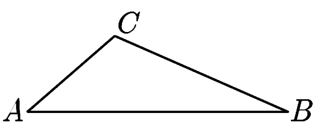
الفصل الثاني

المثلثات
Triangles

المثلثات من المفاهيم الأساسية في الهندسة وهي حالة خاصة من المضلعات التي سندرسها في الفصل الثالث ولكننا نفرد هذا الفصل لدراسة المثلثات لما لها من خواص مميزة.

المثلث L نرمز له عادة بالرمز $\triangle$ هو اتحاد ثلاث قطع مستقيمة تتحدد بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. تسمى النقاط A، B، C رؤوس المثلث والقطع المستقيمة $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ أضلاع المثلث وزوايا المثلث هي $\widehat{A}$، $\widehat{B}$، $\widehat{C}$. تصنف المثلثات حسب أضلاعها وحسب زواياها:



(١) **المثلث الحاد الزوايا (acute triangle)**: هو المثلث الذي تكون جميع زواياه حادة.

(٢) **المثلث القائم الزاوية (right triangle)**: هو المثلث الذي تكون إحدى زواياه قائمة. يسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة الوتر (hypotenuse) ويسمى كل من ضلعي القائمة ساقاً (leg).

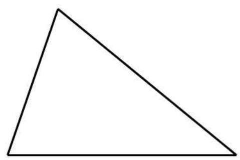
(٣) **المثلث المنفرج الزاوية (obtuse triangle)**: هو المثلث الذي إحدى

زواياه منفرجة

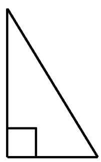
(٤) **المثلث المختلف الأضلاع (scalene triangle)**: هو المثلث الذي أطوال أضلاعه الثلاثة مختلفة.

(٥) **المثلث المتساوي الساقين (isosceles triangle)**: هو المثلث الذي يكون فيه ضلعان متساويان والزاويتان المقابلتان للضلعين المتساويين متساويتان أيضاً. يسمى كل من الضلعين المتساويين ساقاً ويسمى الضلع الثالث قاعدة المثلث (base) كما تسمى الزاوية المقابلة للقاعدة بزاوية الرأس وتسمى كل من الزاويتين المتساويتين بزاوية القاعدة.

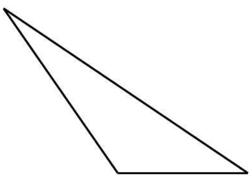
(٦) **المثلث المتساوي الأضلاع (equilateral triangle)**: هو المثلث الذي تكون جميع أضلاعه متساوية وفي هذه الحالة تكون جميع زواياه متساوية وقياس كل منها $60°$ (انظر المبرهنة أدناه).



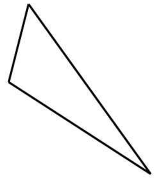
مثلث حاد الزوايا



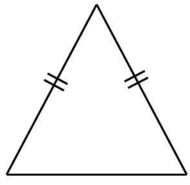
مثلث قائم الزاوية



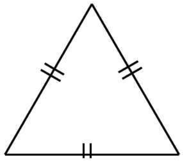
مثلث منفرج الزاوية



مثلث مختلف الأضلاع



مثلث متساوي الساقين

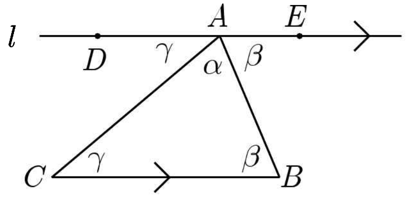


مثلث متساوي الأضلاع

إحدى أهم الحقائق عن المثلث هي أن مجموع زواياه يساوي 180° وهي فحوى المبرهنة التالية

مبرهنة (١): مجموع زوايا المثلث يساوي 180°.

البرهان: لنفرض أن ABC مثلث زواياه α، β، γ كما هو مبين في الشكل أدناه. ارسم المستقيم l المار بالرأس A والموازي للضلع BC.

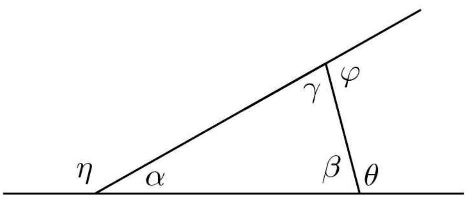


الزاويتان $\widehat{ACB}$ و $\widehat{CAD}$ متساويتان بالتبادل. وأيضاً الزاويتان $\widehat{ABC}$ و $\widehat{BAE}$ متساويتان بالتبادل. إذن،

$$\gamma + \alpha + \beta = 180^\circ \qquad \text{(زاوية مستقيمة)}$$

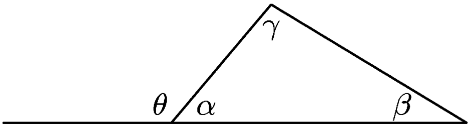
وبهذا يكون مجموع زوايا المثلث يساوي 180°. $\square$

إذا مددنا أحد أضلاع المثلث فتسمى الزاوية التي تنشأ عن ذلك زاوية خارجية (exterior angle) فمثلاً الزوايا θ، φ، η في الشكل أدناه هي زوايا خارجية.



مبرهنة (٢) [مبرهنة الزاوية الخارجة]: قياس زاوية خارجة في مثلث تساوي مجموع قياس الزاويتين غير المجاورتين لها.

البرهان:



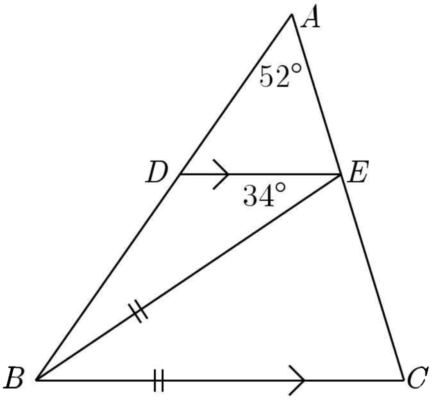
سنبرهن أن $\theta = \gamma + \beta$. لاحظ أن

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad \text{(مجموع زوايا مثلث)}$$

$$\alpha + \theta = 180^\circ \qquad \text{(زاوية مستقيمة)}$$

إذن، $\theta = \gamma + \beta$. □

مثال (١): في المثلث $\triangle ABC$، DE و BC متوازيان، $BE = BC$ إذا كان $\widehat{BED} = 34^\circ$ و $\widehat{BAE} = 52^\circ$ فجد $\widehat{ABE}$.



الحل: بما أن $DE \parallel BC$ فإن $y = \widehat{EBC} = 34^\circ$. وبما أن $\triangle BEC$ متساوي الساقين فإن $\widehat{BEC} = \widehat{BCE}$ ولتكن كل منهما x. إذن،

$y + x + x = 180°$ (مجموع زوايا مثلث)

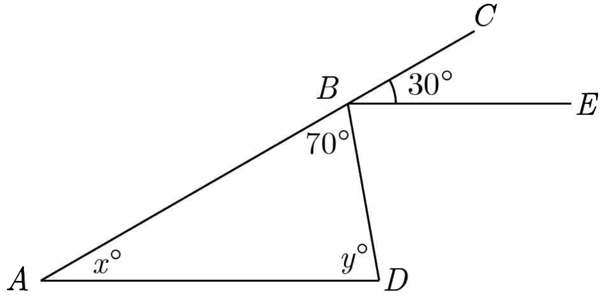
وبهذا نرى أن $x = \frac{1}{2}(180° - y) = \frac{1}{2}(180° - 34°) = 73°$.

الآن،

$x = 52° + \widehat{ABE}$ (خارجة عن المثلث $\triangle ABE$)

إذن، $\widehat{ABE} = x - 52° = 73° - 52° = 21°$. ◇

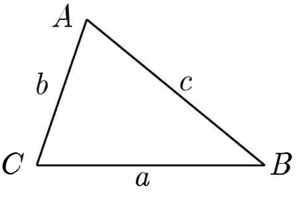
مثال (٢): في الشكل أدناه ABC خط مستقيم و BE يوازي AD . جد قياس الزاوية y .



الحل: بما أن $AD \parallel BE$ فإن $x = 30°$ بالتناظر. إذن،

$y = 180° - x - 70° = 80°$. ◇

إذا كان ABC مثلثاً فنرمز لطول الأضلاع BC ، AC ، AB بالرموز a ، b ، c على التوالي (انظر الشكل أدناه).

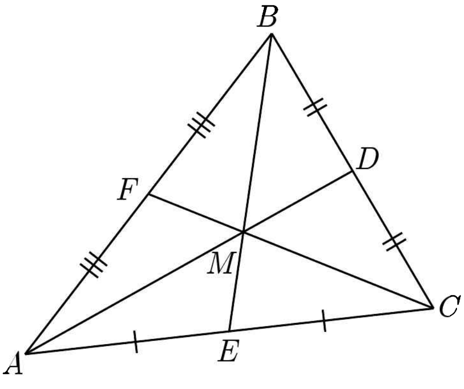


محيط المثلث (perimeter) هو مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة وعادة نرمز للمحيط بالرمز p ونرمز لنصف المحيط بالرمز s. أي أن

$$p = a + b + c$$
$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

متوسطات المثلث [Medians]

يسمى المستقيم المرسوم من أحد رؤوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل متوسطاً (median) ونقطة التقاء متوسطات المثلث الثلاثة تسمى المركز المتوسط أو المركز (centroid) للمثلث. سنبرهن في كتاب المرحلة الثانية من هذه السلسلة أن متوسطات المثلث تلتقي في نقطة واحدة وأن المركز يقسم كلاً من المتوسطات بنسبة $1:2$. أي أن



$$\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{ME} = \frac{CM}{MF} = \frac{2}{1}.$$

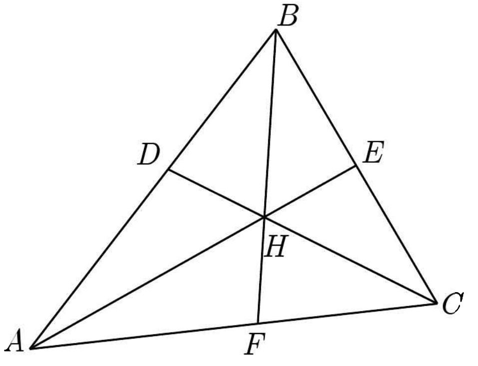
منصفات الزوايا [Angle Bisector]

يسمى الشعاع المار برأس زاوية مثلث ويقسم الزاوية إلى زاويتين متساويتين منصف الزاوية (angle bisector). سنرى لاحقاً أن منصف الزاوية هو مجموعة النقاط التي تقع على مسافات متساوية من ضلعي الزاوية (المسافة من نقطة إلى مستقيم هي طول العمود المرسوم من النقطة إلى المستقيم).

كما هو الحال للمتوسطات فإن منصفات الزوايا تلتقي في نقطة واحدة وهذا فحوى المبرهنة التالية.

مبرهنة (٣):تتلاقى منصفات زوايا مثلث في نقطة واحدة.

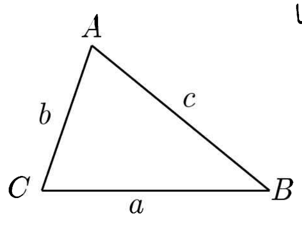
البرهان: لنفرض أن H نقطة تقاطع المنصفين AE و DC. بما أن H تقع على AE فإنها تبعد مسافة متساوية عن AB و AC. وبما أن H تقع على DC فإنها تبعد مسافة متساوية عن AC و BC. ولذا فهي تبعد مسافة متساوية عن AB و BC. إذن، H تقع على منصف الزاوية $\widehat{ABC}$. وبهذا فمنصفات الزوايا الثلاث تتلاقى في النقطة H. $\square$



متباينة المثلث [Triangle Inequality]

تنص متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين في المثلث يجب أن يكون أكبر من طول الضلع الثالث. أي، في المثلث ABC لدينا

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$



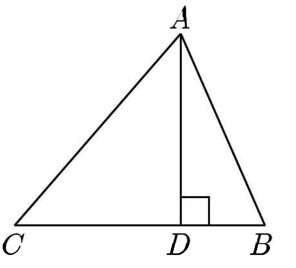
أما إذا كان مجموع طولي ضلعين في المثلث يساوي طول الضلع الثالث فيسمى المثلث مثلثاً مُضْمَحِلاً (degenerate). أي أن الرؤوس الثلاثة تقع على استقامة واحدة.

مثال (٣): إذا كان طولا ضلعي مثلث هما 8 و 14 فما القيم الممكنة لطول الضلع الثالث ؟

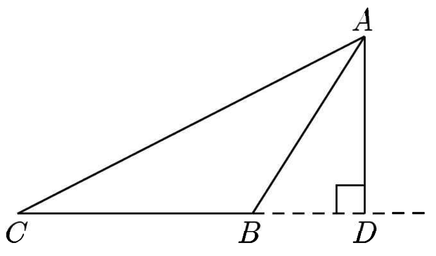
الحل: لنفرض أن x هو طول الضلع الثالث. عندئذ، $x + 8 > 14$. ومن ذلك يكون $x > 6$. أيضاً، $x < 14 + 8$. أي أن $x < 22$. وبهذا نجد أن $6 < x < 22$. ◇

ارتفاعات المثلث [Altitudes or Heights]

يسمى العمود النازل من رأس مثلث إلى الضلع المقابل أو امتداد الضلع المقابل بارتفاع المثلث (انظر الشكل أدناه)

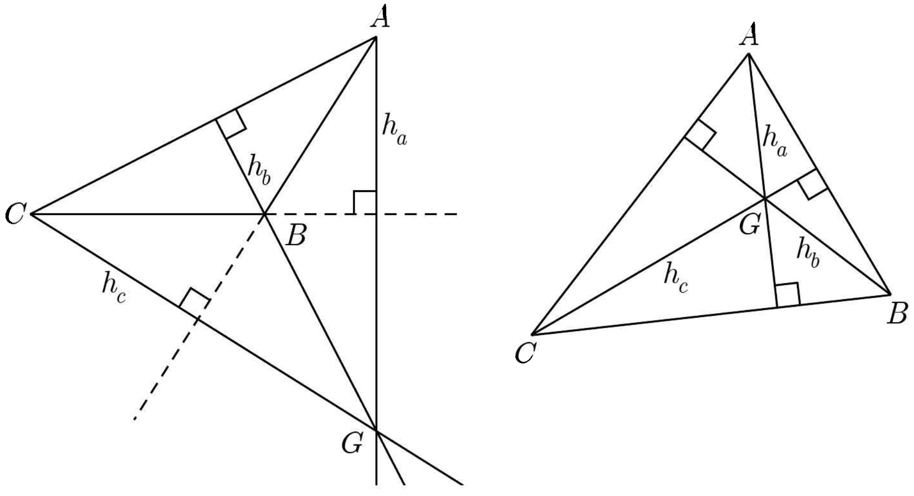


AD ارتفاع للمثلث



AD ارتفاع للمثلث

ترمز عادة لارتفاعات المثلث بالرموز h_a، h_b، h_c حيث h_a هو الارتفاع النازل من الرأس A إلى الضلع BC، h_b هو الارتفاع النازل من الرأس B إلى الضلع AC، h_c هو الارتفاع النازل من الرأس C إلى الضلع AB. تتلاقى ارتفاعات المثلث الثلاث في نقطة واحدة G تسمى مركز التعامد (orthocenter) كما هو مبين في الشكلين أدناه



لاحظ أن مركز تعامد المثلث المنفرج الزاوية يقع خارج المثلث.

مساحة المثلث [Area of a Triangle]

توجد العديد من الطرق لحساب مساحة مثلث وأحد الطرق الشائعة هي التي تستخدم القاعدة والارتفاع (سنقدم طرق أخرى في كتاب المرحلة الثانية من هذه السلسلة). سنرمز لمساحة المثلث ABC بالرمز $[ABC]$.

مبرهنة (٤): مساحة المثلث ABC هي $[ABC] = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$.

إحدى أشهر مبرهنات الهندسة هي مبرهنة فيثاغورس والتي تنص على أن مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية يساوي مربع طول الوتر. يوجد عدد كبير من البراهين لهذه المبرهنة وسنقدم لاحقاً برهاناً سهلاً لها.

مبرهنة (٥) مبرهنة فيثاغورس [Pythagorean Theorem]: إذا كان ABC مثلثاً قائم الزاوية عند B فإن

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

عادة ما تكون تطبيقات مبرهنة فيثاغورس سهلة.

مثال (٤): في المثلث القائم الزاوية عند B لدينا $AC = 10$ و $BC = 8$. جد AB.

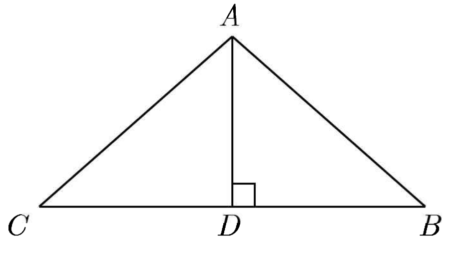
الحل: من مبرهنة فيثاغورس نعلم أن

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$
$$(AB)^2 + 8^2 = 10^2$$
$$(AB)^2 = 100 - 64$$

إذن، $AB = \sqrt{36} = 6$. ◇

مثال (٥): جد مساحة المثلث ABC إذا كان $AB = AC = 40$ و $BC = 60$.

الحل:



بما أن المثلث ABC متساوي الساقين فإن الارتفاع h_a ينصف القاعدة CB. إذن، $CD = DB = 30$. ومن مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$\left(h_a\right)^2 = (40)^2 - (30)^2 = 1600 - 900 = 700$$

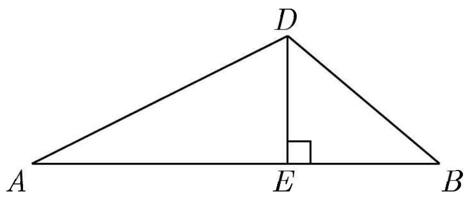
إذن، $h_a = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}$ وتكون المساحة:

$$[ABC] = \frac{1}{2}h_a \times BC = \frac{1}{2}\times 10\sqrt{7} \times 60 = 300\sqrt{7}\,.$$ ◇

مثال (٦): إذا كانت A ، D ، B ثلاث نقاط حيث $AD + DB = AB$ فأثبت أن D تقع على القطعة المستقيمة AB .

الحل: سنستخدم طريقة البرهان بالمكافئ العكسي لإثبات ذلك. أي سنثبت أنه إذا لم تكن D واقعة على القطعة المستقيمة AB فإن $AD + DB \neq AB$.

لنفرض أن D غير واقعة على AB (انظر الشكل)



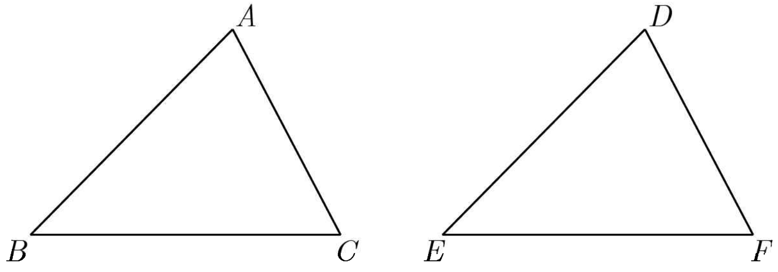
وليكن DE العمود النازل من D إلى AB . باستخدام مبرهنة فيثاغورس للمثلث القائم ADE نجد أن $(AD)^2 = (AE)^2 + (DE)^2 > (AE)^2$. إذن، $AD > AE$. وبالمثل $DB > EB$. من ذلك نرى أن

$$AB = AE + EB < AD + DB\,.$$

وبهذا يكون $AB \neq AD + DB$. ◇

المثلثات المتطابقة [Congruent Triangles]

لنفرض أن لدينا $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$



ولنفرض أننا قابلنا بين رؤوسهما $D \leftrightarrow A$ ، $B \leftrightarrow E$ ، $F \leftrightarrow C$. وبهذا نكون قد وجدنا التقابل $\triangle DEF \leftrightarrow \triangle ABC$ بين المثلثين. إذا نتج عن هذا التقابل أن

$$\widehat{C} = \widehat{F} \text{ ،} \widehat{B} = \widehat{E} \text{ ،} \widehat{A} = \widehat{D}$$

$$AC = DF \text{ ،} BC = EF \text{ ،} AB = DE$$

فإننا نقول إن المثلثين متطابقان (Congruent) ونكتب $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

وعندما يكون المثلثان متطابقين فإن الزوايا المتقابلة تتطابق والأضلاع المتقابلة تتطابق.

هناك طرق عديدة لإثبات تطابق مثلثين وهي:

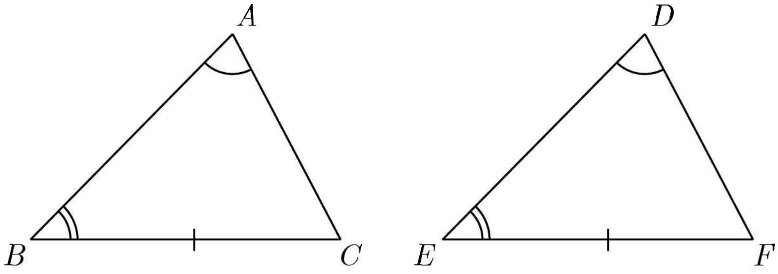
مسلمة (١) $[SSS]$: إذا طابقت ثلاثة أضلاع في $\triangle ABC$ ما يقابلها في $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

مسلمة (٢) $[SAS]$: إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في $\triangle ABC$ ما يقابلها في $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

مسلمة (٣) $[ASA]$: إذا طابقت زاويتان وضلعهما المشترك في $\triangle ABC$ ما يقابلها في $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

مبرهنة (٦) $[AAS]$: إذا طابقت زاويتان وضلع (ليس بالضرورة مشترك بين الزاويتين) في $\triangle ABC$ ما يقابلها في $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

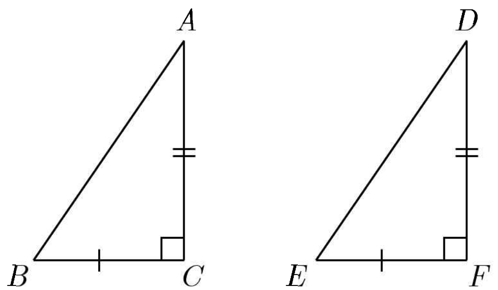
البرهان: في $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ نفرض أن



$\widehat{A} = \widehat{D}$، $\widehat{B} = \widehat{E}$، $BC = EF$. بما أن مجموع زوايا المثلث يساوي $180°$ فإن $\widehat{C} = \widehat{F}$. إذن، $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (ASA). □

مبرهنة (٧) $[LL]$: إذا طابق ضلعا القائمة في $\triangle ABC$ القائم الزاوية ما يقابلهما في $\triangle DEF$ القائم الزاوية فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

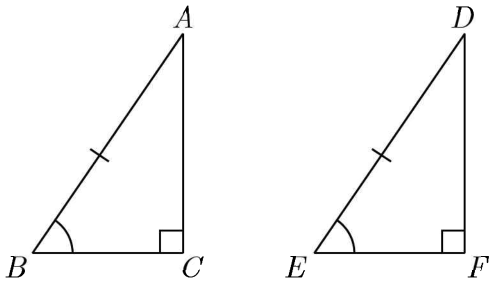
البرهان: لنفرض أن $BC = EF$ وأن $AC = DF$ في المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$.



