الباب

7

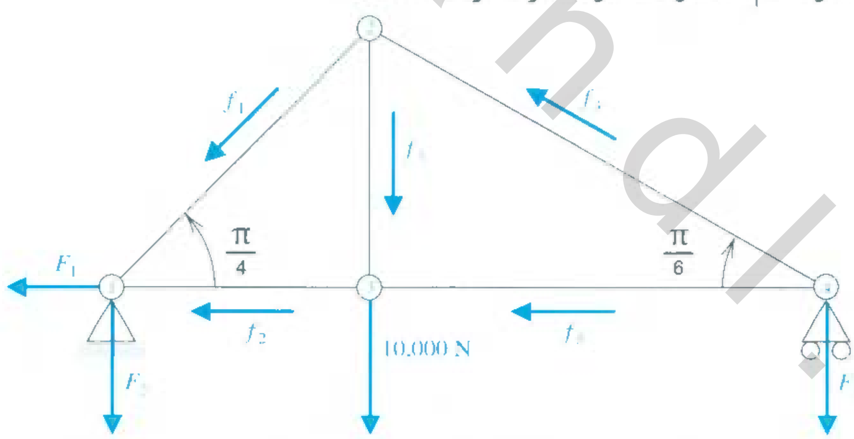
أساليب التكرار في جبر المصفوفات

Iterative Techniques in Matrix Algebra

مقدمة

الدعامات عبارة عن إنشاءات قادرة على حمل أحمال ثقيلة. وعند تصميم الجسر تُربَط هذه الدعامات فيما بينها بوصلات مسمارية قابلة للدوران تسمح بتحويل القوى المؤثرة من دعامة إلى أخرى. ويرينا الشكل أدناه دعامة وُضِعت مستقرة عند النقطة الطرفية اليسرى السفلى ①، ويسمح لها بالتحرك أفقيًا عند النقطة الطرفية اليمنى السفلى ④. ولها وصلات مسمارية عند ④ ③ ② ①. وقد وُضع ثقل زنته 10,000 نيوتن (N) عند المفصل ③ والقوى الناتجة على المفاصل ممثَّلة في f_1، f_2، f_3، f_4 و f_5 كما يبيِّنه الشكل. وتعني الإشارة الموجبة لهذه القوى شدًا لأجزاء الوصلة المسمارية. أما الإشارة السالبة فتعني ضغطا عليها.

إن عنصر الدعم المستقر يمكن أن يكون له مركبة قوة أفقية F_1 ومركبة قوة عمودية F_2، حيث إن عنصر الدعم المتحرك له مركبة قوة عمودية F_3 فقط.



إذا كانت الدعامة في حالة توازن مستقر فإن القوى عند أي مفصل يجب إضافتها إلى المتجه الصفري. بحيث يكون مجموع المركبات العمودية والأفقية عند كل مفصل يساوي صفرًا. وهذا ينتج لنا نظام المعادلات المبين في جدول صفحة (418). إن مصفوفة بأبعاد 8×8 توضح هذا النظام بحيث يكون فيها 47 من القيم صفرًا و17 منها فقط ليست صفرًا. وتسمى المصفوفات ذات النسبة العالية من الأصفار متناثرة sparse. ويكون حلُّها غالبًا باستخدام أساليب التكرار بدلًا من المباشرة. وقد تناولنا حلَّ التكرار لهذا النظام في تمرين (28) من فصل (3.7).

المفصل	المركبة الأفقية	المركبة العمودية
①	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - F_2 = 0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1 - f_3 - \frac{1}{2}f_4 = 0$
③	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 10{,}000 = 0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2}f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2}f_4 - F_3 = 0$

الطرائق التي تناولها الباب السادس استخدمت الأساليب المباشرة في حلّ نظام بحجم $n \times n$ من المعادلات الخطية بصيغة $Ax = b$. وفي هذا الفصل سنتناول طرائق التكرار لحلّ نظام من هذا النوع.

1.7 معايير المتجهات والمصفوفات

Norms of Vectors and Matrices

الثابت عبارة عن عدد حقيقي (أو مركب) ويعبّر عنه عموما باستخدام حروف إغريقية أو مائلة. المتجهات يعبر عنها باستخدام حروف بارزة (غامقة).

أوضحنا في الباب الثاني أساليب التكرار لإيجاد جذور المعادلات من النوع $f(x) = 0$. ووجدنا تقريبًا أو (تقريبات) ابتدائية. بعدئذ تُحدّد تقريبات جديدة استنادًا إلى جودة التقريب السابق للمعادلة. ولمناقشة طرائق التكرار لحلّ الأنظمة الخطية، فإننا نحتاج أولًا إلى قياس المسافة ما بين متجهات عمود ذات البعد n لتحديد ما إذا كانت متتالية المتجهات تتقارب إلى حل النظام. وفي الواقع تكون الحاجة إلى هذا المعيار عندما يُستخرَج الحل بالطرائق المباشرة المذكورة في الفصل السادس. تتطلب تلك الطرائق الكثير من العمليات الحسابية، وتستخدم حسابات منتهية المواقع بحيث تؤدي إلى تقريب حل حقيقي للنظام فقط. ليمثّل $\mathbb{R}^n$ مجموعة جميع متجهات العمود ذات البعد n مع معاملات بأعداد حقيقية. ولتعريف مسافة ما في $\mathbb{R}^n$ نستخدم تعبير معيار.

تعريف 1.7 إن متجه المعيار على $\mathbb{R}^n$ هو دالة، $\|\cdot\|$، من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ يحقق الخواص الآتية:

أ. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ لـ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ جميعًا.

ب. $\|\mathbf{x}\| = 0$ إذا وفقط إذا $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

ج. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ لـ $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ جميعًا.

د. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ لـ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ جميعًا.

سنحتاج إلى اثنين فقط من المعايير منتهية على $\mathbb{R}^n$ على الرغم من أن معيارًا ثالثًا $\mathbb{R}^n$ عُرض في تمرين (2). ولما كانت المتجهات في $\mathbb{R}^n$ هي متجهات عمود فإنه من المناسب استخدام صيغة المنقول transpose التي وردت في الفصل (3.6) حينما عُبّر عن المتجه بدلالة مكوناته. وعلى سبيل المثال فإن المتجه

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

سيُكتَبُ بالصيغة $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.

بحذف المعيارين l_2 و l_∞ للمتجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ على النحو الآتي

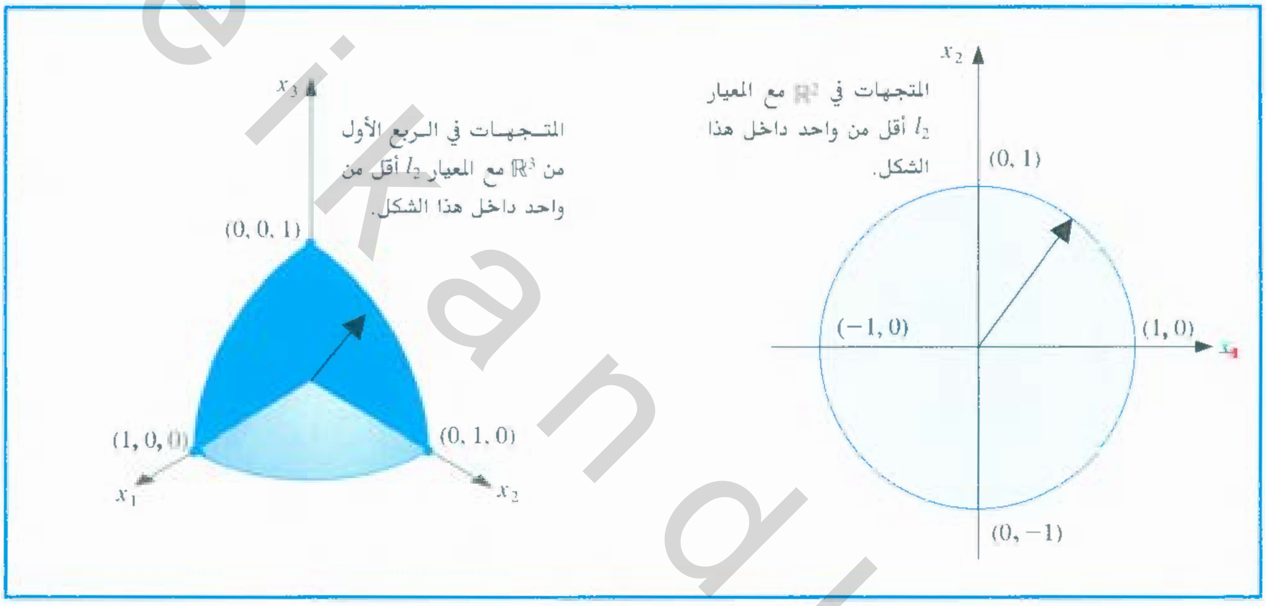
$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \quad و \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|.$$ ■

تعريف 2.7

في المسافة المعيارية يعتبر الخط المستقيم أقصر مسافة ما بين نقطتين. وتسمى بالمسافة الإقليدية، لأنها تعنينا هندسة إقليدية.

