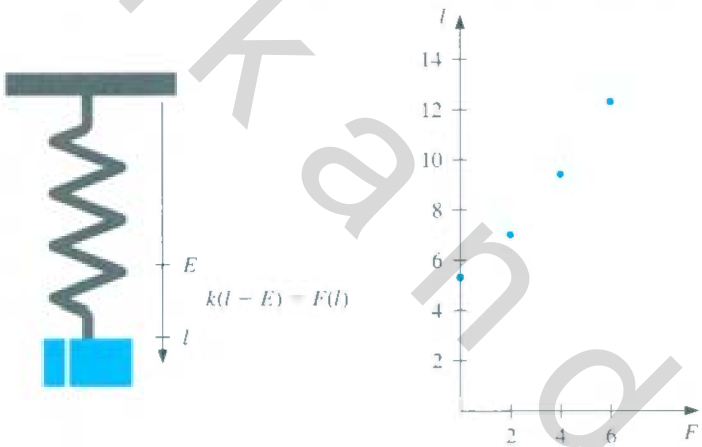
الباب 8

نظرية التقريب

Approximation Theory

مقدمة

ينص قانون هوك (Hooke) على أنه إذا خضع (زنبرك) نابض مصنوع من مادة متجانسة لقوة فإن طول النابض يكون دالة خطية في تلك القوة. ويمكننا كتابة الدالة الخطية بالصيغة $F(l) = k(l - E)$ حيث تمثل $F(l)$ القوة اللازمة لمدّ النابض l من الوحدات. أما الثابت E فيمثل طول النابض قبل تطبيق القوة عليه. والثابت k هو ثابت النابض.



افترض أننا نريد تحديد ثابت النابض لنابض طوله الابتدائي 5.3 in. نطبّق عليه القوى 2، 4 و 6 باوندات، ونجد أن طوله ازداد إلى 7.0 ، 9.4 و 12.3 إنشًا على التوالي. ويظهر بعد التفحص السريع أن النقاط (0,5.3) ، (2,7.0) ، (4,9.4) و (6,12.3) لا تقع بالضبط على خط مستقيم.

وعلى الرغم من إمكانية استخدام زوج عشوائي من نقاط البيانات لتقريب ثابت النابض ببساطة. فقد تبين أنه من المعقول أكثر أن الخط الذي يقرّب نقاط البيانات جميعها لتحديد الثابت هو الأفضل. إن هذا النوع من التقريب هو ما سيُناقَش في هذا الباب. وإن تطبيق النابض هذا موجود في التمرين (7) من الفصل (1.8).

إن دراسة مبرهنة التقريب تنطوي على نوعين عامين من المسائل؛ واحدة من هذه المسائل تظهر عندما يعطى الدالة (الدالّة) صراحة. ولكننا نود لنوجد الدالة المعطاة. نوعًا أبسط من الدوال مثل كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتحديد قيم تقريبية للدالة المعطاة. وتعنى المسألة

الأخرى في مبرهنة التقريب بمطابقة دالة لبيانات معلومة، وإيجاد أحسن دّالة في فئة محددة ليمثّل البيانات.

ولقد تناولنا هاتين المسألتين في الباب (3). إن كثيرة حدود تايلور من الرتبة n حول العدد x_0 هي التقريب المتميز للدالة f القابل للاشتقاق $(n+1)$ مرّة في جوار صغير لـقيمة x_0.

لقد بُحثت كثيرات حدود لاجرنج أو كثيرات الحدود عمومًا بوصفها كثيرات حدود للتقريب. وكثيرات حدود تستخدم لمطابقة بيانات محددة. وكذلك بحث في الشريحة لمكعب في تلك الباب. وفي هذه الباب ستُناقش التحديدات على هذه الطرائق، وسنتطرق إلى جوانب أخرى كذلك.

1.8 تقريب المربعات الصغرى المنفصلة
Discrete Least Squares Approximation

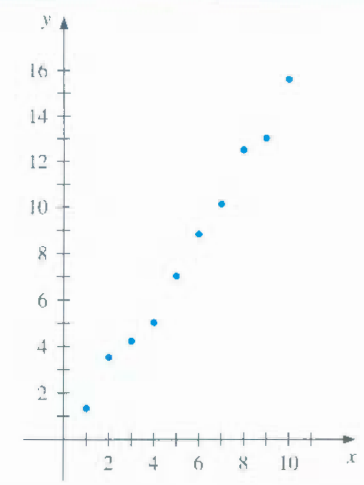
افترض مسألة تقدير قيم دّالة (دّالة) عند نقاط غير مجدولة إذا أعطيت البيانات التجريبية في جدول (1.8).

جدول 1.8

x_i	y_i	x_i	y_i
1	1.3	6	8.8
2	3.5	7	10.1
3	4.2	8	12.5
4	5.0	9	13.0
5	7.0	10	15.6

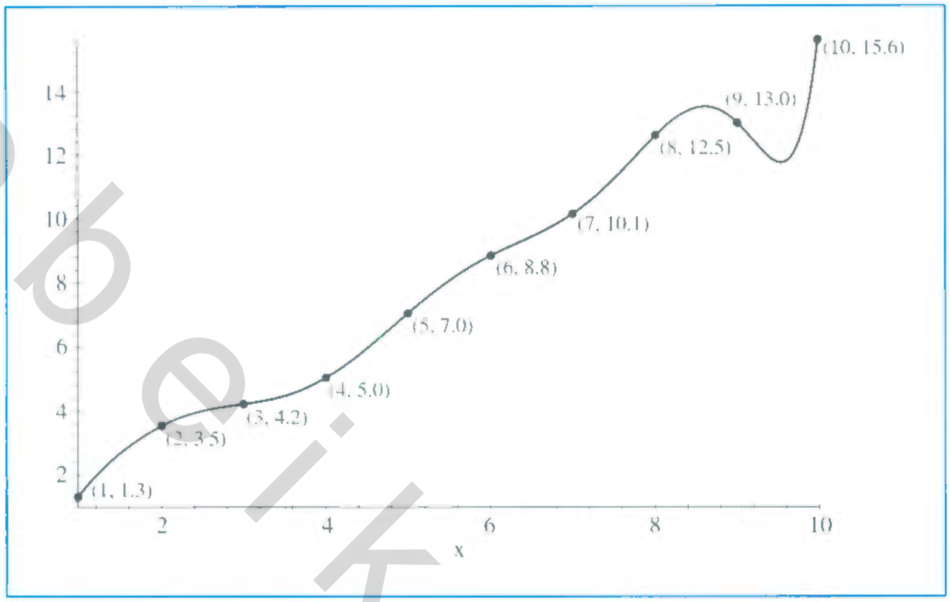
يظهر في شكل (1.8) الرسم البياني للقيم في جدول (1.8)، ويظهر من هذا الرسم أن العلاقة بين x و y خطية. ومن المحتمل أن عدم وقوع النقاط على خط مستقيم بالضبط يرجع إلى وجود أخطاء في البيانات. ولذلك فليس من المعقول أن نطلب موافقة دالة التقريب للبيانات بالضبط. وفي الحقيقة إن مثل هذا الدالة سيدخل ترددات لم تكن موجودة في الأصل. فعلى سبيل المثال، وُجدت كثيرة حدود من الرتبة التاسعة المرسومة في شكل (2.8) لوصف البيانات في جدول (1.8) دون محددات من Maple باستخدام الأوامر

```
>p:=interp([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],
 [1.3,3.5,4.2,5.0,7.0,8.8,10.1,12.5,13.0,15.6],x);
>plot({p},x=1..10);
```



شكل 1.8

شكل 2.8



إن كثيرة الحدود هذه متنبأ ضعيف للمعلومات بين عدد من نقاط البيانات A. وتكون الطريقة الفضلى بإيجاد الخط الأفضل (بجانب معين) للتقريب، حتى لو لم ينطبق تماما مع البيانات عند أي نقطة.

افترض أن $a_1x_i + a_0$ يمثّل القيمة ذات العدد i على خط التقريب، وتمثّل y_i قيمة y الفعلية ذات العدد i.

إن مسألة إيجاد معادلة أحسن تقريب خطي بالمعنى المطلق تتطلب إيجاد القيمتين a_0 و a_1 اللتين تجعلان

$$E_\infty(a_0, a_1) = \max_{1 \le i \le 10} \{|y_i - (a_1x_i + a_0)|\}$$

أصغر ما يمكن.

وعادة ما تُعرف هذه بمسألة أصغر العظميات (minimax problem)، ولا تعالج بالطرائق الابتدائية. وهناك طريقة أخرى لتحديد أحسن تقريب خطي، وهي التي تتطلب إيجاد القيمتين a_0 و a_1 اللتين تجعلان

$$E_1(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1x_i + a_0)|$$

أصغر ما يمكن.

إن هذا المقدار يُسمى الانحراف المطلق (absolute deviation) لإيجاد القيمة الصغرى لدالة في متغيرين، ونحتاج إلى إيجاد المشتقات الجزئية له، ونضع كلاً منهما مساويًا للصفر، ثم نحل المعادلتين الآتيتين الناتجتين.

في حالة الانحراف المطلق، نحتاج إلى إيجاد a_0 و a_1 بحيث

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1}\sum_{i=1}^{10}|y_i - (a_1x_i + a_0)| \quad \text{و} \quad 0 = \frac{\partial}{\partial a_0}\sum_{i=1}^{10}|y_i - (a_1x_i + a_0)|$$

وتكمن الصعوبة هنا في عدم قابلية دالة القيمة المطلقة للاشتقاق عند الصفر، ومن الممكن ألا نتمكن من إيجاد حل لهاتين المعادلتين.

إن طريقة المربعات الصغرى (least squares) لهذه المسألة تتطلب إيجاد أفضل خط للتقريب عندما يكون الخطأ مساويًا لمجموع مربعات الفروق بين قيم y المعطاة وقيم y على خط التقريب. ومن ثم يجب إيجاد الثابتين a_0 و a_1 اللذين يجعلان خطأ المربعات الصغرى

$$E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10}[y_i - (a_1x_i + a_0)]^2$$

أصغر ما يمكن.

إن طريقة المربعات الصغرى تعد الطريقة الفضلى لتحديد أفضل تقريبات خطية. بالإضافة إلى أن افتراضات مبرهنة تفضّل هذه الطريقة أيضًا.

إن طريقة أصغر العظميات عادة ما تعين وزنًا كبيرا جدًا، حيث لا تعطي طريقة لانحراف المطلق وزنًا كافيًا للنقطة التي تكون بعيدة جدًا عن خط التقريب.

وإن طريقة المربعات الصغرى تعطي وزنًا أكبر للنقطة التي تكون خارج الخط مع البيانات الأخرى، ولكنها لا تسمح لتلك النقطة بأن تطغى على التقريب كليًا.

وهناك سبب آخر لاعتماد طريقة المربعات الصغرى، وهو دراسة التوزيع الإحصائي للخطأ. (انظر Lar, pp. 463–481)

إن المسألة العامة لمطابقة أحسن خط مستقيم بطريقة المربعات الصغرى لمجموعة من البيانات $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{m}$ تتطلب تصغير الخطأ التام

$$E \equiv E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{m}[y_i - (a_1x_i + a_0)]^2$$

بالنسبة إلى الوسيطات (البرامترات) a_0 و a_1.

وللحصول على القيمة الصغرى، نحتاج إلى

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_0}\sum_{i=1}^{m}[(y_i - (a_1x_i - a_0)]^2 = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_1x_i - a_0)(-1)$$

و

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1}\sum_{i=1}^{m}[y_i - (a_1x_i + a_0)]^2 = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_1x_i - a_0)(-x_i)$$

ويمكن تبسيط هاتين المعادلتين للحصول على المعادلتين القانونيتين (normal equations)

$$a_0\sum_{i=1}^{m}x_i + a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^2 = \sum_{i=1}^{m}x_iy_i \quad \text{و} \quad a_0\cdot m + a_1\sum_{i=1}^{m}x_i = \sum_{i=1}^{m}y_i$$

إن كلمة Normal المستخدمة هنا تعني تعامد. ويمكن إيجاد المعادلات متعددة عن طريق إيجاد اتجاهات متعددة متعدد الأبعاد

إن حل هذا النظام من المعادلات هو

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m}x_i^2\sum_{i=1}^{m}y_i - \sum_{i=1}^{m}x_iy_i\sum_{i=1}^{m}x_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2} \tag{1.8}$$

و

$$a_1 = \frac{m\sum_{i=1}^{m}x_iy_i - \sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{i=1}^{m}y_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2} \tag{2.8}$$

مثال 1

لديك البيانات في جدول (1.8). ولإيجاد خط التقريب لهذه البيانات بطريقة المربعات الصغرى أكمل جدولاً. واجمع العمودين الثالث والرابع كما في جدول (2.8).

جدول 2.8

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$P(x_i) = 1.538x_i - 0.360$
1	1.3	1	1.3	1.18
2	3.5	4	7.0	2.72
3	4.2	9	12.6	4.25
4	5.0	16	20.0	5.79
5	7.0	25	35.0	7.33
6	8.8	36	52.8	8.87
7	10.1	49	70.7	10.41
8	12.5	64	100.0	11.94
9	13.0	81	117.0	13.48
10	15.6	100	156.0	15.02
55	81.0	385	572.4	$E_2 = \sum_{i=1}^{10}(y_i - P(x_i))^2 \approx 2.34$

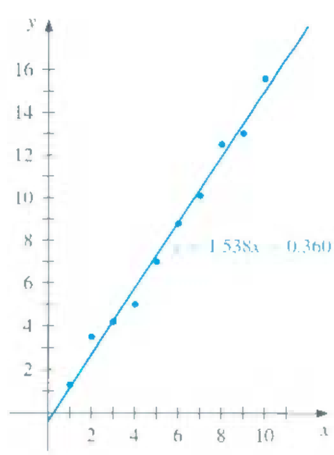
إن المعادلتين القانونيتين (1.8) و (2.8) تعطيان

$$a_1 = \frac{10(572.4) - 55(81)}{10(385) - (55)^2} = 1.538 \quad \text{و} \quad a_0 = \frac{385(81) - 55(572.4)}{10(385) - (55)^2} = -0.360$$

ولذلك $P(x) = 1.538x - 0.360$

إن رسم هذا الخط المستقيم ونقاط البيانات تظهر في شكل (3.8). ■

شكل 3.8



تُعرض القيم التقريبية المقابلة لنقاط البيانات التي نحصل عليها بطريقة المربعات الصغرى في جدول (2.8).

تعالج المسألة العامة لتقريب مجموعة من البيانات $\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$ في كثيرة حدود جبرية

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

من الرتبة $n < m - 1$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى بطريقة مماثلة نختار $a_0, a_1, \ldots, a_n$ لجعل خطأ المربعات الصغرى الآتية أصغر ما يمكن:

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{i=1}^{m}(y_i - P_n(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} P_n(x_i)y_i + \sum_{i=1}^{m}(P_n(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)y_i + \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j\left(\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j\right) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}\right) \end{aligned}$$

وكما هو الأمر في الحالة الخطية. لجعل E_2 أصغر ما يمكن يكون من الضروري وضع $\partial E_2/\partial a_j = 0$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ وهكذا. لكل j يكون

$$0 = \frac{\partial E_2}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}$$

إن هذا يعطي $n + 1$ من المعادلات القانونية بمجاهيل a_j عددها $n + 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, n \qquad (3.8)$$

ومن المفيد أن نكتب المعادلات كما يلي:

$$\begin{aligned} a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \cdots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^n &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0 \\ a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + \cdots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1 \\ a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} + \cdots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n \end{aligned}$$

يوجد لهذه المعادلات القانونية حلٌّ وحيد. إلا أن المجاهيل x_i متميزة ومختلفة بعضها عن بعض. (انظر تمرين 14).

جدول 3.8

i	x_i	y_i
1	0	1.0000
2	0.25	1.2840
3	0.50	1.6487
4	0.75	2.1170
5	1.00	2.7183

مثال 2 طبِّق كثيرة الحدود المنفصلة من الرتبة الثانية على البيانات في جدول (3.8) باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

من الواضح في هذه المسألة أن $n = 2, m = 5$. والمعادلات القانونية الثلاث هي

$$\begin{aligned} 5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 &= 8.7680 \\ 2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 &= 5.4514 \\ 1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 &= 4.4015 \end{aligned}$$

ويمكننا أيضا حلُّ هذا النظام باستخدام CAS في Maple. فنعرّف أولا المعادلات

```
>eq1:=5*a0+2.5*a1+1.875*a2=8.7680;
>eq2:=2.5*a0+1.875*a1+1.5625*a2=5.4514;
>eq3:=1.875*a0+1.5625*a1+1.3828*a2=4.4015;
```

لحلّ هذا النظام، ندخل

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{a0,a1,a2});
```

الذي يعطي باستخدام Digits:=5

$$a_2 = 0.84316 \text{ و } a_1 = 0.86468 , a_0 = 1.0051$$

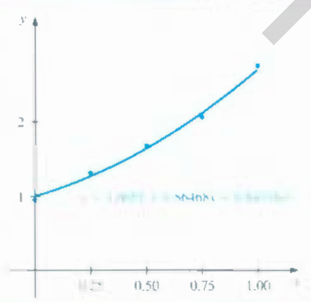
وهكذا فإن كثيرة الحدود من الرتبة 2 الناتجة بطريقة المربعات الصغرى المنطبقة على البيانات السابقة هي $P_2(x) = 1.0051 + 0.86468x + 0.84316x^2$ ويظهر رسمه البياني (منحناه) في شكل (4.8). إن القيم التقريبية المقابلة للقيم x_i تظهر في جدول (4.8).

إن الخطأ التام

$$E_2 = \sum_{i=1}^{5}(y_i - P(x_i))^2 = 2.74 \times 10^{-4}$$

هو أصغر ما يمكن الحصول عليه باستخدام كثيرة حدود من الرتبة 2 على الأكثر. ■

شكل 4.8



جدول 4.8

5	4	3	2	1	i
1.00	0.75	0.50	0.25	0	x_i
2.7183	2.1170	1.6487	1.2840	1.0000	y_i
2.7129	2.1279	1.6482	1.2740	1.0051	$P(x_i)$
0.0054	−0.0109	0.0004	0.0100	−0.0051	$y_i - P(x_i)$

ويوجد في Maple دّالة تسمى fit في مكتبة الإحصاء stats library لحساب التقريبات المنفصلة بطريقة المربعات الصغرى.

ويمكننا حساب التقريب في مثال (2) باستخدام Maple code (كود مابل) ومكتبة الإحصاء stats library بالأوامر

```
>with(stats)
>xvals:=[0,0.25,0.5,0.75,1];
>yvals:=[1,1.284,1.6487,2.117,2.7183];
>z:=fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^2 + b*x + c, {a,b,c}]]
        ([xvals,yvals]);
```

تعطي Maple تمهيدية

$$z := y = .8436571429x^2 + .8641828571x + 1.005137143.$$

وللحصول على التقريب $y(1.7)$، ندخل