بما أن $\widehat{C} = \widehat{F} = 90°$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (SAS). □

مسلمة (٤) $[HL]$: إذا تطابق الوتر وأحد ضلعي القائمة في المثلث $\triangle ABC$ القائم الزاوية ما يقابلهما في المثلث $\triangle DEF$ القائم الزاوية فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

مبرهنة (٨) $[HA]$: إذا تطابق الوتر وزاوية حادة في المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ ما يقابلهما في المثلث القائم الزاوية $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.



البرهان: لنفرض أن $AB = DE$ وأن $\widehat{B} = \widehat{E}$ في المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$. وبما أن $\widehat{C} = \widehat{F} = 90°$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (AAS). □

مبرهنة (٩) $[LA]$: إذا تطابق أحد ضلعي القائمة وزاوية حادة في المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ ما يقابلهما في المثلث القائم الزاوية $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

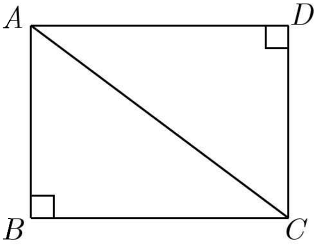
البرهان: متروك للقارئ. □

نقدم الآن برهاناً لكل من المبرهنتين (٤) و (٥).

برهان للمبرهنة (٤) [إيجاد مساحة مثلث]:

(أ) المطلوب هو برهان أن مساحة المثلث $\triangle ABC$ هي $[ABC] = \frac{1}{2} a h_a$.

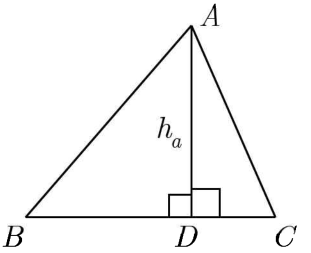
لنفرض أولاً أن ABC قائم الزاوية في $\widehat{B}$.



أنشئ المستطيل $ABCD$. من الواضح أن $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$. ولهذا $[ABC] = [CDA]$. إذن،

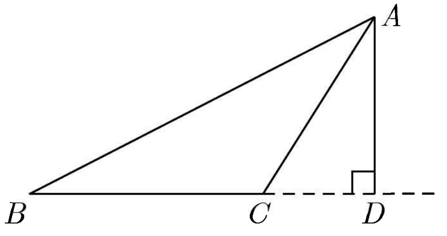
$$[ABC] = \frac{1}{2}[ABCD] = \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{1}{2}ah_a$$

لنفرض الآن أن المثلث $\triangle ABC$ حاد الزوايا



$$\begin{aligned}[ABC] &= [ABD] + [ADC] \\ &= \frac{1}{2}(BD)h_a + \frac{1}{2}(DC)h_a \\ &= \frac{1}{2}(BD + DC)h_a \\ &= \frac{1}{2}(BC)h_a \\ &= \frac{1}{2}ah_a\end{aligned}$$

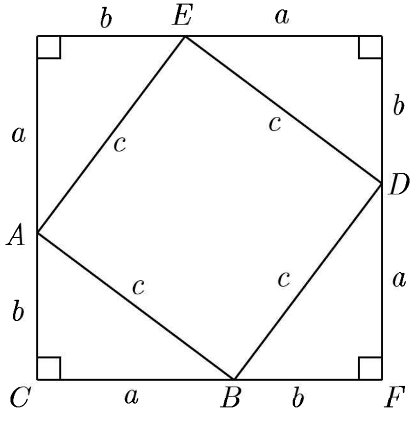
وأخيراً نفرض أن $\triangle ABC$ منفرج الزاوية



$$\begin{aligned}[ABC] &= [ABD] - [ACD] \\ &= \frac{1}{2}(BD)h_a - \frac{1}{2}(CD)h_a \\ &= \frac{1}{2}(BD - CD)h_a \\ &= \frac{1}{2}(BC)h_a \\ &= \frac{1}{2}ah_a\end{aligned}$$

وهذا ينهي البرهان. $\square$

برهان المبرهنة (٥) [مبرهنة فيثاغورس]: لنفرض أن $\triangle ABC$ قائم الزاوية في $\widehat{C}$.
أنشئ مربعاً طول ضلعه $a + b$ كما هو مبين في الشكل أدناه



من السهل أن نرى أن مساحة المربع الكبير تساوي مجموع مساحة المربع الصغير ومساحة الأربعة مثلثات المتطابقة (لماذا ؟). عندئذ،

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= c^2 + 4\times\frac{1}{2}ab\\ a^2+2ab+b^2 &= c^2+2ab\end{aligned}$$

إذن، $a^2+b^2=c^2$. $\square$

بعض المثلثات القائمة الخاصة [Some Special Right Triangles]

(١) المثلث $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$

إذا كان $\triangle ABC$ قائم الزاوية حيث $\widehat{A}=\widehat{B}=45^\circ$ و $\widehat{C}=90^\circ$ فنقول إن المثلث $\triangle ABC$ هو مثلث $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ ويكون

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{b}=1$$

(٢) المثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$

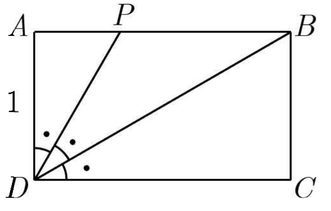
إذا كان $\triangle ABC$ قائم الزاوية حيث $\widehat{A}=60^\circ$، $\widehat{B}=30^\circ$، $\widehat{C}=90^\circ$، فنقول إن المثلث هو مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ويكون

$$\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{b}{c}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{b}=\sqrt{3}\ .$$

مثال (٧) [AMC 10 2000]: في المستطيل $ABCD$ لدينا $AD = 1$ ، P نقطة واقعة على AB ، DB و DP يثلثان الزاوية $\widehat{D}$ (يقسماها إلى ثلاث زوايا متساوية). جد محيط المثلث $\triangle BDP$.



الحل: بما أن BD و PD يثلثان الزاوية $\widehat{D}$ فنجد أن

$$\widehat{CDB} = \widehat{BDP} = \widehat{PDA} = 30^\circ$$

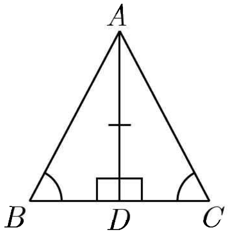
إذن، كل من المثلثين $\triangle DAB$ و $\triangle DAP$ هو مثلث $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$. وبما أن $AD = 1$ فنجد أن $AP = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $DP = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ، $AB = \sqrt{3}$ ، $DB = 2$ ، $DC = AB = \sqrt{3}$. إذن، محيط المثلث $\triangle BDP$ يساوي

$$\begin{aligned} BD + DP + PB &= BD + DP + (AB - AP) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 + \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

◇

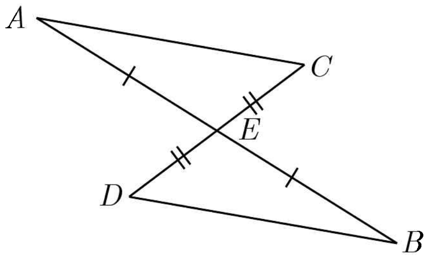
مثال (٨): إذا تساوت زاويتان في مثلث فأثبت أن الضلعين المقابلين لهما متساويان.

الحل: افرض أن $\widehat{B} = \widehat{C}$ في المثلث $\triangle ABC$. ارسم ارتفاعاً من A إلى BC .



$\triangle ADB \equiv \triangle ADC$ لأن $AD = AD$ و $\widehat{B} = \widehat{C}$. إذن، $AB = AC$. ◇

مثال (٩): في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ ينصفان بعضهما البعض. أثبت أن $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$.



الحل: في $\triangle AEC$ و $\triangle BED$:

$$AE = BE \quad \text{(فرض)}$$

$$CE = DE \quad \text{(فرض)}$$

$$\widehat{AEC} = \widehat{BED} \quad \text{(بالتقابل بالرأس)}$$

إذن، $\triangle BED \equiv \triangle AEC$ (SAS). من التطابق نجد أن $\widehat{D} = \widehat{C}$. وبما أنهما متبادلتان داخلياً فإن $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$. ◇

المثلثات المتشابهة [Similar Triangles]

إذا كان a و b عددين حيث $b \neq 0$ فإن نسبة a إلى b وتكتب $a : \mathrm{b}$ هي $\frac{a}{b}$. تسمى المساواة $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$ بالتناسب. يحقق التناسب الخصائص التالية:

(١) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ إذا وفقط إذا كان $ad = bc$.

(٢) $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$. حيث $c \neq 0$

(٣) $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$. حيث $a \neq 0$ و $c \neq 0$

(٤) $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{c+d}{d}=\frac{a+b}{b}$.

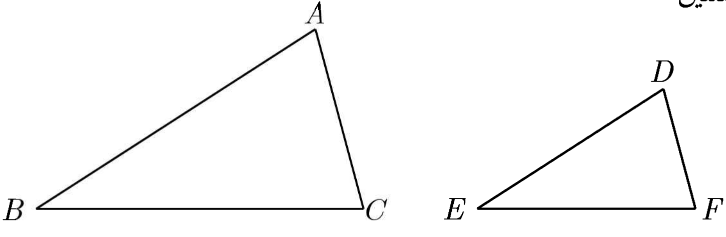
(٥) $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{c-d}{d}=\frac{a-b}{b}$.

(٦) إذا كان $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ فإن $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$.

نقول إن المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ متشابهان ونكتب $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ إذا وجد تقابل بين رؤوسهما بحيث يكون:

(أ) الزوايا المتقابلة متطابقة، (ب) أطوال الأضلاع المتقابلة متناسبة.

أي أن المثلثين



متشابهان إذا كان $\widehat{A}=\widehat{D}$ ، $\widehat{B}=\widehat{E}$ ، $\widehat{C}=\widehat{F}$ وكان $\frac{CA}{FD}=\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}$.

من المهم الانتباه حين نستخدم النسب الواردة إلى ضرورة التقيد بترتيب الحروف في وصف المثلثين، التشابه $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ لا يعني تشابه $\triangle ABC$ و $\triangle FED$ ولذا لا نستطيع أن نكتب مثلاً $\frac{CA}{DF}=\frac{BC}{ED}=\frac{AB}{FE}$.

مبرهنة (١٠): إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ فإن النسبة بين محيطيهما تساوي النسبة بين طول أي زوج من الأضلاع المتقابلة.

البرهان: لنفرض أن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ وأن p هو محيط $\triangle ABC$ و q هو محيط $\triangle DEF$. المطلوب إثبات أن $\frac{p}{q} = \frac{AB}{DE}$. الآن لدينا من التشابه

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

ولهذا فإن

$$\frac{AB + BC + CA}{DE + EF + FD} = \frac{AB}{DE}$$

إذن، $\frac{p}{q} = \frac{AB}{DE}$. □

نقدم الآن بعض الطرق لإثبات تشابه مثلثين.

مسلمة (٥) $[AA]$: إذا تطابقت زاويتان في $\triangle ABC$ مع زاويتين في $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

ملحوظات: في حالة المثلث القائم الزاوية والمثلث المتساوي الساقين لدينا:

(١) إذا طابقت زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

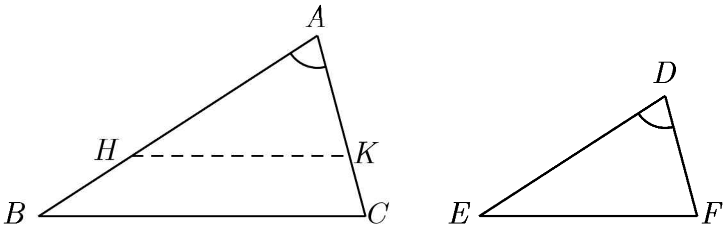
(٢) إذا طابقت زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين $\triangle ABC$ زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

مسلمة (٦): إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث تناسبياً فإنه يوازي الثالث.

المبرهنة التالية تزودنا بطريقة أخرى لإثبات تشابه مثلثين.

مبرهنة (١١) $[SAS]$: لنفرض أن $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ حيث $\widehat{A} = \widehat{D}$ و $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

البرهان:

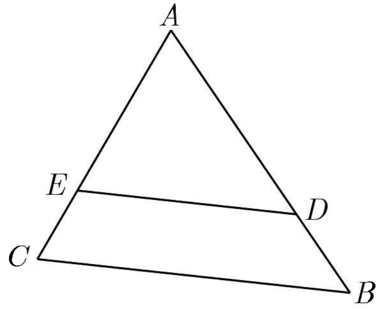


نفرض أن $\widehat{A} = \widehat{D}$ وأن $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. لإثبات أن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ يكفي أن نثبت استناداً إلى المسلمة (AA) أن $\widehat{B} = \widehat{E}$. الآن، نقوم بتعيين نقطتين H و K على $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ بحيث يكون $AH = ED$ و $AK = DE$ ونرسم $\overline{HK}$. الآن، $\triangle AHK \equiv \triangle DEF$ لأن:

$$AH = DE$$
$$AK = DF$$
$$\widehat{A} = \widehat{D}$$

ومن التطابق نجد أن $\widehat{AHK} = \widehat{E}$ وأن $\widehat{AKH} = \widehat{F}$. وبما أن $AH = ED$ و $AK = DF$ وأن $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ نجد أن $\frac{AB}{AH} = \frac{AC}{AK}$. إذن، HK يقسم AB و AC تناسبياً ومن ثم فإن $\overline{HK} \parallel \overline{BC}$. من ذلك نجد أن $\widehat{AHK} = \widehat{B}$ و $\widehat{AKH} = \widehat{C}$ بالتناظر. إذن، $\widehat{E} = \widehat{B}$ و $\widehat{F} = \widehat{C}$. $\square$

مثال (١٠): في الشكل المرفق، $AC = 10$ ، $AB = 12$ ، $AE = 7$ ، $AD = 8.4$. أثبت أن $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

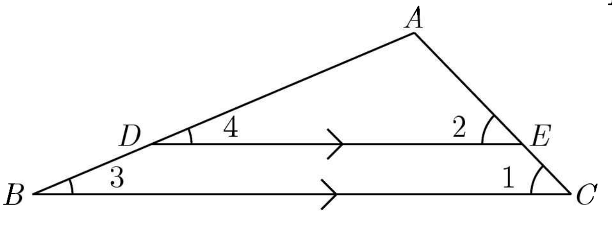


بما أن $\widehat{A} = \widehat{A}$ وأن

$$\frac{AB}{AD} = \frac{12}{8.4} = \frac{120}{84} = \frac{10}{7} = \frac{AC}{AE}$$

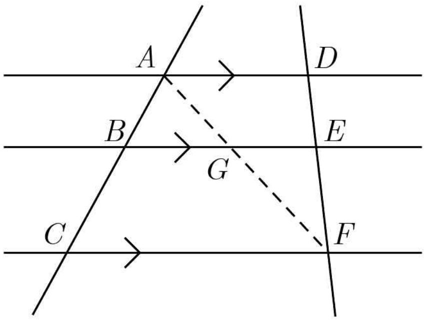
فإن $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (SAS) . ◇

مثال (١١): في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ فيه $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. أثبت أن $\frac{CE}{EA} = \frac{BD}{DA}$.



الحل: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ لأن $\widehat{1} = \widehat{2}$ و $\widehat{3} = \widehat{4}$ بالتناظر. إذن، $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$. من ذلك نجد أن $\frac{AC - AE}{AE} = \frac{AB - AD}{AD}$. أي أن $\frac{CE}{EA} = \frac{BD}{DA}$. ◇

مثال (١٢): في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$. أثبت أن $\frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC}$.



الحل: ارسم $\overline{AF}$ ليقطع $\overline{BE}$ في النقطة G.

الآن $\triangle FEG \sim \triangle FDA$ و $\triangle ABG \sim \triangle ACF$. إذن، استناداً إلى المثال (١١) نجد أن

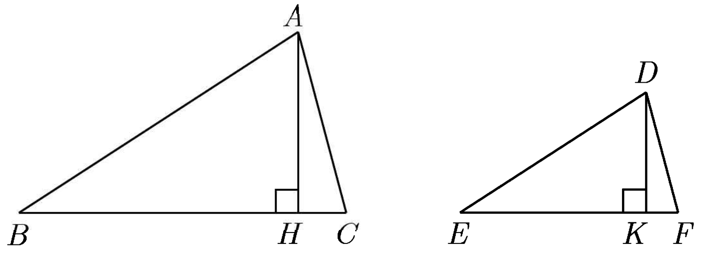
$$\frac{AG}{GF} = \frac{DE}{EF} \quad \text{و} \quad \frac{FG}{GA} = \frac{CB}{BA}.$$

من ذلك نجد أن $\frac{AG}{GF} = \frac{DE}{EF}$ و $\frac{GA}{FG} = \frac{BA}{CB}$. إذن، $\frac{DE}{EF} = \frac{BA}{CB}$. ◇

مبرهنة (١٢) [العلاقة بين مساحات المثلثات المتشابهة]: إذا كان $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ فإن

$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{(AB)^2}{(DE)^2} = \frac{(BC)^2}{(EF)^2} = \frac{(AC)^2}{(DF)^2}.$$

البرهان: ارسم الارتفاعين $\overline{AH}$ و $\overline{DK}$ كما هو مبين في الشكل المرفق.



الآن،

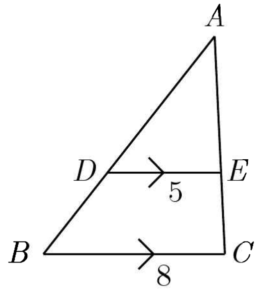
$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{\frac{1}{2}BC \times AH}{\frac{1}{2}EF \times DK} = \frac{BC \times AH}{EF \times DK}$$

ولكن $\triangle ABH \sim \triangle DEK$ لأن $\widehat{B} = \widehat{E}$ ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$) وأن $\widehat{AHB} = \widehat{DKE}$ (كل منهما قائمة). من ذلك نجد أن، $\frac{AB}{DE} = \frac{AH}{DK}$.

ولكن، $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$ ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$). إذن، $\frac{BC}{EF} = \frac{AH}{DK}$. وبهذا نجد أن

$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{BC}{EF} \times \frac{AH}{DK} = \frac{BC}{EF} \times \frac{BC}{EF} = \frac{(BC)^2}{(EF)^2}. \qquad \square$$

مثال (١٣): في المثلث $\triangle ABC$ المبين أدناه، DE يوازي BC، $DE = 5$، $BC = 8$، $[ADE] = 15$. جد مساحة الشكل الرباعي $BCED$.



الحل: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. وبهذا نجد أن $\frac{8}{5} = \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$.

إذن، $\frac{64}{25} = \frac{8^2}{5^2} = \frac{[ABC]}{[ADE]}$. ومنه نرى أن

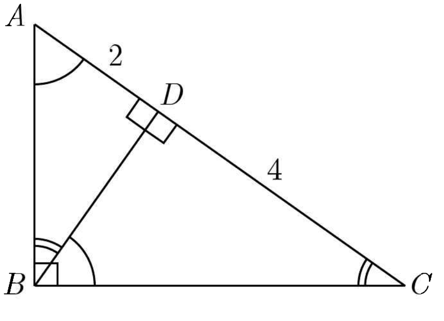
$$[ABC] = \frac{64}{25} \times [ADE] = \frac{64}{25} \times 15 = \frac{192}{5}.$$

إذن، $\frac{117}{5} = 15 - \frac{192}{5} = [BCED]$. ◇

مثال (١٤): في المثلث المقدم في المثال (١٣) جد $\frac{AE}{EC}$.

الحل: بما أن $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ فإن $\frac{5}{8} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$. بفرض أن $AE = 5K$ وأن $AC = 8K$ نجد أن $EC = 3K$. إذن، $\frac{5}{3} = \frac{5K}{3K} = \frac{AE}{EC}$. ◇

مثال (١٥): في الشكل أدناه $\triangle ABC$ قائم الزاوية BD ارتفاع، $AD = 2$ و $DC = 4$. جد BD .



الحل: $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ لأن $\widehat{ABC} = \widehat{ADB}$ و $\widehat{DAB} = \widehat{CAB}$.

وبالمثل، $\triangle BDC \sim \triangle ABC$. إذن، $\triangle BDC \sim \triangle ADB$. من ذلك نرى أن $\frac{DB}{DC} = \frac{AD}{BD}$. إذن، $(BD)^2 = (AD)(DC) = 2 \times 4 = 8$.

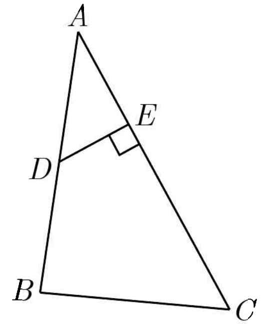
وبهذا يكون $BD = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. ◇

ملحوظة: يمكن استخدام المثلثات المتشابهة في المثال (١٥) لإثبات مبرهنة فيثاغورس على النحو التالي:

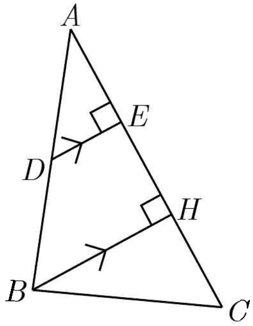
نفرض أن $AB = c$، $BC = a$، $AC = b$، $AD = x$، $DC = y$. من $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ نجد أن $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$ أي أن $\frac{b}{c} = \frac{c}{x}$. وبهذا فإن $c^2 = bx$. ومن $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ نجد أن $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$. أي أن $\frac{b}{a} = \frac{a}{y}$.

وبهذا فإن $a^2 = by$. الآن، $c^2 + a^2 = b(x+y) = b^2$.

مثال (١٦) [MAΘ 1787]: في الشكل أدناه، لدينا $AD = DB = 5$، $EC = 8$، $AE = 4$، $\widehat{AED} = 90^\circ$. جد BC.



الحل: ارسم BH يوازي DE ويقطع AC في النقطة H.



الآن، $\triangle BAH \sim \triangle DAE$. ومن ذلك يكون

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

وبما أن $AE = 4$ فنجد أن $AH = 8$. وبهذا $EH = AH - AE = 4$. ومنه فإن

$$HC = EC - EH = 8 - 4 = 4$$

الآن، باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$(DE)^2 = (AD)^2 - (AE)^2 = 25 - 16 = 9$$

إذن، $DE = 3$. وبما أن $\frac{DE}{BH} = \frac{1}{2}$ فنجد أن $BH = 6$. وأخيراً باستخدام مبرهنة فيثاغورس مرة أخرى نجد أن

$$(BC)^2 = (HC)^2 + (BH)^2 = 16 + 36 = 52$$

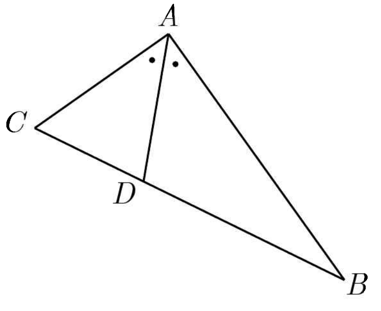
إذن، $BC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. ◇

المبرهنة التالية لها استخدامات عديدة.