يسمى المعيار l_2 معيارًا إقليديًّا Euclidean norm للمتجه $\mathbf{x}$، لأنه يمثّل مفهوم المسافة من نقطة الأصل في حالة كون x في $\mathbb{R}\equiv\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$. وعلى سبيل المثال فإن معيار l_2 للمتجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ يعطي طول الخط المستقيم الواصل ما بين النقطتين (0, 0, 0) و (x_1, x_2, x_3). ويبيّن شكل (1.7) حدود المتجهات في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ التي لها معيار l_2 أقل من 1. وشكل (2.7) هو توضيح مماثل للمعيار l_∞. ■

شكل 1.7



مثال 1

للمتجه $\mathbf{x} = (-1, 1, -2)^t$ في $\mathbb{R}^3$ معايير

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} \quad و \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|-1|, |1|, |-2|\} = 2.$$

ومن السهل أن نرى تحقق خصائص تعريف (1.7) لمعيار l_∞، لأنها تنبع من نفس النتائج لقيم مطلقة. وعلى سبيل المثال فإذا كان $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ و $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ فإن

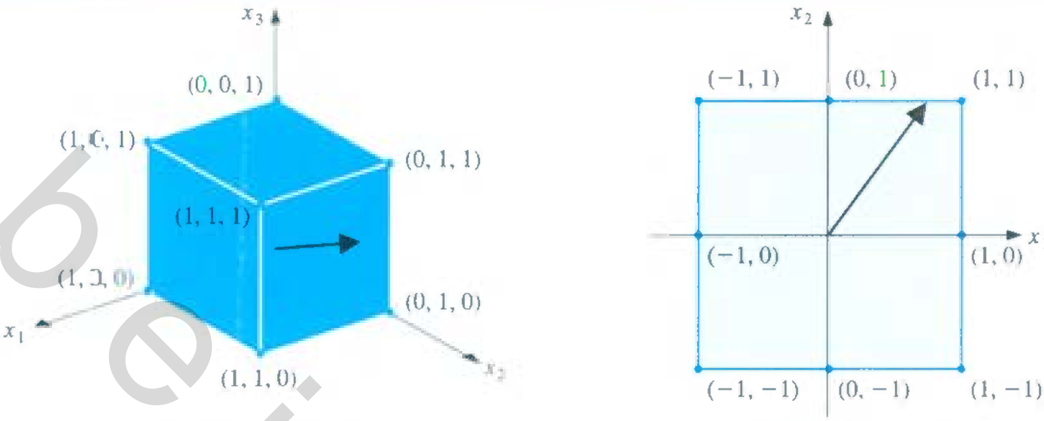
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i + y_i| \le \max_{1\le i\le n}(|x_i| + |y_i|) \le \max_{1\le i\le n}|x_i| + \max_{1\le i\le n}|y_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$$

ولكي نثبت أن

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2 \quad \text{لكلٍّ من} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

فإننا نحتاج إلى المتباينة المشهورة التي تقدمها المبرهنة الآتية.

شكل 2.7



المتجهات في الربع الأول من $\mathbb{R}^3$ مع المعيار l_2 أقل من واحد داخل هذا الشكل.

المتجهات في $\mathbb{R}^2$ مع المعيار l_2 أقل من واحد داخل هذا الشكل.

مبرهنة 3 7 متباينة كوشي - بنياكوفسكي - شيوارتز لعمليات الجمع

Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz Inequality for Sums

لكلٍّ من $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ و $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ في $\mathbb{R}^n$، فإن

$$\mathbf{x}^t\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\}^{1/2} = \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{y}\|_2 \qquad (1.7)$$

■

هنالك العديد من الصيغ لهذه المتباينة. ومن ثم العديد من المكتشفين وجستينلويس كوشي (1789–1857) Augustin Louis Cauchy وضع هذه المتباينة عام 1821 في *Cours d'Analyse Algébrique* و كتاب دقيق لحساب التفاضل والتكامل الصيغة التكاملية للمتباينة ظهرت في عمل فيكتور ياكوفليج بنياكوفسكي (1804–1889) Viktor Yakovlevich Bunyakovsky عام 1859 . وان هرمن امندوس شوارتز (1921–1843) Hermann Amandus Schwarz استخدم صيغة تكامل مضاعف لهذه المتباينة عام 1885 تفاصيل اخرى عن التاريخ يمكن يجدها في [Stee]

البرهان إذا كان $\mathbf{y} = 0$ أو $\mathbf{x} = 0$ فإن النتيجة فورية ؛ لأن جانبي المتباينة هما صفر. افترض $\mathbf{y} \neq 0$ و $\mathbf{x} \neq 0$ لكل $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \le \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

و

$$2\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda^2\|\mathbf{y}\|_2^2$$

ولكون $\|\mathbf{x}\|_2 > 0$ و $\|\mathbf{y}\|_2 > 0$، نفترض $\lambda = \|\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{y}\|_2$ لإعطاء

$$\left(2\frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \le \|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{y}\|_2^2}\|\mathbf{y}\|_2^2 = 2\|\mathbf{x}\|_2^2$$

وبذلك

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le 2\|x\|_2^2 \frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} = 2\|x\|_2\|y\|_2$$

ونتيجة لذلك فإن

$$x'y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \|x\|_2\|y\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\}^{1/2}$$

ويمكن مع هذه النتيجة أن نرى بأنه لكل $x, y \in \mathbb{R}^n$ فإن

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

التي تعطي خاصية المعيار الأخيرة

$$\|x+y\|_2 \le \left(\|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2\right)^{1/2} = \|x\|_2 + \|y\|_2$$

ولما كان معيار المتجه يعطي قياسًا للمسافة بين متجه عشوائي والمتجه الصفري. فإن المسافة بين متجهين تعرف بأنها معيار الفرق بين المتجهين.

تعريف 4.7 إذا كان $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ متجهات في $\mathbb{R}^n$ فإن المسافتين l_2 و l_∞ بين x و y تعرفان على النحو التالي:

$$\|x-y\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i| \quad \text{و} \quad \|x-y\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right\}^{1/2}$$ ■

مثال 2 للنظام الخطي

$$3.3330x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 = 15913$$
$$2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 28.544$$
$$1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 = 8.4254$$

حـل $(x_1, x_2, x_3)' = (1, 1, 1)'$. فإذا طُبِّق حذف جاوس Gaussian elimination في حساب تقريب لخمس خانات مستخدمين تمحور العمود الأعظم maximal column pivoting وفقًا للخوارزمية (2.6) فإن الحل سيكون

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)' = (1.2001, 0.99991, 0.92538)'$$

ومقاييس $x - \tilde{x}$ معطاة من خلال

$$\|x-\tilde{x}\|_\infty = \max\{|1-1.2001|, |1-0.99991|, |1-0.92538|\}$$
$$= \max\{0.2001, 0.00009, 0.07462\} = 0.2001$$

و

$$\|x-\tilde{x}\|_2 = \left[(1-1.2001)^2 + (1-0.99991)^2 + (1-0.92538)^2\right]^{1/2}$$
$$= \left[(0.2001)^2 + (0.00009)^2 + (0.07462)^2\right]^{1/2} = 0.21356$$

وعلى الرغم من كون $\tilde{x}_2$ و $\tilde{x}_3$ تقريبين جيدين لـ x_2 و x_3، فإن المركبة $\tilde{x}_1$ هي تقريب ضعيف لـ x_1 وإن $|x_1 - \tilde{x}_1|$ تهيمن على المعايير. ■

إن مفهوم المسافة في $\mathbb{R}^n$ يستخدم أيضًا في تعريف محدودية متتالية متجهات في هذا الفضاء.

تعريف 5.7 نقول: إن المتتالية $\{\mathrm{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ حيث $\mathrm{x}^{(k)}$ متجهات على $\mathbb{R}^n$ تقاربية، وتقترب إلى x بالنسبة إلى المعيار $\|\cdot\|$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح $N(\varepsilon)$ يحقق

$$\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\| < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad k \geq N(\varepsilon)$$ ■

مبرهنة 6.7 نقول: إن المتتالية $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ حيث متجهات على $\mathbb{R}^n$ تقاربية، وتقارب إلى x بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. ■

البرهان افترض أن $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى x بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$. إذا كان لأي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح $N(\varepsilon)$ بحيث إن لقيم $k \geq N(\varepsilon)$ جميعها

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i^{(k)} - x_i| = \|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_\infty < \varepsilon$$

وتؤدي هذه النتيجة إلى أن $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. وبذلك فإن $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ لكل i.

وبالعكس افترض أن $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ عند $\varepsilon > 0$ معلومة. يمثل $N_i(\varepsilon)$ لكل i عددًا صحيحًا مع خاصية كون $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$ متى كان $k \geq N_i(\varepsilon)$.

دعنا نعرف $N(\varepsilon) = \max_{i=1,2,\ldots,n} N_i(\varepsilon)$. فإذا كان $k \geq N(\varepsilon)$ فإن

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i^{(k)} - x_i| = \|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_\infty < \varepsilon$$

وهذا يؤدي إلى أن $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى x بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$. ■ ■ ■

مثال 3 ليكن $\mathrm{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^4$ معرفًا من خلال

$$\mathrm{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)})^t = \left(1, 2 + \frac{1}{k}, \frac{3}{k^2}, e^{-k}\sin k\right)^t$$

ولكون

$\lim_{k\to\infty} 1 = 1$، $\lim_{k\to\infty} (2 + 1/k) = 2$، $\lim_{k\to\infty} 3/k^2 = 0$ و $\lim_{k\to\infty} e^{-k}\sin k = 0$ فإن المبرهنة (6.7) تؤدي إلى أن المتتالية $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى $(1, 2, 0, 0)^t$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$.

وإن المبرهنة المباشرة بأن المتتالية في التمرين (3) تتقارب إلى $(1, 2, 0, 0)^t$ بالنسبة إلى معيار l_2 صعب إلى حد ما. والأسهل من ذلك هو برهنة النتيجة (المبرهنة) التالية وتطبيقها على هذه الحالة الخاصة.