```
>evalf(subs(x = 1.7,z))
```

لنحصل على $y = 4.912417143$

يكون من المناسب أحياناً افتراض أن البيانات مرتبطة أسيًّا. إن هذا يتطلب أن تكون دالة التقريب على الصيغة

$$y = be^{ax} \tag{4.8}$$

أو

$$y = bx^a \tag{5.8}$$

للثابتين a و b.

إن الصعوبة في تطبيق طريقة المربعات الصغرى في أحوال هذا النوع تأتي من محاولة جعل الأخطاء الآتية أصغر ما يمكن:

$E = \sum_{i=1}^{m}(y_i - be^{ax_i})^2$ في حالة المعادلة (4.8)

أو

$E = \sum_{i=1}^{m}(y_i - bx_i^a)^2$ في حالة المعادلة (5.8)

إن المعادلات القانونية المرتبطة بهذه الطرائق نحصل عليها من

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - be^{ax_i})(-bx_ie^{ax_i}) \quad \text{و} \quad 0 = \frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - be^{ax_i})(-e^{ax_i})$$

في حالة المعادلة (4.8)

أو من المعادلتين

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - bx_i^a)(-b(\ln x_i)x_i^a) \quad \text{و} \quad 0 = \frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - bx_i^a)(-x_i^a)$$

في حالة المعادلة (5.8).

ولا يوجد حل صحيح لأي من هذين النظامين في a و b.

عندما يظن أن البيانات مرتبطة أسيًّا، فإن الطريقة الشائعة الاستخدام تكون باستخدام اللوغارتمات للمعادلة التقريبية

$\ln y = \ln b + ax$ في حالة المعادلة (4.8)

و $\ln y = \ln b + a \ln x$ في حالة المعادلة (5.8).

تظهر الآن مسألة خطية في كلا الحالتين، ويمكن الحصول على الحل لكل من $\ln b$ و a عن طريق تعديل المعادلتين القانونيتين (1.8) و (2.8) بصورة مناسبة.

على كل حال، فالتقريب الناتج عن هذه الطريقة ليس تقريبًا بطريقة المربعات الصغرى للمسألة الأصلية، وهو يختلف عن التقريب بطريقة المربعات الصغرى للمسألة الأصلية اختلافًا جذريًّا. ويشرح التطبيق في التمرين (13) مسألة من هذا النوع.

سيُرجع إلى هذا التطبيق في التمرين (14) من الفصل (3.10)، حيث يقرّب الحل الصحيح لمسألة المربعات الصغرى الأسيّة باستخدام طرائق ملائمة لحل أنظمة المعادلات غير الخطية.

مثال 3 لديك مجموعة البيانات في الأعمدة الثلاثة الأولى من اليسار في جدول (5.8).

جدول 5.8

i	x_i	y_i	$\ln y_i$	x_i^2	$x_i \ln y_i$
1	1.00	5.10	1.629	1.0000	1.629
2	1.25	5.79	1.756	1.5625	2.195
3	1.50	6.53	1.876	2.2500	2.814
4	1.75	7.45	2.008	3.0625	3.514
5	2.00	8.46	2.135	4.0000	4.270
	7.50		9.404	11.875	14.422

لو رسمنا x_i مع $\ln y_i$ لأظهرت البيانات علاقة خطية بينها، ولذلك فمن المعقول افتراض تقريب على الصيغة

$\ln y = \ln b + ax$ أو $y = be^{ax}$

وبإكمال جدول وجمع الأعمدة المناسبة، نحصل على البيانات المتبقية في جدول (5.8). باستخدام المعادلات القانونية (1.8) و (2.8) نحصل على

$$a = \frac{(5)(14.422) - (7.5)(9.404)}{(5)(11.875) - (7.5)^2} = 0.5056$$

و

$$\ln b = \frac{(11.875)(9.404) - (14.422)(7.5)}{(5)(11.875) - (7.5)^2} = 1.122$$

بما أن $b = e^{1.122} = 3.071$ فإن التقريب يأخذ الصيغة

$$y = 3.071e^{0.5056x}$$

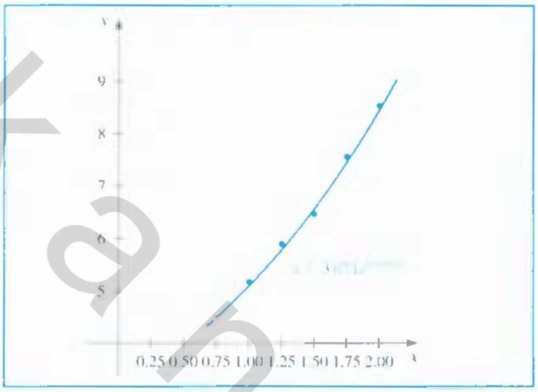
الذي يعطي القيم المقابلة لنقاط البيانات كما في جدول (6.8) ■

(انظر شكل 5.8)

جدول 6.8

i	x_i	y_i	$3.071e^{0.5056x_i}$
1	1.00	5.10	5.09
2	1.25	5.79	5.78
3	1.50	6.53	6.56
4	1.75	7.45	7.44
5	2.00	8.46	8.44

شكل 5.8



مجموعة التمارين 1.8 EXERCISE SET

1. احسب كثيرة حدود خطية ذات مربعات صغرى للبيانات في مثال (2).
2. احسب كثيرة الحدود من الرتبة 2 ذات المربعات الصغرى للبيانات في مثال (1). وقارن الخطأ التام لكلتا كثيرتي الحدود.
3. أوجد كثيرات الحدود ذات المربعات الصغرى ومن الدرجات 1، 2 و 3 للبينات في جدول الآتي:

x_i	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

احسب الخطأ في كل حالة. وارسم شكل انتشار البيانات كثيرات الحدود جميعها.

4. أوجد كثيرات الحدود ذات المربعات الصغرى من الدرجات 1، 2 و 3 للبيانات في جدول الآتي:

0.75	0.6	0.5	0.31	0.15	0	x_i
1.422	1.223	1.117	1.031	1.004	1.0	y_i

احسب الخطأ في كل حالة، وارسم شكل انتشار البيانات، وكثيرات الحدود.

5. لديك البيانات

7.1	6.8	6.3	5.9	5.5	5.1	4.7	4.5	4.2	4.0	x_i
326.72	299.50	256.73	224.87	195.14	167.53	142.05	130.11	113.18	102.56	y_i

أ. أوجد كثيرة الحدود ذات المربعات الصغرى من الرتبة 1، واحسب الخطأ.

ب. أوجد كثيرة الحدود ذات المربعات الصغرى من الرتبة 2، واحسب الخطأ.

ج. أوجد كثيرة الحدود ذات المربعات الصغرى من الرتبة 3، واحسب الخطأ.

د. أوجد التقريب بالمربعات الصغرى على الصيغة be^{ax}، واحسب الخطأ.

هـ. أوجد التقريب بالمربعات الصغرى على الصيغة bx^a، واحسب الخطأ.

6. كرِّر التمرين 5 للبيانات الآتية:

x_i	0.2	0.3	0.6	0.9	1.1	1.3	1.4	1.6
y_i	0.050446	0.098426	0.33277	0.72660	1.0972	1.5697	1.8487	2.5015

7. وُصفت تجربة في المثال في مقدمة هذا الفصل، لتحديد ثابت النابض k في قانون هوك

$$F(l) = k(l - E)$$

الدالة F هي القوة اللازمة لمد النابض l من الوحدات، حيث إن الثابت $E = 5.3$ إنشات هو طول النابض قبل المد.

أ. افترض أن القياسات أخذت لطول النابض l إنشا، وفق الأوزان المستخدمة $F(l)$ باوند كما في جدول الآتي:

$(l)F$	2	4	6
l	7.0	9.4	12.3

أوجد تقريب المربعات الصغرى للثابت k.

ب. أخذت قياسات أخرى، وأُعطيت البيانات الإضافية

10	8	5	3	$F(l)$
15.9	14.4	11.3	8.3	l

احسب تقريب المربعات الصغرى الجديد للثابت k. أي من الإجابات في (أ) أو (ب) تعطي المطابقة الفضلى للبيانات الكلية للتجربة؟

8. تحتوي القائمة الآتية درجات الواجب ودرجات الامتحان النهائي لثلاثين طالبا من

التحليل العددي، أوجد معادلة الخط المستقيم بالمربعات الصغرى لهذه البيانات، واستخدم هذا الخط لإيجاد رتبة الواجب Homework اللازمة للتنبؤ بأقل رتبة. نحصل على الرتبة A (90%) والدرجة D (60%) في الامتحان النهائي Final.

الواجب المنزلي	النهائي	الواجب المنزلي	النهائي
302	45	323	83
325	72	337	99
285	54	337	70
339	54	304	62
334	79	319	66
322	65	234	51
331	99	337	53
279	63	351	100
316	65	339	67
347	99	343	83
343	83	314	42
290	74	344	79
326	76	185	59
233	57	340	75
254	45	316	45

9. يبين الجدول الآتي المعدل بالنقاط (Grade-point average) للتخصصين: الرياضيات والحاسوب مع علامات هؤلاء الطلبة لجزء الرياضيات من امتحان ACT (American College Testing) عندما كانوا في المدرسة الثانوية. ارسم شكل انتشار هذه البيانات. وأوجد معادلة خط المربعات الصغرى الذي ينطبق على البيانات.

نتيجة الاختبار الأمريكي للقبول الجامعي (ACT)	المعدل بالنقاط	نتيجة الاختبار الأمريكي للقبول الجامعي (ACT)	المعدل بالنقاط
28	3.84	29	3.75
25	3.21	28	3.65
28	3.23	27	3.87
27	3.63	29	3.75
28	3.75	21	1.66
33	3.20	28	3.12
28	3.41	28	2.96
29	3.38	26	2.92
23	3.53	30	3.10
27	2.03	24	2.81

10. البيانات الآتية قدّمت إلى لجنة عدم الثقة في مجلس النواب (Senate Antitrust Subcommittee) مؤشرات تفادي السيارات للحوادث بحسب نوع السيارة.
أوجد خط المربعات الصغرى الذي ينطبق على هذه البيانات أو يقرّبها. (إنه جدول يعطي النسبة المئوية لتورط السيارات في الحوادث التي كان أخطر نتائجها الوفاة أو الجروح البليغة).

النوع	متوسط الوزن	نسبة الحدوث
1. محلي عادي فخم	4800 lb	3.1
2. محلي عادي متوسط	3700 lb	4.0
3. محلي عادي اقتصادي	3400 lb	5.2
4. محلي صغير	2800 lb	6.4
5. أجنبي صغير	1900 lb	9.6

11. لتحديد العلاقة بين عدد السمك وعدد أنواعه، أُخذت عيّنات من Great Barrier Reef وطبّق [SD] P.Sale & R.Dybdahl كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى لمجموعة البيانات الآتية التي جُمعت على مدى سنتين. افترض أن x تمثّل عدد العينة وy تمثّل عدد الأنواع في العينة.

x	y	x	y	x	y
13	11	29	12	60	14
15	10	30	14	62	21
16	11	31	16	64	21
21	12	36	17	70	24
22	12	40	13	72	17
23	13	42	14	100	23
25	13	55	22	130	34

حدّد كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى التي تنطبق على هذه البيانات.

12. لتحديد العلاقة الدالية بين معامل التخفيف attenuation coefficient والكثافة Thickness لعينة من سمك تاكونايت؛ طبّق V.P.Singh[Si] مجموعة من البيانات باستخدام كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى، وقد أخذت مجموعة البيانات الآتية من إحدى رسوم ذلك البحث. أوجد كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى المطابقة لهذه البيانات.

السمك بالسنتمتر(cm)	معامل الترقيق(dB/cm)
0.040	26.5
0.041	28.1
0.055	25.2
0.056	26.0
0.062	24.0
0.071	25.0
0.071	26.4
0.078	27.2
0.082	25.6
0.090	25.0
0.092	26.8
0.100	24.8
0.105	27.0
0.120	25.0
0.123	27.3
0.130	26.9
0.140	26.2

13. في بحث حول كفاءة استخدام يرقة العث من نوع موديست سفنكس (Pachysphinx modesta) للطاقة. استخدم [Schr 1] L.Schroeder شرويدر البيانات الآتية: W وزن اليرقة الحية بالجرام وR استهلاك اليرقة من الأكسجين باللتر/ الساعة لافتراضات بيولوجية. افترض وجود علاقة بين W و R على الصيغة $R = bW^a$.

أ. أوجد كثيرة الحدود اللوغارتمية بطريقة المربعات الصغرى باستخدام

$$\ln R = \ln b + a \ln W$$

ب. احسب الخطأ المرتبط بالتقريب في الفقرة (أ)

$$E_2 = \sum_{i=1}^{37} (R_i - bW_i^a)^2$$

ج. عدّل المعادلة اللوغارتمية بطريقة المربعات الصغرى بإضافة الحد التربيعي $c(\ln W_i)^2$، وأوجد كثيرة الحدود اللوغارتمية التربيعية بطريقة المربعات الصغرى.

د. حدِّد معادلة الخطأ المرتبطة بالتقريب في الفقرة (جـ)، واحسب قيمته.

R	W	R	W	R	W	R	W	R	W
0.234	0.025	0.180	0.020	0.181	0.020	0.23	0.025	0.154	0.017
0.537	0.233	0.299	0.119	0.260	0.085	0.357	0.111	0.296	0.087
1.47	0.783	0.428	0.210	0.334	0.171	0.366	0.211	0.363	0.174
2.48	1.35	1.15	1.32	0.87	1.29	0.771	0.999	0.531	1.11
1.44	1.69	2.83	3.34	3.59	3.04	2.01	3.02	2.23	1.74
1.84	2.75	4.15	5.48	3.40	4.29	3.28	4.28	3.58	4.09
4.66	4.83			3.88	5.30	2.96	4.58	3.52	5.45
6.94	5.53					5.10	4.68	2.40	5.96

14. برهن أن المعادلات القانونية (3.8) الناتجة عن المربعات الصغرى المنفصـ تعطي مصفوفة متماثلة وغير منفردة، ومن ثم يوجد لها حل وحيد.

[إضاءة: ضع $A = (a_{ij})$ حيث $a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} x_k^{i+j-2}$ و $x_1, x_2, \ldots, x_m$ متميزة حيث $n < m - 1$ افترض أن A منفردة، وأن $c \neq 0$ بحيث $c^t A c = 0$. برهن أن كثيرة حدود من الرتبة n التي معاملاتها هي إحداثيات c لها أكثر من n من الجذور. واستخدم هذا البرهان لتحصل على تناقض]

2.8 كثيرات الحدود المتعامدة والتقريب بالمربعات الصغرى
Orthogonal Polynomials and Least Squares Approximation

لقد عالج الفصل السابق موضوع التقريب بالمربعات الصغرى لتطبيق مجموعة من البيانات. ومسألة التقريب الأخرى التي ذكرت في المقدمة تُعنى بتقريب الدّوال.

ليكن $f \in C[a, b]$ والمطلوب: إيجاد كثيرة حدود $P_n(x)$ من الرتبة n على الأكثر، بحيث يجعل الخطأ

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2\, dx$$

أصغر ما يمكن.

ولتحديد كثيرة الحدود التقريبية بطريقة المربعات الصغرى؛ أي كثيرة الحدود التي تجعل التعبير السابق أصغر ما يمكن.

اجعل

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

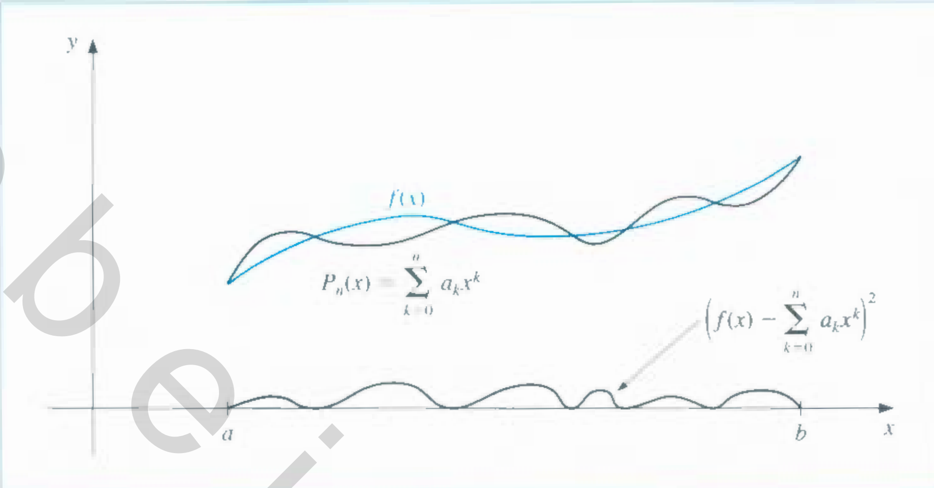
وعرّف كما يتضح من شكل (6.8)

$$E \equiv E(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 dx$$

وإن المسألة تنحصر في إيجاد المعاملات الحقيقية $a_0, a_1, \ldots, a_n$ التي تجعل E أصغر ما يمكن. إن الشرط الضروري الخاص بالأعداد $a_0, a_1, \ldots, a_n$ لتجعل E أصغر ما يمكن هو

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

شكل 6.8



بما أن

$$E = \int_a^b [f(x)]^2\,dx - 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x)\,dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2 dx$$

فإننا نحصل على

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\int_a^b x^j f(x)\,dx + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}\,dx$$

ولنحصل على $P_n(x)$. يجب حلُّ $(n+1)$ من المعادلات القانونية لإيجاد $(n+1)$ من المجاهيل a_j

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}\,dx = \int_a^b x^j f(x)\,dx \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, n \tag{6.8}$$

تمتلك المعادلات القانونية حلًا وحيدًا دائمًا شرط أن تكون $f \in C[a, b]$. (انظر التمرين 15).

مثال 1 أوجد بطريقة المربعات الصغرى كثيرة الحدود من الرتبة الثانية التي تقرّب الدالة $f(x) = \sin \pi x$ على الفترة $[0,1]$.

إن المعادلات القانونية لكثيرة الحدود $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ هي

$$a_0\int_0^1 1\,dx + a_1\int_0^1 x\,dx + a_2\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 \sin \pi x\,dx$$

$$a_0\int_0^1 x\,dx + a_1\int_0^1 x^2\,dx + a_2\int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 x\sin \pi x\,dx$$

$$a_0\int_0^1 x^2\,dx + a_1\int_0^1 x^3\,dx + a_2\int_0^1 x^4\,dx = \int_0^1 x^2\sin \pi x\,dx$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{\pi}, \quad \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{\pi}, \quad \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

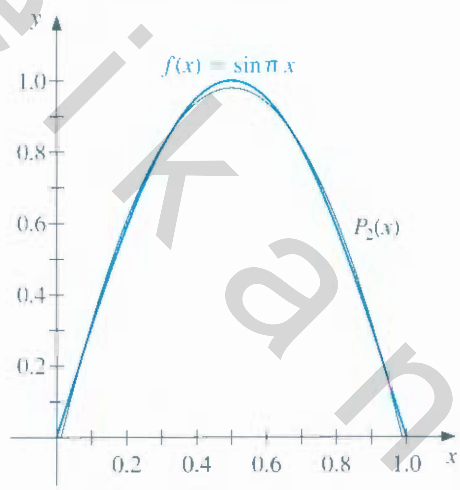
ويمكن حلّ المعادلات الثلاث هذه بمجاهيل ثلاثة لنحصل على

$$a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251 \text{ و } a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0.050465$$

ومن ثم فإن كثيرة الحدود من الرتبة الثانية لتقريب $f(x) = \sin \pi x$ على الفترة $[0, 1]$ هي

$$P_2(x) = -4.12251x^2 + 4.12251x - 0.050465$$ ■

(انظر شكل 7.8).



شكل 7.8

يظهر مثال (1) صعوبة في إيجاد كثيرة الحدود التقريبية بطريقة المربعات الصغرى. ويجب حل النظام الخطي $(n+1) \times (n+1)$ للمجاهيل $a_0, \ldots, a_n$، وإن معاملات النظام الخطي تكون على الصيغة

$$\int_a^b x^{j+k} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

وهي عبارة عن نظام خطي ليس من السهل إيجاد حلّ عددي له.

إن المصفوفة في النظام الخطي تعرف بمصفوفة هلبرت Hilbert matrix التي هي مثل كلاسيكي لإظهار الصعوبات في أخطاء التدوير. (انظر التمرين (11) من الفصل 4.7)

وهناك سلبية أخرى تشبه تلك التي واجهتنا عند أول تقديم لكثيرة حدود لاكرانج في الفصل (1.3). فالحسابات التي أجريت لإيجاد أفضل كثيرة حدود من الرتبة n، $P_n(x)$ لا تقلل من مقدار العمل اللازم للحصول على كثيرة حدود من الرتبة التي تلي n، أي $P_{n+1}(x)$.

سنناقش الآن طريقة مختلفة للحصول على التقريب بالمربعات الصغرى، ولقد ثبت أن هذه الطريقة أكثر كفاءة. وحالما حصلنا على $P_n(x)$، تتحدّد $P_{n+1}(x)$ بسهولة. وليتيسر البحث نحتاج إلى بعض المفاهيم الجديدة.

كان دافيد هلبرت David Hilbert (1862-1943) عالم رياضيات مشهور في بداية القرن العشرين. وإن ذكرى محاضرته شائعة على نحو كبير. أما الكونجرس العالمي للرياضيين في باريس عام 1900 فقد قدم 23 مسألة شرح عن أهميتها، ووضعها أمام علماء الرياضيات لحلها.

تعريف 1.8 تكون مجموعة الدّوال $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ مستقلة خطيًا linearly independent على $[a, b]$ إذا كان الحل الوحيد للمعادلة $c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$ هو $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.

وإذا لم يكن الأمر كذلك فإن مجموعة الدّوال تكون مرتبطة خطيًا (linearly dependent).
■

مبرهنة 2.8 إذا كانت $\phi_j(x)$ كثيرة حدود من الرتبة j لكل $j = 0, 1, \dots, n$ فإن $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ مستقلة خطيًا على أي فترة $[a, b]$.
■

البرهان افترض أن $c_0, \dots, c_n$ أعداد حقيقية بحيث

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0$$

لـ $x \in [a, b]$ جميعها

إن كثيرة الحدود $P(x)$ تتلاشى، وتكون قيمتها صفرًا على $[a, b]$، إذن يجب أن تكون كثيرة حدود صفرية، وتكون معاملات قوى x جميعها أصفارًا، ويكون معامل x^n خصوصًا صفرًا. وبما أن $c_n\phi_n(x)$ هو الحد الوحيد الذي يحوي x^n في $P(x)$ جميعها، لذا يجب أن يكون $c_n = 0$، وإن

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j\phi_j(x)$$

في هذه الصيغة لكثيرة الحدود $P(x)$ يكون $c_{n-1}\phi_{n-1}(x)$ هو الحد الوحيد الذي يحوي x^{n-1}، ولذلك فإن $c_{n-1} = 0$ ويكون $P(x)$ على الصيغة

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-2} c_j\phi_j(x)$$

وبطريقة مماثلة فإن الثوابت المتبقية $c_{n-2}, c_{n-3}, \dots, c_1, c_0$ كلها تكون أصفارًا، لذا تكون المجموعة $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ مستقلة خطيًا.
■ ■ ■

مثال 2 ليكن $\phi_0(x) = 2, \phi_1(x) = x - 3$ و $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$. من مبرهنة (2.8) فإن $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ مستقلة خطيًا على أي فترة $[a, b]$.

افترض أن $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ سنبرهن وجود ثوابت c_0, c_1 و c_2 بحيث يكون

$$Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$$

انظر أولًا

$$1 = \tfrac{1}{2}\phi_0(x), \quad x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \tfrac{3}{2}\phi_0(x)$$

و

$$\begin{aligned} x^2 &= \phi_2(x) - 2x - 7 = \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \tfrac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\tfrac{1}{2}\phi_0(x)\right] \\ &= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \tfrac{13}{2}\phi_0(x) \end{aligned}$$

لذلك

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0\left[\tfrac{1}{2}\phi_0(x)\right] + a_1\left[\phi_1(x) + \tfrac{3}{2}\phi_0(x)\right] + a_2\left[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \tfrac{13}{2}\phi_0(x)\right] \\ &= \left(\tfrac{1}{2}a_0 + \tfrac{3}{2}a_1 - \tfrac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) + [a_1 - 2a_2]\,\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) \end{aligned}$$

ولذلك فإن أي كثيرة حدود تربيعية يمكن التعبير عنها بتركيب خطي من $\phi_0(x)$، $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$

إن الحالة التي شرحت في مثال (2) تتحقق في حالة وضع أعم. لتكن $\prod_n$ تمثّل مجموعة جميع كثيرات الحدود من الرتبة n على الأكثر.

إن التمهيدية الآتية تستخدم على نحو واسع في كثير من تطبيقات الجبر الخطي المطلوب برهانها في التمرين (13).

مبرهنة 3.8 إذا كانت $\phi_0(x)$ $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ مجموعة من كثيرات الحدود المستقلة خطيًا في $\prod_n$ فإن أي كثيرة حدود في $\prod_n$ يمكن كتابتها بطريقة وحيدة كترتيب خطي للدوال $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ ■

إن البحث في تقريب الدالة يتطلب عمومًا تقديم مفاهيم دوال الوزن والتعامد

تعريف 4.8 تسمى أي دالة قابل للتكامل w دالة وزن (Weight function) على الفترة I إذا كان $w(x) \geq 0$ لـ x جميعها في I. ولكن $w(x) \not\equiv 0$ على أي فترة جزئية من I.

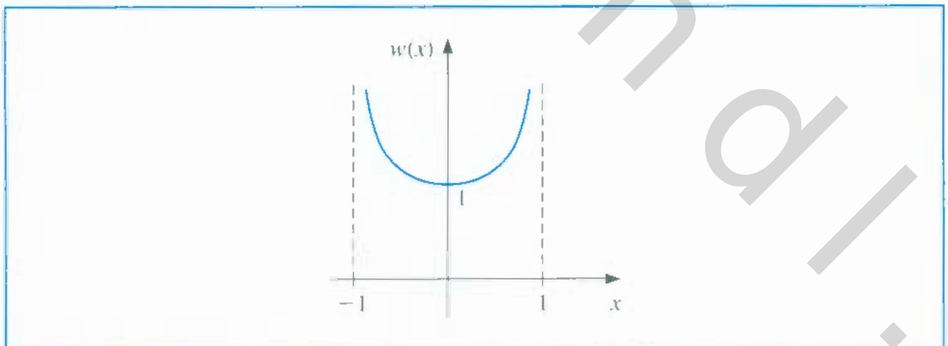
إن الهدف من دالة الوزن هو تعيين درجات مختلفة لأهمية التقريبات على جزء محدّد من الفترة. ■

فعلى سبيل المثال، فإن دالة الوزن

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

يضع تركيزا أقل بالقرب من مركز الفترة (1,1-) وتركيزا أكبر عندما تكون $|x|$ قريبة من 1. (انظر شكل 8.8) وستستعمل دالة الوزن هذه في الفصل الآتي:

شكل 7.8



افترض أن $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ مجموعة من الدّوال المستقلة خطيًا على $[a, b]$، w دالة وزن على $[a, b]$، ولكل $f \in C[a, b]$ وعلينا أن نبحث عن التوليفة الخطية

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$

التي تجعل الخطأ أصغر ما يمكن

$$E(a_0, \ldots, a_n) = \int_a^b w(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x) \right]^2 dx$$

إن هذه المسألة تختزل إلى الحالة التي افترضناها في بداية هذا الفصل حالة خاصة عندما $w(x) \equiv 1$

و $\phi_k(x) = x^k$ لكل $k = 0, 1, \ldots, n$.

تشتق المعادلات القانونية المرتبطة بهذه المسألة من حقيقة أن لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ يكون

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_j} = 2\int_a^b w(x)\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x)\right]\phi_j(x)\,dx$$

يمكن كتابة نظام المعادلات القانونية على الصيغة

$$\int_a^b w(x)\,f(x)\phi_j(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx \quad \text{لكل } j = 0, 1, \ldots, n$$

إذا أمكن اختيار الدّوال $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ بحيث

$$\int_a^b w(x)\phi_k(x)\,\phi_j(x)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} 0 & j \neq k \text{ عندما} \\ 0 < \alpha_j & j = k \text{ عندما} \end{array}\right. \tag{7.8}$$

فإن المعادلات القانونية تختزل إلى

$$\int_a^b w(x)\,f(x)\,\phi_j(x)\,dx = a_j\int_a^b w(x)[\phi_j(x)]^2\,dx = a_j\,\alpha_j$$

لكل $j = 0, 1, \ldots, n$، وتكون سهلة الحل لتعطي

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j}\int_a^b w(x)\,f(x)\,\phi_j(x)\,dx$$

إن كلمة "متعامدة" تعني ذات زاوية قائمة. وبمعنى آخر كل اقتران متعامد عمودي على الآخر

إذن تُبسّط مسألة التقريب بالمربعات الصغرى على نحو كبير عند اختيار الدّوال $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ بحيث تحقق شرط التعامد في المعادلة (7.8) (orthogonality condition). وسنخصص بقية هذا الفصل لدراسة تجمعات هذا النوع.

تعريف 5.8

تقول: إن مجموعة الدوال $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ متعامدة (orthogonal set of functions) على الفترة $[a, b]$ بالنسبة إلى دَالة الوزن w إذا كان

$$\int_a^b w(x)\,\phi_j(x)\phi_k(x)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} 0, & j \neq k \text{ عندما} \\ 0 < \alpha_k & j = k \text{ عندما} \end{array}\right.$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كان $\alpha_k = 1$ لكل $k = 0, 1, \ldots, n$ فإن المجموعة تسمى متعامدة قانونية (orthonormal). ■

مبرهنة 6.8

إن هذا التعريف مع الملاحظات السابقة يعطي مبرهنة الآتية.

إذا كانت $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ مجموعة دوال متعامدة على الفترة $[a, b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w فإن تقريب f على الفترة $[a, b]$ بطريقة المربعات الصغرى بالنسبة إلى الوزن w يكون

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$

■

حيث لكل $k = 0, 1, \ldots, n$ يكون

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x)\phi_k(x) f(x)\, dx}{\int_a^b w(x)[\phi_k(x)]^2\, dx} = \frac{1}{\alpha_k} \int_a^b w(x)\phi_k(x) f(x)\, dx$$

وعلى الرغم من أن كلًا من التعريف (5.8) والمبرهنة (6.8) يسمح باستخدام مجموعات عريضة من الدّوال المتعاقدة، إلا أننا سنقتصر على التعامل مع مجموعات كثيرات الحدود المتعامدة.

مبرهنة 7.8

إن المبرهنة الآتية المبنية على عملية جرام – شميدت (Gram-Schmidt process) تصف كيفية إنشاء كثيرات الحدود المتعامدة على $[a, b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w.

حصل إيرهارد شميدت Erhard Schmidt (1876-1959) على رتبة الدكتوراة تحت إشراف دافيد هلبرت 1905 لحل مسألة حول المعادلات التكاملية. ونشر شميدت بحثًا عن المعادلات التكاملية عام 1907 الذي شرح فيه ما يُعرف الآن بعملية جرام – شميدت لإنشاء قاعدة متعامدة قانونية لمجموعة من الدوال. وقد توصل إلى هذه النتائج جورجن بيدرسون جرام Jorgen Pederson Gram (1850-1916) حيث درس هذه المسألة عندما كان يدرس المربعات الصغرى. وعلى كل حال شرح لابلاس Laplace عملية مماثلة قبل جرام وشميدت

تكون مجموعة دوال كثيرات الحدود $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ المعرّفة بالطريقة الآتية متعامدةً على $[a, b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w. لكل x في $[a, b]$ يكون $\phi_0(x) \equiv 1$، $\phi_1(x) = x - B_1$ حيث

$$B_1 = \frac{\int_a^b x w(x)[\phi_0(x)]^2\, dx}{\int_a^b w(x)[\phi_0(x)]^2\, dx}$$

وعندما تكون $k \geq 2$.

فلكل x في $[a, b]$ يكون $\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x)$

حيث

$$B_k = \frac{\int_a^b x w(x)[\phi_{k-1}(x)]^2\, dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-1}(x)]^2\, dx} \quad \text{و} \quad C_k = \frac{\int_a^b x w(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)\, dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-2}(x)]^2\, dx}$$

■

تعطي مبرهنة (7.8) عملية إرجاعية لإنشاء مجموعة كثيرات متعامدة. ويُتّبع برهان هذه مبرهنة عن طريق تطبيق الاستقراء الرياضي لدرجة كثيرة الحدود $\phi_n(x)$

تمهيدية 8.8

لكل $n > 0$ تكون مجموعة دوال كثيرات الحدود $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ المعطاة في مبرهنة (7.8) مستقلة خطيًا على $[a, b]$، ويكون

$$\int_a^b w(x)\phi_n(x) Q_k(x)\, dx = 0$$

لكل كثيرة حدود $Q_k(x)$ من الرتبة $k < n$.

■

البرهان بما أن $\phi_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n، فإن مبرهنة (2.8) تتضمَّن أن $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ مجموعة مستقلة خطيًا.

لتكن $Q_k(x)$ كثيرة حدود من الرتبة k. وفق مبرهنة (3.8) توجد أعداد $c_0, \ldots, c_k$ بحيث $Q_k(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j \phi_j(x)$ وهكذا يكون

$$\int_a^b w(x)\,Q_k(x)\phi_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{k} c_j \int_a^b w(x)\,\phi_j(x)\phi_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{k} c_j \cdot 0 = 0$$

لأن ϕ_n متعامد مع ϕ_j لكل $j = 0, 1, \ldots, k$. ■ ■ ■

مثال 3 مجموعة كثيرات حدود ليجندر $\{P_n(x)\}$ متعامدة على $[-1, 1]$ بالنسبة إلى دالة الوزن $w(x) \equiv 1$. إن التعريف الكلاسيكي لكثيرات حدود ليجندر يتطلب أن يكون $P_n(1) = 1$ لكل n، وتستخدم علاقة إرجاعية لتوليد كثيرات الحدود عندما $n \geq 2$.

إن هذا التطبيع لا حاجة إليه في مناقشاتنا. فكثيرات الحدود التقريبية الناتجة بأي من الحالتين هي نفسها أساساً.

استخدام العملية الإرجاعية في مبرهنة (7.8) ووضع $P_0(x) \equiv 1$ يعطي

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = 0 \quad \text{و} \quad P_1(x) = (x - B_1)\,P_0(x) = x$$

أيضا

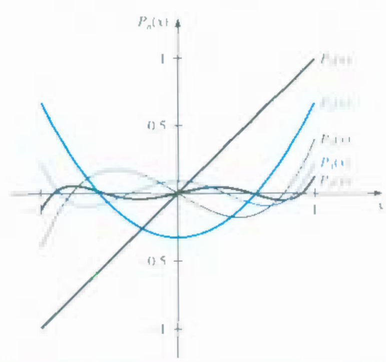
$$B_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = 0 \quad \text{و} \quad C_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \frac{1}{3}$$

ولذلك يكون

$$P_2(x) = (x - B_2)\,P_1(x) - C_2 P_0(x) = (x - 0)x - \frac{1}{3}\cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

لقد حُدِّدت كثيرات حدود ليجندر ذات الدرجات الأعلى بالطريقة ذاتها التي تظهر في شكل (9.8). وعلى الرغم من كون التكامل مضنياً، إلا أنه ليس صعباً باستخدام CAS.

شكل 9.8



فعلى سبيل المثال أمر مابل (maple)، int. المستخدم لحساب التكاملات B_3 و C_3:

```
>B3:=int(x*(x^2-1/3)^2,x=-1..1)/int((x^2-1/3)^2,x=-1..1);
>C3:=int(x*(x^2-1/3)*x,x=-1..1)/int(x^2,x=-1..1);
```

يعطي $B_3 = 0$ و $C_3 = \frac{4}{15}$. وهكذا

$$P_3(x) = xP_2(x) - \frac{4}{15}P_1(x) = x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{15}x = x^3 - \frac{3}{5}x$$

وتكون كثيرتا حدود ليجندر الآتيتان هما

$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35} \quad \text{و} \quad P_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x \qquad \blacksquare$$

ولقد ذُكرت كثيرات حدود ليجندر في الفصل (4.7)، حيث استخدمت جذ رها لكونها نقاطا في عملية جاوس للتكامل.

2.8 مجموعة التمارين EXERCISE SET

1. أوجد كثيرة الحدود الخطية التي تقرّب الدالة $f(x)$ على الفترة المشار إليه بطريقة المربعات الصغرى إذا كان

أ. $f(x) = x^2 + 3x + 2$، $[0, 1]$ ب. $f(x) = x^3$، $[0, 2]$ ج. $f(x) = \frac{1}{x}$، $[1, 3]$

د. $f(x) = e^x$، $[0, 2]$ هـ. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}\sin 2x$، $[0, 1]$ ز. $f(x) = x\ln x$، $[1, 3]$

2. أوجد كثيرة الحدود التي تقرّب بطريقة المربعات الصغرى كل دّالة مما يلي على الفترة [-1,1].

أ. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ب. $f(x) = x^3$ ج. $f(x) = 1/x + 2$

د. $f(x) = e^x$ هـ. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}\sin 2x$ ز. $f(x) = \ln(x + 2)$

3. أوجد كثيرة الحدود من الرتبة الثانية التي تقرب بطريقة المربعات الصغرى كل دالة في التمرين (1) على الفترة المشار إليها.

4. أوجد كثيرة الحدود من الرتبة الثانية بطريقة المربعات الصغرى لتقريب الدّوال في التمرين 2 على الفترة [-1,1].

5. حسب الخطأ E للتقريبات في التمرين (3).

6. احسب الخطأ E للتقريبات في التمرين (4).

7. استخدم طريقة جرام – شميدت لإنشاء $\phi_0(x)$، $\phi_1(x)$، $\phi_2(x)$ و $\phi_3(x)$ للفترات الآتية:

أ. $[0, 1]$ ب. $[0, 2]$ ج. $[1, 3]$

8. كرِّر التمرين (1) باستخدام نتائج التمرين (7).

9. أوجد كثيرة الحدود من الرتبة الثالثة بطريقة المربعات الصغرى لتقريب الدّوال في التمرين (1) باستخدام نتائج التمرين (7).

10. كرِّر التمرين (3) باستخدام نتائج التمرين (7).

11. استخدم طريقة جرام – شميدت لحساب L_1، L_2 و L_3 حيث $\{L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)\}$ مجموعة كثيرات الحدود المتعامدة على $(0,\infty)$ بالنسبة إلى دّالة الوزن $w(x) = e^{-x}$ و $L_0(x) \equiv 1$. إن كثيرات الحدود التي نحصل عليها بهذه الطريقة تُسمى كثيرات حدود لاغور (Laguerre polynomials).

12. استخدم كثيرات حدود لاغور التي حُسبت في التمرين (11) لتحسب كثيرات الحدود من الرتبة الأولى والثانية والثالثة بطريقة المربعات الصغرى على الفترة $(0,\infty)$ بالنسبة إلى دالة

الوزن $w(x) = e^{-x}$ للدوال الآتية:

أ. $f(x) = x^2$ ب. $f(x) = e^{-x}$ ج. $f(x) = x^3$ د. $f(x) = e^{-2x}$

١٣. لتكن $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ أي مجموعة مستقلة خطيًّا في $\prod_n$. برهن أنه لكل عنصر $Q \in \prod_n$ توجد ثوابت وحيدة $c_0, c_1, \dots, c_n$ بحيث

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x)$$

14. برهن أنه إذا كان $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ مجموعة دوال متعامدة على $[a, b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w. فإن $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ مجموعة مستقلة خطيًّا.

15. برهن أن المعادلات القانونية (6.8) تملك حلًّا وحيدًا.

[إضاءة: برهن أن الحل الوحيد للدالة $f(x) \equiv 0$ هو $a_j = 0, j = 0, 1, \dots, n$. اضرب المعادلة (6.8) في العدد a_j، واجمع فوق كل j. بدل إشارة التكامل بإشارة الجمع لتحصل على $\int_a^b [P(x)]^2 dx = 0$، وهكذا يكون $P(x) \equiv 0$ ومن ثم فإن $a_j = 0$ لكل $j = 0, \dots, n$. إذن تكون مصفوفة المعاملات غير منفردة، ويوجد حل وحيد للمعادلة (6.8).

3.8 كثيرات حدود تشبيشف وترشيد سلسلة القوة Chebyshev Polynomials and Economization of Power Series

كثيرات حدود تشبيشف $\{T_n(x)\}$ متعامدة على (1,1-) بالنسبة إلى دالة الوزن $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. وعلى الرغم من إمكانية اشتقاق كثيرات الحدود هذه بطريقة الفصل السابق، فمن الأسهل إعطاء تعريف لها، ثم برهنة أنها تحقق خواص التعامد المطلوبة.

لكلّ $x \in [-1, 1]$، ولكلّ $n \geq 0$ عرّف

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x] \tag{8.8}$$

ليس واضحًا في هذا التعريف أن لكلّ n تكون $T_n(x)$ كثيرة حدود في x، ولكننا سنبرهن ذلك الآن. انظر أولاً أن $T_0(x) = \cos 0 = 1$ و $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$

لكلّ $n \geq 1$. نقدم التعويض $\theta = \arccos x$ لتغيير هذه المعادلة إلى

$$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta) \quad \text{حيث } \theta \in [0, \pi]$$

نشتق علاقة إرجاعية بملاحظة أن

$$T_{n+1}(\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta$$

و

$$T_{n-1}(\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta$$

وبجمع هاتين المعادلتين نحصل على $T_{n+1}(\theta) = 2\cos(n\theta)\cos\theta - T_{n-1}(\theta)$

وبالرجوع إلى المتغير x، نحصل لكلّ $n \geq 1$ على

$$T_{n+1}(x) = 2x\cos(n \arccos x) - T_{n-1}(x)$$

أو

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{9.8}$$

(1821-1894)
Pafnuty Lvovich Chebyshev
عمل تشبيشف أعمالا رياضية رائعة في كثير من الحقول بما فيها الرياضيات التطبيقية. مبرهنة الأعداد. مبرهنة التقريب والاحتمالات

وفي عام 1852 سافر من سانت بيترسبرج لزيارة علماء رياضيات في فرنسا وإنجلترا وألمانيا ودرس كل من لاكرانج وليجندر مجموعات منفردة من كثيرات الحدود المتعامدة. ولكن كان تشبيشف أول من رأى النتائج المهمة عموم دراسة مبرهنة. وطوّر كثيرات حدود تشبيشف لدراسة التقريبات عن طريق المربعات الصغرى والاحتمالات. وبعد ذلك طبّق نتائجه على الاستكمال الداخلي. وطرائق التكامل التقريبية، ومجالات أخرى

وبما أن $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = x$، فإن العلاقة الإرجاعية تعني أن $T_n(x)$ كثير: حدود من الرتبة n بمعامل أول 2^{n-1} عندما $n \geq 1$.

إن كثيرات حدود تشبيشف الثلاث الآتية هي

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

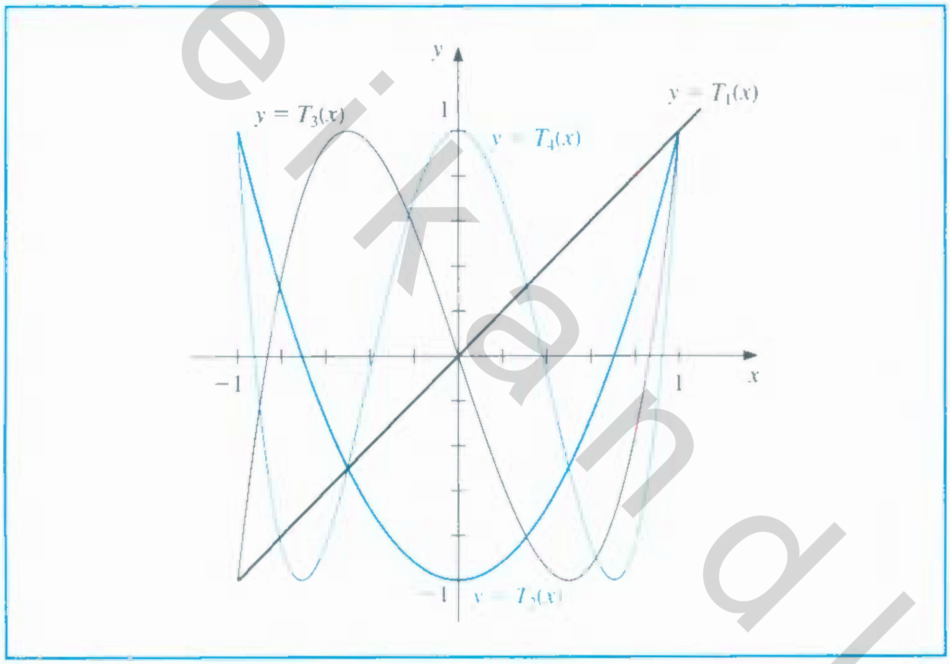
$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

و

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

يظهر الرسم البياني لكثيرات الحدود T_1, T_2, T_3 ، T_4 في شكل (10.8).

شكل 10.8



لبرهنة تعامد كثيرات حدود تشبيشف، افترض أن

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos x)\cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

وباستخدام التعويض $\theta = \arccos x$ نحصل على

$$d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

و

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_{\pi}^{0} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta.$$

افترض $n \neq m$. بما أن

$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \tfrac{1}{2}[\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta]$$

نحصل على

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n-m)\theta)\,d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{2(n+m)}\sin((n+m)\theta) + \frac{1}{2(n-m)}\sin((n-m)\theta)\right]_0^\pi$$
$$= 0.$$

وبطريقة مماثلة، يمكن برهنة أنه عندما يكون $n = m$ فإن

$$\int_{-1}^{1} \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{لكل } n \geq 1 \tag{10.8}$$

تستخدم كثيرات حدود تشبيشف لتصغير خطأ التقريب إلى أكبر حدٍّ ممكن.
وسنرى كيف تستخدم لحل مسألتين من هذا النوع:

- تعيين نقاط الاستكمال الداخلي لجعل الخطأ في استكمال لاكرانج الداخلي أصغر ما يمكن.
- تصغير رتبة كثيرة حدود التقريب بحيث تكون الخسارة في الدقة أقل ما يمكن.

مبرهنة 9.8 إن كثيرة حدود تشبيشف $T_n(x)$ من الرتبة $n \geq 1$ لها أصفار بسيطة عددها n في الفترة $[-1, 1]$ عند

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad \text{لكل } k = 1, 2, \ldots, n$$

وبالإضافة إلى ذلك تقع القيم العظمى المطلقة لكثيرة الحدود $T_n(x)$ عند

$$\bar{x}'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ مع } T_n(\bar{x}'_k) = (-1)^k \quad \text{لكل } k = 0, 1, \ldots, n$$

■

البرهان إذا وصفنا

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad \text{لكل } k = 1, 2, \ldots, n$$

فإن

$$T_n(\bar{x}_k) = \cos(n \arccos \bar{x}_k) = \cos\left(n \arccos\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)\right) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0$$

وكل $\bar{x}_k$ هي صفر مميز لـ T_n.

بما أن $T_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n. فإن أصفار $T_n(x)$ جميعها يجب أن تكون على تلك الصيغة.

لبرهنة الفقرة الثانية، نلاحظ أولا

$$T'_n(x) = \frac{d}{dx}[\cos(n \arccos x)] = \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

وأنه عندما يكون $k = 1, 2, \ldots, n-1$ فإن

$$T_n'(\bar{x}_k') = \frac{n\sin(n\arccos(\cos(k\pi/n)))}{\sqrt{1-[\cos(k\pi/n)]^2}} = \frac{n\sin(k\pi)}{\sin(k\pi/n)} = 0$$

بما أن $T_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n، فإن مشتقته $T_n'(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $(n-1)$، وإن جميع أصفار $T_n'(x)$ تحدث على $(n-1)$ من النقاط.

إن الحالات الأخرى الوحيدة الممكنة للنقاط القصوى لـ $T_n(x)$ تحدث على طرفي الفترة $[-1, 1]$ أي عند $\bar{x}_0' = 1$ و $\bar{x}_n' = -1$ وبما أنه لأي n و $k = 0, 1, \ldots, n$، يكون لدينا

$$T_n(\bar{x}_k') = \cos\left(n\arccos\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

وإن القيمة العظمى تقع على كل قيمة زوجية للعدد k والقيمة الصغرى على كل قيمة فردية.

■ ■ ■

نحصل على كثيرات حدود تشبيشف $\tilde{T}_n(x)$ الأحادية (monic) (التي معاملاتها الرئيسة تساوي 1) بقسمة كثيرة حدود تشبيشف $T_n(x)$ على المعامل الرئيس 2^{n-1}.

ومن ثم يكون

$$\tilde{T}_0(x) = 1$$

و

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \qquad \text{لكلّ } n \geq 1. \tag{11.8}$$

إن العلاقة الإرجاعية التي تحقّقها كثيرات حدود تشبيشف تتضمّن

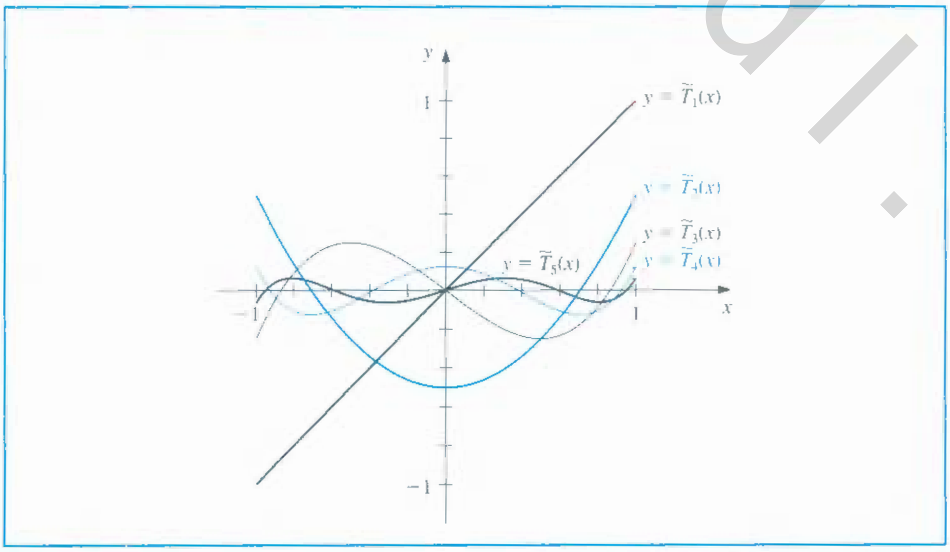
$$\tilde{T}_2(x) = x\tilde{T}_1(x) - \tfrac{1}{2}\tilde{T}_0(x)$$

و

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = x\tilde{T}_n(x) - \tfrac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x) \tag{12.8}$$

لكلّ $n \geq 2$. تظهر الرسوم البيانية لـ $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3, \tilde{T}_4$ و $\tilde{T}_5$ في شكل (11.8).

شكل 11.8



بما أن $\tilde{T}_n(x)$ عبارة عن مضاعف لـ $T_n(x)$. فإن مبرهنة (9.8) تتضمَّن أصفارًا $\tilde{T}_n(x)$ تقع أيضا عند

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

لكلّ $k = 1, 2, \ldots, n$، وإن القيم القصوى لـ $\tilde{T}_n(x)$ لكلّ $n \geq 1$. تحدث عند

$$\tilde{T}_n(\bar{x}'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \quad \text{مع} \quad \bar{x}'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \tag{13.8}$$

لكلّ $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

لتعبر $\tilde{\prod}_n$ عن مجموعة كثيرات الحدود الأحادية جميعها (monic) من الرتبة n.

إن العلاقة المعبَّر عنها بالمعادلة (13.8) تؤدي إلى خاصية تصغير مهمة تميز $\tilde{T}_n(x)$ عن عناصر $\tilde{\prod}_n$ الأخرى.

مبرهنة 10.8 إن كثيرات الحدود على الصيغة $\tilde{T}_n(x)$. عندما $n \geq 1$ لها الخاصية الآتية

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \quad \text{لـ} \quad P_n(x) \in \tilde{\prod}_n \quad \text{جميعًا}$$

وبالإضافة إلى ذلك تتحقق المساواة فقط إذا كان $P_n = \tilde{T}_n$. ■

البرهان افترض أن $P_n(x) \in \tilde{\prod}_n$. وأن

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)|$$

افترض $Q = \tilde{T}_n - P_n$. بما أن كلًا من $\tilde{T}_n(x)$ و $P_n(x)$ كثيرة حدود أحادية بدرجة n. فإن $Q(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $(n-1)$ على الأكثر.

بالإضافة إلى ذلك. وعلى النقاط القصوى لـ $\tilde{T}_n(x)$ يكون

$$Q(\bar{x}'_k) = \tilde{T}_n(\bar{x}'_k) - P_n(\bar{x}'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P_n(\bar{x}'_k)$$

بما أن $|P_n(\bar{x}'_k)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ لكلّ $k = 0, 1, \ldots, n$ نحصل على

$$Q(\bar{x}'_k) \leq 0 \text{ عندما يكون } k \text{ فرديًا. و } Q(\bar{x}'_k) \geq 0 \text{ عندما يكون } k \text{ زوجيًا}$$

بما أن Q متصل. فإن مبرهنة القيمة الوسيطية تتضَّمن أن كثيرة الحدود $Q(x)$ لها صفر واحد على الأقل من بين $\bar{x}'_j$ و $\bar{x}'_{j+1}$. لكلّ $j = 0, 1, \ldots, n-1$. وهكذا لـ Q n من الأصفار على الأقل في الفترة $[-1, 1]$.

ولكن رتبة $Q(x)$ أقل من n. ولذلك $Q \equiv 0$. وهذا يعني أن $P_n \equiv \tilde{T}_n$. ■ ■ ■

يمكن استخدام مبرهنة (10.8) للإجابة عن التساؤل: أين نعيّن نقاط الاستكمال الداخلي لكي نجعل خطأ استكمال لاكرانج أصغر ما يمكن؟

إن تطبيق مبرهنة (3.3) على الفترة [-1,1] ينص على أنه إذا كانت $x_0, \ldots, x_n$ أعدادًا متميزة في الفترة [-1,1]. وإذا كان $C^{n+1}[-1, 1]$ فإنه لكلِّ $x \in [-1, 1]$ يوجد عدد $\xi(x)$ في (-1,1) بحيث

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

حيث $P(x)$ كثيرة حدود لاكرانج للاستكمال الداخلي. وعمومًا لا يوجد تحكم في $\xi(x)$، ولذلك كي نجعل الخطأ أصغر ما يمكن بتحديد ذكي للنقاط $x_0, \ldots, x_n$، نجد النقاط $x_0, \ldots, x_n$ التي تجعل

$$|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$$

أصغر ما يمكن على مدى الفترة $[-1, 1]$.

وبما أن $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ كثيرة حدود أحادية monic من الرتبة $(n + 1)$، فإننا قد رأينا أن القيمة الصغرى تحدث عندما

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = \tilde{T}_{n+1}(x)$$

إن القيمة العظمى لـ $|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$ تكون أصغر ما يمكن عندما نختار x_k ليكون الصفر عدد $(k + 1)$ لـ $\tilde{T}_{n+1}$ لكل $k = 0, 1, \ldots, n$، أي عندما تكون x_k مساوية لـ

$$\bar{x}_{k+1} = \cos \frac{2k + 1}{2(n + 1)}\pi$$

بما أن $\max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_{n+1}(x)| = 2^{-n}$ فإن هذا أيضًا يعني أن

$$\frac{1}{2^n} = \max_{x\in[-1,1]} |(x - \bar{x}_1) \cdots (x - \bar{x}_{n+1})| \leq \max_{x\in[-1,1]} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|$$

لكل اختيار للنقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ في الفترة $[-1, 1]$. التمهيدية التالية تأتي من المناقشة السابقة.

تمهيدية 11.8 إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة n على الأكثر بنقاط على جذور $T_{n+1}(x)$ فإن

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2^n(n + 1)!} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|$$

لكل $f \in C^{n+1}[-1, 1]$. ■

من الممكن تعميم هذه الطريقة لاختيار النقاط التي تجعل خطأ الاستكمال أصغر ما يمكن، بحيث تطبّق على فترة عامة مغلقة $[a, b]$، وذلك باستخدام تحويل الوسيطات

$$\tilde{x} = \tfrac{1}{2}[(b - a)x + a + b]$$

وذلك لتحويل الأعداد $\bar{x}_k$ في الفترة $[-1, 1]$ إلى ما يقابلها من أعداد $\tilde{x}_k$ في الفترة $[a, b]$ كما هو موضح في المثال (1).

مثال 1 ليكن $f(x) = xe^x$ على $[0, 1.5]$. سنبني اثنتين من كثيرات حدود الاستكمال الداخلي من ثلاث درجات على الأكثر.

أولاً: سنستخدم النقاط المتساوية الأبعاد $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ و $x_3 = 1.5$ لنحصل على

$$L_0(x) = -1.3333x^3 + 4.0000x^2 - 3.6667x + 1$$

$$L_1(x) = 4.0000x^3 - 10.000x^2 + 6.0000x$$

$$L_2(x) = -4.0000x^3 + 8.0000x^2 - 3.0000x$$

$$L_3(x) = 1.3333x^3 - 2.000x^2 + 0.66667x$$

القيم المعروضة في العمودين الابتدائيين في جدول (7.8). وإن كثيرة الحدود الأولى تُعطى بالصيغة

$$P_3(x) = 1.3875x^3 + 0.057570x^2 + 1.2730x$$

جدول 7.8

x	$f(x) = xe^x$	$\tilde{x}$	$f(\tilde{x}) = xe^x$
$x_0 = 0.0$	0.00000	$\tilde{x}_0 = 1.44291$	6.10783
$x_1 = 0.5$	0.824361	$\tilde{x}_1 = 1.03701$	2.92517
$x_2 = 1.0$	2.71828	$\tilde{x}_2 = 0.46299$	0.73560
$x_3 = 1.5$	6.72253	$\tilde{x}_3 = 0.05709$	0.060444

للحصول على كثيرة الحدود الثانية للاستكمال، حرّك الأصفار $\bar{x}_k = \cos((2k+1)/8)\pi$ لكل من $k = 0, 1, 2, 3$ الخاصة بـ $\tilde{T}_4$ من $[-1, 1]$ إلى $[0, 1.5]$، باستخدام التحويل الخطي

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2}[(1.5 - 0)\bar{x}_k + (1.5 + 0)] = 0.75 + 0.75\bar{x}_k$$

لنحصل على

$\tilde{x}_0 = 1.44291$، $\tilde{x}_1 = 1.03701$، $\tilde{x}_2 = 0.46299$ و $\tilde{x}_3 = 0.05709$

بعد ذلك تحسب كثيرات حدود لاكرانج لهذه المجموعة من النقاط بما يلي:

$$\tilde{L}_0(x) = 1.8142x^3 - 2.8249x^2 + 1.0264x - 0.049728$$

$$\tilde{L}_1(x) = -4.3799x^3 + 8.5977x^2 - 3.4026x + 0.16705$$

$$\tilde{L}_2(x) = 4.3799x^3 - 11.112x^2 + 7.1738x - 0.37415$$

$$\tilde{L}_3(x) = -1.8142x^3 + 5.3390x^2 - 4.7976x + 1.2568$$

إن القيم الدالية اللازمة لكثيرات الحدود هذه موجودة في العمودين الأخيرين من جدول (7.8). إن كثيرة حدود الاستكمال من الرتبة الثالثة على الأكثر

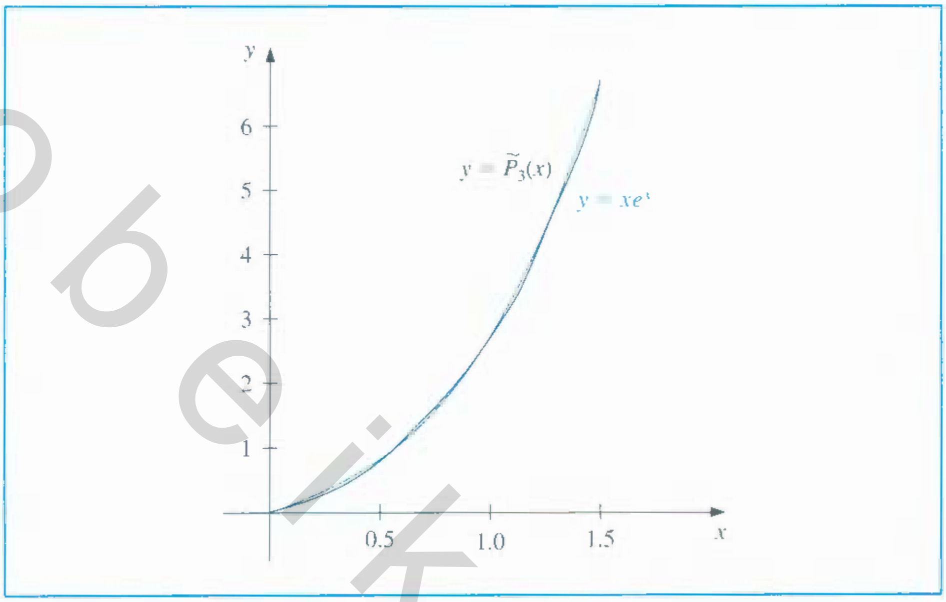
$$\tilde{P}_3(x) = 1.3811x^3 + 0.044652x^2 + 1.3031x - 0.014352$$

وللمقارنة، يعرض جدول (8.8) قيم x المختلفة مع قيم $f(x)$، $P_3(x)$ و $\tilde{P}_3(x)$. ويمكن أن نستنتج من هذا جدول أنه على الرغم من أن الخطأ باستخدام $P_3(x)$ أقل منه باستخدام $\tilde{P}_3(x)$ قريبًا من منتصف جدول، فإن القيمة القصوى للخطأ باستخدام $\tilde{P}_3(x)$ هي 0.0180 (انظر شكل 12.8). ■

جدول 8.8

$\|xe^x - \tilde{P}_3(x)\|$	$\tilde{P}_3(x)$	$\|xe^x - P_3(x)\|$	$P_3(x)$	$f(x) = xe^x$	x
0.0125	0.1868	0.0226	0.1969	0.1743	0.15
0.0148	0.3358	0.0225	0.3435	0.3210	0.25
0.0097	0.5064	0.0154	0.5121	0.4967	0.35
0.014	1.231	0.012	1.233	1.245	0.65
0.017	1.571	0.016	1.572	1.588	0.75
0.015	1.974	0.013	1.976	1.989	0.85
0.012	3.644	0.018	3.650	3.632	1.15
0.019	4.382	0.028	4.391	4.363	1.25
0.016	5.224	0.029	5.237	5.208	1.35

شكل 12.8



يمكن استخدام كثيرات حدود تشبيشف لتقليل رتبة كثيرة الحدود المستخدمة بخسارة في دقة حدها الأدنى. وبما أن كثيرات حدود تشبيشف تحقّق القيمة الصغرى للقيمة العظمى المطلقة التي تتوزّع بالتجانس على الفترة. يمكن استخدامها لتقليل رتبة كثيرة الحدود المستخدمة في التقريب دون تخطي الخطأ المسموح به.

افترض تقريب أي كثيرة حدود من الرتبة n

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

على الفترة $[-1, 1]$ باستخدام كثيرة حدود من الرتبة $n-1$ على الأكثر.

إن الغرض هو اختيار $P_{n-1}(x)$ في $\prod_{n-1}$ بحيث يكون

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x) - P_{n-1}(x)|$$

أصغر ما يمكن.

نلاحظ أولاً أن $(P_n(x) - P_{n-1}(x))/a_n$ كثيرة حدود أحادية (monic) من الرتبة n. ولذلك فإن تطبيق مبرهنة (10.8) يعطي

$$\max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{1}{a_n}(P_n(x) - P_{n-1}(x)) \right| \ge \frac{1}{2^{n-1}}$$

تحدث المساواة بالضبط عندما

$$\frac{1}{a_n}(P_n(x) - P_{n-1}(x)) = \tilde{T}_n(x)$$

وهذا يعني أنه يجب أن نختار

$$P_{n-1}(x) = P_n(x) - a_n \tilde{T}_n(x)$$

وبهذا الاختيار نحصل على القيمة الصغرى لـ

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x) - P_{n-1}(x)| = |a_n| \max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{1}{a_n}(P_n(x) - P_{n-1}(x)) \right| = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

مثال 2 لقد قرِّبت الدالة $f(x) = e^x$ على الفترة $[-1, 1]$ في كثيرة حدود ماكلورين الرابعة

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24},$$

التي لها خطأ القطع

$$|R_4(x)| = \frac{|f^{(5)}(\xi(x))||x^5|}{120} \le \frac{e}{120} \approx 0.023$$

لكل $-1 \le x \le 1$.

افترض أنه يمكن السماح بخطأ مقداره 0.05. وأننا نرغب في تقليل رتبة كثيرة الحدود المستخدمة في التقدير. حيث نبقى ضمن حدود الخطأ.

إن كثيرة الحدود من الرتبة الثالثة أو أقل التي تعطي أفضل تقريب متجانس لـ $P_4(x)$ على الفترة $[-1, 1]$ هي

$$P_3(x) = P_4(x) - a_4\tilde{T}_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{24}\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

ونحصل بهذا الاختبار على

$$|P_4(x) - P_3(x)| = |a_4\tilde{T}_4(x)| \le \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{192} \le 0.0053$$

إن جمع حد الخطأ هذا إلى حد خطأ قطع ماكلورين يعطي

$$0.023 + 0.0053 = 0.0283$$

الذي لا يزال ضمن الخطأ المسموح به 0.05.

إن كثيرة الحدود من الرتبة الثانية أو أقل التي تعطي أفضل تقريب متجانس لـ $P_3(x)$ على $[-1, 1]$ هي

$$P_2(x) = P_3(x) - \frac{1}{6}\tilde{T}_3(x)$$

$$= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) = \frac{191}{192} + \frac{9}{8}x + \frac{13}{24}x^2$$

على كل حال. إن

$$|P_3(x) - P_2(x)| = \left|\frac{1}{6}\tilde{T}_3(x)\right| = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{24} \approx 0.042$$

الذي – عند جمعه مع الخطأ المجتمع 0.0283 – يتخطى الخطأ المسموح به 0.05. ومن ثم فإن كثيرة الحدود الأقل رتبة. التي تقرب e^x تقريبًا أفضل على $[-1, 1]$ وبحد خطأ أقل من 0.05 هي

$$P_3(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

يظهر جدول (9.8) قيم الدالة وكثيرات الحدود المستخدمة لتقريبه على نقاط متعددة في $[-1, 1]$. انظر إلى مدخلات الجدول الخاصة بـ P_2 تقع ضمن الحد المسموح به 0.05 جيدا على الرغم من أن حد الخطأ لـ $P_2(x)$ يزيد على الحد المسموح به. ■

جدول 9.8

x	e^x	$P_4(x)$	$P_3(x)$	$P_2(x)$	$\lvert e^x - P_2(x)\rvert$
−0.75	0.47237	0.47412	0.47917	0.45573	0.01664
−0.25	0.77880	0.77881	0.77604	0.74740	0.03140
0.00	1.00000	1.00000	0.99479	0.99479	0.00521
0.25	1.28403	1.28402	1.28125	1.30990	0.02587
0.75	2.11700	2.11475	2.11979	2.14323	0.02623

مجموعة التمارين 3.8 EXERCISE SET

1. استخدم أصفار $\tilde{T}_3$ لإنشاء كثيرة حدود من الرتبة الثانية لاستكمال الدّوال الآتية على الفترة $[-1, 1]$:
أ. $f(x) = e^x$ ب. $f(x) = \sin x$ ج. $f(x) = \ln(x+2)$ د. $f(x) = x^4$
2. استخدم أصفار $\tilde{T}_4$ لإنشاء كثيرة حدود من الرتبة الثالثة لاستكمال الدّوال في التمرين (1).
3. أوجد حدًّا للقيمة العظمى لخطأ التقريب في التمرين 1 على الفترة $[-1, 1]$.
4. كرّر التمرين 3 للتقريبات المحسوبة في التمرين (2).
5. استخدم أصفار $\tilde{T}_3$ والتحويلات للفترة المعطاة، لكي تبني كثيرة حدود من الرتبة الثانية لاستكمال الدّوال الآتية:
أ. $f(x) = \frac{1}{x}$، $[1, 3]$ ب. $f(x) = e^{-x}$، $[0, 2]$
ج. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}\sin 2x$، $[0, 1]$ د. $f(x) = x\ln x$، $[1, 3]$
6. أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة السادسة للدالة xe^x، واستخدم كثيرات حدود تشبيشف؛ للحصول على كثيرة حدود من رتبة أقل تستخدم للتقريب. بحيث تحافظ على إبقاء الخطأ أقل من 0.01 على $[-1, 1]$.
7. أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة السادسة للدالة $\sin x$. واستخدم كثيرات حدود تشبيشف للحصول على كثيرة حدود من رتبة أقل تستخدم للتقريب. بحيث تحافظ على إبقاء الخطأ أقل من 0.01 على $[-1, 1]$.
8. برهن أنه لأي عددين صحيحين i و j حيث $i > j$، نحصل على
$$T_i(x)T_j(x) = \tfrac{1}{2}[T_{i+j}(x) + T_{i-j}(x)]$$
9. برهن أنه لكلّ كثيرة حدود تشبيشف $T_n(x)$ نحصل على
$$\int_{-1}^{1} \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

4.8 تقريب الدّوال النسبية Rational Function Approximation

يتمتع صف كثيرات الحدود الجبرية ببعض المزايا لاستعمال التقريب:

- يوجد عدد كافٍ من كثيرات الحدود لتقريب أي دّالة متصلة على فترة مغلقة ضمن أي خطأ مسموح به.
- يمكن إيجاد قيم كثيرات الحدود على أي قيم مهما اتفق.
- إن مشتقات كثيرات الحدود وتكاملاتها موجودة وسهلة التحديد.

إن السلبية في استخدام كثيرات الحدود للتقريب تكمن في ميلها إلى الاهتزاز. وهذا غالبًا ما يسبب زيادة حدود الخطأ في استخدام كثيرات الحدود للتقريب من معدل خطأ التقريب؛ لأن حدود الخطأ تتعين بقيمة أعلى من خطأ التقريب.

والآن سنفترض توزيع طرائق خطأ التقريب على فترة التقريب على نحو منجانس. إن هذه الطرائق تعتمد على استخدام الدّوال النسبية.

إن الدالة النسبية r من الرتبة N (rational function r) يكون على الصيغة

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث $p(x)$ و $q(x)$ كثيرتا حدود مجموع درجتيهما N.

وبما أن كل كثيرة حدود هي دالة نسبي [ضع $q(x) \equiv 1$ ببساطة]. فإن التقريب بالدوال النسبية يعطي نتائج ليست أسوأ من تلك الناتجة عن طريق التقريب في كثيرات الحدود. على كل حال، فإن الدّوال النسبية التي لبسطها ومقامها الرتبة نفسها تقريبًا، تعطي نتائج تقريب أفضل عمومًا مما تعطيه طرائق كثيرات الحدود باستخدام المقدار نفسه من الجهد في الحساب. (إن هذه العبارة مبنية على افتراض أن مقدار الجهد في الحساب اللازم لعمليات القسمة هو نفسه تقريبًا اللازم لعمليات الضرب). وللدوال النسبية مزية إضافية. وهي السماح بتقريب كفوير للدوال التي لا نهاية لها من نقاط الانفصال (عدم الاتصال) بالقرب من فترة التقريب وليس خارجها. فالتقريب في كثيرات الحدود غير مقبول عمومًا في هذه الأحوال.

افترض أن r دالة نسبية درجتهما $N = n + m$ على الصيغة

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n}{q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m}$$

وأنه استخدم لتقريب دالة f على فترة مغلقة I تحتوي الصفر. ولكي يكون r معرفًا على الصف يتطلب أن $q_0 \neq 0$. ويمكننا في الحقيقة افتراض $q_0 = 1$، لأنه إذا لم تكن كذلك فإننا نضع $q(x)/q_0$ بدلًا من $q(x)$ و $p(x)/q_0$ بدلًا من $p(x)$. ومن ثم يوجد $N + 1$ من البرامترات (الوسيطات) $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ، $p_0, p_1, \ldots, p_n$ متاحة لتقريب f في الدالة r.

طريقة بادي للتقريب (The Pade' approximation) وهي تعميم لكثيرة حدود تايلور لتقريب الدالة النسبي، تختار $N + 1$ من البرامترات بحيث $f^{(k)}(0) = r^{(k)}(0)$ لكل $k = 0, 1, \ldots, N$ وعندما يكون $N = n$ و $m = 0$، فإن طريقة بادي للتقريب تكون كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة N.

افترض الفرق

$$f(x) - r(x) = f(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)q(x) - p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)\sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{q(x)}$$

وافترض أن f يتمتع تمديد سلسلة ماكلورين $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ إذًا

$$f(x) - r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{q(x)} \tag{14.8}$$

إن الهدف هو اختيار الثوابت $q_1, q_2, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$ بحيث

$$f^{(k)}(0) - r^{(k)}(0) = 0 \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

وجدنا في الفصل (2.4) (انظر التمرين (12) خصوصًا) أن هذا يكافئ $f - r$ وله صفر بمضاعف $N + 1$ عند $x = 0$. وتمهيدية لذلك نختار

(15.8) $q_1, q_2, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$. بسط الطرف الأيمن للمعادلة (14.8) أي

$$(a_0 + a_1 x + \cdots)(1 + q_1 x + \cdots + q_m x^m) - (p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n)$$

لا يحتوي على حدود من رتبة تساوي N أو أقل.

هنري بادي (1953 - 1863) قدم تلك دراسة منهجية لما أصبح يعرف بتقريبات بيدي وذلك من خلال أطروحته لنيل شهادة الدكتوراة عام 1892 لقد برهن نتائج وفق تركيبها العام وكما يبين بوضوح العلاقة بين تقريبات بادي والكسور غير المنتهية وقد درس دانيال بيرلوني هذه الأفكار وغيرها في وقت مبكر يعود إلى عام 1730 وقدم جيمس ستيرلنغ منهجًا مماثلًا في كتاب مناهج التفاضل Methodus differentialis الذي نشر في السنة نفسها. كما استخدم يولير تقريبات بيدي لحساب مجموع السلسلة

ولتبسيط الرموز، نعرّف

$$q_{m+1} = q_{m+2} = \cdots = q_N = 0 \quad \text{و} \quad p_{n+1} = p_{n+2} = \cdots = p_N = 0$$

ويمكننا بعد ذلك التعبير عن x^k في التعبير (15.8) على الصيغة

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i}\right) - p_k$$

ولذلك فإن الدالة النسبية لتقريب بادي ينتج من حلّ $N + 1$ من المعادلات الخطية

$$\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

في $N + 1$ من المجاهيل $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ، $p_0, p_1, \ldots, p_n$.

مثال 1 إن سلسلة ماكلورين للدالة e^{-x} هي

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^i$$

إن إيجاد تقريب بادي من الرتبة الخامسة للدالة e^{-x} حيث $n = 3$ و $m = 2$ يتطلب اختيار p_0, p_1, p_2, p_3, q_1 و q_2 بحيث تكون معاملات x^k لكل $k = 0, 1, \ldots, 5$ أصفرًا في التعبير

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)(1 + q_1 x + q_2 x^2) - (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3)$$

وبفك هذا المقدار، وتجميع الحدود نحصل على

$$\begin{aligned}
x^5 &: -\tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{24}q_1 - \tfrac{1}{6}q_2 = 0; & x^2 &: \tfrac{1}{2} - q_1 + q_2 = p_2 \\
x^4 &: \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{6}q_1 + \tfrac{1}{2}q_2 = 0; & x^1 &: -1 + q_1 = p_1 \\
x^3 &: -\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}q_1 - q_2 = p_3; & x^0 &: 1 = p_0
\end{aligned}$$

ولحلّ هذا النظام في Maple، نستخدم الأوامر الآتية:

```
>eq1:=-1+q1=p1;
>eq2:=1/2-q1-q2=p2;
>eq3:=-1/6+1/2*q1-q2=p3;
>eq4:=1/24-1/6*q1+1/2*q2=0;
>eq5:=-1/120+1/24*q1-1/6*q2=0;
>solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5},{q1,q2,p1,p2,p3});
```

التي تعطي

$$q_2 = \frac{1}{20} \quad \text{و} \quad p_0 = 1,\ p_1 = -\frac{3}{5},\ p_2 = \frac{3}{20},\ p_3 = -\frac{1}{60},\ q_1 = \frac{2}{5}$$

ولذلك فإن تقريب بادي يكون

$$r(x) = \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2}$$

يعرض جدول (10.8) قيم $r(x)$ وقيم كثيرة حدود ماكلورين $P_5(x)$. ومن الواضح في المثال أن تقريب بادي مميز. ■

جدول 10.8

$\lvert e^{-x} - r(x)\rvert$	$r(x)$	$\lvert e^{-x} - P_5(x)\rvert$	$P_5(x)$	e^{-x}	x
7.55×10^{-9}	0.81873075	8.64×10^{-8}	0.81873067	0.81873075	0.2
$4.11 \times 10^{-}$[illegible]	0.67031963	5.38×10^{-6}	0.67031467	0.67032005	0.4
4.00×10^{-6}	0.54880763	5.96×10^{-5}	0.54875200	0.54881164	0.6
1.93×10^{-5}	0.44930966	3.26×10^{-4}	0.44900267	0.44932896	0.8
6.33×10^{-5}	0.36781609	1.21×10^{-3}	0.36666667	0.36787944	1.0

ويمكن أيضًا استخدام مابل Maple مباشرة لحساب تقريب بادي.

نحسب أولاً سلسلة ماكلورين بالأمر