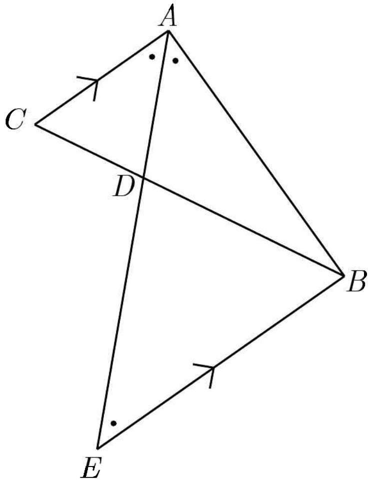
مبرهنة (١٣) [مبرهنة منصف الزاوية Angle Bisector Theorem]:

إذا كان AD منصفاً للزاوية $\widehat{A}$ في المثلث $\triangle ABC$ فإن $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$.

البرهان:

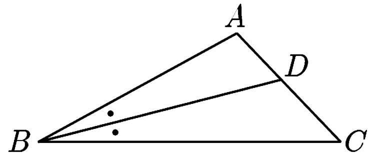


للبحث عن مثلثات متشابهة نقوم بمد AD إلى E حيث $BE \parallel AC$ كما هو مبين في الشكل أدناه



سنبرهن الآن أن $\triangle CDA \sim \triangle BDE$. لاحظ أن $\widehat{AEB} = \widehat{CAE}$ بالتبادل. وبما أن AD منصف الزاوية A فنرى أن $\widehat{DAB} = \widehat{CAD}$. إذن، $\widehat{AEB} = \widehat{EAB}$. وبهذا نجد أن $AB = BE$. الآن، $\widehat{DEB} = \widehat{CAD}$ و $\widehat{BDE} = \widehat{ADC}$. إذن، $\triangle CDA \sim \triangle BDE$. ومن التشابه نجد أن $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BE}{BD} = \dfrac{AC}{CD}$. $\square$

مثال (١٧) [AHSM 1966]: النسبة بين أضلاع المثلث $\triangle BAC$ هي $4 : 3 : 2$. BD منصف الزاوية المرسوم إلى الضلع الأصغر AC. إذا كان $AC = 10$ فجد طول القطعة الأكبر من AC.

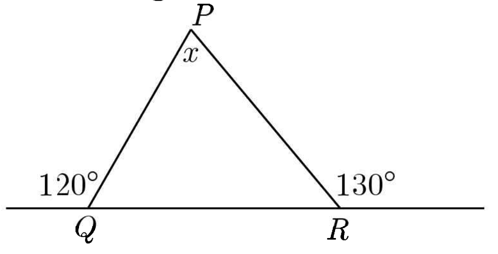


الحل: باستخدام مبرهنة منصف الزاوية لدينا $\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AD}$. وبما أن AC هو الضلع الأصغر في المثلث فإن $\frac{3}{4} = \frac{AB}{BC}$. لنفرض أن x هي القطعة الأطول وأن y هي القطعة الأقصر. إذن $y = \frac{3}{4}x$. وبما أن $AC = 10$ فإن $x + \frac{3}{4}x = 10$. وبهذا يكون $x = \frac{40}{7}$. ◇

مسائل محلولة

(١) [Anst.MC 1984] قيمة x في الشكل المرفق تساوي

(أ) 30° (ب) 50° (ج) 60° (د) 70°

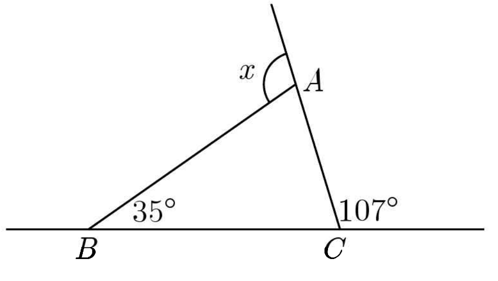


الحل: الإجابة هي (د): $\widehat{PQR} = 180 - 120 = 60^\circ$

$50^\circ = 180 - 130 = \widehat{PRQ}$. إذن، $\hat{x} = 180 - (60 + 50) = 70^\circ$.

(٢) [Aust.MC 1983] قيمة x في الشكل المرفق تساوي

(أ) 72° (ب) 108° (ج) 142° (د) 145°

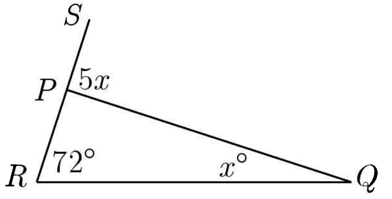


الحل: الإجابة هي (ب): $\widehat{ACB} = 180 - 107 = 73^\circ$. ومن ثم فإن

$\hat{x} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 35 + 73 = 108^\circ$.

(٣) [Aust.MC 1982] قياس الزاوية $\widehat{QPS}$ في الشكل المرفق يساوي

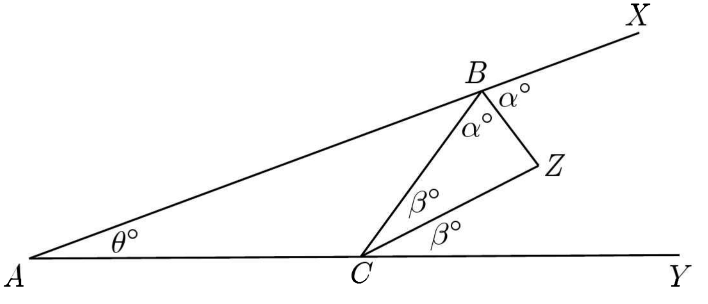
(أ) 60° (ب) 90° (ج) 96° (د) 105°



الحل: الإجابة هي (ب): لدينا $x + 72 = 5x$. أي أن $72 = 4x$. ومن ثم فإن $x = 18$. إذن، $\widehat{QPS} = 5 \times 18 = 90°$.

(٤) [Aust.MC 1978] في الشكل المرفق $\overleftrightarrow{ABX}$ و $\overleftrightarrow{ACY}$ مستقيمان. منصفا الزاويتين $\widehat{XBC}$ و $\widehat{BCY}$ يلتقيان في النقطة Z . $\widehat{BZC} = 80°$. ما قياس $\widehat{BAC}$ ؟

(أ) $20°$ (ب) $25°$ (ج) $30°$ (د) $35°$



الحل: الإجابة هي (أ): في $\triangle ABC$ لدينا

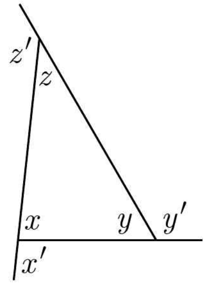
$$\theta + (180 - 2\alpha) + (180 - 2\beta) = 180 .$$

إذن، $\theta = 2(\alpha + \beta) - 180$. ومن زوايا المثلث $\triangle BCZ$ نجد أن $\alpha + \beta + 80 = 180$. أي أن $\alpha + \beta = 100$. إذن،

$\theta = 2(\alpha + \beta) - 180 = 2 \times 100 - 180 = 20°$.

(٥) [Aust.MC 1983] النسبة $x' : y' : z'$ بين الزوايا الخارجية للمثلث المرفق هي $6 : 5 : 4$. ما النسبة بين الزوايا الداخلية $x : y : z$ ؟

(أ) $3 : 5 : 7$ (ب) $1 : 2 : 3$ (ج) $2 : 5 : 8$ (د) $4 : 5 : 6$



الحل: الإجابة هي (أ): لدينا $x + y + z = 180$ و $540 = 3 \times 180 = (x + x') + (y + y') + (z + z')$. من ذلك نجد أن $x' + y' + z' = 360°$. وبما أن $4 + 5 + 6 = 15$ فإن

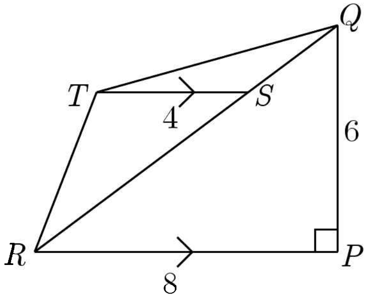
$x' = \frac{4}{15} \times 360° = 96°$، $y' = \frac{5}{15} \times 360° = 120°$،

$z' = \frac{6}{15} \times 360° = 144°$. إذن، $x = 180 - 96 = 84°$،

$y = 180 - 120 = 60°$، $z = 180 - 144 = 36°$. وبهذا فإن $x : y : z$ هي $84 : 60 : 36$. أي $7 : 5 : 3$.

(٦) [Aust.MC 1982] في الشكل المرفق، ΔRPQ قائم الزاوية و $\overline{PR} \parallel \overline{ST}$، $PQ = 6$، $PR = 8$، $ST = 4$، مساحة ΔRQT تساوي:

(أ) 6 (ب) 10 (ج) 12 (د) 16

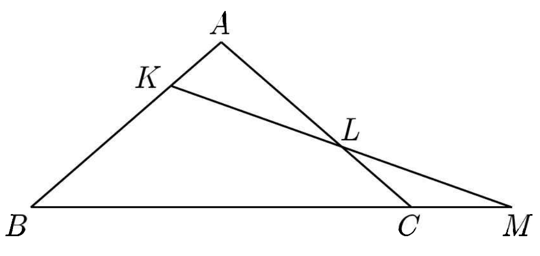


الحل: الإجابة هي (ج): مد $\overline{TS}$ ليلاقي $\overline{PQ}$ في S'. عندئذ،

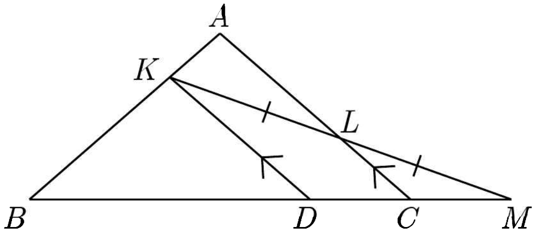
$$\begin{aligned}[RQT] &= [TSQ] + [\text{TSR}] \\ &= \frac{1}{2} \times TS \times QS' + \frac{1}{2} \times TS \times S'P \\ &= \frac{1}{2} \times TS \times (QS' + S'P) \\ &= \frac{1}{2} \times TS \times QP \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12\end{aligned}$$

(٧) [Aust.MC 1978] في الشكل المرفق، $AB = AC$ و $KL = LM$.
عندئذ، النسبة $\dfrac{KB}{LC}$ هي

(أ) 1.5 (ب) 2 (ج) 2.5 (د) 3



الحل: الإجابة هي (ب): أنشئ $\overline{LC} \parallel \overline{KD}$ كما هو مبين في الشكل

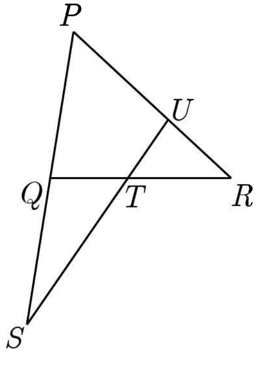


الآن، $\triangle MKD \sim \triangle MLC$ لأن

$\widehat{M} = \widehat{M}$ ، $\widehat{MLC} = \widehat{MKD}$ ، $\widehat{LCM} = \widehat{KDM}$. من التشابه نجد أن $\dfrac{1}{2} = \dfrac{LM}{KM} = \dfrac{LC}{KD}$. أيضاً، $\triangle ABC \sim \triangle KBD$ بتطابق ثلاث زوايا. ومن ذلك نجد أن $\dfrac{AC}{KD} = \dfrac{AB}{KB}$. وبما أن $AC = AB$ فإن $KD = KB$. إذن $\dfrac{1}{2} = \dfrac{LC}{KB} = \dfrac{LC}{KD}$. وبهذا يكون $2 = \dfrac{KB}{LC}$.

(٨) [Aust.MC 1984] في الشكل المرفق، Q منتصف $\overline{PS}$، $UR = \dfrac{2}{3}PU$، T نقطة تقاطع $\overline{QR}$ و $\overline{SU}$. النسبة $\dfrac{QT}{QR}$ تساوي:

(أ) $\dfrac{3}{7}$ (ب) $\dfrac{4}{7}$ (ج) $\dfrac{5}{11}$ (د) $\dfrac{4}{9}$



الحل: الإجابة هي (أ): أنشئ $\overline{QX} \parallel \overline{SU}$ حيث X نقطة على $\overline{PR}$. عندئذ، $\triangle PQX \sim \triangle PSU$ بتطابق ثلاث زوايا. من ذلك نجد أن $\frac{1}{2} = \frac{PQ}{PS} = \frac{PX}{PU}$.

وبما أن $PU = \frac{3}{2}UR$ فإن

$PX = XU = \frac{3}{4}RU$. أيضاً $\triangle RTU \sim \triangle RQX$ بتطابق ثلاث زوايا. من ذلك نجد أن

$$\frac{RT}{RQ} = \frac{RU}{RX} = \frac{RU}{RU + UX} = \frac{RU}{RU + \frac{3}{4}RU} = \frac{4}{7}$$

إذن، $\frac{QT}{QR} = \frac{3}{7}$.

(٩) [Aust.MC 1983] أطوال أضلاع مثلث هي $7\frac{1}{2}$، 11، x حيث x عدد صحيح موجب. ما أصغر قيمة للعدد x ؟

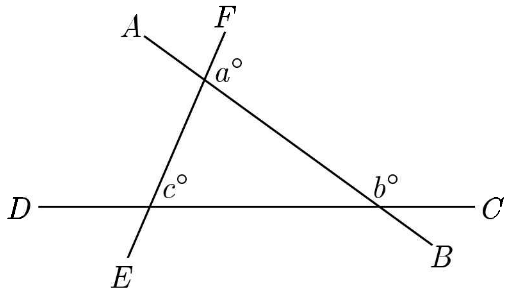
(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

الحل: الإجابة هي (ج): من متباينة المثلث لدينا

$7\frac{1}{2} + x > 11$. أي أن $x > 3\frac{1}{2}$. وأصغر عدد صحيح يحقق ذلك هو $x = 4$.

(١٠) [Aust.MC 1979] في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$، $\overleftrightarrow{EF}$ ثلاثة مستقيمات. قيمة $a + b - c$ بالدرجات هي

(أ) 120 (ب) 150 (ج) 180 (د) 210



الحل: الإجابة هي (ج): قياس الزوايا الداخلية للمثلث هي $a - 180$، $b - 180$، c. إذن، $(180 - a) + (180 - b) + c = 180$. ومن ذلك يكون $a + b - c = 180^\circ$.

(١١) [Aust.MC 1984] مثلث مختلف الأضلاع، أطوال أضلاعه أعداد صحيحة ومحيطه 13. عدد المثلثات المختلفة التي تحقق ذلك هو

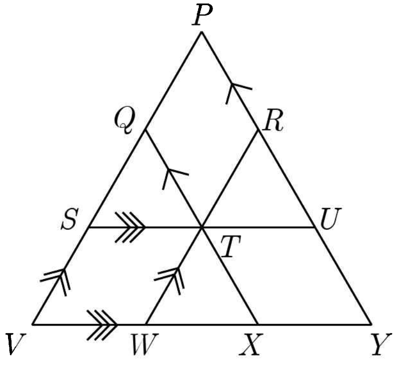
(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن طول الضلع الأكبر هو a. عندئذ، a أصغر من مجموع الضلعين الآخرين. وبهذا فإن a أصغر من نصف المحيط وهو $6\frac{1}{2}$. وبما أن a عدد صحيح فإن $a \leq 6$. إذا كان $a = 6$ فطولا الضلعين الآخرين هما (5 و 2) أو (4 و 3). وبهذا نحصل على مثلثين في هذه الحالة، هما $(6, 5, 2)$ و $(6, 4, 3)$. أما إذا كان $a \leq 5$ فإن مجموع طولي الضلعين الآخرين يجب أن يكون أكبر من أو يساوي 8. وبهذا فطول الضلع الذي يجيء قبل a مباشرة يجب أن يكون 5 أو أكبر ومن ثم فهو أكبر من أو يساوي a وهذا مستحيل. إذن، لدينا فقط مثلثان يحققان المطلوب.

(١٢) [Aust.MC 1984] $\triangle PVY$ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 3. Q، R، S، U، W، X تقسم الأضلاع إلى ثلاثة أقسام متساوية (كما هو مبين) طول كل منها 1. T نقطة تقاطع القطع المستقيمة $\overline{QX}$، $\overline{SU}$، $\overline{RW}$. $\overline{QX} \parallel \overline{PY}$، $\overline{RW} \parallel \overline{PV}$، $\overline{SU} \parallel \overline{VY}$.

كم عدد المثلثات المتساوية الأضلاع التي يمكن إنشاؤها بحيث تكون النقاط التي في الشكل رؤوساً لهذه المثلثات ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 13 (د) 15



الحل: الإجابة هي (د): نجد المثلثات من أطوال الأضلاع المختلفة وهي:

المثلثات التي طول ضلعها 3: $\triangle PVY$.

المثلثات التي طول ضلعها 2: $\triangle PSU$، $\triangle QVX$، $\triangle RWY$.

المثلثات التي طول ضلعها $\sqrt{3}$: $\triangle QUW$، $\triangle SRX$.

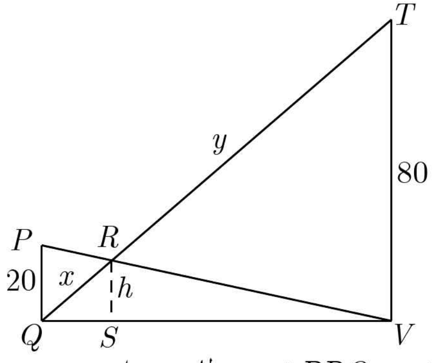
المثلثات التي طول ضلعها 1: $\triangle PQR$، $\triangle QST$، $\triangle QRT$، $\triangle RTU$، $\triangle SVW$، $\triangle SWT$، $\triangle TWX$، $\triangle TUX$، $\triangle UXY$.

إذن، عدد المثلثات هو $15 = 9 + 2 + 3 + 1$.

(١٣) [Aust.MC 1981] أقمنا عموداً من الإسمنت على سطح شارع مستقيم ارتفاعه 20 متراً. وبعد مسافة معينة أقمنا عموداً آخر ارتفاعه 80 متراً. وصلنا رأس العمود الأول مع قاعدة العمود الثاني ورأس العمود الثاني مع قاعدة العمود الأول. ما ارتفاع نقطة تقاطعهما عن الأرض بالأمتار ؟

(أ) 15 (ب) 16 (ج) 18 (د) 50

الحل: الإجابة هي (ب): المطلوب إيجاد h في الشكل المرفق

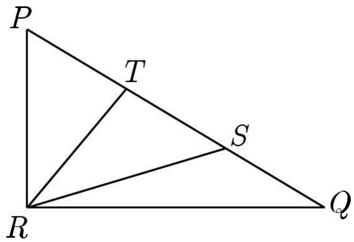


لاحظ أن $\Delta PRQ \sim \Delta TRV$ بتطابق زاويتين. من التشابه نجد أن $\frac{x}{y} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$. إذن، $\frac{QR}{QT} = \frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$. أيضاً، $\Delta QRS \sim \Delta QTV$ بتطابق ثلاث زوايا. من ذلك نجد أن $\frac{h}{80} = \frac{QR}{QT} = \frac{1}{5}$.

إذن، $h = \frac{80}{5} = 16$.

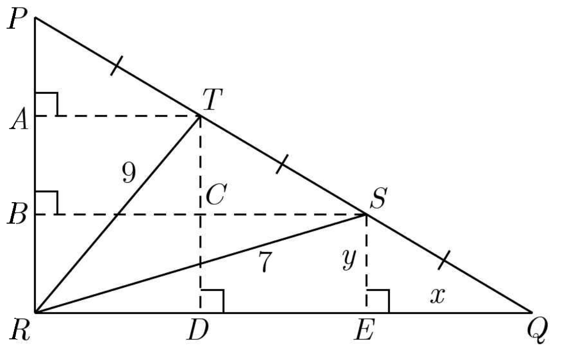
(١٤) [Aust.MC 1981] في الشكل المرفق، ΔPQR قائم الزاوية والنقطتان T و S تقسمان الوتر إلى ثلاث قطع متساوية. $RS = 7$، $RT = 9$. ما طول القطعة $\overline{ST}$ ؟

(أ) $\sqrt{15}$ (ب) $\sqrt{17}$ (ج) $\sqrt{26}$ (د) $\sqrt{32}$



الحل: الإجابة هي (ج):

أنشئ القطع $\overline{TA}$، $\overline{TD}$، $\overline{SB}$، $\overline{SE}$ كما هو مبين في الشكل



$\triangle SEQ \equiv \triangle TCS \equiv \triangle PAT$ (ASA). من هذا التطابق نجد أن $AT = CS = EQ = x$. وبهذا فإن E و D تقسمان $\overline{RQ}$ إلى ثلاث قطع متساوية. بالمثل B و A تقسمان $\overline{PR}$ إلى ثلاث قطع متساوية. الآن، في $\triangle SRE$ لدينا $(RE)^2 + (ES)^2 = 49$. أي أن

$$4x^2 + y^2 = 49 \qquad (١)$$

وبالمثل، في $\triangle ATR$ لدينا

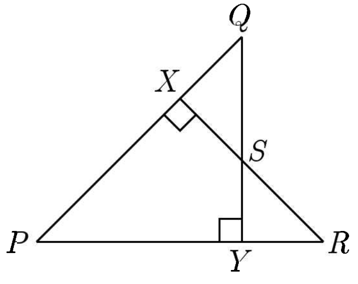
$$x^2 + 4y^2 = 81 \qquad (٢)$$

بجمع (١) و (٢) والاختصار نجد أن $x^2 + y^2 = 26$. ولكن $(ST)^2 = (SQ)^2 = x^2 + y^2 = 26$.

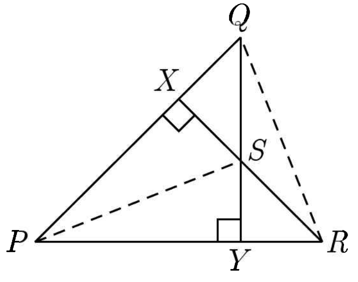
إذن، $ST = \sqrt{26}$.

(١٥) [Aust.MC 1982] في الشكل المرفق، قياس كل من الزوايا $\widehat{P}$ و $\widehat{Q}$ و $\widehat{R}$ يساوي $45°$ و S نقطة على $\overline{QY}$، امتدادا القطعتين المستقيمتين $\overline{RS}$ و $\overline{QS}$ عموديان على $\overline{PQ}$ و $\overline{PR}$ على التوالي. إذا كان $PS = 20$ فما طول $\overline{QR}$ ؟

(أ) $\dfrac{20}{\sqrt{2}}$ (ب) $10\sqrt{3}$ (ج) 20 (د) $20\sqrt{2}$



الحل: الإجابة هي (ج):



لتكن X و Y كما هو مبين على الشكل. في $\triangle QXS$، $\widehat{XQS} = 45°$ ومن ثم $\widehat{QSX} = 45°$. وبذلك يكون المثلث متساوي الساقين. إذن،

$$QX = SX \qquad (١)$$

وبالمثل، في $\triangle PXR$ لدينا

$$RX = PX \qquad (٢)$$

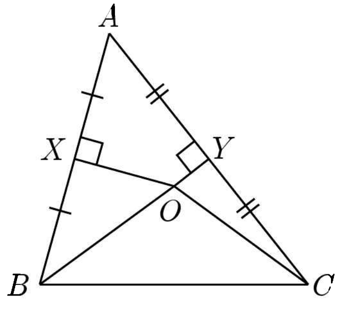
أيضاً،

$$\widehat{PXS} = 90^\circ = \widehat{RXQ} \qquad (٣)$$

من (١)، (٢)، (٣) نجد أن $\triangle PXS \equiv \triangle RQX$ (SAS). إذن، $QR = PS = 20$.