مبرهنة 7.7 لكل $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$، يكون

$$\|\mathrm{x}\|_\infty \leq \|\mathrm{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\mathrm{x}\|_\infty$$ ■

البرهان

ليكن x_j عبارة عن إحداثي لـ x بحيث $\|\mathrm{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| = |x_j|$. وبذلك فإن

$$\|\mathrm{x}\|_\infty^2 = |x_j|^2 = x_j^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|\mathrm{x}\|_2^2$$

ومن ثم فإن

$$\|\mathrm{x}\|_\infty \le \|\mathrm{x}\|_2 \quad \text{و} \quad \|\mathrm{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_j^2 = n x_j^2 = n\|\mathrm{x}\|_\infty^2$$

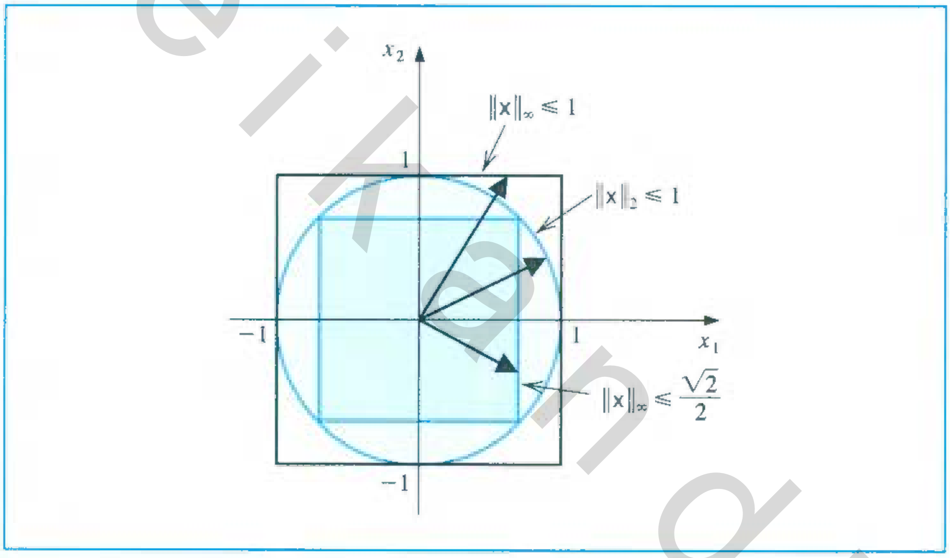
ولذلك يكون

$$\|\mathrm{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\mathrm{x}\|_\infty$$

■ ■ ■

ويوضّح شكل (3.7) هذه النتيجة عندما $n = 2$.

شكل 3.7



مثال 4

وجدنا في مثال (3) أن المتتالية $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ المعرفة من خلال

$$\mathrm{x}^{(k)} = \left(1, 2 + \frac{1}{k}, \frac{3}{k^2}, e^{-k}\sin k\right)^t$$

تتقارب إلى $\mathrm{x} = (1, 2, 0, 0)^t$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$. وعند أي $\varepsilon > 0$، نجد عددًا صحيحًا $N(\varepsilon/2)$ مع الخاصية

$$\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

متى كان $k \ge N(\varepsilon/2)$. ومن خلال المبرهنة (7.7) نحصل على

$$\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_2 < \sqrt{4}\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_\infty < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

عندما $k \ge N(\varepsilon/2)$. وبذلك فإن $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ تتقارب إلى x بالنسبة إلى $\|\cdot\|_2$ أيضًا. ■

ومن الممكن إثبات أن المعايير جميعها على $\mathbb{R}^n$ متكافئة بالنسبة إلى التقارب، بمعنى أنه إذا كان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|'$ يمثّلان أي اثنين من المعايير على $\mathbb{R}^n$ وأن $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ لها حدود $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|$ فإن $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ أيضًا لها حدود $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|'$. ويمكن برهنة هذه الحقيقة لحالة العامة في [Or2,p.8]. وتُستنتج حالة المعيارين $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ من المبرهنة (7.7).

سنحتاج في البنود اللاحقة من هذا الباب والأبواب الأخيرة إلى طرائق لتحديد المسافة بين مصفوفات بحجم $n \times n$. ويتطلب هذا مرة أخرى استخدامًا لمعيار ما.

تعريف 8.7 إن معيار المصفوفة matrix norm على مجموعة من المصفوفات بحجم $n \times n$ عبارة عن دالة بقيمة حقيقية $\|\cdot\|$ معرفة على هذه المجموعة، وهو يحقق لكل من المصفوفتين A و B بحجم $n \times n$ والأعداد الحقيقية α جميعها الخصائص الآتية:

أ. $\|A\| \geq 0$.

ب. $\|A\| = 0$ (إذا وقفط إذا A كانت O. أي مصفوفة مدخلاتها جميعًا أصفار).

ج. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.

د. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

هـ. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. ■

المسافة بين المصفوفتين A و B بحجم $n \times n$ بالنسبة إلى معيار المصفوفة هذا هي $\|A - B\|$. وعلى الرغم من أن معايير المصفوفة يمكن إيجادها بطرائق مختلفة، إلا أن المعايير لوحيدة التي تهمنا هنا هي تلك التي تكون نتائج طبيعية لمعايير المتجهين l_2 و l_∞. وليس من الصعب إثبات المبرهنة التالية، وقد تركنا برهانها للتمرين (13).

مبرهنة 9.7 إذا كان $\|\cdot\|$ معيارًا متجهًا على $\mathbb{R}^n$ تكون

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$$

معيار مصفوفة. ■

كل معيار متجه ينتج معيار مصفوفة طبيعيًا يقابله.

ويُسمى هذا معيار مصفوفة طبيعيًا (أو مستحثًّا) natural, or *induced*, matrix norm ومرتبطًا بمعيار متجه. وسنعرض في هذا الكتاب أن معايير المصفوفة جميعها هي معايير مصفوفة طبيعية ما لم يذكر خلاف ذلك.

لأي $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$، لدينا $\mathbf{x} = \mathbf{z}/\|\mathbf{z}\|$ يمثّل متجه الوحدة. ومن ثم فإن

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| = \max_{\mathbf{z}\neq 0} \left\| A\left(\frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}\right)\right\| = \max_{\mathbf{z}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|}$$

ونستطيع بدلًا من ذلك كتابتها

$$\|A\| = \max_{\mathbf{z}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} \qquad (7.2)$$

وتظهر النتيجة المباشرة للمبرهنة (9.7) من هذا التعبير لـ $\|A\|$.

التمهيدية 10.7 لأي متجه $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$، مصفوفة A، وأي معيار طبيعي $\|\cdot\|$، يكون لدينا

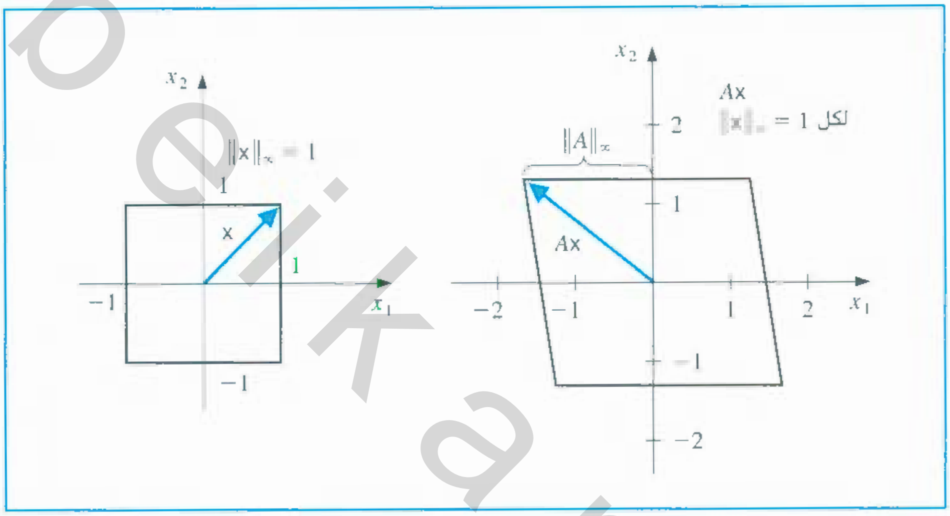
$$\|A\mathbf{z}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{z}\|$$ ■

يوضِّح المعيار المعطى لمصفوفة ضمن معيار طبيعي كيف تُوسّع المصفوفة متجهات الباب بالنسبة إلى ذلك المعيار. وتكون التوسعة الكبرى معيارًا للمصفوفة. ومعايير المصفوفة التي نتناولها هنا تكون بالصيغة:

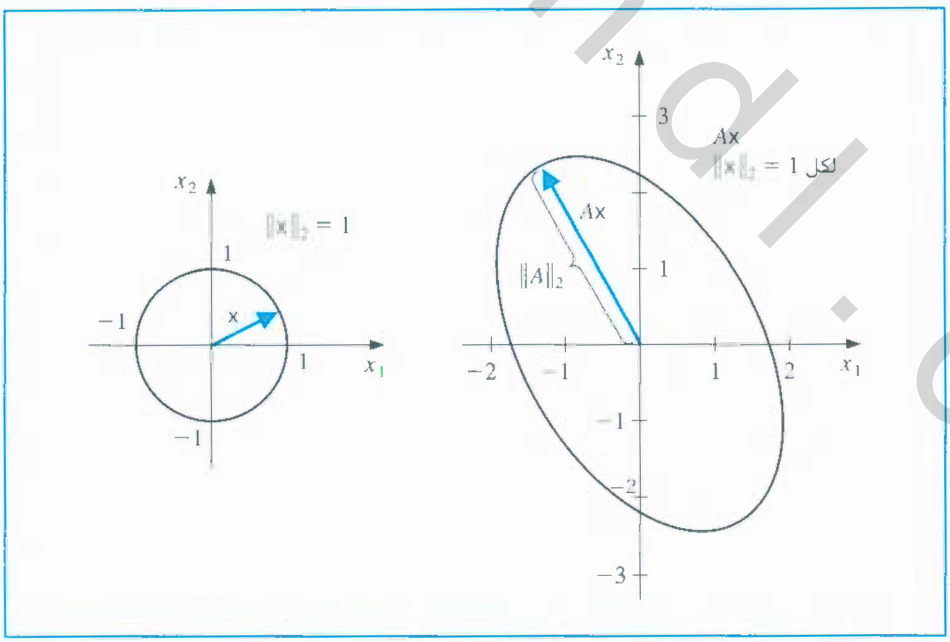
معيار l_∞ هو $\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty = 1} \|A\mathbf{x}\|_\infty$، ومعيار l_2 هو $\|A\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|A\mathbf{x}\|_2$.

ويوضِّح الشكلان (4.7 و 5.7) هذه المعايير عندما $n = 2$.

شكل 4.7



شكل 5.7



إن معيار l_∞ لمصفوفة ما يمكن حسابه بسهولة من عناصر المصفوفة.