```
>series(exp(-x),x);
```

لنحصل على

$$1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + O(x^6)$$

يحسب تقريب بادي بأخذ $n = 3$ و $m = 2$ باستخدام الأمر

```
>g:=convert(%,ratpo y,3,2);
```

حيث تشير $\%$ إلى تمهيدية الحساب السابق، أي السلسلة

$$g := \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2}$$

ثم يمكن حساب $g(0.8)$ على سبيل المثال عن طريق إدخال

```
>evalf(subs(x=0.8,g));
```

لنحصل على 0.4493096647.

تنفذ طريقة بادي للتقريب في الخوارزمية (1.8).

ALGORITHM

الخوارزمية

1.8

تقريب بادي النسبي Pade' Rational Approximation

للحصول على التقريب النسبي

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} q_j x^j}$$

لدالة مفترض $f(x)$:

المدخلات: أعداد صحيحة غير سالبة m و n.

المخرجات: المعاملات $q_0, q_1, \dots, q_m$ و $p_0, p_1, \dots, p_n$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $N = m + n$.
2	لكل $i = 0, 1, \dots, N$ ضع $a_i = f^{(i)}(0)/i!$. (إن معاملات كثيرة حدود ماكلورين هي $a_0, \dots, a_N$ التي يمكن أن تكون في المدخلات بدلا من حسابها).
3	ضع $q_0 = 1$ $p_0 = a_0$

4	لكل $i = 1, 2, \dots, N$ نفّذ الخطوات 5-10. (أنشئ نظاما خطيًا في مصفوفة B.) (أنشئ نظاما خطيًا في مصفوفة B.)
5	لكل $j = 1, 2, \dots, i-1$، إذا كان $j \le n$ فضع $b_{i,j} = 0$.
6	إذا كان $i \le n$ فضع $b_{i,i} = 1$.
7	لكل $j = i+1, i+2, \dots, N$ ضع $b_{i,j} = 0$.
8	لكل $j = 1, 2, \dots, i$ إذا كان $j \le m$ فضع $b_{i,n+j} = -a_{i-j}$
9	لكل $j = n+i+1, n+i+2, \dots, N$ ضع $b_{i,j} = 0$.
10	ضع $b_{i,N+1} = a_i$. (تنفّذ الخطوات 11 − 22 النظام الخطي باستخدام الدوران الجزئي).
11	لكل $i = n+1, n+2, \dots, N-1$ نفّذ الخطوات 12 − 18.
12	افرض k أصغر عدد صحيح بحيث $i \le k \le N$ و $\lvert b_{k,i} \rvert = \max_{i \le j \le N} \lvert b_{j,i} \rvert$ (جد عنصر الدوران).
13	إذا كان $b_{k,i} = 0$ فعندئذ تكون المخرجات ("النظام المنفرد"). توقف.
14	إذا كان $k \ne i$ (فعندئذ بدّل الصف i والصف k). لكل $j = i, i+1, \dots, N+1$ ضع $b_{COPY} = b_{i,j}$ $b_{i,j} = b_{k,j}$ $b_{k,j} = b_{COPY}$
15	لكل $j = i+1, i+2, \dots, N$ نفّذ الخطوات 16 − 18. (نفّذ عملية لحذف).
16	ضع $xm = b_{j,i}/b_{i,i}$.
17	لكل $k = i+1, i+2, \dots, N+1$ ضع $b_{j,k} = b_{j,k} - xm \cdot b_{i,k}$.
18	ضع $b_{j,i} = 0$.
19	إذا كان $b_{N,N} = 0$ ("النظام منفرد") توقف.
20	إذا كان $m > 0$ فضع $q_m = b_{N,N+1}/b_{N,N}$. (ابدأ بالتعويض الإرجاعي).
21	لكل $i = N-1, N-2, \dots, n+1$ ضع $q_{i-n} = \dfrac{b_{i,N+1} - \sum_{j=i+1}^{N} b_{i,j} q_{j-n}}{b_{i,i}}$
22	لكل $i = n, n-1, \dots, 1$ ضع $p_i = b_{i,N+1} - \sum_{j=n+1}^{N} b_{i,j} q_{j-n}$.
23	المخرجات $(q_0, q_1, \dots, q_m, p_0, p_1, \dots, p_n)$ (العملية ناجحة). توقف. ■

إنه لمن الممتع أن نقارن بين عدد العمليات الحسابية اللازمة لحساب $P_5(x)$ و $r(x)$ في مثال (1). باستخدام الضرب المتداخل بين الأقواس. نجد أنه يمكن التعبير عن $P_5(x)$ بالصيغة

$$P_5(x) = \left(\left(\left(\left(-\tfrac{1}{120}x + \tfrac{1}{24}\right)x - \tfrac{1}{6}\right)x + \tfrac{1}{2}\right)x - 1\right)x + 1$$

بافتراض أن معاملات $1, x, x^2, x^3, x^4$ و x^5 مكتوبة على صورة كسور عشرية، فإن أي عملية منفردة لحساب $P_5(x)$ بالضرب المتداخل تتطلب خمس عمليات ضرب وخمس عمليات جمع/ طرح.
وباستخدام الضرب المتداخل يمكن التعبير عن $r(x)$ بالصيغة

$$r(x) = \frac{\left(\left(-\tfrac{1}{60}x + \tfrac{3}{20}\right)x - \tfrac{3}{5}\right)x + 1}{\left(\tfrac{1}{20}x + \tfrac{2}{5}\right)x + 1}$$

ولذلك فإن أي عملية منفردة لحساب $r(x)$ تتطلب خمس عمليات ضرب وخمس عمليات جمع/ طرح وعملية قسمة واحدة. يظهر إذن أن جهد الحساب يكون لصالح تقريب كثيرة الحدود. ولكن على كل حال. عند إعادة التعبير عن $r(x)$ بالقسمة المتصلة. يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}
r(x) &= \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2} \\
&= \frac{-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 12x + 20}{x^2 + 8x + 20} \\
&= -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{\left(-\frac{152}{3}x - \frac{280}{3}\right)}{x^2 + 8x + 20} \\
&= -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{-\frac{152}{3}}{\left(\frac{x^2+8x+20}{x+(35/19)}\right)}
\end{aligned}$$

أو

$$r(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{-\frac{152}{3}}{\left(x + \frac{117}{19} + \frac{3125/361}{(x+(35/19))}\right)} \tag{16.8}$$

وعند استخدام هذا التعبير. فإن العملية المنفردة لحساب $r(x)$ تتطلب عملية ضرب واحدة وخمس عمليات جمع/ طرح وعمليتي قسمة.
إذا كان مقدار الحساب اللازم للقسمة مساويًا تقريبًا لذلك المطلوب للضرب. فإن جهد الحساب المطلوب للتقييم $P_5(x)$ يزيد على ذلك المطلوب على نحو ملحوظ لإيجاد قيمة $r(x)$.
إن التعبير عن الدالة النسبية للتقريب بصيغة المعادلة (16.8) يسمى التقريب بالكسر المتصل (Continued – fraction).

إن استخدام الكسور المتصلة للتقريب النسبي هو موضوع تعود جذوره إلى كلافيوس [Christopher Clavius 1537 - 1612] وقد استخدمت في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر على سبيل المثال. من قبل أويلر. لاكرانج وهرمايت

هناك اهتمام في الوقت الحاضر بطريقة التقريب الكلاسيكية هذه، بسبب فاعلية حساب هذا التمثيل. وإنها على كل حال طريقة خاصة. ولن نخوض في البحث فيها أكثر من ذلك.
وإن البحث المستفيض في هذا الموضوع والتقريب النسبي عمومًا يمكن الرجوع إليه في [RR,pp.285 - 322]. وعلى الرغم من أن تقريب الدوال النسبية في مثال 1 قد أعطى نتائج أفضل من التقريب بكثيرة الحدود من الرتبة نفسها. إلا أن دقته تتغير بصورة واسعة جدًا.
وإن التقريب عند 0.2 ذو دقة ضمن 8×10^{-9}. أما التقريب عند 1.0 فيتطابق مع الدالة فقط ضمن 7×10^{-9}.
إن هذا التغيير في الدقة متوقع ، لأن تقريب بادي يعتمد على تمثيل كثيرة حدود تايلور للدالة e^{-x}. ولتمثيل تايلور تغير واسع في الدقة في الفترة $[0.2, 1.0]$.

وللحصول على تقريبات بالدوال النسبية ذات دقة أكثر تجانسًا، نستخدم كثيرات حدود تشبيشف، وهي مجموعة تظهر سلوكًا أكثر تجانسًا.

إن طريقة تشبيشف العامة للتقريب النسبي بالدالة تسير بالنمط نفسه الذي حصلنا به على تقريب بادي، ما عدا استعمالنا لكثيرة حدود تشبيشف من الرتبة k، أي $T_k(x)$ بدلًا من كل x^k المستخدمة في تقريب بادي.

افترض أننا نرغب في تقريب نسبي للدالة f بدالة من الرتبة N، نعبّر عنه بالصيغة

$$r(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)} \quad \text{حيث} \quad N = n + m \quad \text{و} \quad q_0 = 1$$

إن كتابة $f(x)$ بسلسلة عناصر كثيرات حدود تشبيشف على الصيغة

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$$

تعطي

$$f(x) - r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x) - \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)}$$

أو

$$f(x) - r(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x) \sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x) - \sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)} \tag{17.8}$$

تُختار المعاملات $q_1, q_2, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$ بحيث تكون معاملات $T_k(x)$ أصفارًا في بسط الطرف الأيمن للمعادلة عندما $k = 0, 1, \ldots, N$.

وإن هذا يتطلب عدم احتواء السلسلة

$$(a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \cdots)(T_0(x) + q_1 T_1(x) + \cdots + q_m T_m(x))$$
$$- (p_0 T_0(x) + p_1 T_1(x) + \cdots + p_n T_n(x))$$

على أي حدود من رتبة تساوي N أو أقل. وتظهر مشكلتان في عملية تشبيشف تجعلان تطبيقها أصعب من طريقة بادي، وتظهر واحدة منهما، لأن حاصل ضرب $q(x)$ في سلسلة تمثل $f(x)$ يتطلب ضرب كثيرات حدود تشبيشف. ويمكن حلّ هذه المشكلة بالاستفادة من العلاقة

$$T_i(x) T_j(x) = \tfrac{1}{2}[T_{i+j}(x) + T_{|i-j|}(x)] \tag{18.8}$$

(انظر التمرين (8) في الفصل 3.8)

أما حلُّ المشكلة الثانية فيعدُّ أصعب، ويتطلب حساب سلسلة تشبيشف للدالة $f(x)$. وهذا ليس صعبًا نظريًا، لأنه إذا كان

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$$

فإن تعامدية كثيرات حدود تشبيشف تتضمن

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad \text{و} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad \text{حيث} \quad k \geq 1$$

أما من حيث التطبيق فمن النادر إمكانية تقييم هذه التكاملات بصيغة مغلقة، ويتطلب الأمر استخدام طريقة تكامل عددية لإيجاد كل قيمة.

مثال 2 الحدود الخمسة الأولى في سلسلة تشبيشف للدالة e^{-x} هي

$$\tilde{P}_5(x) = 1.266066T_0(x) - 1.130318T_1(x) + 0.271495T_2(x) - 0.044337T_3(x) + 0.005474T_4(x) - 0.000543T_5(x)$$

إن إيجاد تقريب تشبيشف النسبي من الرتبة الخامسة حيث $n = 3$ و $m = 2$ يتطلب اختيار p_0, p_1, p_2, p_3, q_1 و q_2 لكل $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ حيث تكون معاملات $T_k(x)$ أصفارًا في السلسلة

$$\tilde{P}_5(x)[T_0(x) + q_1T_1(x) + q_2T_2(x)] - [p_0T_0(x) + p_1T_1(x) + p_2T_2(x) + p_3T_3(x)]$$

وإن استخدام العلاقة (18.8) وتجميع الحدود يعطيان المعادلات

$$\begin{aligned}
T_0:&\quad 1.266066 - 0.565159q_1 + 0.1357485q_2 = p_0\\
T_1:&\quad -1.130318 + 1.401814q_1 - 0.587328q_2 = p_1\\
T_2:&\quad 0.271495 - 0.587328q_1 + 1.268803q_2 = p_2\\
T_3:&\quad -0.044337 + 0.138485q_1 - 0.565431q_2 = p_3\\
T_4:&\quad 0.005474 - 0.022440q_1 + 0.135748q_2 = 0\\
T_5:&\quad -0.000543 + 0.002737q_1 - 0.022169q_2 = 0
\end{aligned}$$

إن حلَّ هذا النظام يعطي تقريب الدالة النسبي

$$r_T(x) = \frac{1.055265T_0(x) - 0.613016T_1(x) + 0.077478T_2(x) - 0.004506T_3(x)}{T_0(x) + 0.378331T_1(x) + 0.022216T_2(x)}$$

ولقد وجدنا في بداية الفصل (3.8) أن

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

وإن استخدام هذه القيم لتحويل الدالة النسبي إلى التعبير بقوى x يعطي

$$r_T(x) = \frac{0.977787 - 0.599499x + 0.154956x^2 - 0.018022x^3}{0.977784 + 0.378331x + 0.044432x^2}$$

يظهر جدول (11.8) قيم $r_T(x)$ وقيم $r(x)$ التي حصلنا عليها في مثال (1) لغرض المقارنة. يتضح أن التقريب بالدالة $r(x)$ يفوق ذاك بالدالة $r_T(x)$ للقيمتين $x = 0.2$ ، 0.4، ولكن قيمة الخطأ القصوى لـ $r(x)$ هي 6.33×10^{-5} مقارنة بالقيمة 9.13×10^{-6} للدالة $r_T(x)$. ■

جدول 11.8

$\lvert e^{-x} - r_T(x)\rvert$	$r_T(x)$	$\lvert e^{-x} - r(x)\rvert$	$r(x)$	e^{-x}	x
5.66×10^{-6}	0.81872510	7.55×10^{-9}	0.81873075	0.81873075	0.2
6.95×10^{-6}	0.67031310	4.11×10^{-7}	0.67031963	0.67032005	0.4
1.28×10^{-6}	0.54881292	4.00×10^{-6}	0.54880763	0.54881164	0.6
9.13×10^{-6}	0.44933809	1.93×10^{-5}	0.44930966	0.44932896	0.8
7.89×10^{-6}	0.36787155	6.33×10^{-5}	0.36781609	0.36787944	1.0

يمكن توليد تقريب تشبيشف باستخدام الخوارزمية (2.8).

ALGORITHM
الخوارزمية
2.8

تقريب تشبيشف النسبي Chebyshev Rational Approximation

للحصول على التقريب النسبي

$$r_T(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)}$$

للدوال المعلوم $f(x)$:

المدخلات: أعداد صحيحة غير سالبة m و n.

المخرجات: المعاملات $q_0, q_1, \dots, q_m$ و $p_0, p_1, \dots, p_n$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $N = m + n$.
2	ضع $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\,d\theta$ (يُضاعف a_0 للحصول على فاعلية في الحسب). لكل $k = 1, 2, \dots, N + m$ ضع $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta\,d\theta$ (يمكن إيجاد قيم التكاملات باستخدام طريقة عددية للتكامل. أو أن توضع المعاملات مباشرة).
3	ضع $q_0 = 1$.
4	لكل $i = 0, 1, \dots, N$ نفّذ الخطوات 5 – 9. (أنشئ نظاما خطيًا بالمصفوفة B).
5	لكل $j = 0, 1, \dots, i$، إذا كان $j \le n$ فضع $b_{i,j} = 0$.
6	إذا كان $i \le n$ فضع $b_{i,i} = 1$.
7	لكل $j = i + 1, i + 2, \dots, n$ ضع $b_{i,j} = 0$.
8	لكل $j = n + 1, n + 2, \dots, N$ إذا كان $i \neq 0$ فضع $b_{i,j} = -\frac{1}{2}(a_{i+j-n} + a_{\lvert i-j+n \rvert})$. وإلا فضع $b_{i,j} = -\frac{1}{2}a_{j-n}$.
9	إذا كان $i \neq 0$ فضع $b_{i,N+1} = a_i$. وإلا فضع $b_{i,N+1} = \frac{1}{2}a_i$ (تنفذ الخطوات 10 – 21 النظام الخطي باستخدام الدوران الجزئي).
10	لكل $i = n + 1, n + 2, \dots, N - 1$ نفّذ الخطوات 11 – 17.
11	افترض k أصغر عدد صحيح بحيث $i \le k \le N$ و $\lvert b_{k,i} \rvert = \max_{i \le j \le N} \lvert b_{j,i} \rvert$ (أوجد عنصر الدوران).
12	إذا كان $b_{k,i} = 0$ فعندئذ تكون المخرجات ("النظام المنفرد"). توقف.

13	إذا كان $k \neq i$ فبدّل الصف i والصف k . لكل $j = i, i+1, \ldots, N+1$ ضع $b_{COPY} = b_{i,j}$ $b_{i,j} = b_{k,j}$ $b_{k,j} = b_{COPY}$
14	لكل $j = i+1, i+2, \ldots, N$ نفّذ الخطوات 15 – 17. (أجر الحذف).
15	ضع $xm = \dfrac{b_{j,i}}{b_{i,i}}$
16	لكل $k = i+1, i+2, \ldots, N+1$ ضع $b_{j,k} = b_{j,k} - xm \cdot b_{i,k}$.
17	ضع $b_{j,i} = 0$.
18	إذا كان $b_{N,N} = 0$ فعندئذ تكون المخرجات ("النظام منفرد"). توقف.
19	إذا كان $m > 0$ فضع $q_m = \dfrac{b_{N,N+1}}{b_{N,N}}$. (ابدأ بالتعويض الإرجاعي).
20	لكل $i = N-1, N-2, \ldots, n+1$ ضع $q_{i-n} = \dfrac{b_{i,N+1} - \sum_{j=i+1}^{N} b_{i,j}q_{j-n}}{b_{i,i}}$
21	لكل $i = n, n-1, \ldots, 0$ ضع $p_i = b_{i,N+1} - \sum_{j=i+1}^{N} b_{i,j}q_{j-n}$.
22	المخرجات $(q_0, q_1, \ldots, q_m, p_0, p_1, \ldots, p_n)$ (العملية ناجحة). توقف.

■

يمكننا الحصول على كل من امتداد سلسلة تشبيشف وتقريب تشبيشف النسبي باستخدام CAS. فعلى سبيل المثال: لجعل كثيرات حدود تشبيشف متاحة في مابل Maple باستخدام مكتبة كثيرات الحدود المتعامدة Orthopoly library، ندخل الأمر

```
>with(orthopoly,T);
```

إن عملية حساب سلسلة تشبيشف بوصفها تقريبا تكون

```
>g:=numapprox[chebyshev](exp(-x),x,0.000001);
```

حيث إن البارامتر الثالث يحدّد الدقة المطلوبة. والتمهيدية هي

$$
\begin{aligned}
g := {} & 1.266065878\, T(0,x) - 1.130318208\, T(1,x) + .2714953396\, T(2,x) \\
& - .04433684985\, T(3,x) + .005474240442\, T(4,x) \\
& - .0005429263119\, T(5,x) + .00004497732296\, T(6,x) \\
& - .3198436462\, 10^{-5} T(7,x)
\end{aligned}
$$

ونستطيع إيجاد قيمة $g(0.8)$ باستخدام

```
>evalf(subs(x=0.8,g));
```

لنحصل على .4493288893

للحصول على تقريب تشبيشف النسبي، نبدأ مرة أخرى بسلسلة تشبيشف كالسابق، ثم ندخل