(١٦) في الشكل المرفق، O نقطة تقاطع المنصفين العموديين للضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$. إذا كان $OB = 10$ فما طول $\overline{OC}$ ؟

(أ) 5 (ب) 7.5 (ج) 10 (د) 15



الحل: الإجابة هي (ج): ارسم AO. الآن

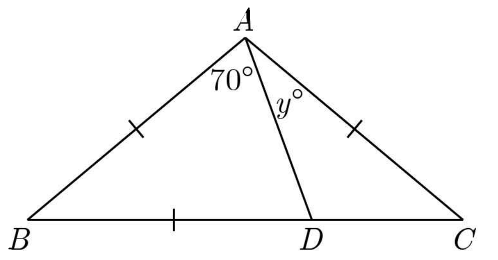
$$\triangle OAY \equiv \triangle OCY \quad (SAS)$$

$$\triangle OAX \equiv \triangle OBX \quad (SAS)$$

إذن، $AO = OC$ ، $OA = OB$. وبهذا يكون $OC = OA = OB = 10$.

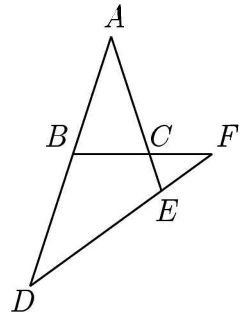
(١٧) في الشكل المرفق، $AB = AC = BD$. ما قياس الزاوية $\widehat{y}$ ؟

(أ) 20° (ب) 25° (ج) 30° (د) 35°



الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $AB = BD$ فإن $\widehat{BDA} = 70°$. إذن، $\widehat{B} = 180 - 2 \times 70 = 40°$. وبما أن $AB = AC$ فإن $\widehat{C} = \widehat{B} = 40°$.
الآن، $70 + y + 40 + 40 = 180°$. ومن ذلك يكون
$y = 180 - 150 = 30°$.

(١٨) مددنا أضلاع $\triangle ABC$ كما هو مبين في الشكل المرفق، إذا كان $AB = AC$ و $BD = BF$ و $AE = DE$ وكان $EF = 5$ فما طول $\overline{CF}$ ؟



(أ) 3 (ب) 3.5 (ج) 4 (د) 5

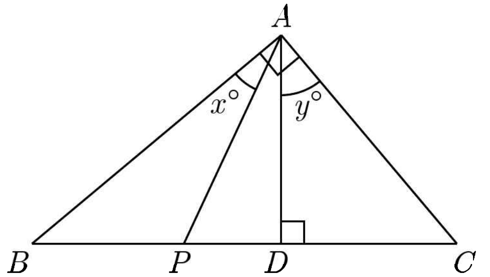
الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن $\widehat{A} = x°$ وأن $\widehat{ABC} = y°$. بما أن $AE = DE$ فإن $\widehat{D} = x$. وبما أن $BD = BF$ فإن $\widehat{F} = \widehat{D} = x$. الآن، $\widehat{DBF} = 180 - 2x$ (زوايا المثلث $\triangle BDF$). إذن، $y = 2x$. ويكون

$x + 2x + 2x = 180°$. إذن، $x = 36°$. وبهذا فإن $\widehat{FCE} = \widehat{ACB} = 72°$ بالتقابل بالرأس.

إذن، $\widehat{FEC} = 180 - (72 + 36) = 72°$. أي أن $\triangle FCE$ متساوي الساقين ويكون $FC = EF = 5$.

(١٩) في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ قائم الزاوية عند $\widehat{A}$ ، $\widehat{D} = 90°$ ، $AC = PC$ ، $\widehat{y} = 40°$. ما قياس $\widehat{x}$ ؟

(أ) $20°$ (ب) $25°$ (ج) $30°$ (د) $40°$



الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن $\widehat{PAD} = z°$. عندئذ، $90 = z + y + x$.

وبما أن $AC = PC$ فإن $\widehat{APC} = \widehat{CAP} = z + y$. إذن،

$$\widehat{APC} + \widehat{PAD} = z + y + z = 2z + y = 90°$$

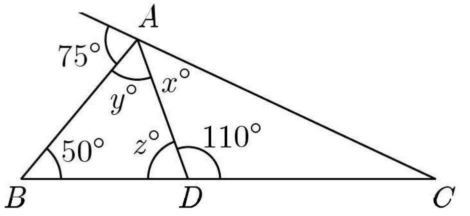
لأن $\triangle APD$ قائم الزاوية. من ذلك نجد أن

$$x + y + z = 2z + y = 90°$$

أي أن $z = x$. وبما أن $y = 40°$ فنجد أن $2x = 50°$. وبهذا فإن $x = 25°$.

(٢٠) [Aust.MC 1988] ما قياس الزاوية $\widehat{x}$ في الشكل المرفق ؟

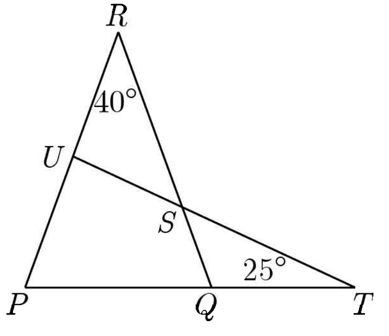
(أ) $30°$ (ب) $35°$ (ج) $40°$ (د) $45°$



الحل: الإجابة هي (د): بما أن $180 = 110 + z$ فإن $z = 70°$. وبما أن مجموع زوايا $\triangle ABD$ يساوي $180°$ فإن $y = 180 - (50 + 70) = 60°$. إذن، $x = 180 - (75 + y) = 180 - (75 + 60) = 45°$.

(٢١) [Aust.MC 1991] في الشكل المرفق، $PR = QR$، $\widehat{PRQ} = 40°$، $\widehat{PTU} = 25°$. ما قياس $\widehat{RST}$ ؟

(أ) $115°$ (ب) $125°$ (ج) $135°$ (د) $140°$



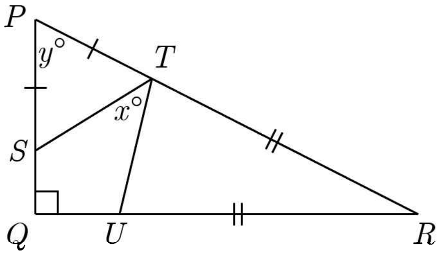
الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $PR = QR$ فإن $\widehat{RQP} = \widehat{RPQ} = 70°$. وبهذا فإن $\widehat{RQT} = 180 - 70 = 110°$ ويكون

$$\widehat{QST} = 180 - (110 + 25) = 45°$$

إذن، $\widehat{RST} = 180° - 45° = 135°$.

(٢٢) [Aust.MC 1990] في الشكل المرفق، $\triangle PQR$ قائم الزاوية عند $\widehat{Q}$، $PT = PS$، $RT = RU$. ما قياس الزاوية $\widehat{x}$ ؟

(أ) $30°$ (ب) $35°$ (ج) $40°$ (د) $45°$



الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أولاً أن $\widehat{R} = 90 - y$ وأن

$$\widehat{PTS} = \widehat{PST} = \frac{1}{2}(180 - y) = 90 - \frac{1}{2}y$$
$$\widehat{UTR} = 90 - \frac{1}{2}(90 - y) = 45 + \frac{1}{2}y$$

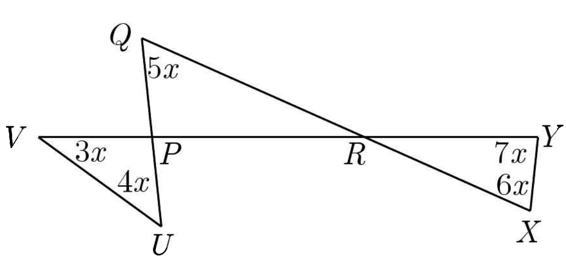
الآن، مجموع الزوايا عند النقطة T يساوي $180°$. إذن،

$$x + 90 - \frac{1}{2}y + 45 + \frac{1}{2}y = 180$$

ومن ذلك نجد أن $x = 45°$.

(٢٣) [Aust.MC 1988] في الشكل المرفق، قيمة x تساوي

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 15 (د) 18



الحل: الإجابة هي (ب): في المثلث $\triangle PQR$ لدينا

$$\widehat{QPR} = \widehat{UPV} = 180 - (3x + 4x)$$
$$\widehat{QRP} = \widehat{XRY} = 180 - (6x + 7x)$$

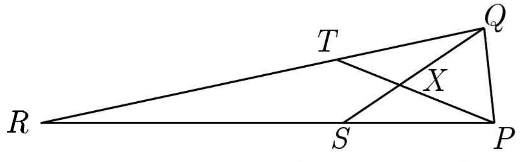
إذن،

$$180 - 7x + 180 - 13x + 5x = 180$$

أي أن $15x = 180$. وبهذا فإن $x = 12$.

(٢٤) [Aust.MC 1991] في الشكل المرفق، $PR = QR = 12$، $RS = RT = 8$. مساحة الشكل $RSXT$ تساوي 8 وحدات مربعة. مساحة $\triangle PRQ$ بالوحدات المربعة تساوي

(أ) 15 (ب) 16 (ج) 17 (د) 18



الحل: الإجابة هي (أ): لاحظ أن $\triangle PXS \equiv \triangle QXT$. ولذا فإن $[PXS] = [QXT]$. نفرض أن هذه المساحة هي x ولنفرض أن $[PXQ] = y$. عندئذ $\frac{4}{x} = \frac{[RXS]}{[PXS]}$. بما أن $RS = 8$ و $PS = 4$ فإن $\frac{8}{4} = \frac{[RXS]}{[PXS]}$. إذن، $\frac{8}{4} = \frac{4}{x}$. ومن ثم فإن $x = 2$. وبالمثل،

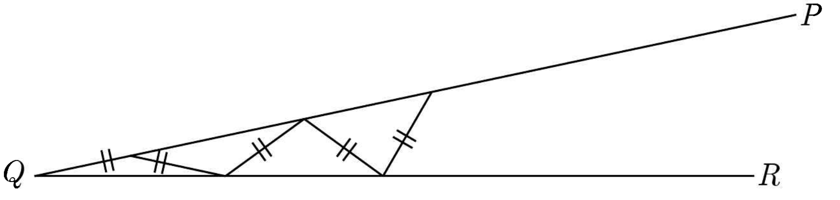
$$\frac{8}{4} = \frac{[PTR]}{[PTQ]} = \frac{8 + x}{y + x} = \frac{10}{y + 2}$$

وبهذا فإن $y = 3$. إذن

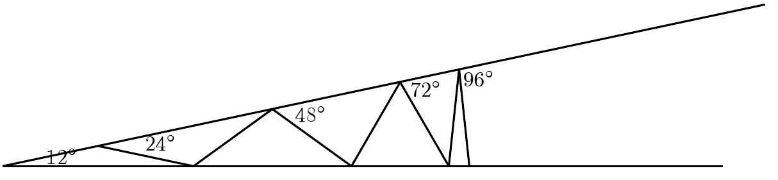
$$[PRQ] = 3 + 2 + 2 + 8 = 15\,.$$

(٢٥) [Aust.MC 1991] في الشكل المرفق، $\widehat{PQR} = 12^\circ$. رسمنا متتالية من المثلثات المتساوية الساقين كما هو موضح في الشكل. ما أكبر عدد ممكن من مثل هذه المثلثات يمكن رسمها ؟

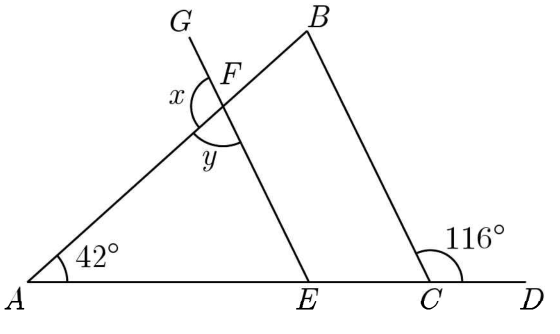
(أ) 4 (ب) 7 (ج) 9 (د) 12



الحل: الإجابة هي (ب): كما هو موضح في الرسم أدناه فإنه يمكن رسم 7 مثلثات فقط لأنه عند ظهور الزاوية ذات القياس 96° لا يمكن إنشاء مثلث متساوي الساقين لأن $96 + 96 > 180$.



(٢٦) في الشكل المرفق، $AECD$ ، AFB ، EFG مستقيمات. $CB \parallel EF$ ، $\widehat{BAC} = 42^\circ$ ، $\widehat{BCD} = 116^\circ$ ، ما قياس الزاوية x ؟

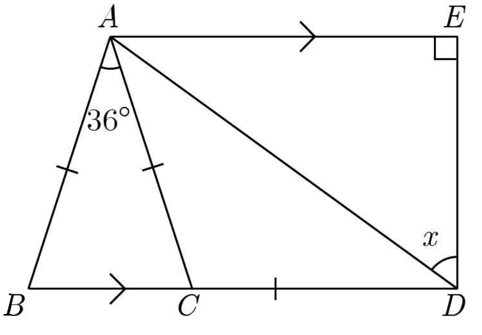


(أ) 74° (ب) 94° (ج) 96° (د) 106°

الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أن $\widehat{B} + 42^\circ = 116^\circ$ (خارجة عن المثلث ABC). إذن، $\widehat{B} = 74^\circ$. وبهذا فإن $\widehat{y} = \widehat{B} = 74^\circ$ (بالتناظر).

وبهذا يكون $\widehat{x} = 180^\circ - \widehat{y} = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$ (زاوية مستقيمة).

(٢٧) في الشكل المرفق، $AE \parallel BCD$، $\widehat{BAC} = 36^\circ$، $\widehat{AED} = 90^\circ$، $AB = AC = CD$. ما قيمة x ؟



(أ) 36° (ب) 54° (ج) 67° (د) 72°

الحل: الإجابة هي (ب): $\widehat{B} = \widehat{BCA} = 72^\circ$ لأن مجموع زوايا المثلث ABC يساوي 180° وأن $AB = AC$. ولذا فإن

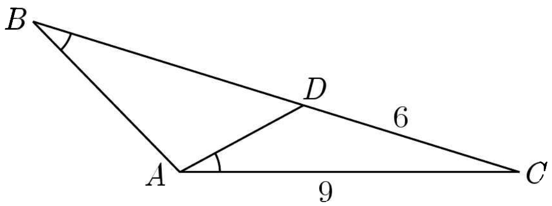
$\widehat{ACD} = 36^\circ + 72^\circ = 108^\circ$ (خارجة عن المثلث ABC).

$\widehat{CAD} = \widehat{CDA} = 36^\circ$ لأن مجموع زوايا المثلث ACD يساوي 180° وأن $AC = CD$. أيضاً،

$\widehat{EAD} = \widehat{CDA} = 36^\circ$ بالتبادل.

إذن، $x = 180^\circ - (36^\circ + 90^\circ) = 54^\circ$.

(٢٨) في الشكل المرفق، $\widehat{ABD} = \widehat{DAC}$ ، $AC = 9$ ، $CD = 6$ و $[BCA] = 18$. ما قيمة $[ABD]$ ؟



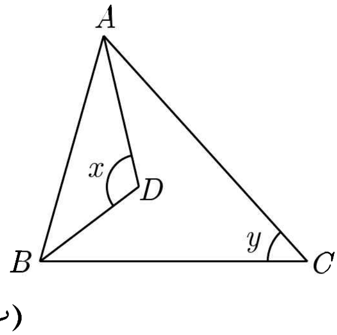
(أ) 6 (ب) 8 (ج) 9 (د) 10

الحل: الإجابة هي (د): المثلثان $\triangle ACD$ و $\triangle BCA$ متشابهان لأن $\widehat{DBA} = \widehat{DAC}$ وَ $\widehat{C} = \widehat{C}$.

من ذلك نرى أن $\frac{CD}{CA} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. وبهذا فإن $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{[ACD]}{[BCA]}$. أي أن $[ACD] = \frac{4}{9}[BCA] = \frac{4}{9} \times 18 = 8$. إذن،

$[ABD] = [BCA] - [ACD] = 18 - 8 = 10$.

(٢٩) في الشكل المرفق، AD و BD منصفان للزاويتين $\widehat{BAC}$ و $\widehat{ABC}$ على التوالي. ما قيمة y بدلالة x ؟



(أ) $y = x - 180^\circ$ (ب) $y = 2x - 180^\circ$

(ج) $y = 2x$ (د) $y = 2x - 90^\circ$

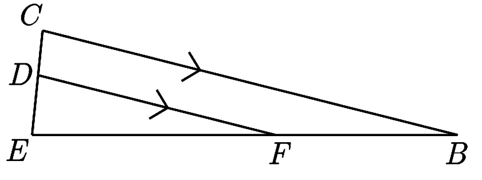
الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن $\widehat{BAD} = z$ وأن $\widehat{ABD} = w$. عندئذ،

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = z$$
$$\widehat{ABD} = \widehat{CBD} = w$$

$x = 180° - (z + w)$ لأن مجموع زوايا المثلث ABD يساوي $180°$. أيضاً، $y = 180° - 2z - 2w$ لأن مجموع زوايا المثلث ABC يساوي $180°$. إذن،

$$y = 180° - 2(z + w) = 180° - 2(180° - x) = 2x - 180°$$

(٣٠) في الشكل المرفق، $BF : FE = 3 : 4$ و $[DEF] = 32$. ما قيمة $[BCE]$ ؟



(أ) 49 (ب) 64 (ج) 72 (د) 98

الحل: الإجابة هي (د): $\triangle BCE \sim \triangle FDE$ (AA). إذن،

$$\frac{BC}{FD} = \frac{CE}{DE} = \frac{BE}{FE}$$

ولكن

$$\frac{BE}{FE} = \frac{BF + FE}{FE} = \frac{BF}{FE} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

من ذلك نرى أن

$$\frac{[BCE]}{[FDE]} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

إذن، $[BCE] = \frac{49}{16} \times 32 = 98$.

(٣١) [AMC8 2010] مثلث أطوال أضلاعه بالبوصات أعداد صحيحة متتالية. إذا كان طول الضلع الأقصر يساوي 30% من المحيط فما طول الضلع الأكبر ؟

(أ) 8 (ب) 9 (ج) 10 (د) 11

الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن طول الضلع الأكبر هو x. إذن، $x-1$ و $x-2$ هما طولا الضلعين الآخرين. محيط المثلث يساوي

$$P = x - 2 + x - 1 + x = 3x - 3$$

أيضاً،

$$x - 2 = \frac{3}{10}P = \frac{3}{10}(3x-3) = \frac{9}{10}x - \frac{9}{10}$$

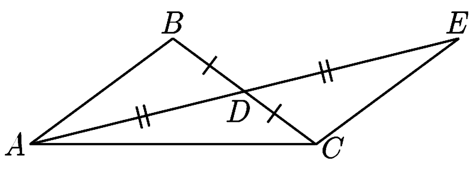
إذن،

$$x - \frac{9}{10}x = 2 - \frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{10}x = \frac{11}{10}$$

وبهذا يكون $x = 11$.

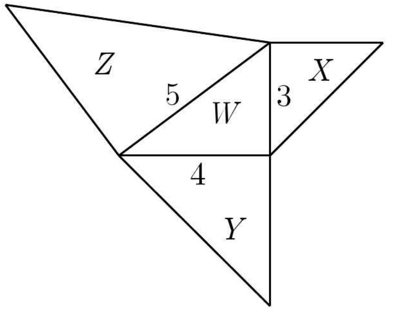
(٣٢) [AMC8 2006] في الشكل المرفق، المثلث $\triangle ABC$ متساوي الساقين فيه $AB = BC$ والنقطة D تنصف كلاً من BC و AE. إذا كان $CE = 11$ فما طول BD ؟



(أ) 4 (ب) 4.5 (ج) 5 (د) 5.5

الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أولاً أن $\triangle ABD \equiv \triangle ECD$ (SAS). ولذا فإن $AB = CE = 11$. إذن، $BC = 11$ لأن $\triangle ABC$ متساوي الساقين. وبهذا نجد أن $BD = \frac{11}{2} = 5.5$.

(٣٣) [AMC8 2002] رسمنا مثلثات قائمة متساوية الساقين على أضلاع مثلث قائم أطوال أضلاعه 3، 4، 5 كما هو مبين في الشكل حيث الحروف داخل المثلثات تمثل مساحة كل من هذه المثلثات. ما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية ؟



(أ) $X + Z = W + Y$ (ب) $W + X = Z$

(ج) $3X + 4Y = 5Z$ (د) $X + Y = Z$

الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أن

$$X = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

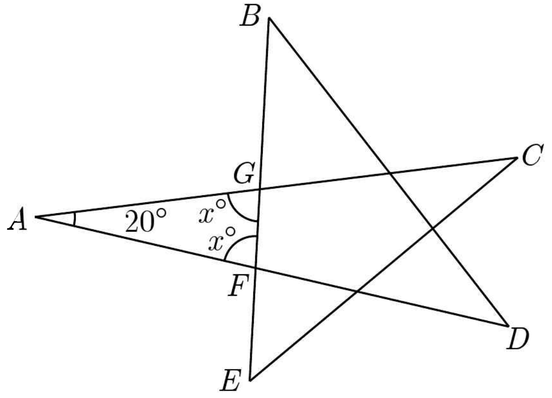
$$Y = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

$$Z = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$

$$W = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

إذن، $Z = \frac{25}{2} = 8 + \frac{9}{2} = X + Y$.

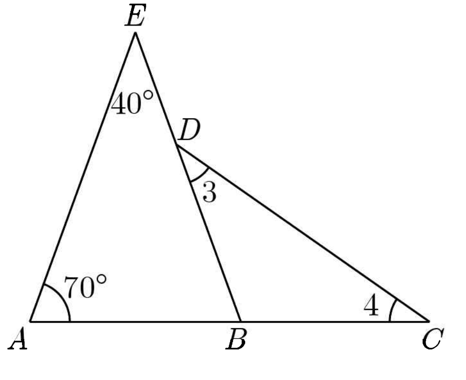
(٣٤) [AMC8 2000] في الشكل المرفق $\widehat{A} = 20^\circ$. ما قياس $\widehat{B} + \widehat{D}$ ؟



(أ) 48° (ب) 60° (ج) 70° (د) 80°

الحل: الإجابة هي (د): $2x = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$. إذن $x = 80^\circ$. الآن $\widehat{B} + \widehat{D} = x$ لأنها زاوية خارجة عن المثلث $\triangle FBD$. إذن، $\widehat{B} + \widehat{D} = 80^\circ$.