مبرهنة 11.7 إذا كانت $A = (a_{ij})$ عبارة عن مصفوفة بحجم $n \times n$ فإن

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

البرهان نثبت أولًا أن $\|A\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. وليكن x متجهًا بحجم n مع $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| = 1$. وبما أن $A\mathbf{x}$ هو أيضًا متجه بحجم n. فإن

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |(A\mathbf{x})_i| = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\le j\le n} |x_j|$$

ولكن $\max_{1\le j\le n} |x_j| = \|\mathbf{x}\|_\infty = 1$. لذا

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

وتكون النتيجة

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty = 1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{3.7}$$

وسنثبت الآن معكوس المتباينة. أي $\|A\|_\infty \ge \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. ليكن p عددًا صحيحًا مع

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

وأن x متجه بالمكونات

$$x_j = \begin{cases} 1, & a_{pj} \ge 0 \text{ إذا كان} \\ -1, & a_{pj} < 0 \text{ إذا كان} \end{cases}$$

إذن $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ و $a_{pj}x_j = |a_{pj}|$ لكل $j = 1, 2, \ldots, n$، لذا

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \ge \left| \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| \right| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

وتؤدي هذه النتيجة إلى

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty = 1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \ge \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

التي تعطي مع المتباينة (3.7)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

■ ■ ■

مثال 5 إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |1| + |2| + |-1| = 4, \quad \sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |0| + |3| + |-1| = 4$$

و

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |5| + |-1| + |1| = 7$$

ولذلك $\|A\|_\infty = \max\{4, 4, 7\} = 7$. ■

سنكتشف في الفصل الآتي طريقة بديلة لإيجاد معيار l_2 لمصفوفة ما.

مجموعة التمارين 1.7 EXERCISE SET

1. أوجد $\|\mathrm{x}\|_\infty$ و $\|\mathrm{x}\|_2$ للمتجهات الآتية:

أ. $\mathrm{x} = (3, -4, 0, \frac{3}{2})^t$

ب. $\mathrm{x} = (2, 1, -3, 4)^t$

ج. $\mathrm{x} = (\sin k, \cos k, 2^k)^t$ لقيمة ثابتة للعدد الصحيح الموجب k.

د. $\mathrm{x} = (4/(k+1), 2/k^2, k^2e^{-k})^t$ لقيمة ثابتة للعدد الصحيح الموجب k.

2. أ. تحقّق من كون الدالة $\|\cdot\|_1$ المعرفة على $\mathbb{R}^n$ من خلال $\|\mathrm{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ معيارًا على $\mathbb{R}^n$.

ب. أوجد $\|\mathrm{x}\|_1$ للمتجه المعطى في التمرين (1).

ج. برهن أنه لـ $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ جميعًا يكون $\|\mathrm{x}\|_1 \geq \|\mathrm{x}\|_2$.

3. برهن أن المتتاليات الآتية تكون متقاربة. وجد نهاياتها

أ. $\mathrm{x}^{(k)} = (1/k, e^{1-k}, -2/k^2)^t$

ب. $\mathrm{x}^{(k)} = (e^{-k}\cos k, k\sin(1/k), 3 + k^{-2})^t$

ج. $\mathrm{x}^{(k)} = (ke^{-k^2}, (\cos k)/k, \sqrt{k^2+k} - k)^t$

د. $\mathrm{x}^{(k)} = (e^{1/k}, (k^2+1)/(1-k^2), (1/k^2)(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1)))^t$

4. أوجد $\|\cdot\|_\infty$ للمصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5. في الأنظمة الخطية الآتية $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$، حيث يمثّل x الحل الحقيقي و $\tilde{\mathrm{x}}$ الحل التقريبي.

احسب $\|\mathrm{x} - \tilde{\mathrm{x}}\|_\infty$ و $\|A\tilde{\mathrm{x}} - \mathrm{b}\|_\infty$.

أ.
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{63}$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{168}$$
$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{6}\right)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.142, -0.166)^t$$

ب.
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1$$
$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2$$
$$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.33, -7.9, 5.8)^t$$

ج.
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1$$
$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2$$
$$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.2, -7.5, 5.4)^t$$

د.
$$0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.06$$
$$0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 0.3$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$$
$$\mathbf{x} = (1.827586, 0.6551724, 1.965517)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (1.8, 0.64, 1.9)^t$$

6. إن معيار المصفوفة $\|\cdot\|_1$ المعرف من خلال $\|A\|_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$، يمكن حسابه باستخدام الصيغة
$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
حيث إن معيار المتجه $\|\cdot\|_1$ معرف في التمرين (2). أوجد $\|\cdot\|_1$ للمصفوفات في التمرين (4).

7. أثبت بمثال أن $\|\cdot\|_\ominus$ المعرفة من خلال $\|A\|_\ominus = \max_{1 \le i, j \le n} |a_{ij}|$ لا تعرف معيار مصفوفة.

8. أثبت أن $\|\cdot\|_{①}$ المعرفة من خلال
$$\|A\|_{①} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$
هي معيار مصفوفة. أوجد $\|\cdot\|_{①}$ للمصفوفات في التمرين (4).

9. أ. إن معيار Frobenius (وهو ليس معيارًا طبيعيًا.) يعرف للمصفوفة A بحجم $n \times n$ من خلال
$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$
أثبت أن $\|\cdot\|_F$ هي معيار مصفوفة.

ب. أوجد $\|\cdot\|_F$ للمصفوفات في التمرين (4).

ج. لأي مصفوفة A، أثبت أن $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le n^{1/2}\|A\|_2$.

10. عُرف في التمرين (9) معيار Frobenius للمصفوفة. أثبت أنه لأي مصفوفة بحجم $n \times n$ ومتجه $\mathbf{x}$ في $\mathbb{R}^n$ فإن $\|A\mathbf{x}\|_2 \le \|A\|_F \|\mathbf{x}\|_2$.

11. لتكن S مصفوفة positive definite بحجم $n \times n$. عرف $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^t S\mathbf{x})^{1/2}$ لأي $\mathbf{x}$ في $\mathbb{R}^n$. أثبت أن هذا يعرف معيارًا على $\mathbb{R}^n$. [تلميح: استخدم تحليل شولسكي Cholesky factorization لـ S لإثبات أن $\mathbf{x}^t S\mathbf{y} = \mathbf{y}^t S\mathbf{x} \le (\mathbf{x}^t S\mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}^t S\mathbf{y})^{1/2}$].

12. لتكن S مصفوفة غير مفردة، وأن $\|\cdot\|$ أي معيار على $\mathbb{R}^n$. عرف $\|\cdot\|'$ من خلال $\|\mathbf{x}\|' = \|S\mathbf{x}\|$. وأثبت أن $\|\cdot\|'$ هو معيار على $\mathbb{R}^n$ أيضًا.

13. برهن أنه إذا كان $\|\cdot\|$ معيارًا متجهًا على $\mathbb{R}^n$ فإن $\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$ هو معيار مصفوفة.

14. الاقتباس الآتي من مجلة الرياضيات *Mathematics Magazine* [Sz] يعطي اتجاهًا بديلًا لبرهنة متباينة Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Inequality.

أ. أثبت أنه عندما $\mathbf{x} \ne 0$ و $\mathbf{y} \ne 0$ يكون لدينا

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}} - \frac{y_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{1/2}}\right]^2$$

ب. استخدم النتيجة للفقرة (أ) لإثبات أن

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

2.7 القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues And Eingenvectors

يمكن اعتبار مصفوفة من الشكل $m \times n$ على أنها دالة تستخدم عملية ضرب المصفوفات لتحويل المتجهات بحجم m لمتجهات بحجم n. تأخذ المصفوفة التربيعية A متجهات بحجم n لنفسها. وفي هذه الحالة ثمة متجهات غير صفرية معينة x تكون موازية لـ $A\mathbf{x}$، الذي يعني وجود ثابت λ مع $A\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$. ولهذه المتجهات يكون لدينا $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$. وهناك صلة قوية بين هذه الأعداد λ وأرجحية التقارب لطريقة تكرار. وسنأخذ في الحسبان هذه الصلة ضمن هذا الفصل.

تعريف 12.7 إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن كثيرة الحدود المميزة characteristic polynomial لـ A تعرف على النحو الآتي:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$ ■

كثير حدود التميز هذه لا تصف تماما حال لقيمة المميزة لمصفوفة. وكما ستلاحظ ذلك في شكل (2) من الفصل 2.9)

ليس من الصعب إثبات أن p كثيرة حدود برتبة n (انظر التمرين 11)، ومن ثم فله من الأصفار المختلفة على الأكثر، وبعضها قد يكون مركبًا complex. فإذا كانت λ صفرًا لـ p، فإن $\det(A - \lambda I) = 0$، وتفيد المبرهنة (16.6) بأن النظام الخطي المعرف من خلال $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ له حلٌّ مع $\mathbf{x} \neq 0$. نرغب هنا في دراسة الأصفار لـ p والحلول غير الصفرية المقابلة لتلك النظم.

تعريف 13.7 إذا كانت p كثيرة حدود المميزة للمصفوفة A فإن أصفار p هي القيم المميزة للمصفوفة A، وإذا كانت λ قيمة مميزة لـ A، وأن $\mathbf{x} \neq 0$ يتحقق $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$، فإن x هي متجه مميز لـ A مقابلة للقيمة المميزة λ. ■

التعبير eigen هو من معنى كلمة ألمانية "to own" والتي تماثل (المميزة) باللغة الإنجليزية. كل صفة لها ميزة أو معادلة تميز مع قيم متجهات مميزة و سماتية.

إذا كانت x متجهًا مميزًا مرتبطًا بالقيمة المميزة فإن $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$، ومن ثم فإن المصفوفة A تأخذ المتجه x إلى قيمة مضاعفة لنفسه. فإذا كانت λ حقيقية و $\lambda > 1$ فإن A لها تأثير في توسعة x بعامل λ، كما يتضح من شكل 6.7 (أ). وإذا كان $0 < \lambda < 1$ فإن A تقلص x بعامل λ. (انظر شكل 7.6 (ب)) وعندما $\lambda < 0$ فإن التأثيرات تكون متشابهة (انظر الشكلين 6.7 (ج)،(د)) على الرغم من أن اتجاه $A\mathbf{x}$ قد عُكِس.