```
>restart;
>numapprox[chebyshev](exp(-x),x,0.000001);
>g:=convert(%,ratpoly,3,2);
```

لينتج

$$g := (1.050531166\, T(0,x) - .6016362122\, T(1,x) + .07417897149\, T(2,x) - .004109558353\, T(3,x))/(T(0,x) + .3870509565\, T(1,x) + .02365167312\, T(2,x))$$

وبما أننا مسحنا ذاكرة Maple، نحتاج إلى تنزيل مكتبة كثيرات الحدود المتعامدة orthopoly بالأمر

```
>with(orthopoly,T);
```

ومن ثم يمكننا إيجاد قيمة $g(0.8)$ بالأمر

```
>evalf(subs(x=0.8,g));
```

لنحصل على .4493317579

إن طريقة تشبيشف لا تعطي أفضل تقريب نسبي بالدالة، أي التقريب الذي تكون فيه القيمة العظمى لخطأ التقريب أصغر ما يمكن. ولكن يمكن استخدام الطريقة؛ إذ إنها نقطة بداية لطريقة إرجاعية تعرف بخوارزمية رميز الثانية (second Remez algorithm) التي تتقارب إلى أفضل تمثيل. وللمزيد حول هذه الطريقة والخوارزمية يمكنك الرجوع إلى المرجع [RR,pp292 - 305] أو [Po,pp.90 - 92].

طوّر إيفغني رميز
(Evgeny Remez (1896 - 1975))
في عام 1930 طرائق عامة لحساب تقريبات تشبيشف لكثيرات الحدود. ثم طوّر خوارزمية مشابهة صالحة لتقريب الدّوال المتصلة المعرفة على الفترة بالتقريب بالدوال النسبية بدرجة محددة من الدقة. شمل عمله حقولاً مختلفة من مبرهنة التقريب، بالإضافة إلى طرائق تقريب حلول المعادلات التفاضلية.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 4.8

1. أوجد تقريبات بادي Padé جميعها من الرتبة الثانية للدالة $f(x) = e^{2x}$. قارن النتائج بالقيم الفعلية للدالة $f(x_i)$ عند النقاط $x_i = 0.2i$ لكل $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
2. أوجد تقريبات بادي Padé جميعها من الرتبة الثالثة لتقريب $f(x) = x\ln(x+1)$. قارن النتائج بالقيم الفعلية للدالة $f(x_i)$ عند النقاط $x_i = 0.2i$ لـ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ جميعاً.
3. أوجد تقريب بادي Padé من الرتبة الخامسة حيث $n = 2$ و $m = 3$ للدالة $f(x) = e^x$. قارن النتائج بتلك التي تحصل عليها من كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة الخامسة عند النقاط $x_i = 0.2i$ لكل $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
4. كرِّر التمرين 3 باستخدام تقريب بادي من الرتبة الخامسة حيث $n = 3$ و $m = 2$. قارن النتائج لكل x_i بتلك في التمرين (3).
5. أوجد تقريب بادي من الرتبة السادسة، حيث $n = m = 3$ للدالة $f(x) = \sin x$. قارن النتائج بكلٍّ من النتائج الصحيحة والنتائج التي توصَّلت إليها من كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة السادسة، وذلك عند النقاط $x_i = 0.1i$ لـ $i = 0, 1, \ldots, 5$ جميعاً.
6. أوجد تقريب بادي من الرتبة السادسة، حيث (أ) $n = 2, m = 4$ (ب) $n = 4, m = 2$ للدالة $f(x) = \sin x$ قارن النتائج عند كل x_i بتلك التي حصلت عليها في التمرين (5).
7. يعرض جدول (10.8) نتائج تقريب بادي من الرتبة الخامسة بأخذ $n = 3$ و $m = 2$ ونتائج كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة الخامسة، والقيم الصحيحة للدالة $f(x) = e^{-x}$ عندما $x_i = 0.2i$ لكل $i = 1, 2, 3, 4$ و 5.

قارن هذه النتائج بتلك التي نحصل عليها من تقريبات بادي الأخرى في الحالات

أ. $n = 0, m = 5$ ب. $n = 1, m = 4$ ج. $n = 3, m = 2$ د. $n = 4, m = 1$

8. عبّر عن الدّوال النسبية الآتية بصيغة الكسر المتصل

أ. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x + 1}$ ب. $\dfrac{4x^2 + 3x - 7}{2x^3 + x^2 - x + 5}$

ج. $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{x^2 + 2x + 4}$ د. $\dfrac{2x^3 + x^2 - x + 3}{3x^3 + 2x^2 - x + 1}$

9. أوجد تقريبات تشبيشف النسبية من الرتبة الثانية للدالة $f(x) = e^{-x}$. أيُّها يعطي أحسن التقريبات عند $f(x) = e^{-x}$ at $x = 0.25, 0.5$ و 1 ؟

10. أوجد تقريبات تشبيشف النسبية من الرتبة الثالثة للدالة $f(x) = \cos x$.
أيّها يعطي أفضل التقريبات للدالة $f(x) = \cos x$ عند $x = \pi/4$ و $\pi/3$ ؟

11. أوجد تقريب تشبيشف النسبي من الرتبة الرابعة حيث $n = m = 2$ لـ $f(x) = \sin x$.
قارن النتائج التي تحصل عليها بتلك التي وجدتها في التمرين 5 باستخدام تقريب بادي من الرتبة السادسة، وذلك عند النقاط $x_i = 0.1i$ لـ $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ جميعًا.

12. أوجد جميع تقريبات تشبيشف النسبية من الرتبة الخامسة للدالة $f(x) = e^x$.
قارن نتائجك بتلك التي حصلت عليها في التمرين 3 و 4، وذلك عند النقاط $x_i = 0.2i$ لـ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ جميعًا.

13. لتقريب $f(x) = e^x$ تقريبًا دقيقًا بغرض تضمينه في مكتبة رياضية؛ نحدّد أولا مجال تعريف الدالة f. وإذا أعطيت عددا حقيقيًا x فاقسم على $\ln \sqrt{10}$ لتحصل على العلاقة

$$x = M \cdot \ln \sqrt{10} + s$$

حيث M عدد صحيح، و S عدد حقيقي يحقق $|s| \leq \frac{1}{2} \ln \sqrt{10}$

أ. برهن أن $e^x = e^s \cdot 10^{M/2}$.

ب. أنشئ تقريب الدوال النسبية للدالة e^s مستخدما $n = m = 3$.
قدّر الخطأ عندما يكون $0 \leq |s| \leq \frac{1}{2} \ln \sqrt{10}$.

جـ. صمّم طريقة تنفيذ e^x مستخدمًا نتائج (أ) و(ب) والتقريبات

$$\frac{1}{\ln \sqrt{10}} = 0.8685889638 \quad \text{و} \quad \sqrt{10} = 3.162277660$$

14. لتقريب $\sin x$ و $\cos x$ تقريبًا دقيقًا بغرض تضمينهما في مكتبة رياضية؛ نحدّد أولا مجال التعريف لكل منهما. لكل عدد حقيقي x، اقسم على π لتحصل على العلاقة $|x| = M\pi + s$
حيث M عدد صحيح و $|s| \leq \frac{\pi}{2}$.

أ. برهن أن $\sin x = \operatorname{sgn}(x) \cdot (-1)^M \cdot \sin s$.

ب. أنشئ تقريبًا نسبيًا للدالة $\sin s$ باستخدام $n = m = 4$.
قدّر الخطأ عندما يكون $0 \leq |s| \leq \pi/2$.

جـ. صمّم طريقة تنفيذ (تقييم) $\sin x$ باستخدام الفقرتين (أ) و (ب).

د. كرّر الفقرة (جـ) للدالة $\cos x$ مستخدمًا حقيقة أن $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.

5.8 التقريب بكثيرة الحدود المثلثية
Trigonometric Polynomial Approximation

إن استخدام سلاسل دالة الجيب sine وجيب التمام cosine لتمثيل الدّوال كان قد عُرف في بدايات الخمسينيات من القرن الثامن عشر. وكان ذلك بدراسة حركة الزنبرك ذي

الاهتزازات. ولقد بُحث في هذه المسألة من قبل جيين دي ألمبرت Jean d'Alembert ثم من قبل أشهر رياضي في ذلك العصر، ليونارد أويلر Leonhard Euler. ولكن الفضل الأول يعود إلى دانيال بيرنوللي Daniel Bernoulli الذي دعا إلى استخدام المجاميع اللانهائية للجيوب وجيوب التمام بوصفها حلًا للمسألة. وقد باتت هذه المجاميع الآن تعرف سلاسل فورييه Fourier series في أوائل القرن التاسع عشر. وقد استخدم جيين بابتست جوزف فورييه هذه السلاسل لدراسة انتقال الحرارة، وطوّر مبرهنة شبه تامة في هذا الموضوع.

إن أولى الملاحظات في تطوير سلاسل فورييه تكمن في أن: لكل عدد صحيح موجب n تكون مجموعة الدّوال $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ متعامدة على $[-\pi, \pi]$ بالنسبة إلى دالة الوزن $w(x) \equiv 1$ حيث

$$\phi_0(x) = \frac{1}{2}, \quad \phi_k(x) = \cos kx \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

و

$$\phi_{n+k}(x) = \sin kx \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

إن التعامدية هذه تأتي من حقيقة أن: لكل عدد صحيح j تكون تكاملات $w(x) \equiv 1$ و $\cos jx$ على $[-\pi, \pi]$ مساوية للصفر، ويمكننا إعادة كتابة دوال الجيب وجيب التمام على صيغ مجاميع باستخدام المتطابقات المثلثية.

$$\sin t_1 \sin t_2 = \frac{1}{2}[\cos(t_1 - t_2) - \cos(t_1 + t_2)]$$

$$\cos t_1 \cos t_2 = \frac{1}{2}[\cos(t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2)]$$

$$\sin t_1 \cos t_2 = \frac{1}{2}[\sin(t_1 - t_2) + \sin(t_1 + t_2)] \tag{19.8}$$

ضع $\mathcal{T}_n$ لتعبر عن مجموعة توليفات الدّوال $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}$ جميعها، وتسمى هذه المجموعة مجموعة كثيرات الحدود المثلثية (trigonometric polynomials) من رتبة تساوي n و أقل.

(تضيف بعض المصادر دالة إضافيًا إلى المجموعة هو $\phi_{2n}(x) = \sin nx$) إن غرضنا هو إيجاد تقريب لأي دالة $f \in C[-\pi, \pi]$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة باستخدام الدّوال في $\mathcal{T}_n$ على الصيغة

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

بما أن مجموعة الدّوال $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ متعامدة في الفترة $[-\pi, \pi]$ بالنسبة إلى $w(x) \equiv 1$ فإن الاختيار المناسب للمعادلات هو

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

و

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

تسمى النهاية لـ $S_n(x)$ عندما $n \to \infty$ سلسلة فورييه Fourier series للدالة f

وإن سلاسل فورييه تستخدم لوصف حل المعادلات التفاضلية والمعادلات التفاضلة الجزئية التي تظهر في أحوال فيزيائية.

نشر جوزف فورييه Josef Fourier (1768 - 1830) نظريته عن السلاسل المثلثية في Théorie analytique de la chaleur وذلك لحلّ مسألة التوزيع الحراري بحالة الاستقرار في المجسم

مثال 1 لتحديد كثيرة الحدود المثلثية في $\mathcal{T}_n$ التي تقرب

$$f(x) = |x|, \quad \text{لكل} \quad -\pi < x < \pi$$

ينبغي إيجاد

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]$$

لكل $k = 1, 2, \ldots, n$،

و $\quad b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin kx\,dx = 0 \quad$ لكل $k = 1, 2, \ldots, n-1$

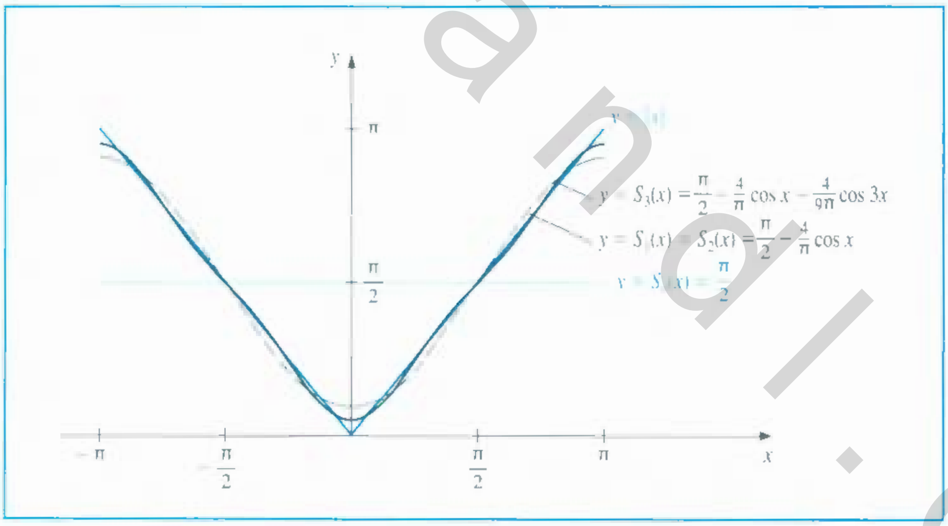
إن كون b_k جميعًا أصفارا ينبع من حقيقة أن $g(x) = |x|\sin kx$ هو دالة فردي لكل k. وتكامل أي دالة فردي على أي فترة من النوع $[-a, a]$ هو صفر. (انظر التمرينين 13 و 14)

ومن ثم فإن كثيرة الحدود المثلثية من T_n التي تعطي التقريب للدالة f هي

$$S_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx$$

إن بعض كثيرات الحدود المثلثية للدالة $f(x) = |x|$ تظهر في شكل (13.8).

شكل 13.8



إن سلسلة فورييه للدالة f هي

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx$$

بما أن $|\cos kx| \le 1$، فإن السلسلة تتقارب (converges). ويكون $S(x)$ موجودا لقيم x و k جميعها الحقيقية. ■

يوجد تعبير منفصل مماثل لما شُرح، وهو مفيد لحالة التقريب باستخدام المربعات الصغرى المنفصلة (discrete) وعملية الاستكمال الداخلي للكميات الكبيرة من البيانات.

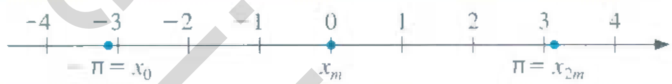
افترض أن لديك $2m$ من نقاط البيانات المزدوجة $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$، إذ تعطي العناصر الأولى في الازدواج تجزئة متساوية لفترة مغلقة.

وللتبسيط، نفترض أن الفترة هي $[-\pi, \pi]$، وعليه كما يظهر في شكل 14.8 يكون

$$x_j = -\pi + \left(\frac{j}{m}\right)\pi \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, 2m-1 \qquad (20.8)$$

إذا لم تكن الفترة هي $[-\pi, \pi]$ يمكن تحويل البيانات إلى هذه الصيغة، باستخدام تحويل خطي بسيط.

شكل 14.8



إن الهدف في الحالة المنفصلة هو تحديد كثيرة حدود مثلثية $S_n(x)$ في $\mathcal{T}_n$ بحيث نجعل المقدار

$$E(S_n) = \sum_{j=0}^{2m-1} [y_j - S_n(x_j)]^2$$

أصغر ما يمكن. ولعمل ذلك، نحتاج إلى اختيار الثوابت $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ بحيث يكون

$$E(S_n) = \sum_{j=0}^{2m-1} \left\{ y_j - \left[\frac{a_0}{2} + a_n \cos nx_j + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx_j + b_k \sin kx_j) \right] \right\}^2 \qquad (21.8)$$

أصغر ما يمكن.

إن تحديد الثوابت يمكن تبسيطه من حقيقة أن $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ متعامدة بالنسبة إلى عملية الجمع على النقاط المتساوية في البعد $\{x_j\}_{j=0}^{2m-1}$ في الفترة $[-\pi, \pi]$.
إننا نعني بهذا أنه لكل $k \neq l$ يكون

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \phi_k(x_j)\phi_l(x_j) = 0 \qquad (22.8)$$

ولبرهان التعامد، نستخدم التمهيدية الآتية:

تمهيدية 12.8 إذا لم يكن العدد الصحيح r أحد مضاعفات $2m$ فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = 0$$

وبالإضافة، إلى ذلك إذا لم يكن r أحد مضاعفات m، فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos rx_j)^2 = m \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} (\sin rx_j)^2 = m$$

■

لقد استخدم أويلر الرمز لأول مرّة ليمثل $\sqrt{-1}$ في كتابه De Formulis Differentialibus Angularibus

البرهان إن معادلة أويلر (Euler's Formula) تنص على أنه إذا كان $i^2 = -1$ فإنه يكون لكل عدد حقيقي z

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{23.8}$$

إن تطبيق هذه التمهيدية يعطي

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j + i \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = \sum_{j=0}^{2m-1} (\cos rx_j + i \sin rx_j) = \sum_{j=0}^{2m-1} e^{irx_j}$$

ولكن

$$e^{irx_j} = e^{ir(-\pi + j\pi/m)} = e^{-ir\pi} \cdot e^{irj\pi/m}$$

لذلك فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j + i \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = e^{-ir\pi} \sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m}$$

بما أن $\sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m}$ سلسلة هندسية حدّها الأول أو نسبتها $e^{ir\pi/m} \neq 1$ نحصل على

$$\sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m} = \frac{1 - (e^{ir\pi/m})^{2m}}{1 - e^{ir\pi/m}} = \frac{1 - e^{2ir\pi}}{1 - e^{ir\pi/m}}$$

ولكن $e^{2ir\pi} = \cos 2r\pi + i \sin 2r\pi = 1$

لذلك $1 - e^{2ir\pi} = 0$

و

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j + i \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = e^{-ir\pi} \sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m} = 0$$

إن هذا يتضمّن أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j = 0$$

إذا لم يكن r أحد مضاعفات m فإن هذه المجاميع تتضمن أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos rx_j)^2 = \sum_{j=0}^{2m-1} \frac{1}{2}(1 + \cos 2rx_j)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{2m-1} 1 + \sum_{j=0}^{2m-1} \cos 2rx_j\right] = \frac{1}{2}(2m + 0) = m$$

وبالمثل فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\sin rx_j)^2 = m$$

والآن يمكننا برهنة التعامد المنصوص عليه في المعادلة (22.8).

خذ على سبيل المثال الحالة

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \phi_k(x_j)\, \phi_{n+l}(x_j) = \sum_{j=0}^{2m-1} (\cos kx_j)(\sin lx_j)$$

بما أن

$$\cos kx_j \sin lx_j = \tfrac{1}{2}[\sin(l+k)x_j + \sin(l-k)x_j]$$

و $(l+k)$ و $(l-k)$ كليهما أعداد صحيحة ليست من مضاعفات $2m$. فإن تمهيدية (12.8) تضمن أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos kx_j)(\sin lx_j) = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{2m-1} \sin(l+k)x_j + \sum_{j=0}^{2m-1} \sin(l-k)x_j\right] = \frac{1}{2}(0+0) = 0$$

تستخدم هذه الطريقة لبرهنة أن حالة التعامد متحققة لأي زوج من الدّوال، وللحصول على مبرهنة الآتية:

مبرهنة 13.8

إن الثوابت في المجموع

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

التي تجعل مجموع المربعات الصغرى

$$E(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - S_n(x_j))^2$$

أصغر ما يمكن هي

$$a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

و

$$b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$ ■

تُبرهَن هذه الطريقة بوضع المشتقات الجزئية للمقدار E بالنسبة إلى كل a_k و كل b_k مساوية للصفر. كما حدث في البندين (1.8) و (2.8). ثم يستخدم التعامد لتبسيط المعادلات. وعلى سبيل المثال

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b_k} = 2 \sum_{j=0}^{2m-1} [y_j - S_n(x_j)](-\sin kx_j)$$

ومن ثم

$$0=\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j-\sum_{j=0}^{2m-1} S_n(x_j)\sin kx_j$$

$$=\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j-\frac{a_0}{2}\sum_{j=0}^{2m-1}\sin kx_j-a_n\sum_{j=0}^{2m-1}\sin kx_j\cos nx_j$$

$$-\sum_{l=1}^{n-1} a_l\sum_{j=0}^{2m-1}\sin kx_j\cos lx_j-\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1} b_l\sum_{j=0}^{2m-1}\sin kx_j\sin lx_j-b_k\sum_{j=0}^{2m-1}(\sin kx_j)^2$$

إن التعامد يتضمَّن أن المجاميع جميعها في الطرف الأيمن، عدا المجموع الأول والمجموع الأخير كلها أصفار. وتنص تمهيدية (12.8) على أن المجموع النهائي يساوي m.

ولذلك يكون

$$b_k=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j\sin kx_j$$

مثال 2 ليكن $f(x)=2x^2-9$ لـ x جميعها في $[-\pi,\pi]$. سنجد $S_2(x)$ كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة 2 بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة.

إذا أخذنا $m=3$ فإن النقاط تكون

$$x_j=\pi+\frac{j}{m}\pi \quad \text{و} \quad y_j=f(x_j)=2x_j^2-9 \quad \text{لكل} \quad j=0,1,2,3,4,5$$

إن كثيرة الحدود المثلثية هي

$$S_2(x)=\tfrac{1}{2}a_0+a_2\cos 2x+(a_1\cos x+b_1\sin x)$$

حيث

$$a_k=\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{5} y_j\cos kx_j \quad \text{لكل} \quad k=0,1,2$$

وتكون المعاملات

$$a_0=\frac{1}{3}\left(f(-\pi)+f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+f\left(-\frac{\pi}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=-4.10944566$$