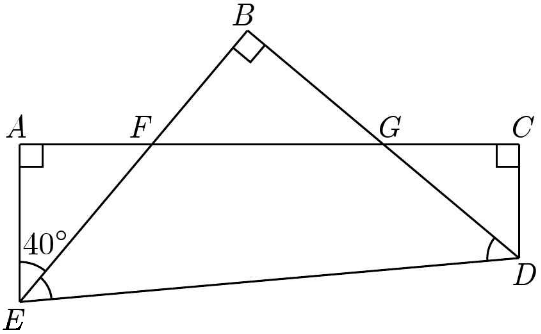
(٣٥) [AMC8 1997] في الشكل المرفق $\overleftrightarrow{ABC}$ مستقيم و $\widehat{4} = \widehat{3}$. ما قياس $\widehat{4}$ ؟



(أ) 20° (ب) 25° (ج) 35° (د) 40°

الحل: الإجابة هي (ج): لدينا $\widehat{EBA} = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$ لأن مجموع زوايا المثلث ABE يساوي 180°. إذن، $\widehat{EBC} = 110^\circ$ لأنها متممة للزاوية $\widehat{EBA}$. من ذلك يكون $\hat{3} = \hat{4} = \frac{180 - 110}{2} = 35^\circ$.

(٣٦) [AMC8 1995] في الشكل المرفق، كل من الزوايا $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ قائمة والمثلث EBD متساوي الساقين فيه $EB = DB$. ما قياس $\widehat{CDE}$ ؟



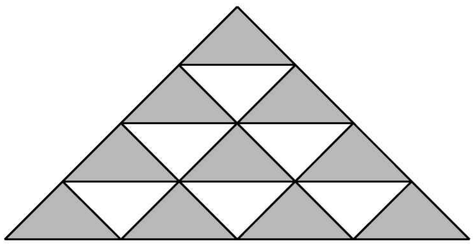
(أ) 80° (ب) 85° (ج) 90° (د) 95°

الحل: الإجابة هي (د):

$\widehat{AFE} = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$ لأن مجموع زوايا المثلث AFE يساوي 180°. وبهذا نرى أن $\widehat{BFG} = 50^\circ$ لأنها متقابلة بالرأس مع $\widehat{AFE}$. إذن، $\widehat{BGF} = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$. ومن ثم فإن $\widehat{DGC} = 40^\circ$ بالتقابل بالرأس. من ذلك يكون $\widehat{GDC} = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$. ولكن $EB = BD$، ومن ذلك نرى أن $\widehat{BDE} = \widehat{BED} = 45^\circ$. إذن،

$$\widehat{CDE} = \widehat{CDG} + \widehat{GDE} = 50^\circ + 45^\circ = 95^\circ.$$

(٣٧) [AMC8 1992] قسمنا مثلثاً قائماً ومتساوي الساقين حيث طول كل من ساقيه 8 إلى 16 مثلثاً متطابقاً كما هو مبين في الشكل المرفق. ما مساحة الجزء المظلل ؟



(أ) 10 (ب) 20 (ج) 30 (د) 40

الحل: الإجابة هي (ب): كل من المثلثات الصغيرة قائم ومتساوي الساقين وطول الساق يساوي 2. عندئذ، مساحة كل من هذه المثلثات تساوي

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

عدد المثلثات المظللة يساوي 10. إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي

$$10 \times 2 = 20$$

(٣٨) [AJHSME 1992] أطوال أضلاع مثلث هي $x, 10, 6.5$ حيث x عدد صحيح موجب. ما أصغر قيمة للعدد x ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

الحل: الإجابة هي (ب): من متباينة المثلث لدينا

$$x \leq 10 + 6.5 = 16.5$$
$$10 \leq 6.5 + x\,.$$

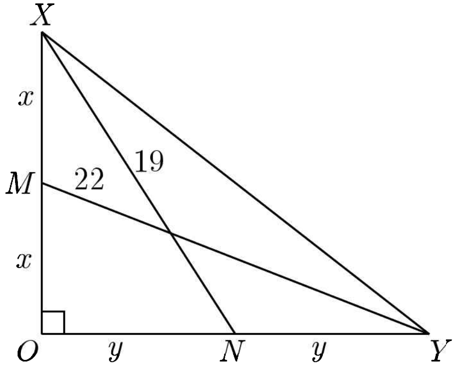
أي أن $3.5 \geq x$. إذن $3.5 \leq x \leq 16.5$. وبهذا تكون أصغر القيم الصحيحة

الموجبة للعدد x هي 4.

(٣٩) [AMCI2B 2002] ليكن $\triangle XOY$ قائم الزاوية في O، M و N نقطتي المنتصف لضلعي القائمة OX و OY على التوالي. إذا كان $XN = 19$ و $YM = 22$ فما طول XY ؟

(أ) 26 (ب) 28 (ج) 30 (د) 32

الحل: الإجابة هي (أ):



لنفرض أن $OM = MX = x$ وأن $ON = NY = y$. باستخدام مبرهنة فيثاغورس للمثلثين $\triangle XON$ و $\triangle MOY$ نرى أن

$$4x^2 + y^2 = 19^2$$
$$x^2 + 4y^2 = 22^2$$

بجمع المعادلتين نجد أن

$$5x^2 + 5y^2 = 19^2 + 22^2 = 845$$

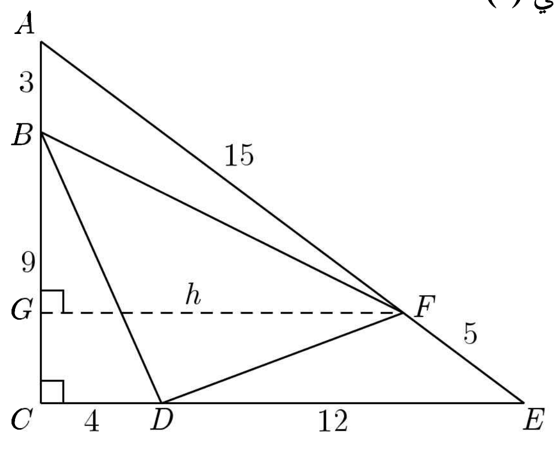
إذن، $x^2 + y^2 = \frac{845}{5} = 169$. الآن، باستخدام مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle XOY$ نجد أن

$$XY = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{169} = 26 .$$

(٤٠) [AMC10B 2004] المثلث $\triangle ACE$ قائم الزاوية فيه $AC = 12$، $CE = 16$، $EA = 20$. رسمنا النقاط B، D، F على AC، CE، EA على التوالي بحيث يكون $AB = 3$، $CD = 4$، $EF = 5$. ما نسبة مساحة المثلث $\triangle DBF$ إلى مساحة المثلث $\triangle ACE$ ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{3}{8}$ (ج) $\frac{11}{25}$ (د) $\frac{7}{16}$

الحل: الإجابة هي (د):



لاحظ أولاً أن

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CD}{CE} = \frac{EF}{EA} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{CE} = \frac{FA}{EA} = \frac{3}{4}$$

ارسم الآن الارتفاع h من F إلى AC ليلاقي AC في النقطة G. عندئذ،

$$\triangle AFG \sim \triangle AEC \quad (AA).$$

إذن،

$$\frac{AF}{AE} = \frac{FG}{EC} = \frac{AG}{AC} = \frac{3}{4}$$

من ذلك نرى أن $h = FG = \frac{3}{4}EC$. الآن،

$$\begin{aligned}[ABF] &= \frac{1}{2} \times AB \times h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}AC\right)\left(\frac{3}{4}EC\right) \\ &= \frac{3}{16}\left(\frac{1}{2} \times AC \times EC\right) = \frac{3}{16}[ACE]\end{aligned}$$

وبالمثل، نرى أن $[BCD] = [DEF] = \frac{3}{16}[ACE]$. إذن،

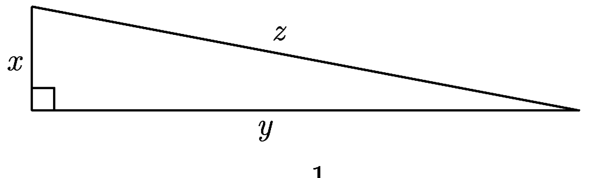
$$[DBF] = [ACE] - 3 \times \frac{3}{16}[ACE] = \frac{7}{16}[ACE]$$

وبهذا يكون $\frac{[DBF]}{[ACE]} = \frac{7}{16}$.

(٤١) [AMC10A 2008] مثلث قائم الزاوية محيطه 32 ومساحته 20. ما طول وتره ؟

(أ) $\frac{57}{4}$ (ب) $\frac{59}{4}$ (ج) $\frac{61}{4}$ (د) $\frac{63}{4}$

الحل: الإجابة هي (ب):



لدينا $x + y + z = 32$ و $\frac{1}{2}xy = 20$. من مبرهنة فيثاغورس لدينا

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

إذن،

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= 32-(x+y)\\ x^2+y^2 &= 32^2-64(x+y)+(x+y)^2\\ x^2+y^2+64(x+y) &= x^2+y^2+2xy+32^2\\ x+y &= \frac{2xy+32^2}{64}\end{aligned}$$

وبما أن $\frac{1}{2}xy = 20$ فإن $2xy = 80$. إذن،

$$x+y=\frac{80+32^2}{64}=\frac{69}{4}$$

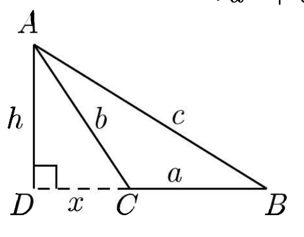
وبهذا يكون

$$z=32-(x+y)=32-\frac{69}{4}=\frac{59}{4}$$

(٤٢) ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية غير المتطابقة التي أطوال أضلاعها أعداد صحيحة ومحيطها يساوي 11 ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

الحل: الإجابة هي (أ): سنبرهن أولاً أنه إذا كان $\triangle ABC$ منفرج الزاوية حيث $a \le b < c$ فإن $a^2+b^2<c^2$.



اسقط ارتفاعاً h من A ليلاقي امتداد BC في النقطة D. ولنفرض أن $DC = x$. الآن، باستخدام مبرهنة فيثاغورس على المثلث $\triangle ADB$ والمثلث

$\triangle ADC$ نجد أن

$$\begin{aligned} c^2 &= (a+x)^2 + h^2 \\ &= a^2 + (h^2 + x^2) + 2ax \\ &= a^2 + b^2 + 2ax > a^2 + b^2 \end{aligned}$$

لأن $2ax > 0$. إذن، $a^2 + b^2 < c^2$. الآن، المثلثات المنفرجة الزاوية ذوات المحيط 11 التي أضلاعها أعداد صحيحة هي $(2,4,5)$، $(3,3,5)$، $(3,4,4)$. وبما أن $2^2 + 4^2 < 5^2$، $3^2 + 3^2 < 5^2$، $3^2 + 4^2 > 4^2$ فيوجد مثلثان فقط يحققان المطلوب.

(٤٣) [MAΘ 1992] يرتكز سلم طوله 25 بوصة على جدار رأسي حيث يبعد أسفل السلم 7 بوصات عن قاعدة الجدار. إذا انزلق أعلى السلم بمقدار 4 بوصات فما البعد الجديد لأسفل السلم عن قاعدة الجدار ؟

(أ) 8 (ب) 11 (ج) 15 (د) 24

الحل: الإجابة هي (ج): باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن بعد أعلى السلم عن أسفل القاعدة قبل الانزلاق هو $24 = \sqrt{25^2 - 7^2}$.

وبعد الانزلاق يكون بعد أعلى السلم عن القاعدة يساوي 20 بوصة. ولذا فبُعد أسفله عن قاعدة الجدار يساوي $15 = \sqrt{25^2 - 20^2}$.

(٤٤) [Mathcounts 1990] إذا كانت أطوال أضلاع المثلث $\triangle ABC$ هي 40، 60، 80 وكان أقصر ارتفاعاته يساوي حاصل ضرب عدد K مع أطول ارتفاعاته فما قيمة K ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (ج) $\frac{3}{2}$ (د) 2

الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن الارتفاعات هي h_a, h_b, h_c حيث a, b, c مختلفة بحيث أن $h_a < h_b < h_c$. بما أن

$$2 \times [ABC] = ah_a = bh_b = ch_c$$

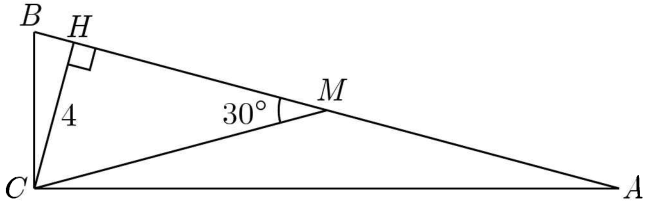
فنرى أن الارتفاع h_a مرسوم إلى الضلع الأطول وأن الارتفاع h_c مرسوم إلى الضلع الأقصر. إذن، $c = 40$ و $a = 80$. ومن ذلك نرى أن

$$80h_a = 40h_c$$

$$h_a = \frac{1}{2}h_c$$

وبهذا يكون $K = \frac{1}{2}$.

(٤٥) في الشكل المرفق، $\widehat{BCA} = 90°$، CM متوسط من C إلى AB، $\widehat{CMH} = 30°$، $\widehat{H} = 90°$، $CH = 4$. ما مساحة المثلث $\triangle ABC$ ؟

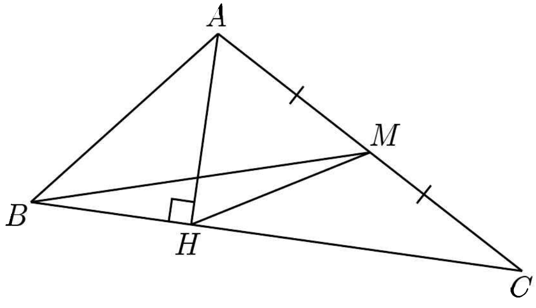


(أ) 24 (ب) 28 (ج) 32 (د) 36

الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\triangle MCH$ هو مثلث $90° - 60° - 30°$ وأن $CH = 4$ فإن $CM = 2 \times 4 = 8$. وبما أن طول المتوسط إلى وتر المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر فإن $AB = 2CM = 16$. إذن

$$[ABC] = \frac{1}{2} \times CH \times AB = \frac{1}{2} \times 4 \times 16 = 32$$

(٤٦) [AHSME 1989] في المثلث المرفق $\triangle ABC$، $\widehat{A} = 100°$، $\widehat{B} = 50°$، AH ارتفاع، BM متوسط. ما قياس الزاوية $\widehat{MHC}$ ؟



(أ) $20°$ (ب) $25°$ (ج) $30°$ (د) $50°$

الحل: الإجابة هي (ج): بما أن HM متوسط إلى وتر المثلث القائم $\triangle AHC$ فإن $HM = \frac{1}{2}AC$. وبما أن BM متوسط في المثلث ABC فإن $AM = MC$. إذن، $HM = AM = MC$. وبهذا يكون المثلث $\triangle MHC$ متساوي الساقين فيه $\widehat{MHC} = \widehat{C}$. ولكن $\widehat{C} = 180° - (100° + 50°) = 30°$.

(٤٧) [AHSME 1986] طولا ارتفاعين من ارتفاعات مثلث مختلف الأضلاع ABC هما 4 و 12. إذا فرضنا أن طول الارتفاع الثالث هو أيضاً عدد صحيح فما أعلى قيمة يأخذها طول هذا الارتفاع ؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 7 (د) 9

الحل: الإجابة هي (ب): سنبرهن أولاً أن الارتفاعات h_a, h_b, h_c لأي مثلث تحقق المتباينة

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

بما أن $ah_a = bh_b = ch_c = 2[ABC]$ فإن
$a = \dfrac{2[ABC]}{h_a}$ ، $b = \dfrac{2[ABC]}{h_b}$ ، $c = \dfrac{2[ABC]}{h_c}$. وبما أن $a < b + c$ فنرى أن $\dfrac{2[ABC]}{h_c} + \dfrac{2[ABC]}{h_b} < \dfrac{2[ABC]}{h_a}$. إذن، $\dfrac{1}{h_c} + \dfrac{1}{h_b} < \dfrac{1}{h_a}$. الآن، لنفرض الآن أن الارتفاع الثالث للمثلث هو x. إذن،

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{4} < \frac{1}{x} + \frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{12} < \frac{1}{x} + \frac{1}{4}$$

من المتباينة الأولى نجد أن $x > 3$ ومن الثانية نرى أن $x < 6$ ومن الثالثة نجد أن $-6 < x$ (أي $0 < x$). إذن، $3 < x < 6$. وبهذا فأكبر قيمة صحيحة يأخذها x هي 5.

(٤٨) إذا كان محيط المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ يساوي 60 ومساحته تساوي 150 فما هو طول وتره ؟

(أ) 10 (ب) 20 (ج) 25 (د) 30

الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن طول الوتر هو c وأن طولي ضلعي القائمة هما a و b. إذن،

$$a + b + c = 60$$
$$ab = 2 \times 150 = 300$$

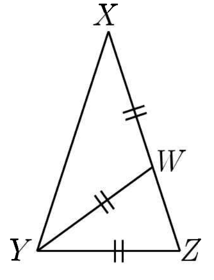
ومن ذلك نجد أن

$$a+b=60-c$$
$$(a+b)^2=(60-c)^2$$
$$a^2+b^2+2ab=60^2+c^2-120c$$

ولكن $a^2+b^2=c^2$. إذن،

$$2ab=60^2-120c$$
$$2\times 300=3600-120c$$
$$120c=3600-600=3000$$
$$c=\frac{3000}{120}=25$$

(٤٩) [Cayley 2011] في الشكل المرفق، $\triangle XYZ$ مثلث متساوي الساقين فيه $XY=XZ$. W نقطة على XZ حيث $XW=WY=YZ$. ما قياس الزاوية $\widehat{XYW}$ ؟



(أ) 30° (ب) 36° (ج) 45° (د) 60°

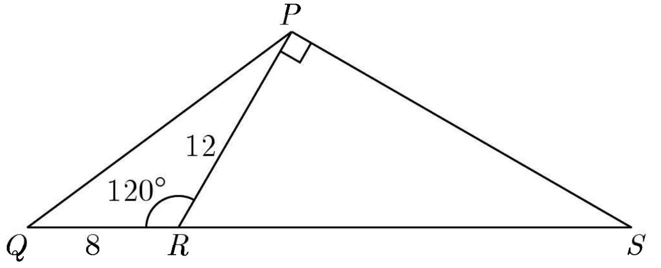
الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن x هو قياس الزاوية $\widehat{XYW}$. بما أن $\triangle XYW$ متساوي الساقين فإن $\widehat{YXW}=\widehat{XYW}=x$. إذن، $\widehat{XWY}=180^\circ-2x$ لأن مجموع زوايا المثلث $\triangle XYW$ يساوي 180° . وبما أن $\widehat{XWY}+\widehat{ZWY}=180^\circ$ (زاوية مستقيمة)، فإن $\widehat{ZWY}=180^\circ-(180^\circ-2x)=2x$. وبما أن $\triangle YWZ$ متساوي الساقين إذن

$\widehat{YZW} = \widehat{ZWY} = 2x$. وبما أن $\triangle XYZ$ متساوي الساقين إذن $\widehat{XYZ} = \widehat{XZY} = \widehat{ZWY} = 2x$.

الآن، $\widehat{XYZ} + \widehat{XZY} + \widehat{YXZ} = 180°$ (مجموع زوايا المثلث $\triangle XYZ$). إذن

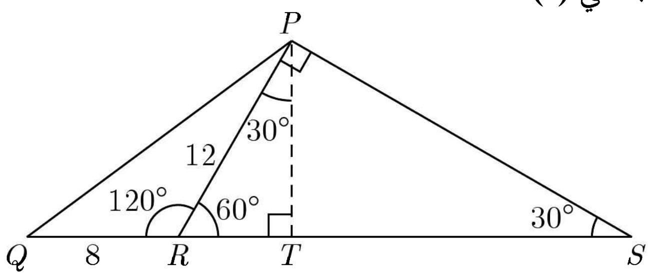
$$2x + 2x + x = 180°$$
$$5x = 180°$$
$$x = \frac{180°}{5} = 36°$$

(٥٠) [Cayley 2008] في الشكل المرفق، النقطة R تقع على QS، $QR = 8$، $PR = 12$، $\widehat{PRQ} = 120°$، $\widehat{RPS} = 90°$. ما مساحة المثلث $\triangle QPS$ ؟



(أ) $36\sqrt{3}$ (ب) $60\sqrt{3}$ (ج) $72\sqrt{3}$ (د) $96\sqrt{3}$

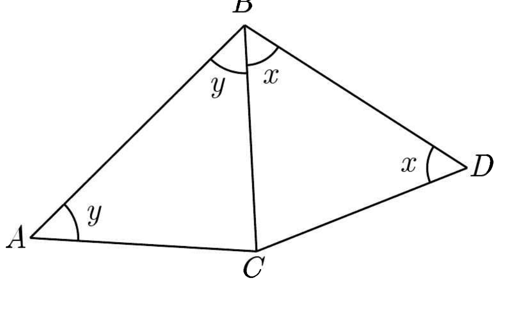
الحل: الإجابة هي (د):



بما أن $\widehat{PRT} = 60°$ وأن $\widehat{PSR} = 30°$ فإن المثلث ΔSRP هو مثلث $30° - 60° - 90°$. إذن، $RS = 2RP = 24$. الآن، ارسم الارتفاع PT ليلاقي QS في النقطة T . المثلث ΔPRT هو مثلث $30° - 60° - 90°$. إذن، $PT = \frac{\sqrt{3}}{2}PR = 6\sqrt{3}$. الآن، PT هو ارتفاع المثلث ΔQPS و QS قاعدته. إذن، مساحته هي

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times QS \times PT &= \frac{1}{2}(QR + RS) \times PT \\ &= \frac{1}{2}(8 + 24) \times 6\sqrt{3} \\ &= 96\sqrt{3}\end{aligned}$$

(٥١) [Cayley 2007] في الشكل المرفق، كل من ΔABC و ΔCBD متساوي الساقين. محيط ΔCBD يساوي 19 ومحيط ΔABC يساوي 20، $BD = 7$. ما طول AB ؟



(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8

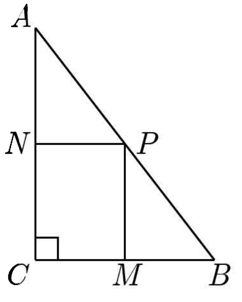
الحل: الإجابة هي (د): في ΔABC لدينا $AC = BC$. وفي ΔBCD لدينا $CD = BC$. إذن، $AC = BC = CD$. الآن، محيط ΔCBD يساوي 19 و $BD = 7$. إذن،

$$7 + BC + CD = 19$$
$$2BC = 12$$
$$BC = 6$$

محيط $\triangle ABC$ يساوي 20 و $BC = 6$. إذن،

$$AB + 6 + 6 = 20$$
$$AB = 20 - 12$$
$$AB = 8$$

(٥٢) [Cayley 2007] في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ قائم الزاوية، $\widehat{C} = 90°$. M، N، P منصفات الأضلاع BC، AC، AB على التوالي. إذا كانت مساحة المثلث $\triangle APN$ تساوي 2 فما مساحة المثلث $\triangle ABC$ ؟



(أ) 4 (ب) 6 (ج) 8 (د) 16

الحل: الإجابة هي (ج):

الحل الأول

$\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{AN}{AC}$ والزاوية $\widehat{A}$ مشتركة في المثلثين $\triangle APN$ و $\triangle ABC$. إذن، $\triangle ABC \sim \triangle APN$. من ذلك نرى أن

$$\frac{[APN]}{[ABC]} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$[ABC] = 4[APN] = 4 \times 2 = 8$$

الحل الثاني

$\triangle APN \sim \triangle ABC$ (كما في الحل الأول). إذن، $\widehat{N} = \widehat{C} = 90°$. بالمثل $\triangle PMB \sim \triangle ACB$. إذن، $\widehat{M} = \widehat{C} = 90°$. إذن،

$$AN = NC = PM = \frac{1}{2}AC \text{ و } NP = CM = MB = \frac{1}{2}CB .$$

من ذلك يكون $\triangle ANP \equiv \triangle PMB$. إذن، $[PMB] = 2$. ومن الواضح أن $[NPMC] = 2[ANP] = 4$. إذن،

$$[ABC] = 2 + 2 + 4 = 8 .$$

الحل الثالث

صل بين النقطتين C و P. عندئذ، $\triangle CPN \equiv \triangle PCM$. بما أن $AN = NC$ وأن PN ارتفاع لكل من المثلثين $\triangle PNA$ و $\triangle PNC$ فإن $[PNA] = [PNC]$. وبالمثل، $[PMC] = [PMB]$. وبالتالي فمساحة المثلثات الأربعة الصغيرة متساوية وتساوي 2 إذن،

$$[ABC] = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

(٥٣) [MAΘ 2011] في المثلث $\triangle ABC$، $BC = 3$، $AC = 5$. ما عدد القيم الممكنة للطول AB لكي يكون $\triangle ABC$ قائم الزاوية ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

الحل: الإجابة هي (ج): هناك خياران لطول AB الأول منهما هو أن يكون AC هو الوتر (الأطول). في هذه الحالة $AB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. وأما الخيار الثاني فهو أن يكون AB هو الوتر. في هذه الحالة $AB = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

لاحظ استحالة أن يكون BC هو الوتر.