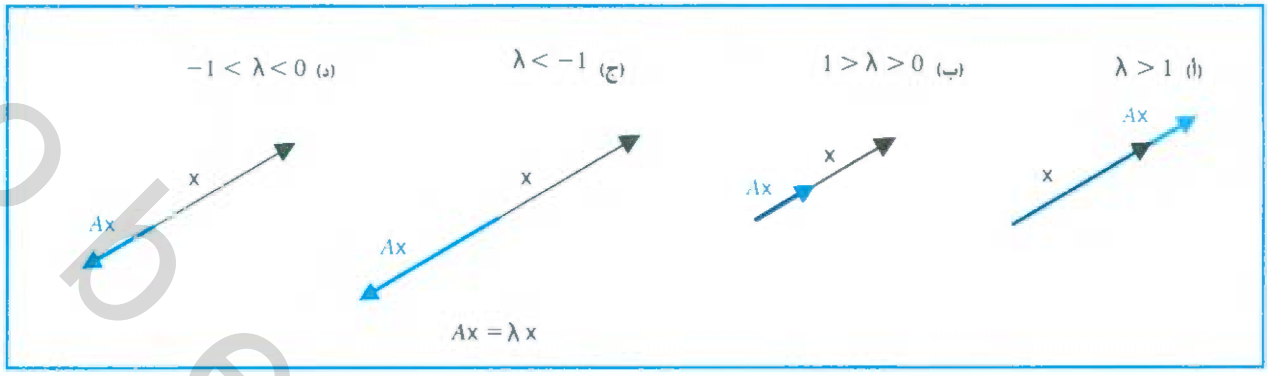
انظر كذلك أنه إذا كان x متجهًا مميزًا لـ A ومرتبطًا بالقيمة المميزة λ، وأن α أي ثابت ليس صفرًا، فإن $\alpha\mathbf{x}$ متجه مميّز أيضًا؛ لأن

$$A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x}) = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x}).$$

مثال 1 إن كثيرة حدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

شكل 6.7



هو

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$$

ولذلك فإن القيم المميزة لـ A هي $\lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = 2$.

والمتجه المميز $\mathbf{x}_1$ المقابل للقيمة المميزة $\lambda_1 = 3$ عبارة عن حلٍّ للمعادلة $(A - 3 \cdot I)\mathbf{x}_1 = 0$، ومن ثم فإن

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

التي تؤدي إلى $x_1 = 0$ و $x_2 = x_3$.

إن أي قيمة غير الصفر لـ x_3 تعطي متجهًا مميزًا للقيمة المميزة $\lambda_1 = 3$. وعلى سبيل المثال عندما $x_3 = 1$ يكون لدينا المتجه المميز $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1)^t$. أي متجه مميز لـ A مقابل $\lambda = 3$ هو مضروب لاصفري لـ $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1)^t$.

وبالمثل فأي متجه مميز $\mathbf{x} \neq 0$ لـ A مرتبط مع $\lambda_2 = 2$ هو حلٌّ للنظام $(A - 2 \cdot I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ومن ثم

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وفي هذه الحالة لا بد لمتجه المميز أن يحقِّق المعادلة $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ فقط التي يمكن عملها بطرائق مختلفة. وعلى سبيل المثال عندما $x_1 = 0$ يكون لدينا $x_2 = 2x_3$ ومن ثم فإن أحد الخيارات سيكون $\mathbf{x}_2 = (0, 2, 1)^t$. وبإمكاننا اختيار $x_2 = 0$ أيضًا الذي يتطلب كون $x_1 = -2x_3$. لذلك فإن $\mathbf{x}_3 = (-2, 0, 1)^t$ يعطي المتجه المميز الثاني للقيمة المميزة $\lambda_2 = 2$ التي لا تكون من مضاعفات $\mathbf{x}_2$. المتجهات المميزة لـ A والمقترنة بالقيمة المميزة $\lambda_2 = 2$ تولد سطحًا بالكامل موضحًا من خلال المتجهات جميعها ذات الصيغة

$$\alpha\mathbf{x}_2 + \beta\mathbf{x}_3 = (-2\beta, 2\alpha, \alpha + \beta)^t$$

للثابتين العشوائيين α و β، على ألا يكون أحدهما صفرًا على الأقل. ■

ولما كانت القيم المميزة للمصفوفة عبارة عن أصفار كثيرة حدود، فإنها غالبًا أعداد معقدة complex حتى عندما تكون عناصر المصفوفة كافة أعدادًا حقيقية. وعند حدوث ذلك فإن المتجهات المميزة تتضمن أعدادًا معقدة في بعض مكوناتها أيضًا. ويعطي المثال التالي توضيحًا لذلك.

مثال 2

إن كثيرة حدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

هي

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 6\lambda - 4 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 4)$$

القيم المميزة لـ A هي الحلول لـ $p(\lambda) = 0$، وهي

$$\lambda_1 = 1 \text{ ،} \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}i \text{ و } \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$$

المتجه المميز $\mathbf{x}_1$ لـ A المقترن مع $\lambda_1 = 1$ هو حل للمعادلة $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = 0$، وبذلك

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ومن ثم $2x_3 = 0$، $-x_3 = 0$ و $-x_1 + x_2 = 0$

التي تؤدي إلى أن

$x_3 = 0$، $x_2 = x_1$ و x_1 عشوائيًّا.

إن اختيار $x_1 = 1$ يعطي المتجه المميز $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0)^t$ مقترنًا بالقيمة المميزة $\lambda_1 = 1$. ووفقًا لهذا الاختيار، يكون لدينا $\|(1, 1, 0)^t\|_\infty = 1$. فإذا أردنا متجهًا مميزًا بقيمة منتهية في معيار ما آخر، فما علينا سوى الضرب في ثابت مناسب. وعلى سبيل المثال عند ضرب $\mathbf{x}_1$ في المقدار $\sqrt{2}/2$ يعطي المتجه المميز $\hat{\mathbf{x}}_1$ مع معيار l_2 مساوٍ لـ 1:

$$\|\hat{\mathbf{x}}_1\|_2 = \left\| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^t \right\|_2 = 1$$

ولما كان λ_2 و λ_3 عددين معقّدين، فإن المتجهات المميزة المقترنة بها تكون كذلك. ولإيجاد متجه مميز لـ λ_2، نحلُّ النظام

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-(1+\sqrt{3}i) & 0 & 2 \\ 0 & 1-(1+\sqrt{3}i) & -1 \\ -1 & 1 & 1-(1+\sqrt{3}i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وَحلٌّ واحد لهذا النظام هو المتجه المميز

$$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i, 1\right)^t$$

وبالمثل فإن المتجه

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}i, -\frac{\sqrt{3}}{3}i, 1\right)^t$$

هو متجه مميز مقترن بالقيمة المميزة $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$. ■

إنّ الحزمة LinearAlgebra في Maple توفر الدالة Eigenvalues لحساب القيم المميزة. الدالة تعطي كلًا من القيم المميزة والمتجهات المميزة المقابلة لها. ولاستخراج نتائج للمصفوفة في مثال (2) ندخل

```
>with(LinearAlgebra);
>A:=Matrix([[1,0,2],[0,1,-1],[-1,1,1]]);
>evalf(Eigenvectors(A));
```

الذي ينتج

$$\begin{bmatrix} 1. + 1.732050808I \\ 1. - 1.732050808I \\ 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. \\ -0.5000000000 & -0.5000000000 & 1. \\ 0.8660254040I & -0.8660254040I & 0. \end{bmatrix}$$

الذي يعطي القيم المميزة

$1 + 1.732050808i$، $1 - 1.732050808i$ و 1

مع ما يقابلها من متجهات مميزة معطاة من خلال أعمدة مثل:

$(1, -0.5, 0.8660254040i)^t$، $(1, -0.5, 0.8660254040i)^t$ و $(1, 1, 0)^t$

إن مفاهيم القيم المميزة والمتجهات المميزة قُدِّمت هنا من أجل حسابات ملائمة خاصة. ولكن هذه المفاهيم تظهر غالبا في دراسة الأنظمة الفيزيائية. وفي الحقيقة إنها مهمة لرتبة تكفي لتخصيص الباب التاسع لتقريباتها العددية.

تعريف 14.7

نصف القطر الطيفي **spectral radius** $\rho(A)$ للمصفوفة A يُعرف على النحو التالي:
$\rho(A) = \max|\lambda|$ حيث إن λ قيمة مميزة لـ A.

(تذكر أنه عند $\lambda = \alpha + \beta i$ المركبة. يكون لدينا $|\lambda| = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$). ■

ونجد أن المصفوفة في مثال (2)

$$\rho(A) = \max\{1, |1 + \sqrt{3}i|, |1 - \sqrt{3}i|\} = \max\{1, 2, 2\} = 2$$

يرتبط نصف القطر الطيفي spectral radius عن قرب بمعيار المصفوفة. كما يظهر في المبرهنة الآتية:

مبرهنة 15.7

إذا كانت A مصفوفة بحجم $n \times n$ فإن

أ. $\|A\|_2 = [\rho(A^t A)]^{1/2}$

ب. $\rho(A) \leq \|A\|$، لأي معيار طبيعي $\|\cdot\|$. ■

البرهان إن برهان الفقرة (أ) يتطلب معلومات تتعلق بالقيم المميزة أكثر مما هو متوفر لدينا حاليًا. أما التفصيلات المتعلقة بالبرهان فانظر [Or2, p. 21].