$$a_1=\frac{1}{3}\left(f(-\pi)\cos(-\pi)+f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+f(0)\cos 0\right.$$
$$\left.+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=-8.77298169$$

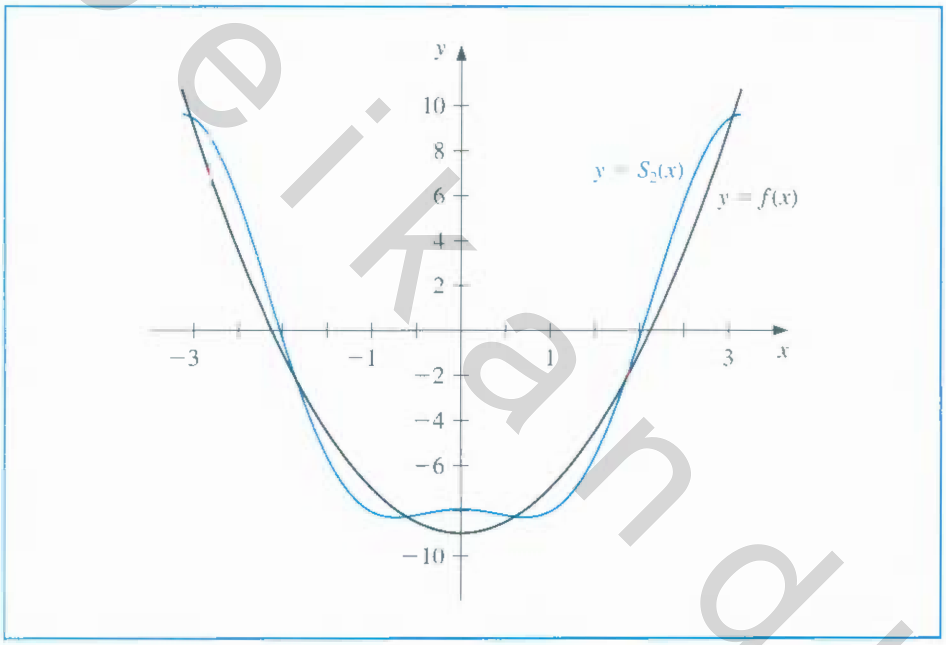
$$a_2=\frac{1}{3}\left(f(-\pi)\cos(-2\pi)+f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+f(0)\cos 0\right.$$
$$\left.+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=2.92432723$$

و
$$b_1 = \frac{1}{3}\left(f(-\pi)\sin(-\pi) + f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f(0)\sin 0 + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 0$$

وهكذا يكون
$$S_2(x) = \frac{1}{2}(-4.10944566) - 8.77298169\cos x + 2.92432723\cos 2x$$

يظهر شكل (12.8) الدالة $f(x)$ وكثيرة الحدود المثلثية بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة $S_2(x)$.

شكل 15.8



يوضح المثال الآتي إيجاد التقريب بالمربعات الصغرى لدالة معرفة على أي فترة مغلقة.

مثال 3 ليكن $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - \tan x(x-2)$. إن إيجاد التقريب $S_3(x)$ للبيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{9}$، حيث $x_j = j/5$ و $y_j = f(x_j)$ بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة يتطلب أولاً التحويل من $[0, 2]$ إلى $[-\pi, \pi]$. إن هذا التحويل الخطي هو $z_j = \pi(x_j - 1)$ وتصبح البيانات بعد التحويل بالصيغة

$$\left\{\left(z_j, f\left(1 + \frac{z_j}{\pi}\right)\right)\right\}_{j=0}^{9}$$

ومن ثم تكون كثيرة الحدود المثلثية بطريقة المربعات الصغرى

$$S_3(z) = \frac{a_0}{2} + a_3\cos 3z + \sum_{k=1}^{2}(a_k\cos kz + b_k\sin kz),$$

حيث $a_k = \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{9} f\left(1+\frac{z_j}{\pi}\right)\cos kz_j$ لكل $k = 0, 1, 2, 3$

و

$b_k = \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{9} f\left(1+\frac{z_j}{\pi}\right)\sin kz_j$ لكل $k = 1, 2$

إن إيجاد قيم هذه المجاميع يعطي التقريب

$$S_3(z) = 0.76201 + 0.77177\cos z + 0.017423\cos 2z + 0.0065673\cos 3z$$
$$- 0.38676\sin z + 0.047806\sin 2z$$

وبالتحويل إلى المتغير x نحصل على

$$S_3(x) = 0.76201 + 0.77177\cos\pi(x-1) + 0.017423\cos 2\pi(x-1)$$
$$+ 0.0065673\cos 3\pi(x-1) - 0.38676\sin\pi(x-1) + 0.047806\sin 2\pi(x-1)$$

يعرض جدول (12.8) قيم $f(x)$ و $S_3(x)$. ■

جدول 12.8

x	$f(x)$	$S_3(x)$	$\lvert f(x) - S_3(x)\rvert$
0.125	0.26440	0.24060	2.38×10^{-2}
0.375	0.84081	0.85154	1.07×10^{-2}
0.625	1.36150	1.36248	9.74×10^{-4}
0.875	1.61282	1.60406	8.75×10^{-3}
1.125	1.36672	1.37566	8.94×10^{-3}
1.375	0.71697	0.71545	1.52×10^{-3}
1.625	0.07909	0.06929	9.80×10^{-3}
1.875	−0.14576	−0.12302	2.27×10^{-2}

EXERCISE SET مجموعة التمارين 5.8

1. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_2(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدالة $f(x) = x^2$ on $[-\pi,\pi]$.

2. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدالة $f(x) = x$ on $[-\pi,\pi]$.

3. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_3(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال $f(x) = e^x$ on $[-\pi,\pi]$.

4. أوجد كثيرة الحدود المثلثية العامة $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال $f(x) = e^x$ on $[-\pi,\pi]$.

5. أوجد كثيرة الحدود المثلثية العامة $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{إذا كان } 0 < x < \pi \end{cases}$$

6. أوجد كثيرة الحدود المثلثية العامة $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{إذا كان } -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{إذا كان } 0 < x < \pi \end{cases}$$

7. أوجد بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة الكثيرة الحدود المثلثية $S_n(x)$ على الفترة $[-\pi,\pi]$ للدوال الآتية، باستخدام القيم m و n المحدّدة:

أ. $f(x) = \cos 2x$، $m = 4, n = 2$
ب. $f(x) = \cos 3x$، $m = 4, n = 2$
ج. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x + 2\cos \frac{1}{3}x$، $m = 6, n = 3$
د. $f(x) = x^2 \cos x$، $m = 6, n = 3$

8. احسب الخطأ $E(S_n)$ لكل الدوال في التمرين (7).

9. أوجد بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة كثيرة الحدود المثلثية $S_3(x)$ باستخدام $m = 4$ للدالة $f(x) = e^x \cos 2x$ على الفترة $[-\pi,\pi]$. احسب الخطأ $E(S_3)$.

10. كرّر التمرين (9) باستخدام $m = 8$. قارن قيم كثيرات الحدود المستخدمة في التقريب بقيم f عند النقاط $\xi_j = -\pi + 0.2j\pi$ لكل $0 \le j \le 10$ فأي تقريب هو الأفضل؟

11. ليكن $f(x) = 2\tan x - \sec 2x$ لكل $2 \le x \le 4$ بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة. أوجد كثيرات الحدود المثلثية $S_n(x)$ باستخدام قيم n و m كما يأتي. ثم احسب الخطأ في كل حالة:

أ. $n = 3, \quad m = 6$
ب. $n = 4, \quad m = 6$

12. أ. بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_4(x)$، باستخدام $m = 16$ للدالة $f(x) = x^2 \sin x$ على الفترة $[0,1]$.

ب. احسب $\int_0^1 S_4(x)\,dx$. ج. قارن التكامل في (ب) بـ $\int_0^1 x^2 \sin x\,dx$.

13. برهن أنه لكل دالة فردية متصلة f معرفة على $[-a, a]$ يكون $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

14. برهن أنه لكل دالة زوجية متصلة f معرفة على الفترة $[-a, a]$ يكون.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

15. برهن أن الدوال

$$\phi_0(x) = \tfrac{1}{2}, \phi_1(x) = \cos x, \ldots, \phi_n(x) = \cos nx, \phi_{n+1}(x) = \sin x, \ldots, \phi_{2n-1}(x) = \sin(n-1)x$$

متعامدة على الفترة $[-\pi,\pi]$ بالنسبة إلى دالة الوزن $w(x) \equiv 1$.

16. حدّد في التمرين (1) سلسلة فورييه للدالة $f(x) = |x|$. استخدم هذه السلسلة، وافترض أنها تمثّل f عند الصفر لكي تجد قيمة السلسلة اللانهائية المتقاربة

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1/(2k+1)^2)$$

6.8 تحويلات فورييه السريعة Fast Fourier Transforms

وجدنا في النصف الثاني من الفصل (5.8) بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة صيغة كثيرة الحدود من الرتبة n على نقاط البيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$ التي عددها $2m-1$ حيث إن $x_j = -\pi + (j/m)\pi$ لكل $j = 0, 1, \ldots, 2m-1$.

إن كثيرة الحدود المثلثية للاستكمال الداخلي (interpolatory) في $\mathcal{T}_m$ على نقط البيانات هذه التي عددها $2m$ هي تقريبا كثيرة الحدود بالمربعات الصغرى نفسها؛ لأن كثيرة الحدود المثلثية

بطريقة المربعات الصغرى تجعل حد الخطأ

$$E(S_m) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - S_m(x_j))^2$$

أصغر ما يمكن، وهذا الخطأ لكثيرة الحدود المثلثية للاستكمال يساوي صفرًا. ومن ثم فقد حصلنا على أصغر ما يمكن من الخطأ عندما يكون

$$S_m(x_j) = y_j \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, 2m-1$$

وعلى كل حال هناك حاجة إلى تعديل صيغة كثيرة الحدود إذا ما أردنا أن تتخذ المعاملات الصيغة نفسها كما في حالة المربعات الصغرى.

لقد وجدنا في تمهيدية (12.8) أنه إذا لم يكن r أحد مضاعفات m فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos r x_j)^2 = m$$

إن الاستكمال الداخلي يتطلب بدلًا من ذلك حساب

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos m x_j)^2$$

الذي يأخذ القيمة $2m$. (انظر التمرين 8)

ويتطلب هذا أن تكتب كثيرة الحدود الاستيفائية على الصيغة

$$S_m(x) = \frac{a_0 + a_m \cos mx}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{24.8}$$

إذا أردنا أن تتفق الصيغتان a_k و b_k مع صيغ كثيرة الحدود بطريقة المربعات الصغرى، أي حيثما

$$a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, m \tag{25.8}$$

و

$$b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{26.8}$$

وفي حالة وجود مقادير كبيرة من البيانات المتساوية البعد، يكون الاستكمال عن طريق كثيرات الحدود المثلثية قادرًا على إعطاء نتائج دقيقة جدًا.

إنها طريقة التقريب المناسبة في حقول تتضمن ترشيحات عددية، مثل نماذج الهوائيات الميكانيكا الكمية، البصريات، والكثير من مسائل المحاكاة.

وعلى كل حال حتى في أواسط الستينيات من القرن العشرين، لم تكن هذه الطريقة تحت التطبيق الشائع؛ بسبب العمليات الحسابية اللازمة لتحديد الثوابت في التقريب.

إن الاستكمال في بيانات مؤلفة من $2m$ من النقاط باستخدام تقنية الحساب المباشر تتطلب $(2m)^2$ من عمليات الضرب و $(2m)^2$ من عمليات الجمع. وإن تقريب عدة آلاف من نقاط البيانات أمر شائع في الحقول التي تتطلب الاستكمال المثلثي. ولذلك فإن الطرائق المباشرة لإيجاد قيم الثوابت تتطلب عمليات ضرب وجمع تصل إلى الملايين.

إن خطأ التدوير المرتبط بهذا العدد من الحسابات يفوق التقريب عمومًا.

في عام 1965 ظهرت ورقة بحثية للمؤلفين كولي وتيوكي J.W.Cooley و J.W.Tukey في مجلة Mathematics of Computation[CT] شرحت طريقة مختلفة لحساب الثوابت في كثيرات الحدود المثلثية للاستكمال .

وإن هذه الطريقة تتطلب $O(m\log_2 m)$ فقط من عمليات الضرب و $O(m\log_2 m)$ من عمليات الجمع ، على أن تختار m بطريقة مناسبة.

إن هذا ينقص عدد العمليات من الملايين إلى الآلاف في أي عملية تحتوي على الآلاف من نقاط البيانات. وقد اكتشفت هذه الطريقة في الحقيقة منذ عدة سنوات قبل ظهور بحث كولي وتيوكي ، ولكنه مرّ دون التنبه إليه.

إن [Brigh,pp,8-9] يحتوي ملخصا تاريخيًا قصيرًا. إلا أنه مثير للاهتمام بهذه الطريقة.

تعرف طريقة كولي وتيوكي بواحد من الاسمين خوارزمية كولي – تيوكي (Cooley - Tukey algorithm) أو خوارزمية تحويل فورييه السريع Fast Fourier transform(FFT)algorithm وقد أدت إلى ثورة في استخدام كثيرات الحدود المثلثية في الاستكمال.

تتألف الطريقة بتنظيم المسألة ، إذ يمكن تحليل عدد نقاط البيانات بسهولة على قوى العدد اثنين خصوصًا.

وبدلًا من إيجاد قيم الثابتين a_k و b_k مباشرة فإن طريقة تحويل فورييه السريع حسب المعاملات المركبة c_k في

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k e^{ikx} \tag{27.8}$$

حيث

$$c_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, 2m-1 \tag{28.8}$$

وبمجرد تحديد الثوابت c_k فإنه يمكن استرجاع a_k و b_k. ولعمل ذلك ، نستخدم معادلة أويلر $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ لكل $k = 0, 1, \ldots, m$ يكون

$$\frac{1}{m}c_k(-1)^k = \frac{1}{m}c_k e^{-i\pi k} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} e^{-i\pi k} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik(-\pi + (\pi j/m))}$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \left(\cos k\left(-\pi + \frac{\pi j}{m}\right) + i\sin k\left(-\pi + \frac{\pi j}{m}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j(\cos kx_j + i\sin kx_j)$$

لذلك

$$a_k + ib_k = \frac{(-1)^k}{m}c_k \tag{29.8}$$

ولسهولة التعبير، يُضاف b_0 و b_m إلى المجموعة ، ولكنهما يساويان صفرًا ، ولا يساهمن في المجموع الناتج.

إن خاصية تقليل العمليات في تحويل فورييه السريع ناتجة عن حساب المعاملات c_k في عناقيد. واستعمال علاقة رئيسة تنص على أنه لأي عدد صحيح n يكون

$$e^{n\pi i} = \cos n\pi + i \sin n\pi = (-1)^n$$

افترض $m = 2^p$ لعدد صحيح موجب p. لكل $k = 0, 1, \ldots, m-1$ يكون

$$c_k + c_{m+k} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} + \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{i(m+k)\pi j/m} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}(1 + e^{\pi i j})$$

ولكن

$$1 + e^{i\pi j} = \begin{cases} 2, & \text{إذا كان } n \text{ عددا زوجيًا} \\ 0, & \text{إذا كان } n \text{ عددا فرديًا} \end{cases}$$

لذلك يوجد m فقط من الحدود غير الصفرية في عملية الجمع.

إذا وضعنا $2j$ بدلاً من j في مؤشر الجمع أمكننا كتابة المجموع على الصيغة

$$c_k + c_{m+k} = 2\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi(2j)/m}$$

أي أن

$$c_k + c_{m+k} = 2\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi j/(m/2)} \tag{30.8}$$

وبطريقة مماثلة

$$c_k - c_{m+k} = 2e^{ik\pi/m}\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j+1} e^{ik\pi j/(m/2)} \tag{31.8}$$

وبما أنه يمكن استرجاع كل من c_k و c_{m+k} من المعادلتين (30.8) و (31.8). فإن هذه العلاقات تحدد المعاملات c_k جميعها.

يتضح أن المجاميع في المعادلتين (30.8) و (31.8) أيضا لها الصيغة نفسها كالمجموع في المعادلة (28.8). باستثناء وضع المؤشر $m/2$ بدلًا من m.

يوجد $2m$ من المعادلات $c_0, c_1, \ldots, c_{2m-1}$ الواجب حسابها.

إن استخدام المعادلة الرئيسة (28.8) يتطلب $2m$ من عمليات الضرب المركبة لكل معامل. وبما مجموعه $(2m)^2$ من العمليات.

تتطلب المعادلة (30.8) m من عمليات الضرب المركبة لكل $k = 0, 1, \ldots, m-1$، أما المعادلة (31.8) فتتطلب $m+1$ من عمليات الضرب المركبة لكل $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

وإن استخدام هذه المعادلات لحساب $c_0, c_1, \ldots, c_{2m-1}$ يخفّض عمليات الضرب المركبة من $(2m)^2 = 4m^2$ إلى $m \cdot m + m(m+1) = 2m^2 + m$.

بما أن المجاميع في المعادلة (30.8) و (31.8) لها الصيغة نفسها الرئيسة والعدد m هو على صيغة قوى 2. فإنه يمكن إعادة تطبيق عملية التخفيض في المعادلتين (30.8) و (31.8).

ويوضع بدلًا منهما مجموعان من $j = 0$ إلى $j = (m/2) - 1$. إن هذا يخفض الفقرة $2m^2$ في المجموع إلى

$$2\left[\frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m}{2} + 1\right)\right] = m^2 + m$$

ومن ثم يكون المجموع الكلي $(m^2 + m) + m = m^2 + 2m$ من عمليات الضرب المركبة التي نحتاج إليها.

إن تطبيق الطريقة مرة أخرى يعطينا أربعة مجاميع في كل منها $m/4$ من الحدود، ويخفض الفقرة m^2 من هذا المجموع إلى

$$4\left[\left(\frac{m}{4}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{m}{4}+1\right)\right] = \frac{m^2}{2} + m$$

الذي يؤدي إلى مجموع جديد يساوي $(m^2/2) + 3m$ من عمليات الضرب لمركبة، وبتكرار العملية r مرّة يخفض العدد الكلي من عمليات الضرب المركبة اللازمة إلى

$$\frac{m^2}{2^{r-2}} + mr$$

وتكتمل العملية عندما $r = p + 1$، لأن $m = 2^p$ و $2m = 2^{p+1}$.

وهكذا بعد $r = p + 1$ من تخفيضات هذا النوع فإن عدد عمليات الضرب المركبة ينخفض إلى

$$\frac{(2^p)^2}{2^{p-1}} + m(p+1) = 2m + pm + m = 3m + m\log_2 m = O(m\log_2 m)$$

وبسبب طريقة ترتيب الحسابات، فإن عدد عمليات الجمع المركبة يمكن رصدها ومقارنتها.
ولشرح أهمية هذا التخفيض، افترض أن لدينا $m = 2^{10} = 1024$
وعند الحساب المباشر يتطلب

$$(2m)^2 = (2048)^2 \approx 4,200,000$$

من عمليات الحساب. أما طريقة تحويل فورييه السريع فتخفض عدد الحسابات إلى

$$3(1024) + 1024\log_2 1024 \approx 13,300$$

مثال 1 افترض تطبيق طريقة تحويل فورييه السريع لنقاط البيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{7}$ التي عددها $8 = 2^3$ حيث $x_j = -\pi + j\pi/4$ لكل $j = 0, 1, \dots, 7$.

في هذه الحالة $2m = 8$. ولذلك $m = 4 = 2^2$ و $p = 2$.

من المعادلة (24.8) نحصل على

$$S_4(x) = \frac{a_0 + a_4\cos 4x}{2} + \sum_{k=1}^{3}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

حيث

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} y_j\cos kx_j \quad \text{و} \quad b_k = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} y_j\sin kx_j \quad \text{لكل } k = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ عرّف}$$

$$F(x) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} c_k e^{ikx}$$

حيث

$$c_k = \sum_{j=0}^{7} y_j e^{ik\pi j/4} \quad \text{لكل } k = 0, 1, \dots, 7$$

ثم نحصل من المعادلة (29.8) لكل $k = 0, 1, 2, 3, 4$ على $\frac{1}{4}c_k e^{-ik\pi} = a_k + ib_k$.

بالحساب المباشر، تعطي الثوابت المركبة ما يلي:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \\
c_1 &= y_0 + ((i+1)/\sqrt{2})\, y_1 + i y_2 + ((i-1)/\sqrt{2})\, y_3 - y_4 \\
&\quad - ((i+1)/\sqrt{2})\, y_5 - i y_6 - ((i-1)/\sqrt{2})\, y_7 \\
c_2 &= y_0 + i y_1 - y_2 - i y_3 + y_4 + i y_5 - y_6 - i y_7 \\
c_3 &= y_0 + ((i-1)/\sqrt{2})\, y_1 - i y_2 + ((i+1)/\sqrt{2})\, y_3 - y_4 \\
&\quad - ((i-1)/\sqrt{2})\, y_5 + i y_6 - ((i+1)/\sqrt{2})\, y_7 \\
c_4 &= y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7; \\
c_5 &= y_0 - ((i+1)/\sqrt{2})\, y_1 + i y_2 - ((i-1)/\sqrt{2})\, y_3 - y_4 \\
&\quad + ((i+1)/\sqrt{2})\, y_5 - i y_6 + ((i-1)/\sqrt{2})\, y_7 \\
c_6 &= y_0 - i y_1 - y_2 + i y_3 + y_4 - i y_5 - y_6 + i y_7 \\
c_7 &= y_0 - ((i-1)/\sqrt{2})\, y_1 - i y_2 - ((i+1)/\sqrt{2})\, y_3 - y_4 \\
&\quad + ((i-1)/\sqrt{2})\, y_5 + i y_6 + ((i+1)/\sqrt{2})\, y_7
\end{aligned}
$$

بالتمهيد للحجم الصغير لمجموعة نقاط البيانات، فإن كثيراً من معاملات y_j في هذه المعادلات تكون 1 أو 1- . وسيقل هذا التكرار في التطبيقات الكبرى. ولكي نعد عدداً من عمليات الحساب بدقة، فسندخل عمليات الضرب في 1 أو 1- في حسابنا على الرغم من أن ذلك غير ضروري في مثالنا هذا. ومع أخذ هذا الفهم في الحسبان، نجد أن 64 عملية ضرب/ قسمة. و56 عملية جمع/ طرح هي عدد العمليات اللازمة للحساب المباشر للثوابت $c_0, c_1, \ldots, c_7$.