(٥٤) مثلث مختلف الأضلاع طول الضلعين الصغيرين هما 3 و 5. ما مجموع الخيارات الممكنة للأطوال الصحيحة للضلع الأكبر ؟

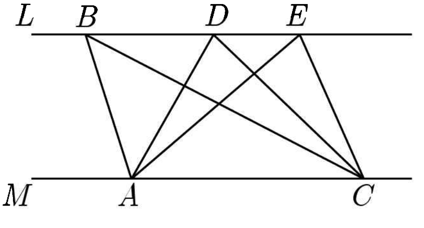
(أ) 6 (ب) 13 (ج) 18 (د) 22

الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن طول الضلع الأكبر هو x. عندئذ،

$$x < 3 + 5$$
$$5 < x + 3$$
$$3 < x + 5$$

وبهذا يكون $2 < x < 8$. إذن، $x = 3, 4, 5, 6, 7$. وبما أن x هو الأطول فالخياران هما 6 و 7 ومجموعها يساوي 13.

(٥٥) المستقيمان L و M متوازيان. أي من المثلثات الثلاثة $\triangle ABC$، $\triangle ADC$، $\triangle AEC$ مساحته هي الأكبر ؟



(أ) $\triangle ABC$ (ب) $\triangle ADC$

(ج) $\triangle AEC$ (د) مساحات المثلثات الثلاثة متساوية

الحل: الإجابة هي (د): للمثلثات الثلاثة قاعدة مشتركة هي AC وارتفاع مشترك.

(٥٦) [AHSME 1950] في المثلث $\triangle ABC$، $AB = 12$، $AC = 7$، $BC = 10$. إذا ضاعفنا طول كل من AB و AC وبقي طول BC كما

هو فإن:

(أ) مساحة المثلث تتضاعف.

(ب) طول الارتفاع يتضاعف.

(ج) المساحة الجديدة تصبح أربعة أضعاف المساحة السابقة.

(د) المساحة الجديدة تساوي صفراً.

الحل: الإجابة هي (د): في المثلث الجديد $AB = AC + BC$. إذن، C تقع على AB . وبهذا يكون الارتفاع من C يساوي صفراً. وبالتالي فمساحة المثلث تساوي صفراً.

(٥٧) [AHSME 1951] إذا كانت عقارب الساعة تشير إلى أن الوقت هو $2:15$ فما قياس الزاوية بين عقرب الساعات وعقرب الدقائق ؟

(أ) $7\frac{1}{2}^\circ$ (ب) 15° (ج) $22\frac{1}{2}^\circ$ (د) 30°

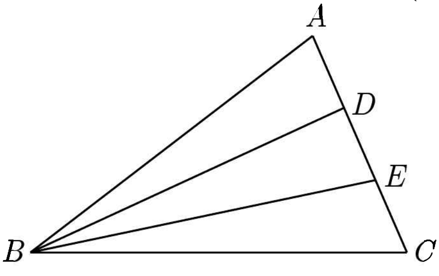
الحل: الإجابة هي (ج): في ساعة واحدة يدور عقرب الساعات بزاوية قياسها $30^\circ = \frac{360^\circ}{12}$. عند الساعة $2:15$ يكون عقرب الساعات قد تحرك بزاوية قيمتها $7\frac{1}{2}^\circ = 30 \times \frac{1}{4}$ عن موقعه عند الساعة $2:00$. إذن، قياس الزاوية بين عقرب الساعات وعقرب الدقائق يساوي $22\frac{1}{2}^\circ = 30^\circ - 7\frac{1}{2}^\circ$.

(٥٨) [AHSME 1952] في المثلث $\triangle ABC$، BD وَ BE يثلثان الزاوية B ويلاقيان AC في D و E على التوالي. ما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية:

(أ) $\dfrac{AD}{EC} = \dfrac{AE}{DC}$ (ب) $\dfrac{AD}{EC} = \dfrac{(AB)(BD)}{(BE)(BC)}$

(ج) $\dfrac{AD}{EC} = \dfrac{AB}{BC}$ (د) $\dfrac{AD}{EC} = \dfrac{(AE)(BD)}{(DC)(BE)}$

الحل: الإجابة هي (ب):



BD ينصف الزاوية $\widehat{ABE}$. إذن، $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{AB}{BE}$.

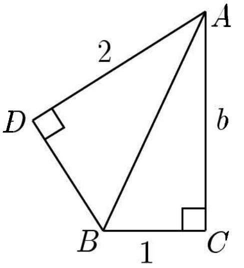
BE ينصف الزاوية $\widehat{DBC}$. إذن، $\dfrac{DE}{EC} = \dfrac{DB}{BC}$.

ومن ذلك يكون، $\dfrac{AD}{EC} = \dfrac{DE\left(AB/BE\right)}{DE(BC/BD)} = \dfrac{(AB)(BD)}{(BE)(BC)}$.

(٥٩) [AHSME 1952] رسمنا على الوتر AB للمثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ مثلثاً آخر قائم الزاوية $\triangle ABD$ وتره AB. إذا كان $BC = 1$، $AC = b$، $AD = 2$ فما طول BD ؟

(أ) $\sqrt{b^2 - 3}$ (ب) $\sqrt{b^2 - 1}$ (ج) $\sqrt{b^2 + 1}$ (د) $\sqrt{b^2 + 3}$

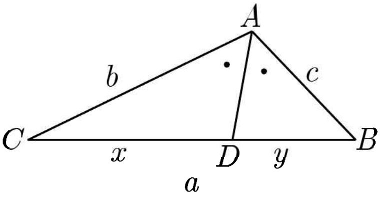
الحل: الإجابة هي (أ):



استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$
\begin{aligned}
(AB)^2 &= b^2 + 1 \\
(AB)^2 &= (BD)^2 + 4 \\
(BD)^2 + 4 &= b^2 + 1 \\
(BD)^2 &= b^2 - 3 \\
(BD) &= \sqrt{b^2 - 3}
\end{aligned}
$$

(٦٠) [AHSME 1953] في المثلث $\triangle ABC$، AD منصف للزاوية A، $CD = x$، $DB = y$. ما النسبة الصحيحة من بين النسب التالية ؟



(أ) $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{b+c}$ (ب) $\dfrac{x}{b} = \dfrac{a}{a+c}$

(ج) $\dfrac{y}{c} = \dfrac{c}{b+c}$ (د) $\dfrac{y}{c} = \dfrac{a}{b+c}$

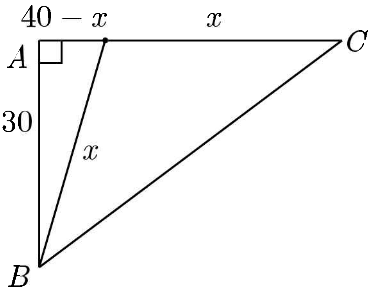
الحل: الإجابة هي (أ): باستخدام مبرهنة منصف الزاوية نجد أن $\dfrac{x}{b} = \dfrac{y}{c}$.

إذن، $\dfrac{x}{b} = \dfrac{x+y}{b+c} = \dfrac{a}{b+c}$.

(٦١) [AHSME 1953] يبعد مخيم صيفي عن شارع رئيسي مستقيم مسافة 30 كم. ويوجد على الشارع الرئيسي مخيم صيفي آخر يبعد مسافة 40 كم عن أقرب نقطة على الشارع من المخيم الصيفي الأول. يراد فتح مقهى على الشارع الرئيسي بحيث يكون على مسافة متساوية من المخيمين. ما المسافة بين المقهى وكل من المخيمين ؟

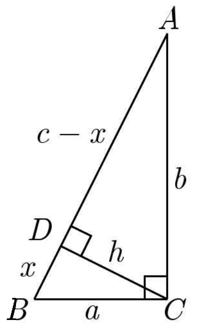
(أ) 40 كم (ب) 31.25 كم (ج) 25 كم (د) 22.5 كم

الحل: الإجابة هي (ب)



$$
\begin{aligned}
x^2 &= (30)^2 + (40-x)^2 \\
x^2 &= 900 + 1600 - 80x + x^2 \\
80x &= 2500 \\
x &= \frac{2500}{80} = 31.25
\end{aligned}
$$

(٦٢) [AHSME 1954] في المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$، $a : b = 1 : 2$ ما هي النسبة $x : c - x$ ؟



(أ) $1:2$ (ب) $1:4$ (ج) $1:5$ (د) $1:\sqrt{5}$

الحل: الإجابة هي (ب): سنبرهن أولاً أن $xc = a^2$ و $(c-x)c = b^2$ لأي مثلث قائم الزاوية. لاحظ أن

$$\begin{aligned}
a^2 &= x^2 + h^2 = x^2 + b^2 - (c-x)^2 \\
&= x^2 + c^2 - a^2 - (c-x)^2 \\
&= x^2 + c^2 - a^2 - c^2 + 2xc - x^2 \\
2a^2 &= 2xc \\
a^2 &= xc
\end{aligned}$$

أيضاً،

$$\begin{aligned}
b^2 &= (c-x)^2 + h^2 = (c-x)^2 + a^2 - x^2 \\
&= c^2 - 2cx + x^2 + a^2 - x^2 \\
&= c^2 - 2cx + a^2 \\
&= c^2 - 2xc + c^2 - b^2
\end{aligned}$$

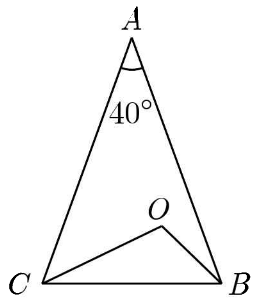
ومنه،

$$\begin{aligned}
2b^2 &= 2c(c-x) \\
b^2 &= (c-x)c
\end{aligned}$$

الآن، في المثلث المعطى $\frac{1}{2} = \frac{a}{b}$. إذن،

$$\frac{x}{c-x} = \frac{xc}{(c-x)c} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{4}\,.$$

(٦٣) [AHSME 1954] $\triangle ABC$ متساوي الساقين فيه $AB = AC$، $\widehat{OBC} = \widehat{OCA}$، $\widehat{A} = 40°$. ما قياس $\widehat{BOC}$ ؟

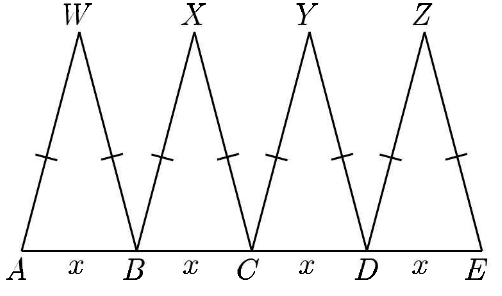


(أ) $100°$ (ب) $105°$ (ج) $110°$ (د) $120°$

الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 70°$ وأن $\widehat{ACO} = \widehat{OBC}$ فإن $\widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 70°$. إذن،

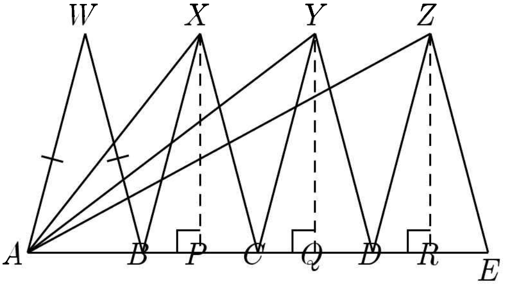
$$\widehat{BOC} = 180° - 70° = 110°\,.$$

(٦٤) [Cayley 2004] الشكل المرفق يبين أربعة مثلثات متساوية الساقين متطابقة AWB، BXC، CYD، DZE حيث A، B، C، D، E على استقامة واحدة. أنشأنا مثلثاً جديداً أطوال أضلاعه تساوي الأطوال AX، AY، AZ. إذا كان $AZ = AE$ فما أكبر قيمة صحيحة للعدد x التي تجعل مساحة المثلث المنشأ أصغر من 2004 ؟



(أ) 16 (ب) 18 (ج) 20 (د) 22

الحل: الإجابة هي (د):



سنجد أولاً أطوال أضلاع المثلث الجديد بدلالة x. ارسم الأعمدة XP ، YQ، ZR . بما أن كلاً من المثلثات متساوي الساقين فنرى أن $BP = PC = CQ = QD = DR = RE = \frac{1}{2}x$. الآن، $\triangle ARZ$ قائم الزاوية في R وفيه $AZ = AE = 4x$. إذن، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$(RZ)^2 = (AZ)^2 - (AR)^2 = (4x)^2 - \left(\frac{7}{2}x\right)^2 = \frac{15}{4}x^2$$

ولذا فإن مربع طول ارتفاع كل من المثلثات الأربعة $\frac{15}{4}x^2$. الآن،

$$AY = \sqrt{(AQ)^2 + (QY)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}x^2 + \frac{15}{4}x^2} = \sqrt{10x^2} = \sqrt{10}x$$

$$AX = \sqrt{(AP)^2 + (PX)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x^2} = \sqrt{6x^2} = \sqrt{6}x$$

إذن، أطوال أضلاع المثلث الجديد هي $\sqrt{6}x$، $\sqrt{10}x$، $4x$. وبما أن

$$\left(\sqrt{6}x\right)^2 + \left(\sqrt{10}x\right)^2 = \left(4x\right)^2$$

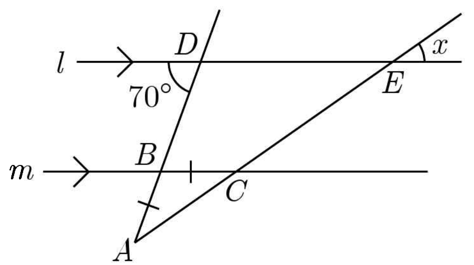
فيكون المثلث قائم الزاوية وطول وتره يساوي $4x$. إذن، مساحته تساوي

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}x\right)\left(\sqrt{10}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{60}x^2 = \sqrt{15}x^2$$

ولكي تكون المساحة أصغر من 2004 نرى أن $\sqrt{15}x^2 < 2004$. أي أن $x < 22.747$.

إذن، أكبر قيمة صحيحة للعدد x هي 22.

(٦٥) ما قيمة الزاوية x في الشكل المرفق ؟



(أ) $25°$ (ب) $30°$ (ج) $35°$ (د) $40°$

الحل: الإجابة هي (ج): $\widehat{DBC} = 70°$ بالتبادل، $\widehat{CBA} = 110$ لأن $\widehat{DBA}$ مستقيمة. $\widehat{BCA} = \widehat{DEA} = \hat{x}$ بالتقابل بالرأس والتناظر. $\widehat{BAC} = x$ لأن $\triangle BCA$ متساوي الساقين. إذن،

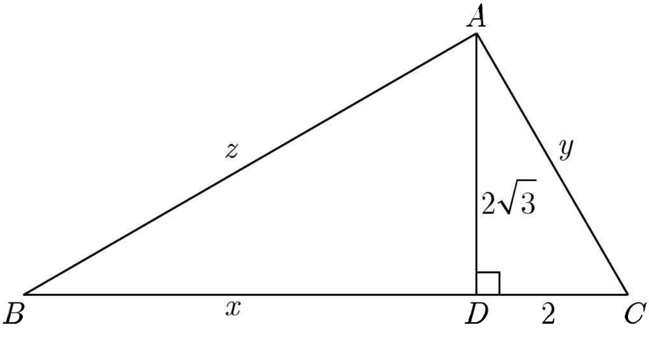
$$x + x + 110 = 180$$ (زوايا المثلث)
$$2x = 70$$
$$x = 35°$$

(٦٦) [MAΘ 2010] رسمنا ارتفاعاً طوله $2\sqrt{3}$ إلى وتر مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول إحدى قطعتي الوتر يساوي 2 فما محيط المثلث ؟

(أ) $2\left(5+2\sqrt{3}\right)$ (ب) $2\left(6+\sqrt{3}\right)$

(ج) $4\left(3+\sqrt{3}\right)$ (د) $6\left(3+\sqrt{3}\right)$

الحل: الإجابة هي (ج):



$$y = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$(x+2)^2 = y^2 + z^2 = 16 + z^2$$
$$x^2 + 4x + 4 = 16 + z^2$$

ولكن، $z^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + x^2 = 12 + x^2$. إذن،

$$x^2 + 4x + 4 = 16 + 12 + x^2$$
$$4x = 24$$
$$x = 6$$

وبهذا يكون، $z = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. ولذا فإن محيط المثلث:

$$\begin{aligned} P = (x+2) + y + z &= 8 + 4 + 4\sqrt{3} \\ &= 12 + 4\sqrt{3} \\ &= 4(3+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

(٦٧) [AHSME 1956] إذا أبقينا قياس زاوية في مثلث كما هو ولكننا ضاعفنا الضلعين المحصورة بينهما فإن مساحة المثلث الجديد تساوي:

(أ) ضعف مساحة المثلث الأصلي

(ب) ثلاثة أمثال مساحة المثلث الأصلي

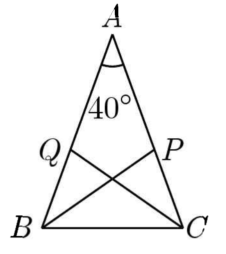
(ج) أربعة أمثال مساحة المثلث الأصلي

(د) ستة أمثال مساحة المثلث الأصلي

الحل: الإجابة هي (ج): المثلثان متشابهان. ولذا فإن

$$\frac{\text{مساحة المثلث الجديد}}{\text{مساحة المثلث الأصلي}} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$

(٦٨) في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ متساوي الساقين، $AB = AC$، $\widehat{A} = 40^\circ$. BP منصف للزاوية $\widehat{ABC}$، CQ منصف للزاوية $\widehat{ACB}$. ما قياس الزاوية $\widehat{APB}$ ؟



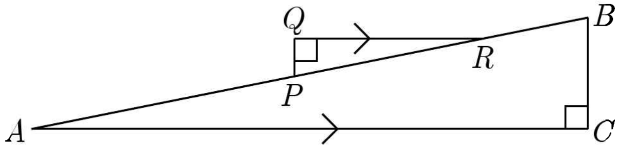
(أ) 100° (ب) 105° (ج) 110° (د) 115°

الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن $\widehat{ABP} = x$. عندئذ،

$$\widehat{ABP} = \widehat{QBP} = \widehat{QCB} = \widehat{QCP} = x$$

إذن، $40 + 2x + 2x = 180^\circ$ (مجموع زوايا $\triangle ABC$). من ذلك نرى أن $x = 35^\circ$. الآن، $40 + 35^\circ + \widehat{APB} = 180^\circ$ (مجموع زوايا $\triangle APB$). إذن، $\widehat{APB} = 105^\circ$.

(٦٩) في الشكل المرفق، $AB = 30$ ، $PQ = 2$ ، $QR = 10$. $AC \parallel QR$. ما طول BC لأقرب عدد صحيح ؟



(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 7

الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $AC \parallel QR$ فإن $\widehat{QRP} = \widehat{BAC}$ بالتبادل. ولذا فإن $\triangle ABC \sim \triangle RPQ$ (AA). إذن،

$\dfrac{PQ}{RP} = \dfrac{BC}{AB}$. ولكن

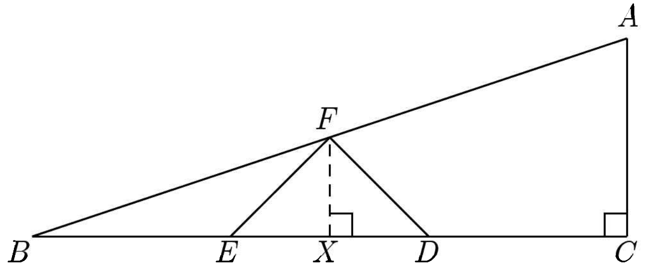
$$PR = \sqrt{(QP)^2 + (QR)^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104}$$

إذن، $BC = \dfrac{PQ \times AB}{RP} = \dfrac{2 \times 30}{\sqrt{104}} = 5.88$.

وبهذا نجد أن $BC = 6$ (لأقرب عدد صحيح).

(٧٠) في الشكل المرفق، $\triangle ACB$ قائم الزاوية عند C، $AF = FB$ ،

$BC = 3AC$، $CD = DE = EB$. ما قياس الزاوية $\widehat{FDC}$ ؟



(أ) 115° (ب) 125° (ج) 135° (د) 150°

الحل: الإجابة هي (ج): ارسم FX عمودياً على BC. الآن،

$\triangle FXB \sim \triangle ACB \quad (AA)$.