ولبرهنة الفقرة (ب)؛ افترض λ قيمة مميزة لـ A مع متجه مميز $\mathbf{x}$، وأن $\|\mathbf{x}\| = 1$. (يضمن التمرين (10) وجود مثل هذا المتجه المين). وبما أن $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ فإن

$$|\lambda| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\| = \|A\|$$

ومن ثم فإن

$$\rho(A) = \max|\lambda| \leq \|A\|$$ ■ ■ ■

إن الفقرة (أ) من المبرهنة (15.7) تؤدي إلى أنه إذا كان A متماثلًا، فإن $\|A\|_2 = \rho(A)$. (انظر التمرين 14).

ثمة نتيجة مهمة ومفيدة مماثلة للفقرة (ب) من المبرهنة (15.7)، وهي أنه لأي مصفوفة A وأي $\varepsilon > 0$، يوجد معيار طبيعي $\|\cdot\|$ في الخاصية $\rho(A) < \|A\| < \rho(A) + \varepsilon$. ونتيجة لذلك فإن $\rho(A)$ هي أعظم حدّ سفلي للمعايير الطبيعية على A، وإن برهان هذه النتيجة يمكن إيجاده في [Or2, p. 23].

مثال 3 إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ولحساب $\rho(A^t A)$، نحتاج إلى القيم المميزة لـ $A^t A$. وإذا كان

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A^t A - \lambda I) \\ &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 42\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 42) \end{aligned}$$

فإن

$\lambda = 0$ أو $\lambda = 7 \pm \sqrt{7}$

ومن ثم

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} = \sqrt{\max\{0, 7-\sqrt{7}, 7+\sqrt{7}\}} = \sqrt{7+\sqrt{7}} \approx 3.106$$ ■

ويمكن تطبيق العمليات في مثال (2) أيضًا باستخدام مكتبة LinearAlgebra في Maple مع

```
>with(LinearAlgebra);
>A:=Matrix([1,1,0],[1,2,1],[-1,1,2]]);
>B:=Transpose(A);
>C:=A.B;
>evalf(Eigenvalues(C));
```

التي تعطي المتجه

$$[0.109767846510^{-8}, 4.354248690, 9.645751311]^t$$

ولأن $\sqrt{\rho(C)} = \sqrt{\rho(A^tA)} = ||A||_2$. يكون لدينا

$$||A||_2 = \sqrt{9.645751311} = 3.105760987$$

وكذلك تحسب مابل Maple هذه القيمة مباشرةً بالأمر

```
>evalf(Norm(A,2));
```

ولتحديد المعيار l_∞ لـ A، استبدل الأمر الأخير بـ

```
>evalf(Norm(A,infinity));
```

في دراسة أساليب المصفوفة التكرارية، يكون مهمًا معرفة متى تصبح قوة المصفوفة صغيرة (بمعنى متى تقترب العناصر جميعها من الصفر). يقال لصفوفات من هذا النوع "متقاربة *convergent*"

تعريف 16.7 نقول: إن المصفوفة A بحجم $n \times n$ متقاربة إذا كان

$$\lim_{k\to\infty}(A^k)_{ij} = 0 \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{و} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$ ■

مثال 4 ليكن

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ولحساب قوى A، نستخرج

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

وعمومًا

$$A^k = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^k & 0 \\ \frac{k}{2^{k+1}} & (\frac{1}{2})^k \end{bmatrix}$$

ولأن

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{k\to\infty}\frac{k}{2^{k+1}} = 0$$

فإن A مصفوفة متقاربة. ■

انظر: المصفوفة المتقاربة A في مثال (3) لها $\rho(A) = \frac{1}{2}$؛ لكون $\frac{1}{2}$ هي القيمة المميزة الوحيدة لـ A. هذا يوضح أهمية الربط بين spectral radius للمصفوفة وتقارب المصفوفة. كما هو مفصل في نتيجة المبرهنة الآتية.

مبـرهنة 17.7

العبارات الآتية متكافئة:

أ. A عبارة عن مصفوفة متقاربة.

ب. $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ لمعيار طبيعي معين.

ج. $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ للمعايير الطبيعية جميعها.

د. $\rho(A) < 1$

هـ. $\lim_{n\to\infty} A^n x = 0$ لكل x. ■

يمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في [IK, p. 14].

مجموعة التمارين 2.7 EXERCISE SET

1. احسب القيم المميزة للمصفوفات الآتية والمتجهات المميزة المقترنة بها:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

هـ. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ و. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. احسب القيم المميزة للمصفوفات الآتية والمتجهات المميزة المقترنة بها:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

هـ. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ و. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. أوجد spectral radius لكل مصفوفة في التمرين (1).

4. أوجد spectral radius لكل مصفوفة في التمرين (2).

5. أي من المصفوفات في التمرين (1) متقاربة؟

6. أي من المصفوفات في التمرين (2) متقاربة؟

7. أوجد المعيار $\|\cdot\|_2$ للمصفوفات في التمرين (1).

8. أوجد المعيار $\|\cdot\|_2$ للمصفوفات في التمرين (2).

9. ليكن $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$، أثبت أن A_1 غير متقاربة، ولكن A_2 متقاربة.

10. أثبت أنه إذا كانت λ قيمة مميزة للمصفوفة A، وأن $\|\cdot\|$ معيار طبيعي، فإن متجهًا مميزًا x مقترن بـ λ وموجود مع $\|x\| = 1$.

11. أثبت أن كثيرة حدود المميزة $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ للمصفوفة A بحجم $n \times n$ هي كثيرة حدود من الرتبة n. [إرشاد: وسّع $\det(A - \lambda I)$ على طول الصف الأول، واستخدم الاستنتاج الرياضي على n.]

12. أ. أثبت أنه إذا كان A مصفوفة بحجم $n \times n$ فإن $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$، حيث إن $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ هي القيم المميزة لـ A. [إرشاد: خذ $p(0)$ في الحسبان].
ب. أثبت أن A مفردة إذا وفقط إذا كانت $\lambda = 0$ هي قيمة مميزة لـ A.

13. لتكن λ قيمة مميزة للمصفوفة A بحجم $n \times n$، وأن $x \neq 0$ هو المتجه المميز المقابل لها:
أ. أثبت أن λ هي قيمة مميزة لـ A^t أيضًا.
ب. أثبت أن λ^k هي قيمة مميزة لـ A^k مع متجه مميز x لأي عدد صحيح $k \geq 1$.
ج. أثبت أنه إذا كانت A^{-1} موجودة فإن $1/\lambda$ قيمة مميزة لـ A^{-1} مع متجه مميز x.
د. ضع تعميمًا للفقرتين (ب) و(ج) لـ $(A^{-1})^k$ ولعدد صحيح $k \geq 2$.
هـ. لنفترض وجود كثيرة حدود $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k$، وتعريف $q(A)$ بأنها المصفوفة $q(A) = q_0 I + q_1 A + \cdots + q_k A^k$. أثبت أن $q(\lambda)$ هي قيمة مميزة لـ $q(A)$ مع متجه مميز x.
و. افترض وجود $\alpha \neq \lambda$. أثبت أنه إذا كانت $A - \alpha I$ غير مفردة، فإن $1/(\lambda - \alpha)$ قيمة مميزة لـ $(A - \alpha I)^{-1}$ مع متجه مميز x.

14. أثبت أنه إذا كانت A متماثلة، فإن $\|A\|_2 = \rho(A)$.

15. افترضنا في التمرين (11) من الفصل (3.6) أن مساهمة أنثى الخنفساء من نوع معين للسنوات المستقبلية يمكن وضعها بصيغة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

حيث يمثِّل العنصر في الصف i، والعمود j المساهمة المحتملة للخنفساء في عمر j في تعداد مجتمع إناث الخنافس في عمر i في السنة التالية.
أ. هل هناك أي قيم مميزة حقيقية للمصفوفة A؟ إذا كانت كذلك فحدِّدها مع ما يقابلها من متجهات مميزة.
ب. إذا احتجنا إلى عينة من هذا النوع لأغراض فحوصات مخبرية تتضمن نسبة ثابتة في كل فئة عمرية من سنة إلى أخرى. فما المعيار الذي يمكن استخدامه مع المجتمع الابتدائي لضمان تحقق هذه المتطلبات؟

16. أوجد مصفوفتين A و B بحيث $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$. (هذا يثبت أن $\rho(A)$ لا يمكن أن يكون معيار مصفوفة.)

17. أثبت أنه إذا كان $\|\cdot\|$ أي معيار طبيعي فإن $(1/\|A^{-1}\|) \leq |\lambda| \leq \|A\|$ لأي قيمة مميزة λ لمصفوفة غير مفردة A.

3.7 استخدام الطرق التكرارية لحلّ أنظمة خطية
Iterative Techniques For Solving Linear Systems

سنوضِّح في هذا الفصل طرائق Jacobi و Gauss–Seidel للتكرار، وهي طرائق كلاسيكية تعود إلى القرن الثامن عشر. ومن النادر استخدام أساليب التكرر في حلِّ أنظمة خطية صغيرة الأبعاد، لأن الوقت المستغرق للحصول على الدقة المطلوبة يفوق ما تتطلبه أساليب أخرى مثل أسلوب تقليص (حذف) Gaussian. وفي الأنظمة الكبيرة مع نسبة عالية من العناصر الصفرية، فهذه الأساليب

كافية من حيث تخزين الحاسوب والحسابات. وتبرز أنظمة من هذا النوع غالبًا في تحليل الدوائر. وفي الحل العددي لمسائل قيمة الحدود والمعادلات التفاضلية الجزئية.

إن أسلوب التكرار لحلّ نظام خطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بحجم $n \times n$ يبدأ مع تقريب ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$ للحل $\mathbf{x}$ وتوليد متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ التي تتقارب إلى $\mathbf{x}$. وتتضمن أساليب التكرار عملية تحويل النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ إلى نظام يعادله بالصيغة $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ لمصفوفة ثابتة T ومتجه $\mathbf{c}$.

وبعد اختيار المتجه الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$ تتولّد متتالية متجهات الحل التقريبي من خلال حساب

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c} \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

وتذكرنا النتيجة هذه بتكرار النقطة الثابتة التي دُرست في الباب الثاني.

