أ) $\dfrac{1}{AB}$ (ب) $\dfrac{1}{2AB}$ (ج) $\dfrac{1}{GD}$ (د) $\dfrac{1}{2GD}$



(٦١) [Euclid 2000] قطعنا ست قطع متطابقة من لوح خشبي كما هو مبين في الشكل. قياس كل من زوايا القطع يساوي $x°$. أنشأنا من هذه القطع إطاراً سداسياً كما هو مبين. ما قياس الزاوية $\hat{x}$ ؟

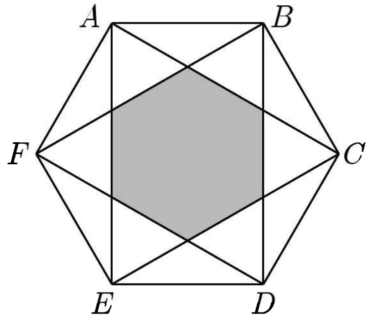
(أ) $30°$ (ب) $40°$ (ج) $50°$ (د) $60°$





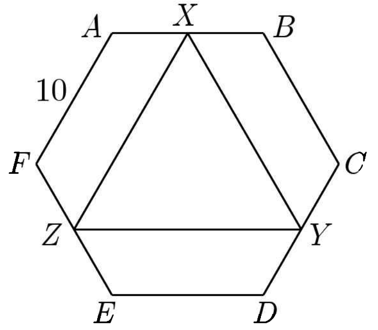
(٦٢) [Euclid 2003] في الشكل المرفق $ABCDEF$، سداسي منتظم مساحته 36 . الشكل المظلل هو سداسي ناتج عن تقاطع المثلثين المتساويي الأضلاع $\triangle ACE$ و $\triangle BDF$. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 14



(٦٣) [Euclid 2002] في الشكل المرفق، $ABCDEF$ سداسي منتظم طول ضلعه 10. إذا كانت X ، Y، Z نقاط منتصفات $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$، $\overline{EF}$ على التوالي فما طول XZ ؟

(أ) 12 (ب) 13 (ج) 14 (د) 15

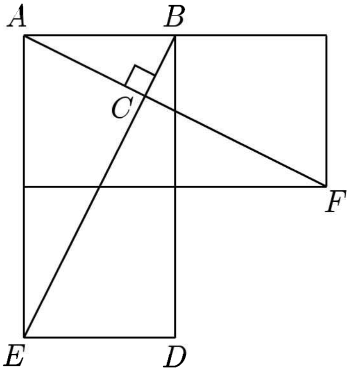


(٦٤) [AMC10B 2012] في المستطيل $ABCD$، $AB = 6$ ، $AD = 30$ ، G منتصف $\overline{AD}$. مددنا $\overline{AB}$ بمقدار وحدتين إلى النقطة E . F نقطة تقاطع $\overline{ED}$ و $\overline{BC}$. ما مساحة $BFDG$ ؟

(أ) $\frac{133}{2}$ (ب) 67 (ج) $\frac{135}{2}$ (د) 68

(٦٥) [AMC10A 2012] في الثلاثة مربعات المتطابقة والتي طول ضلع كل منها يساوي 1، C نقطة تقاطع القطرين $\overline{AF}$ و $\overline{BE}$ كما هو مبين في الشكل. ما مساحة المثلث $\triangle ABC$ ؟

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{5}$ (ج) $\frac{2}{9}$ (د) $\frac{1}{3}$



إجابات المسائل غير المحلولة

(١) د	(٢) د	(٣) د	(٤) ب	(٥) ج
(٦) ج	(٧) ب	(٨) ج	(٩) د	(١٠) ب
(١١) أ	(١٢) ب	(١٣) ج	(١٤) ج	(١٥) ج
(١٦) ب	(١٧) أ	(١٨) أ	(١٩) ب	(٢٠) أ
(٢١) ج	(٢٢) ج	(٢٣) د	(٢٤) أ	(٢٥) د
(٢٦) ج	(٢٧) أ	(٢٨) ج	(٢٩) ب	(٣٠) ج
(٣١) أ	(٣٢) ج	(٣٣) ب	(٣٤) أ	(٣٥) د
(٣٦) ب	(٣٧) ج	(٣٨) ب	(٣٩) ب	(٤٠) ب
(٤١) ج	(٤٢) ب	(٤٣) أ	(٤٤) ج	(٤٥) ب
(٤٦) د	(٤٧) د	(٤٨) أ	(٤٩) ج	(٥٠) ب
(٥١) ب	(٥٢) ج	(٥٣) د	(٥٤) ب	(٥٥) ب
(٥٦) د	(٥٧) ب	(٥٨) ب	(٥٩) ج	(٦٠) أ
(٦١) د	(٦٢) ج	(٦٣) د	(٦٤) ج	(٦٥) ب