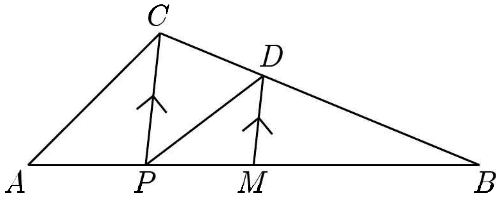
بما أن $\frac{BF}{BA} = \frac{1}{2}$ فإن $\frac{1}{2} = \frac{FX}{AC} = \frac{BX}{BC}$. لنفرض أن a $AC = a$. عندئذ، $FX = \frac{1}{2}a$، $BC = 3a$، $BX = \frac{3a}{2}$. من ذلك نرى أن:

$$EX = BX - BE = \frac{3}{2}a - a = \frac{a}{2} = FX$$

$$XD = BD - BX = \frac{a}{2} = FX$$

إذن، FX متوسط في $\triangle DEF$ وطوله يساوي $\frac{1}{2}ED$. إذن، $\widehat{EFD} = 90^\circ$. وبما أن $\triangle FXD \equiv \triangle FXE$ (SAS) فإن $FD = FE$. وبهذا يكون $\triangle DEF$ متساوي الساقين. إذن، $\widehat{FDE} = 45^\circ$ ويكون $\widehat{FDC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

(٧١) [AHSME 1966] في الشكل المرفق، $AM = MB$، $MD \parallel PC$. ما قيمة $\frac{[BPD]}{[ABC]}$ ؟



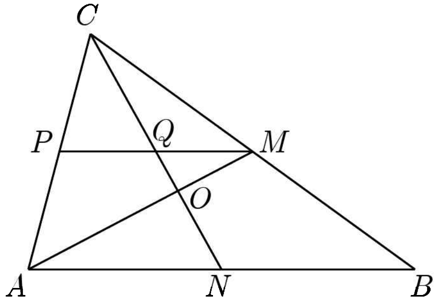
(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{6}$

الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $MD \parallel PC$ فإن $[MDP] = [MDC]$ (بعد رسم المستقيم CM). الآن،

$$[BPD] = [BMD] + [MDP] = [BMD] + [MDC] = [BMC] = \frac{1}{2}[ABC]$$

لأن CM متوسط. إذن، $\frac{[BPD]}{[ABC]} = \frac{1}{2}$.

(٧٢) [AHSME 1966] في المثلث $\triangle ABC$ المرفق، AM و CN متوسطان يتقاطعان في النقطة O. $AP = PC$ ، Q نقطة تقاطع MP مع CN.
إذا كان $[OMQ] = n$ فإن $[ABC]$ تساوي:



(أ) $16n$ (ب) $18n$ (ج) $21n$ (د) $24n$

الحل: الإجابة هي (د): قاعدة المثلث $\triangle OMQ$ تساوي

$$OQ = CO - CQ = \frac{2}{3}CN - \frac{1}{2}CN = \frac{1}{6}CN$$

لنفرض أن h هو ارتفاع $\triangle OMQ$ من M إلى OQ. عندئذ، $2h$ هو ارتفاع $\triangle CNB$ من B. الآن:

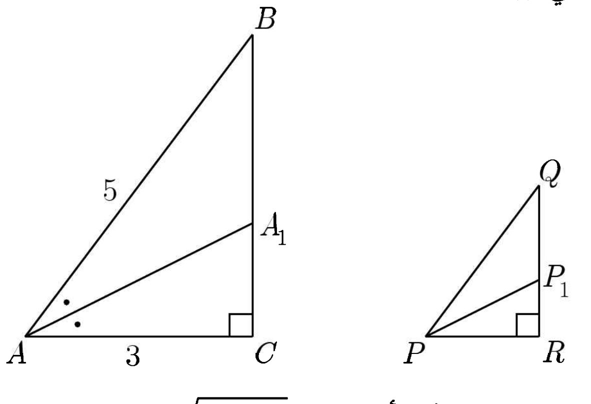
$$[OMQ] = \frac{1}{2}OQ \times h = \frac{1}{12}CN \times h = n$$

$$[ABC] = 2[CNB] = 2\left(\frac{1}{2}CN \times 2h\right) = 2CN \times h = 24n$$

(٧٣) [AHSME 1967] في المثلث القائم $\triangle ABC$، طول الوتر $AB = 5$ وطول $AC = 3$. AA_1 منصف الزاوية A. أنشئ مثلث قائم آخر PQR حيث طول وتره $PQ = A_1B$ وطول الضلع $PR = A_1C$. إذا كان PP_1 هو منصف الزاوية $\widehat{P}$ فما طول PP_1 ؟

(أ) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (ج) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (د) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

الحل: الإجابة هي (أ):



استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $BC = \sqrt{25 - 9} = 4$. ومن مبرهنة منصف الزاوية نجد أن

$$\frac{5}{3}=\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{A_1B}{4-A_1B}$$

إذن، $PQ=\frac{5}{2}=A_1B$ وَ $PR=\frac{3}{2}=A_1C$.

ومن مبرهنة فيثاغورس نجد أن $2=\sqrt{4}=\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{9}{4}}=RQ$.

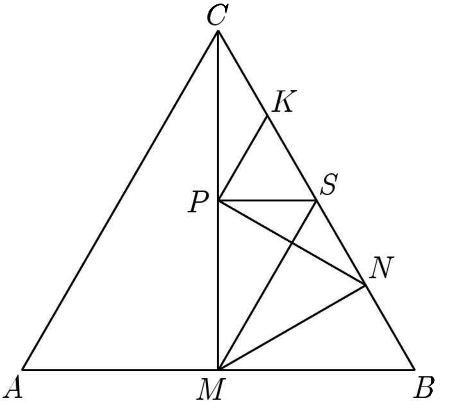
بما أن $\frac{2}{1}=\frac{BC}{QR}=\frac{AC}{PR}=\frac{AB}{PQ}$ فإن $\triangle ABC\sim\triangle PQR$.

وبهذا فإن $\frac{2}{1}=\frac{AA_1}{PP_1}$. ولكن

$$AA_1=\sqrt{\left(AC\right)^2+\left(CA_1\right)^2}=\sqrt{9+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

إذن، $\frac{3\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{2}AA_1=PP_1$.

(٧٤) في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع، $AM=MB$ ، $CK=KS=SN=NB$ ، $CP=PM$. ما قياس الزاوية $\widehat{BNM}$ ؟



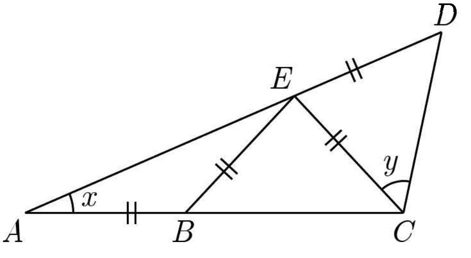
(أ) 70° (ب) 75° (ج) 80° (د) 90°

الحل: الإجابة هي (د): بما أن $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{2} = \frac{BS}{BC}$ فإن $\triangle ACB \sim \triangle MSB$ (SAS). إذن، $\triangle MSB$ متساوي الأضلاع. وبما أن MN متوسط لمثلث متساوي الأضلاع فإنه ارتفاع أيضاً. إذن، $\widehat{BNM} = 90°$.

مسائل غير محلولة

(١) في الشكل المرفق، AED و ABC مستقيمان.

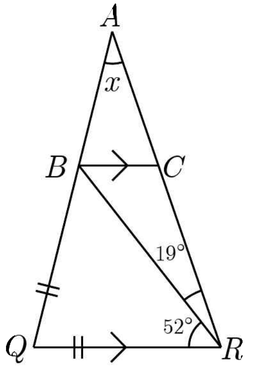
$AB = BE = EC = ED$ ، $\widehat{EAB} = x$ ، $\widehat{ECD} = y$ ما قيمة x بدلالة y ؟



(أ) $x = 60 - 2y$ (ب) $x = 60 - 3y$

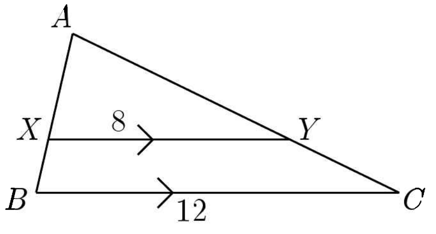
(ج) $x = 60 - \frac{2}{3}y$ (د) $x = 60 - \frac{3}{2}y$

(٢) في الشكل المرفق، $BC \parallel QR$ ، $BQ = QR$ ، $\widehat{BRC} = 19^\circ$ ، $\widehat{BRQ} = 52^\circ$. ما قيمة x ؟



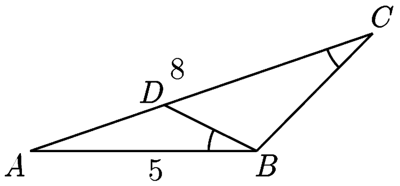
(أ) 20 (ب) 23 (ج) 33 (د) 43

(٣) في الشكل المرفق، $XY \parallel BC$ ، $XY = 8$ ، $BC = 12$. ما النسبة بين مساحة $\triangle AXY$ إلى مساحة المثلث $\triangle ABC$ ؟



(أ) $4:9$ (ب) $4:7$ (ج) $3:5$ (د) $3:7$

(٤) في الشكل المرفق، $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$ ، $AB = 5$ ، $AC = 8$. ما قيمة $\dfrac{AD}{DC}$ ؟



(أ) $\dfrac{20}{39}$ (ب) $\dfrac{22}{39}$ (ج) $\dfrac{23}{39}$ (د) $\dfrac{25}{39}$

(٥) [AMC8 2009] زاويتان في مثلث متساوي الساقين هما x و 70° . ما مجموع القيم الممكنة للمقدار x ؟

(أ) 95 (ب) 125 (ج) 140 (د) 165

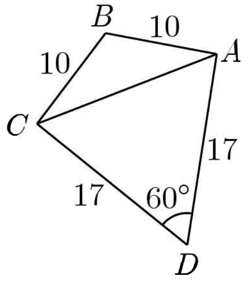
(٦) [AMC8 2007] طول قاعدة مثلث متساوي الساقين يساوي 24 ومساحته تساوي 60 . ما طول أحد الساقين المتساويين ؟

(أ) 5 (ب) 8 (ج) 13 (د) 18

(٧) [AMC8 2005] غادر أحمد بيته متجهاً إلى الجنوب وقطع مسافة $\frac{1}{2}$ كلم ثم توجه شرقاً وقطع مسافة $\frac{3}{4}$ كلم وبعد ذلك اتجه إلى الجنوب مرة أخرى وقطع مسافة $\frac{1}{2}$ كلم ليصل إلى المدرسة. ما المسافة (المستقيمة) بين بيت أحمد والمدرسة ؟

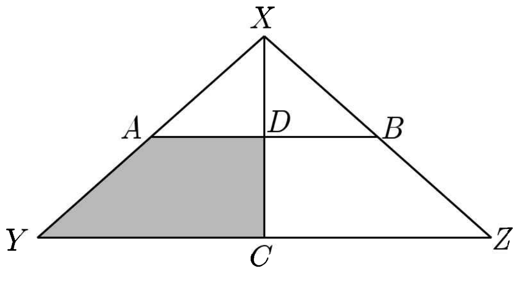
(أ) 1 كلم (ب) $\frac{5}{4}$ كلم (ج) $\frac{7}{4}$ كلم (د) 2 كلم

(٨) [AMC8 2005] ما طول AC في الشكل المرفق ؟



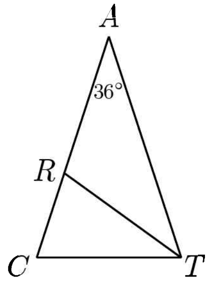
(أ) 10 (ب) 15 (ج) 17 (د) 19

(٩) [AMC8 2002] في الشكل المرفق، مساحة المثلث $\triangle XYZ$ تساوي 8 والنقطتان A و B هما منتصفا XY و XZ على التوالي، $XY = XZ$. XC ارتفاع ينصف القاعدة YZ. ما مساحة الجزء المظلل ؟



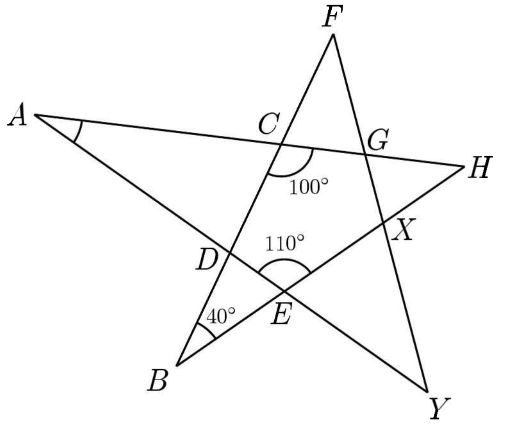
أ) $\frac{3}{2}$ ب) 2 ج) $\frac{5}{2}$ د) 3

(١٠) [AMC8 2000] في المثلث $\triangle CAT$، $\widehat{CAT} = 36°$، $\widehat{ACT} = \widehat{ATC}$.
TR منصف للزاوية $\widehat{ATC}$. ما قياس $\widehat{CRT}$ ؟



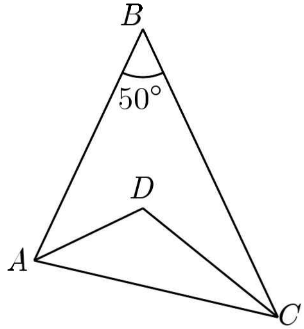
أ) $36°$ ب) $54°$ ج) $72°$ د) $108°$

(١١) [AMC8 1999] في الشكل المرفق، أعطيت قياسات الزوايا الموضحة. ما قياس الزاوية $\widehat{A}$ ؟



أ) 20 ب) 30 ج) 35 د) 40

(١٢) [AMC8 1995] في الشكل المرفق، $\widehat{ABC} = 50°$، AD و CD منصفان للزاويتين $\widehat{BAC}$ و $\widehat{ACB}$ على التوالي. ما قياس الزاوية $\widehat{ADC}$ ؟



(أ) $90°$ (ب) $100°$ (ج) $115°$ (د) $125°$

(١٣) [AMC12A 2004] المثلثان $\triangle ABC$ و $\triangle ABE$ يشتركان في الضلع AB، فيهما $\widehat{ABC} = \widehat{EAB} = 90°$، $AB = 4$، $BC = 6$، $AE = 8$.

D نقطة تقاطع AC مع BE. ما الفرق بين مساحتي المثلثين $\triangle ADE$ و $\triangle BDC$ ؟

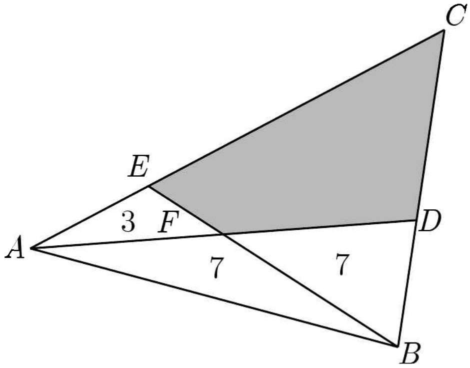
(أ) 2 (ب) 4 (ج) 5 (د) 8

(١٤) [AMC10B 2005] المثلث $\triangle ABC$ فيه $AC = BC = 7$ و $AB = 2$. لنفرض أن D نقطة على المستقيم AB بحيث تقع B بين A و D ولنفرض أن $CD = 8$. ما طول BD ؟

(أ) 3 (ب) $2\sqrt{3}$ (ج) 4 (د) $4\sqrt{2}$

(١٥) [AMC10B 2006] قسمنا مثلثاً إلى ثلاثة مثلثات وشكل رباعي كما هو مبين في الشكل أدناه. إذا كانت مساحات المثلثات هي 3، 7، 7 كما هو

مبين فما مساحة المنطقة المظللة ؟

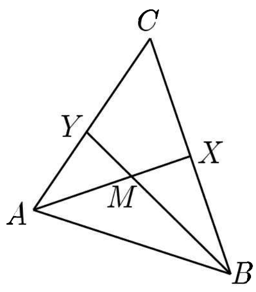


(أ) 15 (ب) 17 (ج) $\frac{35}{2}$ (د) 18

(١٦) ما عدد المثلثات القائمة غير المتطابقة التي أطوال أضلاعها أعداداً صحيحة موجبة متتالية ؟

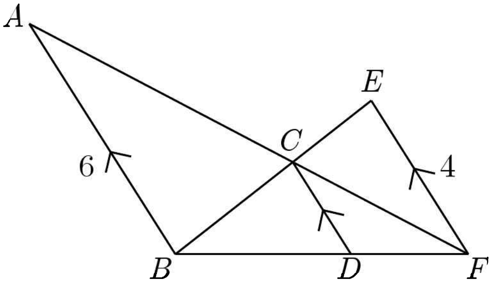
(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(١٧) في المثلث $\triangle ABC$ المبين أدناه، AX و BY منصفان للزاويتين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ على التوالي ويتقاطعان في النقطة M . إذا كان $\frac{AM}{MX} = \frac{5}{3}$ وكان $CX = 6$ فما طول AC ؟



(أ) 6 (ب) 8 (ج) 10 (د) 12

(١٨) في الشكل المرفق، $AB \parallel CD$ و $EF \parallel CD$، $AB = 6$، $EF = 4$. ما طول CD ؟

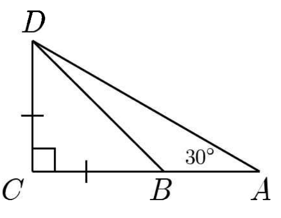


(أ) $\frac{12}{5}$ (ب) $\frac{11}{5}$ (ج) 2 (د) $\frac{9}{5}$

(١٩) [MAΘ 1990] في المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$، $AB = 66$، $BC = 77$. إذا كان AC أكبر من 50 وكان يساوي $x\sqrt{y}$ فما قيمة $x + y$ ؟

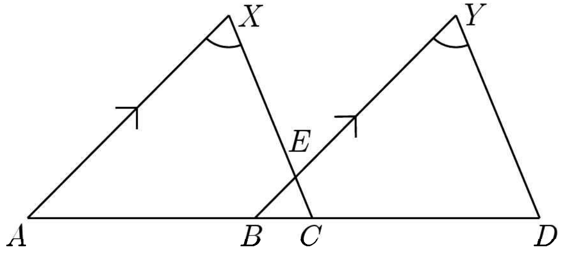
(أ) 85 (ب) 90 (ج) 96 (د) 102

(٢٠) [MAΘ 1992] في الشكل المرفق، $\widehat{ACD} = 90^\circ$، A، B، C على استقامة واحدة، $\widehat{A} = 30^\circ$، $\widehat{DBC} = 45^\circ$. إذا كان $AB = 3 - \sqrt{3}$ فما مساحة المثلث $\triangle BCD$ ؟



(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{5}{2}$ (د) $\frac{7}{2}$

(٢١) في الشكل المرفق، A ، B ، C ، D على استقامة واحدة، $AX \parallel BY$ ، $AB = CD$ ، $\widehat{X} = \widehat{Y}$. ما نسبة مساحة الشكل $AXEB$ إلى مساحة الشكل $DYEC$ ؟



(أ) 1 إلى 1 (ب) 2 إلى 3 (ج) 1 إلى 2 (د) 3 إلى 2

(٢٢) [Mandelbrot#2] المثلث $\triangle ABC$ قائم الزاوية، $\widehat{C} = 90°$ ، AD و BE متوسطان، $AB = 4$. ما قيمة $(AD)^2 + (BE)^2$ ؟

(أ) 20 (ب) 25 (ج) 30 (د) 35

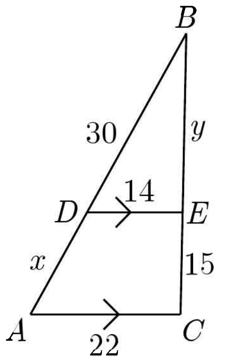
(٢٣) [M and IQ 1992] المثلث $\triangle ACB$ متساوي الأضلاع، CM متوسط. عينا نقطة N على BC بحيث يكون MN عمودياً على BC . ما هي النسبة $BN : BC$ ؟

(أ) $1 : 2$ (ب) $1 : 3$ (ج) $1 : 4$ (د) $2 : 3$

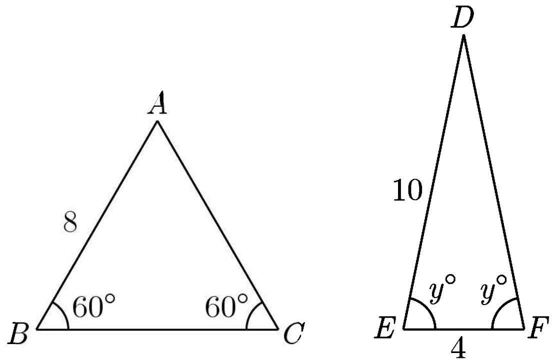
(٢٤) في المثلث $\triangle ABC$ المبين أدناه، $AC \parallel DE$. ما قيمتا x و y ؟

(أ) $x = 17.14$ ، $y = 26.25$ (ب) $x = 18$ ، $y = 27$

(ج) $x = 18.14$ ، $y = 27.25$ (د) $x = 19$ ، $y = 28$



(٢٥) كم يزيد محيط المثلث $\triangle ABC$ عن محيط المثلث $\triangle DEF$ ؟



(أ) 0 (ب) 2 (ج) 4 (د) 6

(٢٦) إذا كان طول ارتفاع مثلث يقل عن طول قاعدته بمقدار 5 بوصات وكانت مساحته تساوي 52 بوصة مربعة فما طول كل من ارتفاعه وقاعدته ؟

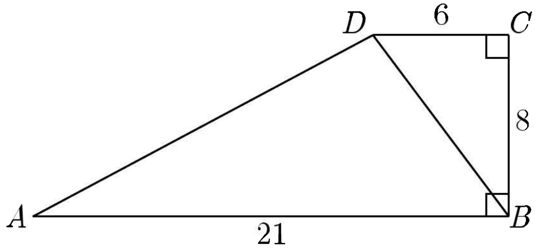
(أ) $h = 8$ ، $b = 13$ (ب) $h = 9$ ، $b = 14$

(ج) $h = 10$ ، $b = 15$ (د) $h = 11$ ، $b = 16$

(٢٧) إذا كان مجموع طولي ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية يساوي 49 وكان طول الوتر 41 فما طولا ضلعي القائمة ؟

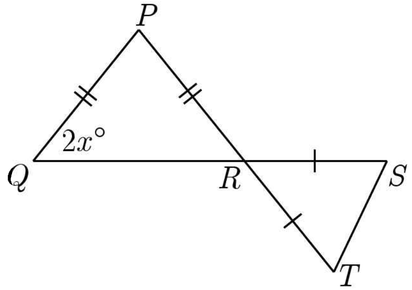
(أ) 35، 14 (ب) 36، 13 (ج) 38، 11 (د) 40، 9

(٢٨) في الشكل المرفق، ما قيمة $AD + BD$ ؟



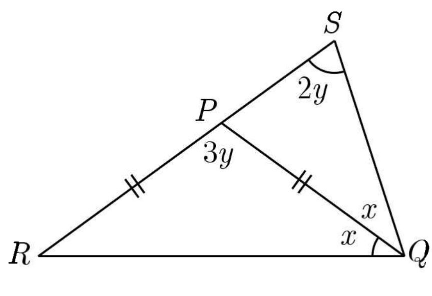
(أ) 22 (ب) 25 (ج) 27 (د) 29

(٢٩) [Cayley 2010] في الشكل المرفق، إذا كان $\widehat{Q} = 2x°$ فما قياس الزاوية $\widehat{S}$ ؟



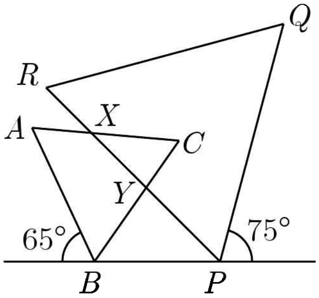
(أ) $45 - x$ (ب) $45 + 2x$ (ج) $90 - x$ (د) $90 + x$

(٣٠) [Cayley 2008] في الشكل المرفق، PQ منصف للزاوية Q ويقطع RS في النقطة P. $PR = PQ$. ما قياس الزاوية $\widehat{RPQ}$ ؟



(أ) $90°$ (ب) $108°$ (ج) $112°$ (د) $120°$

(٣١) [Cayley 2007] في الشكل المرفق، كل من $\triangle ABC$ و $\triangle PQR$ متساوي الأضلاع. ما قياس الزاوية $\widehat{CXY}$ ؟

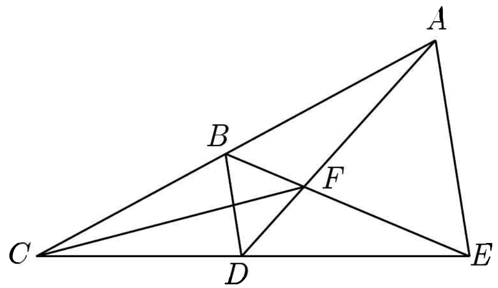


(أ) $30°$ (ب) $35°$ (ج) $40°$ (د) $45°$

(٣٢) في الشكل المرفق، ACE مثلث، $AE \parallel BD$ ، F نقطة تقاطع BE و AD . كم عدد العبارات الصائبة من بين العبارات التالية ؟

(١) $\triangle BFA \sim \triangle DFE$ (٢) $\triangle AFE \sim \triangle DFB$

(٣) $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ (٤) $\triangle BFC \sim \triangle DCF$



(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٣٣) [MAΘ 2011] قياس الزاوية الصغرى غير القائمة (بالدرجات) في مثلث قائم

الزاوية يساوي مجموع مربعي جذري المعادلة $x^2 - 7x + 5 = 0$. ما قياس الزاوية غير القائمة الكبرى ؟

(أ) $39°$ (ب) $41°$ (ج) $45°$ (د) $51°$

(٣٤) [MAΘ 2011] في $\triangle ABC$ ، $AC = 4$ ، $BC = 4\sqrt{2}$ ، $AB = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$. إذا كانت زوايا المثلث مقاسة بالدرجات فما قيمة $\left(\widehat{A} + \widehat{C}\right) \times \widehat{B}$ ؟

(أ) 4500 (ب) 6075 (ج) 7200 (د) 8000

(٣٥) [AHSME 1951] واحدة فقط من الصفات التالية للمثلث غير كافية لتحديد نوعه:

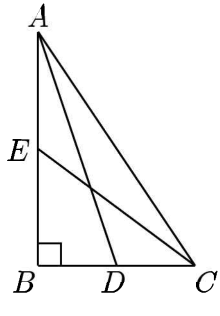
(أ) النسبة بين ضلعين من أضلاعه والزاوية المحصورة بينهما.