مثال 1 النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\
E_2 &: \quad -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\
E_3 &: \quad 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\
E_4 &: \quad 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15
\end{aligned}$$

له حلٌّ وحيد، وهو $\mathbf{x} = (1, 2, -1, 1)^t$. ولقلب $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ إلى الصيغة $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$، حُلَّ المعادلة E_i لـ x_i ولكل $i = 1, 2, 3, 4$ لإيجاد

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5} \\
x_2 &= \frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11} \\
x_3 &= -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10} \\
x_4 &= -\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

ولذلك يمكن تكرار كتابة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بالصيغة $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ مع

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{25}{11} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

ولتقريب ابتدائي، نضع $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$. ومن ثم فإن $\mathbf{x}^{(1)}$ يُعطى من خلال

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(0)} - \frac{1}{5}x_3^{(0)} + \frac{3}{5} = 0.6000 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(0)} + \frac{1}{11}x_3^{(0)} - \frac{3}{11}x_4^{(0)} + \frac{25}{11} = 2.2727 \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(0)} + \frac{1}{10}x_2^{(0)} + \frac{1}{10}x_4^{(0)} - \frac{11}{10} = -1.1000 \\
x_4^{(1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(0)} + \frac{1}{8}x_3^{(0)} + \frac{15}{8} = 1.8750
\end{aligned}$$

تتولّد تكرارات إضافية مثل $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)})^t$ بالأسلوب نفسه، وهي معروضة في جدول (1.7).

جدول 1.7

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^{(k)}$	0.0000	0.6000	1.0473	0.9326	1.0152	0.9890	1.0032	0.9981	1.0006	0.9997	1.0001
$x_2^{(k)}$	0.0000	2.2727	1.7159	2.053	1.9537	2.0114	1.9922	2.0023	1.9987	2.0004	1.9998
$x_3^{(k)}$	0.0000	−1.1000	−0.8052	−1.0493	−0.9681	−1.0103	−0.9945	−1.0020	−0.9990	−1.0004	−0.9998
$x_4^{(k)}$	0.0000	1.8750	0.8852	1.1309	0.9739	1.0214	0.9944	1.0036	0.9989	1.0006	0.9998

وقد كان القرار بالتوقف بعد عشر إعادات مبنيًّا على المعيار

$$\frac{\|\mathrm{x}^{(10)} - \mathrm{x}^{(9)}\|_\infty}{\|\mathrm{x}^{(10)}\|_\infty} = \frac{8.0 \times 10^{-4}}{1.9998} < 10^{-3}$$

في الواقع $\|\mathrm{x}^{(10)} - \mathrm{x}\|_\infty = 0.0002$. ■

تسمى طريقة مثال (1) بطريقة جاكوبي للتكرار Jacobi iterative method. وتتضمن حلُّ المعادلة (i) في $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ لـ x_i (بشرط $a_{ii} \neq 0$) لإيجاد

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij} x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

وتوليد كل $x_i^{(k)}$ من مركبات $\mathrm{x}^{(k-1)}$ لـ $k \geq 1$ من خلال

$$x_i^{(k)} = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) + b_i}{a_{ii}} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.7}$$

الطريقة مكتوبة بصيغة $\mathrm{x}^{(k)} = T\mathrm{x}^{(k-1)} + \mathrm{c}$ بشطر A إلى جزئيها القطري وخارجه. ولكي نرى ذلك؛ افترض المصفوفة القطرية D، وعناصرها القطرية تلك التي في A، ويمثِّل $-L$ جزء مثلث العناصر السفلي من A. أما $-U$ فيمثِّل جزء مثلث العناصر العلوي من A. ووفقًا لذلك فإن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

تنشطر إلى

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= D - L - U$$

والمعادلة $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ أو $(D - L - U)\mathrm{x} = \mathrm{b}$ بعدئذٍ تتحول إلى

$$D\mathbf{x} = (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

وإذا كان D^{-1} موجودًا. بمعنى أنه إذا كان $a_{ii} \neq 0$ لكل i فإن

$$\mathrm{x} = D^{-1}(L + U)\mathrm{x} + D^{-1}\mathrm{b}$$

إن هذه النتائج التي بصيغة مصفوفات أسلوب تكرار جاكوبي هي

$$\mathrm{x}^{(k)} = D^{-1}(L + U)\mathrm{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathrm{b}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5.7}$$

كان كارول جوستاف جاكوب جاكوبي (1804-1851) Carl Gustav Jacob Jacobi قد اشتهر في البداية بعمله في المبرهنة الأعداد ودوال بيضاوية ولكن اهتمامه وقابلياته الرياضية كانت واسعة. وكان لشخصيته القوية تأثير في تأسيس اتجاهات كثيرة كانت بمثابة النواة لتطور الرياضيات في الجامعات الألمانية في القرن التاسع عشر.

وبوضع $T_j = D^{-1}(L+U)$ و $c_j = D^{-1}b$، فإن أسلوب جاكوبي له الصيغة

$$x^{(k)} = T_j x^{(k-1)} + c_j \tag{6.7}$$

وتستخدم المعادلة (4.7) عند تطبيق الحسابات، والمعادلة (6.7) لأغراض البرهنة.

تنفذ خوارزمية (1.7) أسلوب تكرار جاكوبي.

ALGORITHM
الخوارزمية
1.7

تكرار جاكوبي Jacobi Iterative

لحلّ $Ax = b$ بوجود تقريب ابتدائي $x^{(0)}$.

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n، العناصر a_{ij} $1 \le i$, $j \le n$ للمصفوفة A، العناصر b_i، $1 \le i \le n$ لـ b. العناصر XO_i، $1 \le i \le n$ لـ $XO = x^{(0)}$. حد السماح TOL، وأكبر عدد من التكرار N.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$.
2	ما دام $(k \le N)$ فطبق الخطوات 3 – 6.
3	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $x_i = \dfrac{-\sum_{j=1, j\ne i}^{n}(a_{ij}XO_j) + b_i}{a_{ii}}$
4	إذا كان $\lVert x - XO \rVert < TOL$ فإن المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$. (العملية كانت ناجحة). توقف.
5	ضع $k = k + 1$.
6	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $XO_i = x_i$.
7	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

تتطلب الخطوة (3) من الخوارزمية كون $a_{ii} \ne 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. وإذا كان واحد من العناصر a_{ii} صفرًا، والنظام ليس مفردًا، فإنه بالإمكان تكرار ترتيب المعادلات بحيث لا نجد فيها $a_{ii} = 0$. ولتعجيل التقارب، يجب ترتيب المعادلات بحيث تكون a_{ii} أكبر ما يمكن. سيُناقَش هذا الموضوع بتفاصيل أكثر في آخر هذا الفصل.

وهناك معيار آخر محتمل للتوقف في الخطوة (4)، وذلك باستمرار التكرار حتى يكون

$$\frac{\lVert x^{(k)} - x^{(k-1)} \rVert}{\lVert x^{(k)} \rVert}$$

أصغر من حدّ السماح المثبت. ولهذا الغرض، يمكن استخدام أي معيار مناسب، وهو عادة معيار l_∞.

ويمكن مشاهدة التطوير الممكن للخوارزمية (1.7) عند تكرار النظر في المعادلة (4.7). إن مركبات $\mathbf{x}^{(k-1)}$ تُستخدم في حساب $x_i^{(k)}$، وحيث إن $x_1^{(k)},\ldots,x_{i-1}^{(k)}$ عند $i>1$ قد حُسبت، وربما توجد تقريبات أحسن للحلول الحقيقية $x_1,\ldots,x_{i-1}$ مقارنة بـ $x_1^{(k-1)},\ldots,x_{i-1}^{(k-1)}$، ويبدو لنا أنه من المنطق حساب $x_i^{(k)}$ مستخدمين أحدث هذه القيم المحسوبة، أي أنه يمكننا استخدام

$$x_i^{(k)}=\frac{-\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}x_j^{(k)})-\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}x_j^{(k-1)})+b_i}{a_{ii}} \tag{7.7}$$

لكلٍّ من $i=1,2,\ldots,n$ بدلًا من المعادلة (4.7). ويسمى هذا التعديل بأسلوب تكرار جاوس – سيدل Gauss-Seidel iterative technique ويتضح في مثال الآتي:

مثال 2

النظام الخطي المعطى من خلال

$$\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 \quad &= 6\\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25\\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11\\
3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15
\end{aligned}$$

عمل فيليب لودوك فون سيدل (1821-1896) Philip Ludwig von seidel كمساعد لجاكوبي. يقوم بحلّ مسائل فينظم معادلات خطية ناتجة عن عمل غاوس Gause في المربعات الصغرى. هذه المعادلات عموما لها عناصر خارج القطر كانت اصغر كثيرا من تلك القطرية. وبالتالي كانت طرق التكرار ذات فاعلية بشكل خاص. إن أسلوبي التكرار المعروفين حاليا بجاكوبي وغاوس – سيدل كانا معروفين بغاوس قبل تطبيقهما على هذه الحالة. ولكن نتائج غاوس لم تكن متداولة بكثرة

قد حُلّ في مثال (1) بطريقة تكرار جاكوبي. وبدمج المعادلة (7.7) ضمن الخوارزمية (1.7) نحصل على المعادلات التي تُستخدم لكل من $k=1,2,\ldots$، وهي

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \qquad\qquad\quad \tfrac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \tfrac{1}{5}x_3^{(k-1)} \qquad\qquad + \tfrac{3}{5}\\
x_2^{(k)} &= \tfrac{1}{11}x_1^{(k)} \qquad\qquad + \tfrac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \tfrac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \tfrac{25}{11}\\
x_3^{(k)} &= -\tfrac{1}{5}x_1^{(k)} + \tfrac{1}{10}x_2^{(k)} \qquad\qquad + \tfrac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \tfrac{11}{10}\\
x_4^{(k)} &= \qquad\qquad -\tfrac{3}{8}x_2^{(k)} + \tfrac{1}{8}x_3^{(k)} \qquad\qquad + \tfrac{15}{8}
\end{aligned}$$

وبوضع $\mathbf{x}^{(0)}=(0,0,0,0)^t$، يمكننا توليد التكرارات في جدول (2.7).