لتطبيق تحويل فورييه السريع بأخذ $r = 1$، نعرّف أولاً:

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \tfrac{1}{2}(c_0 + c_4) = y_0 + y_2 + y_4 + y_6 \\
d_1 &= \tfrac{1}{2}(c_0 - c_4) = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 \\
d_2 &= \tfrac{1}{2}(c_1 + c_5) = y_0 + i y_2 - y_4 - i y_6 \\
d_3 &= \tfrac{1}{2}(c_1 - c_5) = ((i+1)/\sqrt{2})(y_1 + i y_3 - y_5 - i y_7) \\
d_4 &= \tfrac{1}{2}(c_2 + c_6) = y_0 - y_2 + y_4 - y_6; \\
d_5 &= \tfrac{1}{2}(c_2 - c_6) = i(y_1 - y_3 + y_5 - y_7) \\
d_6 &= \tfrac{1}{2}(c_3 + c_7) = y_0 - i y_2 - y_4 + i y_6 \\
d_7 &= \tfrac{1}{2}(c_3 - c_7) = ((i-1)/\sqrt{2})(y_1 - i y_3 - y_5 + i y_7)
\end{aligned}
$$

ثم نعرّف القيمة $r = 2$.

$$
\begin{aligned}
e_0 &= \tfrac{1}{2}(d_0 + d_4) = y_0 + y_4 \\
e_1 &= \tfrac{1}{2}(d_0 - d_4) = y_2 + y_6 \\
e_2 &= \tfrac{1}{2}(i d_1 + d_5) = i(y_1 + y_5)
\end{aligned}
$$

$$e_2 = \tfrac{1}{2}(id_1 + d_5) = i(y_1 + y_5)$$

$$e_3 = \tfrac{1}{2}(id_1 - d_5) = i(y_3 + y_7)$$

$$e_4 = \tfrac{1}{2}(d_2 + d_6) = y_0 - y_4$$

$$e_5 = \tfrac{1}{2}(d_2 - d_6) = i(y_2 - y_6)$$

$$e_6 = \tfrac{1}{2}(id_3 + d_7) = ((i - 1)/\sqrt{2})(y_1 - y_5)$$

$$e_7 = \tfrac{1}{2}(id_3 - d_7) = i((i - 1)/\sqrt{2})(y_3 - y_7)$$

وأخيرًا نعرّف القيمة $r = p + 1 = 3$

$$f_0 = \tfrac{1}{2}(e_0 + e_4) = y_0$$

$$f_1 = \tfrac{1}{2}(e_0 - e_4) = y_4$$

$$f_2 = \tfrac{1}{2}(ie_1 + e_5) = iy_2$$

$$f_3 = \tfrac{1}{2}(ie_1 - e_5) = iy_6$$

$$f_4 = \tfrac{1}{2}(((i + 1)/\sqrt{2})e_2 + e_6) = ((i - 1)/\sqrt{2})y_1$$

$$f_5 = \tfrac{1}{2}(((i + 1)/\sqrt{2})e_2 - e_6) = ((i - 1)/\sqrt{2})y_5$$

$$f_6 = \tfrac{1}{2}(((i - 1)/\sqrt{2})e_3 + e_7) = (-(i + 1)/\sqrt{2})y_3$$

$$f_7 = \tfrac{1}{2}(((i - 1)/\sqrt{2})e_3 - e_7) = (-(i + 1)/\sqrt{2})y_7$$

إن $c_0, \ldots, c_7, d_0, \ldots, d_7, e_0, \ldots, e_7$ و $f_0, \ldots, f_7$ مستقلة عن نقاط البيانات الخاصة. وتعتمد على حقيقة أن $m = 4$ فقط. لكل m مجموعة ثوابت وحيدة

$$\{f_k\}_{k=0}^{2m-1} \text{ و } \{c_k\}_{k=0}^{2m-1}, \{d_k\}_{k=0}^{2m-1}, \{e_k\}_{k=0}^{2m-1}$$

إن هذه الفقرة من التطبيق لا حاجة إليها في التطبيق الخاص. إن الحسابات المطلوبة هي الآتية فقط:

1. $f_0 = y_0;\quad f_1 = y_4;\quad f_2 = iy_2;\quad f_3 = iy_6;$
   $f_4 = ((i - 1)/\sqrt{2})y_1;\quad f_5 = ((i - 1)/\sqrt{2})y_5;\quad f_6 = (-(i + 1)/\sqrt{2})y_3$
   $f_7 = (-(i + 1)/\sqrt{2})y_7.$

2. $e_0 = f_0 + f_1;\quad e_1 = -i(f_2 + f_3);\quad e_2 = ((-i + 1)/\sqrt{2})(f_4 + f_5)$
   $e_3 = ((-i - 1)/\sqrt{2})(f_6 + f_7);\quad e_4 = f_0 - f_1;\quad e_5 = f_2 - f_3;$
   $e_6 = f_4 - f_5;\quad e_7 = f_6 - f_7$

3. $d_0 = e_0 + e_1;\quad d_1 = -i(e_2 + e_3);\quad d_2 = e_4 + e_5;\quad d_3 = -i(e_6 + e_7)$
   $d_4 = e_0 - e_1;\quad d_5 = e_2 - e_3;\quad d_6 = e_4 - e_5;\quad d_7 = e_6 - e_7$

4. $c_0 = d_0 + d_1;\quad c_1 = d_2 + d_3;\quad c_2 = d_4 + d_5;\quad c_3 = d_6 + d_7$
   $c_4 = d_0 - d_1;\quad c_5 = d_2 - d_3;\quad c_6 = d_4 - d_5;\quad c_7 = d_6 - d_7$

إن حساب الثوابت $c_0, c_1, \ldots, c_7$ بهذه الطريقة يتطلب عدد العمليات التي تظهر في جدول (13.8). يتضح مرة ثانية أن الضرب في 1 أو 1- قد أدخل في العد على الرغم من أن هذا لا يتطلب جهدًا في الحسابات.

جدول 13.8

الخطوة	ضرب/قسمة	جمع/طرح
(1)	8	0
(2)	8	8
(3)	8	8
(4)	0	8
مجموع	24	24

إن عدم وجود عمليات الضرب/ القسمة في الخطوة 4 يعكس حقيقة أنه لكل m تُحسب المعاملات $\{c_k\}_{k=0}^{2m-1}$ من $\{d_k\}_{k=0}^{2m-1}$ بالطريقة نفسها

$$c_k = d_{2k} + d_{2k+1} \quad \text{و} \quad c_{k+m} = d_{2k} - d_{2k+1} \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, m-1$$

ولذلك لا توجد عمليات ضرب مركبة.

والخلاصة أن الحساب المباشر لمعاملات $c_0, c_1, \ldots, c_7$ يتطلب 64 عملية ضرب/ قسمة و56 عملية جمع/طرح. وإن طريقة تحويل فورييه السريع يخفض الحسابات إلى 24 عملية ضرب/ قسمة و24 عملية جمع/ طرح.

تنفذ الخوارزمية (3.8) تحويل فورييه السريع عندما $m = 2^p$ حيث p عدد صحيح موجب. يمكن إجراء تعديلات على هذه الطريقة عندما يأخذ m صيغا أخرى.

ALGORITHM

الخوارزمية

3.8

تحويل فورييه السريع Fast Fourier Transform

لحساب المعاملات في المجموع

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k e^{ikx} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k(\cos kx + i \sin kx)$$

حيث $i = \sqrt{-1}$ الخاص بالبيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$ حيث $m = 2^p$ و $x_j = -\pi + j\pi/m$ لكل $j = 0, 1, \ldots, 2m-1$.

المدخلات: $m, p; y_0, y_1, \ldots, y_{2m-1}$

المخرجات: الأعداد المركبة $c_0, \ldots, c_{2m-1}$

الأعداد الحقيقية $a_0, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{m-1}$

الخطوة	المضمون
1	ضع $M = m$ $q = p$ $\zeta = e^{\pi i/m}$
2	لكل $j = 0, 1, \ldots, 2m-1$ ضع $c_j = y_j$.
3	لكل $j = 1, 2, \ldots, M$ ضع $\xi_j = \zeta^j$ $\xi_{j+M} = -\xi_j$
4	ضع $K = 0$ $\xi_0 = 1$
5	لكل $L = 1, 2, \ldots, p+1$ نفّذ الخطوات 6 – 12.
6	ما دام $K < 2m-1$ فنفّذ الخطوات 7 – 11.

7	لكل $j = 1, 2, \ldots, M$ نفذ الخطوات 8 – 10.
8	ضع $K = k_p \cdot 2^p + k_{p-1} \cdot 2^{p-1} + \cdots + k_1 \cdot 2 + k_0$. (حلّل k.) ضع $K_1 = K/2^q = k_p \cdot 2^{p-q} + \cdots + k_{q+1} \cdot 2 + k_q$ $K_2 = k_q \cdot 2^p + k_{q+1} \cdot 2^{p-1} + \cdots + k_p \cdot 2^q$
9	ضع $\eta = c_{K+M}\xi_{K_2}$ $c_{K+M} = c_K - \eta$ $c_K = c_K + \eta$
10	ضع $K = K + 1$.
11	ضع $K = K + M$.
12	ضع $K = 0$ $M = M/2$ $q = q - 1$
13	ما دام $K < 2m - 1$ فنفّذ الخطوات 14 – 16.
14	ضع $K = k_p \cdot 2^p + k_{p-1} \cdot 2^{p-1} + \cdots + k_1 \cdot 2 + k_0$ (تحليل k) ضع $j = k_0 \cdot 2^p + k_1 \cdot 2^{p-1} + \cdots + k_{p-1} \cdot 2 + k_p$
15	إذا كان $j > K$ بدّل c_j بـ c_k.
16	ضع $K = K + 1$.
17	ضع $a_0 = c_0/m$ $a_m = \mathrm{Re}(e^{-i\pi m}c_m/m)$
18	لكل $j = 1, \ldots, m-1$ ضع $a_j = \mathrm{Re}(e^{-i\pi j}c_j/m)$ $b_j = \mathrm{Im}(e^{-i\pi j}c_j/m)$
19	المخرجات $(c_0, \ldots, c_{2m-1}; a_0, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{m-1})$. توقف

■

مثال 2 وجدنا في مثال (2) من الفصل (5.8) كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الثانية طريقة المربعات الصغرى المنفصلة إلى $f(x) = 2x^2 - 9$ على $[-\pi, \pi]$.

والآن سنجد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الثانية لاستكمال البيانات $\{(x_j, f(x_j))\}_{j=0}^{3}$ حيث

$$a_k = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} f(x_j)\cos(kx_j) \quad \text{لكل } k = 0, 1, 2 \quad \text{و} \quad b_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} f(x_j)\sin(x_j)$$

إن هذا يعطي

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -3.19559339,$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi)\cos(-\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f(0)\cos 0 + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= -9.86960441$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi)\cos(-2\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\pi) + f(0)\cos 0 + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi)\right)$$
$$= 4.93480220$$

و

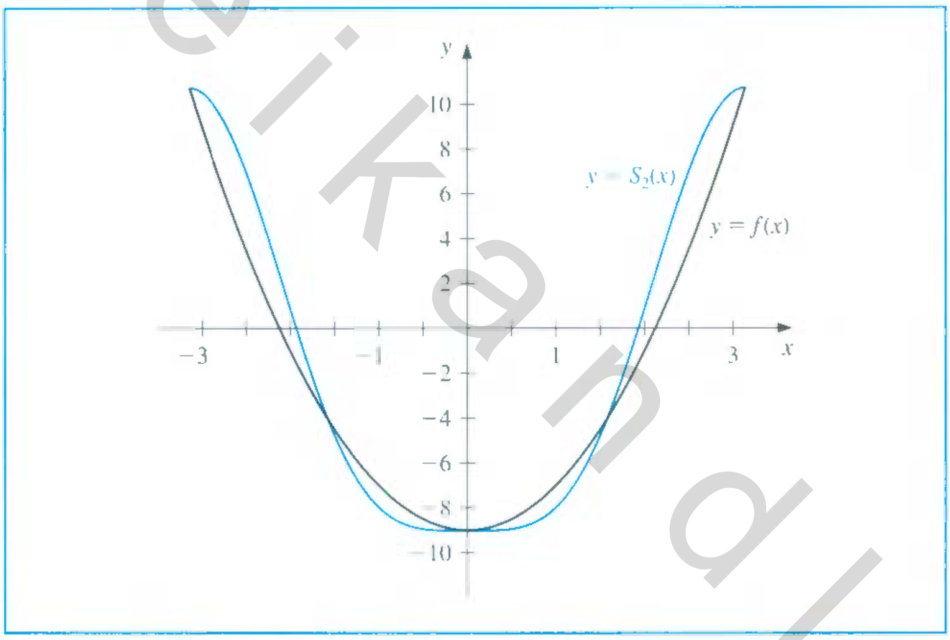
$$b_1 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi)\sin(-\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f(0)\sin 0 + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

لذلك

$$S_2(x) = \tfrac{1}{2}(-3.19559339 + 4.93480220\cos 2x) - 9.86960441\cos x.$$

يظهر شكل (16.8) الدالة $f(x)$ وكثيرة الحدود المثلثية للاستكمال $S_2(x)$. ■

شكل 16.8



يشرح المثال الآتي إيجاد كثيرة الحدود لاستكمال دالة معرفة على أي فترة مغلقة.

مثال 3 ليكن $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - \tan x(x-2)$. إن إيجاد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة لاستكمال البيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{7}$ حيث $x_j = j/4$ و $y_j = f(x_j)$ يتطلب تحويل الفترة $[0, 2]$ إلى $[-\pi, \pi]$.

وإن هذا التحويل يعطى بالمعادلة

$$z_j = \pi(x_j - 1)$$

ولذلك فإن مدخلات البيانات في الخوارزمية (3.8) هي

$$\left\{z_j, f\left(1 + \frac{z_j}{\pi}\right)\right\}_{j=0}^{7}$$

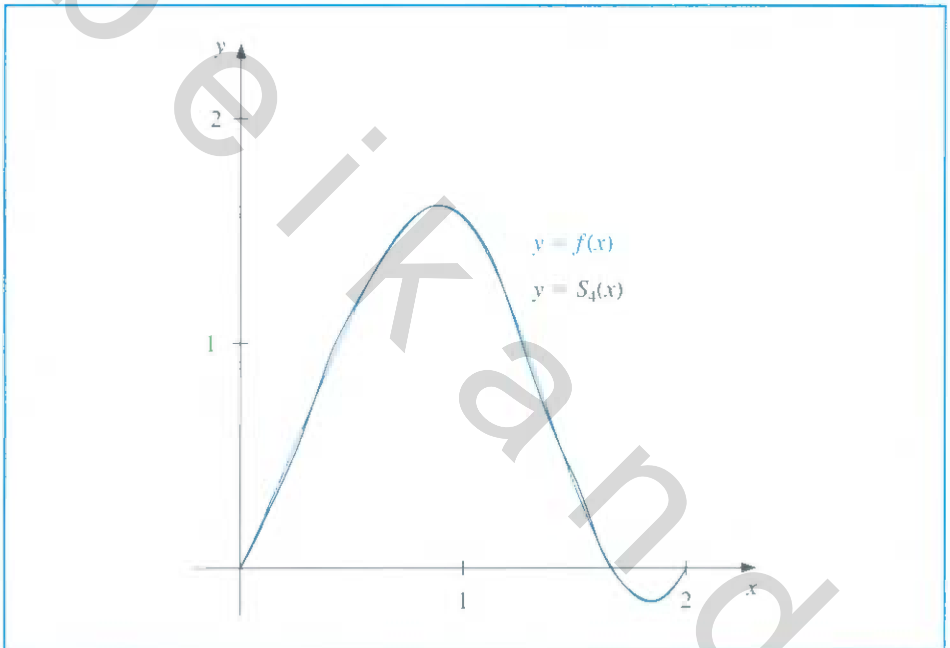
إن كثيرة حدود الاستكمال بدلالة z هي

$$S_4(z) = 0.761979 + 0.771841\cos z + 0.0173037\cos 2z + 0.00686304\cos 3z$$
$$- 0.000578545\cos 4z - 0.386374\sin z + 0.0468750\sin 2z - 0.0113738\sin 3z$$

نجد كثيرة الحدود المثلثية $S_4(x)$ على $[0, 2]$ بتعويض $z = \pi(x-1)$ في $S_4(z)$. ■

يظهر شكل (17.8) الرسم البياني لكل من $y = f(x)$ و $y = S_4(x)$. تظهر قيم $f(x)$ و $S_4(x)$ في جدول (14.8).

شكل 17.8



جدول 14.8

x	$f(x)$	$S_4(x)$	$\lvert f(x) - S_4(x)\rvert$
0.125	0.26440	0.25001	1.44×10^{-2}
0.375	0.84081	0.84647	5.66×10^{-3}
0.625	1.36150	1.35824	3.27×10^{-3}
0.875	1.61282	1.61515	2.33×10^{-3}
1.125	1.36672	1.36471	2.02×10^{-3}
1.375	0.71697	0.71931	2.33×10^{-3}
1.625	0.07909	0.07496	4.14×10^{-3}
1.875	−0.14576	−0.13301	1.27×10^{-2}

لمزيد من التفاصيل عن التحقق من صدق طريقة تحويل فورييه السريع يمكن الرجوع إلى [Ham] الذي يعرض الطريقة من منحى رياضي، أو الرجوع إلى [Brac] حيث تبنى الطريقة على جوانب أكثر ما تكون مألوفة لدى المهندسين.

إن [AHU, pp. 252–269] مرجع جيد للبحث في جوانب حساب هذه الطريقة

إن التعديل على الطريقة في الحالة التي لا يكون فيها m على صيغة قوى (2) موجود في [Win].
إن عرض الطرائق والمادة المتعلقة بها من وجهة نظر الجبر المجرد التطبيقي موجود في [Lau, pp. 438–465].

EXERCISE SET مجموعة التمارين 6.8

1. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_2(x)$ من الرتبة 2 على الفترة $[-\pi,\pi]$ لاستكمال الدوال الآتية، وارسم $f(x) - S_2(x)$:

أ. $f(x) = \pi(x - \pi)$ ب. $f(x) = x(\pi - x)$

ج. $f(x) = |x|$ د. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

2. أوجد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة لاستكمال الدالة $f(x) = x(\pi - x)$ على الفترة $[-\pi,\pi]$ باستخدام:

أ. الحساب المباشر

ب. خوارزمية تحويل فورييه السريع

3. استخدم خوارزمية تحويل فورييه السريع لحساب كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة لاستكمال الدوال الآتية على $[-\pi,\pi]$:

أ. $f(x) = \pi(x - \pi)$ ب. $f(x) = |x|$

ج. $f(x) = \cos \pi x - 2\sin \pi x$ د. $f(x) = x\cos x^2 + e^x \cos e^x$

4. أ. أوجد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة $S_4(x)$ لاستكمال $f(x) = x^2 \sin x$ على الفترة $[0, 1]$.

ب. احسب $\int_0^1 S_4(x)\,dx$.

ج. قارن التكامل في (b) بـ $\int_0^1 x^2 \sin x\,dx$.

5. استخدم التقريبات التي حصلت عليها في التمرين (3) لتقريب التكاملات الآتية، وقارن نتائجك بالقيم الفعلية:

أ. $\int_{-\pi}^{\pi} \pi(x - \pi)\,dx$ ب. $\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx$

ج. $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \pi x - 2\sin \pi x)\,dx$ د. $\int_{-\pi}^{\pi} (x\cos x^2 + e^x \cos e^x)\,dx$

6. استخدم خوارزمية تحويل فورييه السريع لإيجاد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة السادسة عشرة للدالة $f(x) = x^2 \cos x$ على $[-\pi,\pi]$.

7. استخدم خوارزمية تحويل فورييه السريع لإيجاد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة والستين للدالة $f(x) = x^2 \cos x$ على $[-\pi,\pi]$.

8. استخدم متطابقة مثلثية لبرهنة أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos m x_j)^2 = 2m$$

9. برهن أن $c_0, \ldots, c_{2m-1}$ في الخوارزمية (3.8) معطاة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \cdots & \zeta^{2m-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \cdots & \zeta^{4m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta^{2m-1} & \zeta^{4m-2} & \cdots & \zeta^{(2m-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2m-1} \end{bmatrix}$$

حيث $\zeta = e^{\pi i/m}$.

10. في المناقشة السابقة للخوارزمية (3.8) شرح مثال فيه $m = 4$.

عرّف المتجهات c, d, e, f كما يلي:

$$c = (c_0, c_1, \ldots, c_7)^t$$
$$d = (d_0, d_1, \ldots, d_7)^t$$
$$e = (e_0, e_1, \ldots, e_7)^t$$
$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_7)^t$$
$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_7)^t$$

أوجد مصفوفات A, B, C, D بحيث $c = Ad$, $d = Be$, $e = Cf$ و $f = Dy$.

7.8 مسح الطرائق والبرمجيات Survey Methods & Software

لقد شرحنا في هذا الباب تقريب البيانات والدوال باستخدام دوال ابتدائية (elementary). وإن هذه الدّوال الابتدائية التي استخدمت كانت كثيرات حدود، وكانت الدّوال النسبية كثيرات حدود مثلثية. وافترضنا نوعين من التقريبات: المنفصل والمتصل. وتبرز التقريبات المنفصلة عند تقريب مجموعة منتهية من البيانات بدالة ابتدائية، وتستخدم التقريبات المتصلة عندما تكون الدالة المطلوب تقريبها معلومة.

وينصح باستخدام طرائق المربعات الصغرى المنفصلة عندما تكون الدالة محدّدة بمجموعة من البيانات التي من الممكن ألا تمثّلها تمامًا. فإن مطابقة البيانات بطريقة المربعات الصغرى قد تأخذ صيغة خطية أو تقريبًا بكثيرة حدود أخرى أو حتى صيغة أسيّة. وتحسب هذه التقريبات بحلِّ مجموعات من المعادلات القانونية كما مرَّ في الفصل (1.8).

وإذا كانت البيانات دورية فإن مطابقة المربعات الصغرى المثلثية قد تكون مناسبة.

بسبب التعامدية القانونية لقاعدة الدّوال المثلثية. فإن التقريب المثلثي بطريقة المربعات الصغرى لا يتطلب حلَّ نظام خطي. وفي المقادير الكبيرة من البيانات الدورية، يكون الاستكمال بكثيرات الحدود المثلثية محبّبًا أيضًا.

إن إحدى الطرائق الفاعلة في حساب كثيرات الحدود المثلثية للاستكمال هي تحويل فورييه السريع. وعندما يكون الدالة المطلوب تقريبها قابلة للتقييم عند أي قيمة فإن التربيعات تعني أن يكون التكامل أصغر ما يمكن بدلًا من المجموع.

لقد نُوقشت التقريبات بكثيرات الحدود بطريقة المربعات الصغرى المتصلة في الفصل (2.8) وإن الحساب الفعال لكثيرات الحدود بطريقة المربعات الصغرى يؤدي إلى مجموعات كثيرات الحدود المتعامدة قانونيًا، مثل كثيرات حدود ليجندر وتشبيشف.

تمت دراسة التقريب بالدوال النسبية في الفصل (4.8)، حيث عرض تقريب بادي بوصفه تعميمًا لكثيرة حدود ماكلورين وامتداده لتقريب تشبيشف بالدالة النسبية. وتسمح كلتا الطريقتين بعملية

تقريب أكثر تجانسًا من كثيرات الحدود.

إن التقريب بطريقة المربعات الصغرى عن طريق الدّوال المثلثية قد تمت دراسته في الفصل (5.8) وخصوصًا ارتباطه بسلاسل فورييه.

تقدم مكتبة IMSL عددًا من البرمجيات للتقريب. ويعطي البرنامج RLINE خطًّا توفيقيًا لمجموعة من النقاط بطريقة المربعات الصغرى، ومقاييس إحصائية كالوسيطيات الحسابية والتباينات.

إن البرنامج FNLSQ يحسب التقريب بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة وفق اختيار المستخدم لدوال الأساس، وأما BSLSQ فيحسب تقريب الشريحة بطريقة المربعات الصغرى.

ويحسب البرنامج RATCH تقريب تشبيشف النسبي الموزون للدوال المتصل على $[a, b]$. ويحسب FFTCB تحويل فورييه السريع لمجموعة من البيانات بطريقة مماثلة للخوارزمية (3.8).

تحوي مكتبة NAG كثيرًا من البرامج لتقريب الدّوال. والتقريب بكثيرات الحدود بطريقة المربعات الصغرى موجود في البرنامج E02ADF. إن هذا البرنامج متعدد الاتجاهات؛ إذ يحسب بطريقة المربعات الصغرى كثيراتِ الحدود بدرجات متعددة، ويقدِّم أخطاءها بالمربعات الصغرى.

إنه يستخدم كثيرات حدود تشبيشف لتصغير خطأ التدوير لأدنى حد وتحسين الدقة.

يمكن استخدام البرنامج E02AEF لتقييم التقريب الناتج من E02ADF. ويعطي NAG البرنامج E02BAF أيضًا لحساب توفيق الشريحة التكعيبي بطريقة المربعات الصغرى، كما يقدِّم E02GAF حسابًا أفضل لتوفيق خطي L_1، ويعطي E02GCF حسابًا أحسن لتوفيق L_∞. وإن البرنامج E02RAF يحسب تقريب بادي. وتحتوي مكتبة NAG برمجيات كثيرة أيضًا لتحويلات فورييه السريعة، إحداها C06ECF. إن مكتبة نتلب (netlib) تحتوي البرامج polfit.f في حقيبة slatec لحساب تقريب كثيرة الحدود لمجموعة من النقاط المنفصلة بطريقة المربعات الصغرى. ويمكن استخدام البرنامج pvalue.f لإيجاد قيم كثيرة الحدود من polfit.f وأي من مشتقاته عند أي نقطة. للمزيد من المعلومات حول مبرهنة العامة لمبرهنة التقريب ينصح بالرجوع إلى Cheney [Ch] أو Davis [Da]، Powell[Po]. وهناك مرجع جيد لطرائق المربعات الصغرى، ألا وهو Lawson & Hanson [LH]. أما للمعلومات عن تحويلات فورييه فيمكن الرجوع إلى Briggs & Hanson [BH] و Van Loan [Van].