(ب) النسبة بين ارتفاعاته.

(ج) النسبة بين متوسطاته.

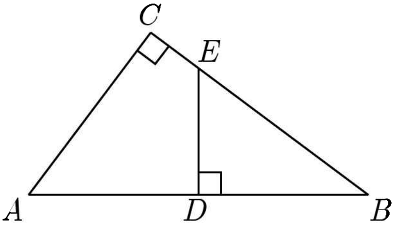
(د) النسبة بين ارتفاعه والقاعدة المقابلة لهذا الارتفاع.

(٣٦) [AHSME 1951] $\triangle ABC$ قائم الزاوية في B ، AD و CE متوسطان طولاهما $\sqrt{40}$ و 5 على التوالي. ما طول وتر $\triangle ABC$ ؟



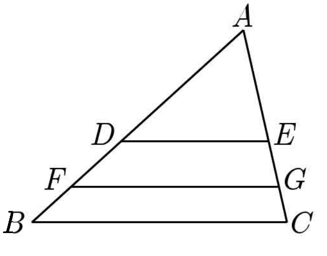
(أ) 10 (ب) $2\sqrt{40}$ (ج) $\sqrt{13}$ (د) $2\sqrt{13}$

(٣٧) [AHSME 1952] في الشكل المرفق، $\widehat{C} = 90°$ ، $AD = BD$ ، $DE \perp AB$ ، $AB = 20$ ، ما مساحة الشكل $ADEC$ ؟



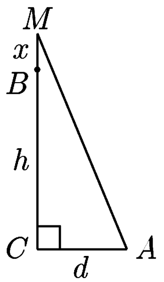
(أ) 75 (ب) $58\frac{1}{2}$ (ج) 48 (د) $37\frac{1}{2}$

(٣٨) [AHSME 1953] طول قاعدة مثلث يساوي 15. رسمنا المستقيمين DE و FG موازيان للقاعدة BC ويقسمان المثلث إلى ثلاث مساحات متساوية. ما طول FG ؟



(أ) $5\sqrt{6}$ (ب) 10 (ج) $4\sqrt{3}$ (د) 7.5

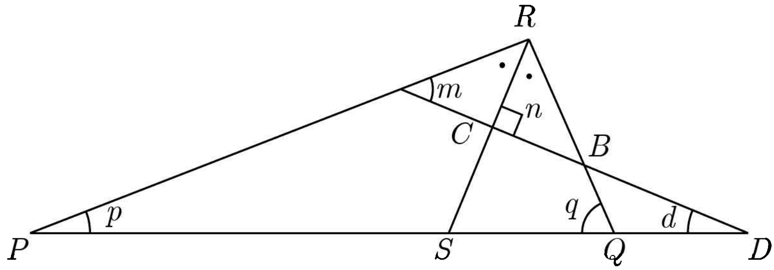
(٣٩) [AHSME 1954] في المثلث القائم المرفق، $x + MA = h + d$. عندئذ x يساوي:



(أ) $\dfrac{hd}{2h+d}$ (ب) $d-h$

(ج) $h+d-\sqrt{2d}$ (د) $\sqrt{h^2+d^2}-h$

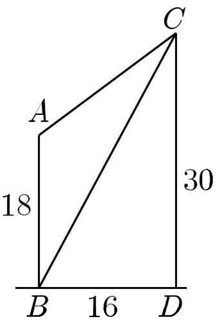
(٤٠) [AHSME 1954] في الشكل المرفق، RS ينصف الزاوية $\widehat{R}$ و $\widehat{n}=90°$، $PSQD$ على استقامة واحدة. ما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية ؟



(أ) $\widehat{n}=\dfrac{1}{2}\left(\widehat{p}+\widehat{q}\right)$ (ب) $\widehat{m}=\dfrac{1}{2}\left(\widehat{p}+\widehat{q}\right)$

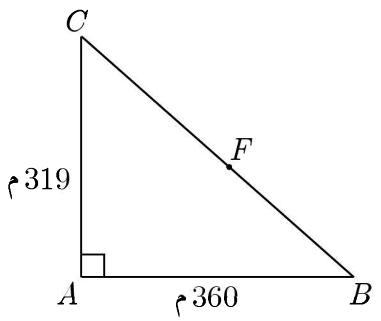
(ج) $\widehat{d}=\dfrac{1}{2}(\widehat{p}+\widehat{q})$ (د) $\widehat{d}=\dfrac{1}{2}\widehat{m}$

(٤١) [Cayley 2004] طول كل من البرجين AB و CD يساوي 18م و 30م على التوالي والمسافة بين القاعدتين تساوي 16م. ربطنا حبلين من A إلى C ومن B إلى C كما هو مبين في الشكل المرفق. ما مجموع طولي الحبلين على فرض أنهما مشدودان ؟



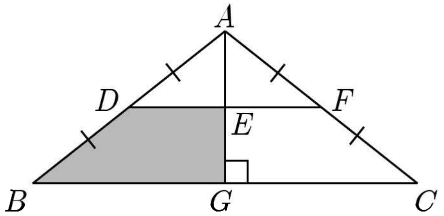
(أ) 54 (ب) 64 (ج) 44 (د) 48

(٤٢) في الشكل المرفق ABC يمثل طريقاً لممارسة رياضة المشي. قطع أحمد المسافة من A إلى B إلى F . وقطع سعود المسافة من A إلى C إلى F . إذا كانت المسافة التي قطعها أحمد تساوي المسافة التي قطعها سعود فما طول المسافة من F إلى B ؟



(أ) 115.5م (ب) 220م (ج) 315م (د) 321.5م

(٤٣) في الشكل المرفق $\triangle ABC$ متساوي الساقين فيه $AB = AC$ ، $AG \perp BC$ ، D و F منتصفا AB و AC على التوالي، $AE = EG$. ما النسبة بين مساحة الجزء المظلل ومساحة المثلث $\triangle ABC$؟

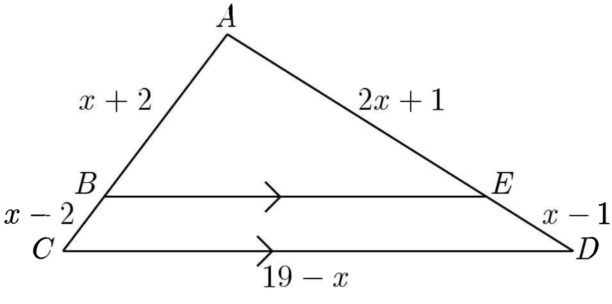


(أ) $\frac{1}{8}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{3}{8}$ (د) $\frac{1}{2}$

(٤٤) [MAΘ 2010] مجموع قياسي زاويتي القاعدة لمثلث متساوي الساقين يساوي أربعة أمثال قياس زاوية الرأس. ما قياس إحدى زاويتي القاعدة ؟

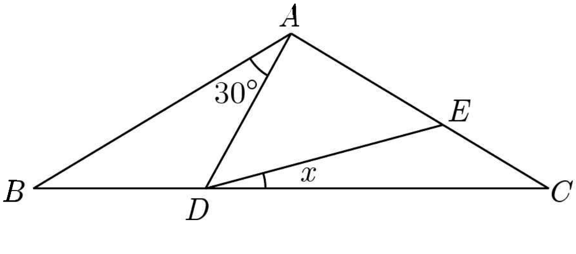
(أ) $30°$ (ب) $36°$ (ج) $72°$ (د) $80°$

(٤٥) [MAΘ 2010] في الشكل المرفق، $BE \parallel CD$. ما محيط المثلث $\triangle ACD$ ؟



(أ) 33 (ب) 34 (ج) 35 (د) 43

(٤٦) [AHSME 1956] في الشكل المرفق $AB = AC$ ، $AE = AD$. ما قيمة الزاوية x ؟

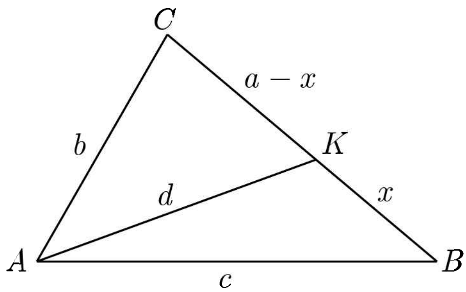


(أ) $15°$ (ب) $20°$ (ج) $22°$ (د) $25°$

(٤٧) [AHSME 1956] مثلث متساوي الأضلاع طول ارتفاعه يساوي $\sqrt{6}$. ما مساحته ؟

(أ) $2\sqrt{3}$ (ب) $3\sqrt{3}$ (ج) $6\sqrt{2}$ (د) 12

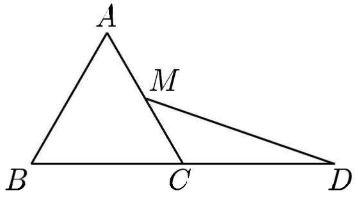
(٤٨) [Euclid 2011] في الشكل المرفق، $2\widehat{BAC} = 3\widehat{ABC}$، $\widehat{KAC} = 2\widehat{KAB}$. عندئذ:



(أ) $d = \dfrac{bc}{a}$، $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$ (ب) $d = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$، $x = \dfrac{bc}{a}$

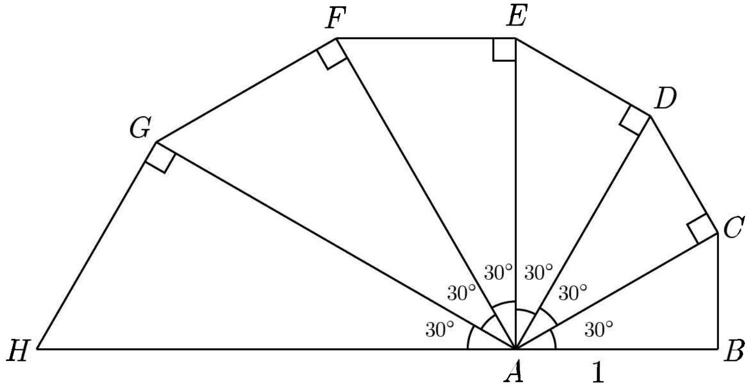
(ج) $d = \dfrac{ac}{b}$، $x = \dfrac{a^2 + b^2}{a}$ (د) $d = \dfrac{a^2 + b^2}{c}$، $x = \dfrac{ac}{b}$

(٤٩) [AMC10B 2005] $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع طول كل من أضلاعه يساوي 2. M منتصف AC و C منتصف BD. ما مساحة المثلث $\triangle CDM$ ؟



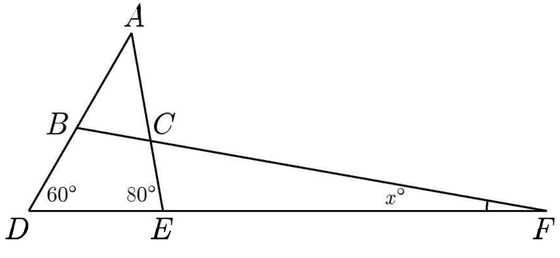
(أ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (د) $\sqrt{2}$

(٥٠) [Euclid 2010] ما طول AH في الشكل المبين أدناه ؟



(أ) $\frac{32}{27}$ (ب) $\frac{64}{27}$ (ج) $\frac{71}{27}$ (د) $\frac{82}{27}$

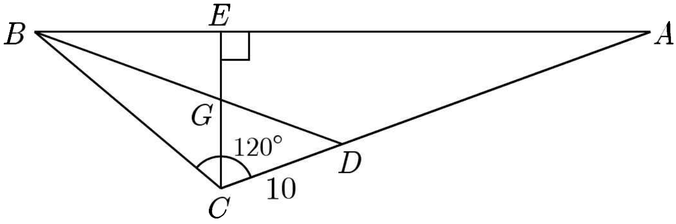
(٥١) في الشكل المرفق، $AB = AC$. ما قياس الزاوية $\widehat{x}$ ؟



(أ) $10°$ (ب) $20°$ (ج) $30°$ (د) $35°$

(٥٢) في الشكل المرفق، $\widehat{BCA} = 120°$ ، $\widehat{ABC} = 40°$. $\overline{BD}$ منصف $\widehat{ABC}$ ، $\overline{AB} \perp \overline{CE}$ ، $CD = 10$. ما طول $\overline{DG}$ ؟

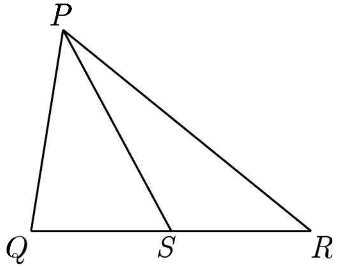
(أ) 5 (ب) 7 (ج) 10 (د) 12



(٥٣) [Aust.MC 1992] في الشكل المرفق، مساحة $\triangle PQS$ تساوي مساحة $\triangle PSR$، $\overleftrightarrow{QSR}$ مستقيم. ما العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية ؟

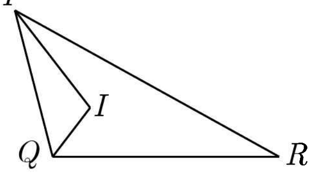
(أ) $\overline{PS} \perp \overline{QR}$ (ب) $QS = RS$

(ج) $PQ = PR$ (د) $\widehat{QPR} = 90°$

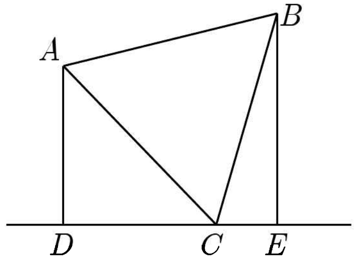


(٥٤) [Aust.MC 1997] في $\triangle PQR$ المرفق، $PQ = 2$، $QR = 3$، $RP = 4$. $\overline{PI}$ و $\overline{QI}$ منصفان للزاويتين $\widehat{P}$ و $\widehat{Q}$ على التوالي. ما قيمة $\dfrac{[PIQ]}{[PQR]}$ ؟

(أ) $\dfrac{2}{11}$ (ب) $\dfrac{2}{9}$ (ج) $\dfrac{1}{4}$ (د) $\dfrac{1}{3}$

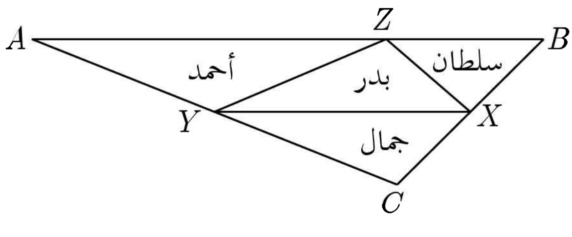


(٥٥) [Aust.CH 1992] راية كبيرة على شكل $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع كما هو مبين في الشكل ومثبتة من الرأسين العلويين بعمودين رأسيين $AD = 3$ و $BE = 4$ والرأس الثالث للراية مثبت على الأرض. إذا كان طول ضلع الراية $\sqrt{\frac{a}{b}}$ حيث a و b أوليان نسبياً فإن $a+b$ يساوي:



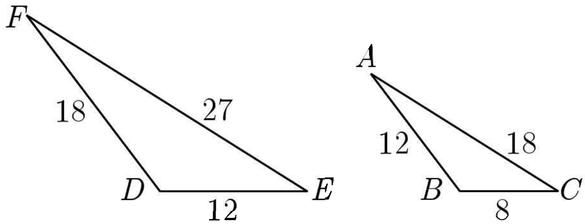
(أ) 51 (ب) 52 (ج) 53 (د) 55

(٥٦) [Aust.CH 1993] يمتلك رجل قطعة أرض مثلثة الشكل مساحتها 26000 متراً مربعاً. أراد توزيعها بين أولاده الأربعة: أحمد، بدر، جمال، سلطان بحيث يحصل كل منهم على قطعة مثلثة الشكل. في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ يمثل قطعة الأرض الكبيرة، X و Y منتصفا $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$ على التوالي. اختار الرجل النقطة Z على $\overline{AB}$ بحيث تكون $[AZY]$ تساوي 9000 متراً مربعاً ومنحها لإبنه الأكبر أحمد. أما بقية الأولاد فحصصهم مبينة على الشكل. ما مساحة قطعة الإبن الأصغر سلطان ؟



(أ) 4000 (ب) 6500 (ج) 7500 (د) 9000

(٥٧) [Aust.CH 2002] نقول إن $\triangle ABC$ هو مثلث جيد إذا وجد مثلث آخر $\triangle DEF$ يشابهه ولا يطابقه وفيه $AB = DE$ و $AC = DF$، على سبيل المثال، $\triangle ABC$ المبين في الشكل هو مثلث جيد لأن المثلث $\triangle DEF$ يحقق الشروط.



إذا كانت أطوال أضلاع مثلث جيد هي $f > e > d$ فإن $d < e < f$

(أ) $f = e + d$ (ب) $e = \dfrac{d+f}{2}$

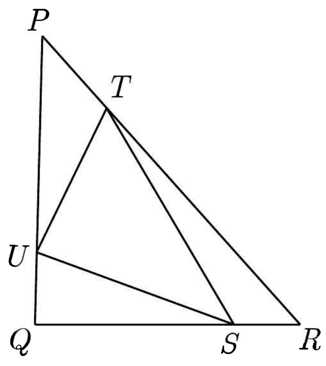
(ج) $e = \sqrt{df}$ (د) $f = d^2 + e^2$

(٥٨) [Aust.MC 1998] إذا أردنا إنشاء $\triangle PQR$ أطوال أضلاعه أعداد صحيحة حيث $PQ = 37$ و $QR = m$، m عدد صحيح أصغر من 37 فما القيم الممكنة لطول PR ؟

(أ) $2m - 2$ (ب) $2m - 1$ (ج) $2m$ (د) $2m + 1$

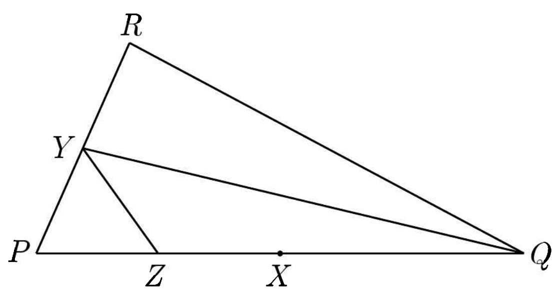
(٥٩) [Aust.MC 1995] في الشكل المرفق، $\dfrac{PT}{TR} = \dfrac{SR}{SQ} = \dfrac{QU}{UP} = \dfrac{1}{r}$ حيث r عدد صحيح موجب. $[STU] \geq \dfrac{3}{4}[PQR]$. ما أصغر قيمة للعدد r ؟

(أ) 7 (ب) 8 (ج) 9 (د) 10



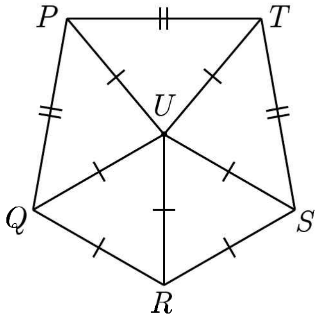
(٦٠) [Aust.MC 1999] في الشكل المرفق، X منتصف الضلع PQ، Y منتصف الضلع PR، Z منتصف الضلع PX. $[YZQ] = 21$. ما قيمة المساحة $[PQR]$ ؟

(أ) 42 (ب) 49 (ج) 56 (د) 63



(٦١) [Fermat 2012] في الشكل المرفق، $\triangle QUR$ و $\triangle SUR$ متساويا الأضلاع. كل من المثلثات $\triangle QUP$ و $\triangle PUT$ و $\triangle TUS$ متساوي الساقين حيث $PU = QU = SU = TU$ و $QP = PT = TS$. قياس الزاوية $\widehat{UST}$ يساوي:

(أ) 50° (ب) 54° (ج) 60° (د) 70°



إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ج	(٢) ج	(٣) أ	(٤) د	(٥) د
(٦) ج	(٧) ب	(٨) ج	(٩) د	(١٠) ج
(١١) ب	(١٢) ج	(١٣) ب	(١٤) أ	(١٥) د
(١٦) أ	(١٧) ج	(١٨) أ	(١٩) ج	(٢٠) ب
(٢١) أ	(٢٢) أ	(٢٣) ج	(٢٤) أ	(٢٥) أ
(٢٦) أ	(٢٧) د	(٢٨) د	(٢٩) ج	(٣٠) ب
(٣١) ج	(٣٢) ج	(٣٣) د	(٣٤) أ	(٣٥) د
(٣٦) د	(٣٧) ب	(٣٨) أ	(٣٩) أ	(٤٠) ب
(٤١) أ	(٤٢) ب	(٤٣) ج	(٤٤) ج	(٤٥) ج
(٤٦) أ	(٤٧) أ	(٤٨) أ	(٤٩) ج	(٥٠) ب
(٥١) أ	(٥٢) ج	(٥٣) ب	(٥٤) ب	(٥٥) د
(٥٦) أ	(٥٧) ج	(٥٨) ب	(٥٩) د	(٦٠) ج
(٦١) أ				