جدول 2.7

k	0	1	3	2	4	5
$x_1^{(k)}$	0.0000	0.6000	1.0065	1.030	1.0009	1.0001
$x_2^{(k)}$	0.0000	2.3272	2.0036	2.037	2.0003	2.0000
$x_3^{(k)}$	0.0000	−0.9873	−1.0025	−1.014	−1.0003	−1.0000
$x_4^{(k)}$	0.0000	0.8789	0.9983	0.9844	0.9999	1.0000

ولأن

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(5)}-\mathbf{x}^{(4)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(5)}\|_\infty}=\frac{0.0008}{2.000}=4\times10^{-4}$$

فإن $\mathbf{x}^{(5)}$ قُبلت بوصفها تقريبًا معقولًا للحل. انظر إلى طريقة جاكوبي في مثال ( ) تطلبت ضعف عدد مرات التكرار وبالدقة نفسها. ■

ولكتابة طريقة جاوس – سيدل Gauss–Seidel بصيغة المصفوفة؛ اضرب طرفي المعادلة (7.7) في المقدار a_{ii}. ومن ثم اجمع كل حدود التكرار في الرتبة k لتحصل على

$$a_{i1}x_1^{(k)} + a_{i2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{ii}x_i^{(k)} = -a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k-1)} + b_i$$

لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, n$. وبكتابة المعادلات جميعها وعددها n نحصل على

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1^{(k)} \qquad\qquad\qquad &= -a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1\\
a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} \qquad &= \qquad\qquad - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2\\
&\ \vdots\\
a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(k)} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_n
\end{aligned}$$

ومع تعريفات D, L, U المعطاة سابقًا، يكون لدينا طريقة Gauss–Seidel الممثَّلة من خلال

$$(D - L)\mathrm{x}^{(k)} = U\mathrm{x}^{(k-1)} + \mathrm{b}$$

أو

$$\mathrm{x}^{(k)} = (D - L)^{-1}U\mathrm{x}^{(k-1)} + (D - L)^{-1}\mathrm{b} \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{8.7}$$

وبوضع $T_g = (D - L)^{-1}U$ و $\mathrm{c}_g = (D - L)^{-1}\mathrm{b}$، فإن صيغة أسلوب Gauss–Seidel تصبح

$$\mathrm{x}^{(k)} = T_g\mathrm{x}^{(k-1)} + \mathrm{c}_g \tag{9.7}$$

وكي لا تكون مصفوفة المثلث الأدني $D - L$ ($D - L$ lower-triangle) مفردة؛ يتحتم بالضرورة كون $a_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

تنفذ خوارزمية (2.7) طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel.

ALGORITHM

الخوارزمية 2.7

تكرار جاوس – سيدل Gauss–Seidel Iterative

لحلِّ $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ بوجود تقريب ابتدائي $\mathrm{x}^{(0)}$.

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n. العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر $b_i, 1 \le i \le n$ لـ b. العناصر $XO_i, 1 \le i \le n$ لِـ $\mathrm{XO} = \mathrm{x}^{(0)}$. حد السماح TOL، وأكبر عدد من التكرار N.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار N قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$
2	ما دام $(k \le N)$ فطبِّق الخطوات 3 – 6.
3	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $x_i = \dfrac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}XO_j + b_i}{a_{ii}}$

4	إذا كان $\|\|x - XO\|\| < TOL$ فإن المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$. (العملية كانت ناجحة). توقف
5	ضع $k = k + 1$.
6	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $XO_i = x_i$.
7	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

تُطبّق التعليقات التي تتضمنها الخوارزمية (1.7) والمتعلّقة بتكرار الأمر ومعيار التوقف على خوارزمية Gauss–Seidel (2.7).

إن نتائج مثالين (1) و (2) تشير إلى أن طريقة جاوس – سيدل Gauss–Seidel متفوقة على طريقة جاكوبي، وهذا صحيح دائمًا. ولكن هناك أنظمة خطية نجد معها أن طريقة جاكوبي تتقارب، أما طريقة Gauss–Seidel فليست كذلك. (انظر التمرينين 17 و 18). لدراسة تقارب أساليب التكرار عمومًا، دعنا نفترض الصيغة

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$$ لكل $k = 1, 2, \ldots$، حيث إن $x^{(0)}$ عشوائية.

مبرهنة 18.7 إذا كان $\rho(T)$ يحقّق $\rho(T) < 1$، فإن $(I - T)^{-1}$ موجود وإن

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$$

■

البرهان بما أن $Tx = \lambda x$ صحيحة عندما تكون λ قيمة مميزة لـ T بالتحديد وعندما تكون $1 - \lambda$ تحديدًا قيمة مميزة لـ $(I - T)$. ولكن $|\lambda| \le \rho(T) < 1$ فإن $\lambda = 1$ ليست قيمة مميزة لـ T، ولا يمكن أن يكون 0 قيمة مميزة لـ $I - T$. ولذلك فإن $(I - T)^{-1}$ موجودة.

ليكن $S_m = I + T + T^2 + \cdots + T^m$. لذلك

$$(I - T)S_m = (1 + T + T^2 + \cdots + T^m) - (T + T^2 + \cdots + T^{m+1}) = I - T^{m+1}$$

ولأن T متقاربة، فإن النتيجة في نهاية الفصل (2.7) تؤدي إلى

$$\lim_{m\to\infty} (I - T)S_m = \lim_{m\to\infty} (I - T^{m+1}) = I$$

ولذلك

$$(I - T)^{-1} = \lim_{m\to\infty} S_m = I + T + T^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$$

■ ■ ■

مبرهنة 19.7 لأي $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$، فإن المتتالية $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفة من خلال

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c \quad (\text{لكل } k \ge 1) \tag{10.7}$$

تتقارب إلى الحل الوحيد $x = Tx + c$ إذا وفقط إذا كان $\rho(T) < 1$.

■

البرهان لنفترض أولاً $\rho(T) < 1$، ومن ثم

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= Tx^{(k-1)} + c \\ &= T(Tx^{(k-2)} + c) + c \\ &= T^2x^{(k-2)} + (T + I)c \\ &\vdots \\ &= T^kx^{(0)} + (T^{k-1} + \cdots + T + I)c. \end{aligned}$$

ولأن $\rho(T) < 1$، فإن المصفوفة T متقاربة و

$$\lim_{k\to\infty} T^kx^{(0)} = 0$$

تؤدي المبرهنة 18.7 إلى أن

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} T^kx^{(0)} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right)c = 0 + (I - T)^{-1}c = (I - T)^{-1}c$$

ولذلك فإن المتتالية $\{x^{(k)}\}$ تتقارب إلى المتجه $x \equiv (I - T)^{-1}c$ و $x = Tx + c$.

ولبرهنة الاتجاه العكسي؛ نثبت أنه لأي $z \in \mathbb{R}^n$ لدينا $\lim_{k\to\infty} T^kz = 0$. ووفقاً للامبرهنة (17.7)؛ فإن هذا مكافئ لـ $\rho(T) < 1$.

ليكن z متجهاً عشوائيًا و x حلاً وحيداً لـ $x = Tx + c$. عرف $x^{(0)} = x - z$. وأن $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$، لكل $k \geq 1$. ولذلك فإن $\{x^{(k)}\}$ تتقارب إلى x. وأيضاً

$$x - x^{(k)} = (Tx + c) - (Tx^{(k-1)} + c) = T(x - x^{(k-1)})$$

لذلك

$$x - x^{(k)} = T(x - x^{(k-1)}) = T^2(x - x^{(k-2)}) = \cdots = T^k(x - x^{(0)}) = T^kz$$

والنتيجة أن $\lim_{k\to\infty} T^kz = \lim_{k\to\infty} T^k(x - x^{(0)}) = \lim_{k\to\infty}(x - x^{(k)}) = 0$ ولأن $z \in \mathbb{R}^n$ كان عشوائيًا. فإن هذا يؤدي إلى كون T مصفوفة متقاربة وأن $\rho(T) < 1$. ■ ■ ■

برهان التمهيدية التالية يشبه البراهين التي استعملت في التمهيدية 4.2. وقد أخذت بعين الاعتبار في التمرين 21.

تمهيدية 20.7 إذا كان $\|T\| < 1$ لأي معيار مصفوفة طبيعية. و c متجهًا معلومًا فإن المتتالية $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفة من خلال $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ تتقارب - لأي $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ - إلى متجه $x \in \mathbb{R}^n$ وإن حدود الخطأ الآتية تحقق:

أ. $\|x - x^{(k)}\| \leq \|T\|^k\|x^{(0)} - x\|$

ب. $\|x - x^{(k)}\| \leq \dfrac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$. ■

لقد لاحظنا أن أسلوبي جاكوبي و Gauss–Seidel للتكرار يمكن كتابتهما بالصيغة

$$x^{(k)} = T_gx^{(k-1)} + c_g \quad \text{و} \quad x^{(k)} = T_jx^{(k-1)} + c_j$$

باستخدام المصفوفتين

$T_g = (D - L)^{-1}U$ و $T_j = D^{-1}(L + U)$.

وإذا كانت $\rho(T_j)$ أو $\rho(T_g)$ أقل من 1 فإن المتتالية المقابلة $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ ستتقارب لحلّ x لـ $Ax = b$. وعلى سبيل المثال فإن منهجية جاكوبي فيها

$$x^{(k)} = D^{-1}(L + U)x^{(k-1)} + D^{-1}b$$

وإذا كانت $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تتقارب إلى x فإن

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$Dx = (L + U)x + b \quad \text{و} \quad (D - L - U)x = b$$

ولأن $D - L - U = A$، فإن الحل x يحقق $Ax = b$.

ويمكننا الآن إعطاء شروط وافية وسهلة التحقق لتقارب طريقتي جاكوبي و Gauss-Seidel. (ولبرهنة التقارب في منهجية جاكوبي، انظر التمرين 22 ولمنهجية Gauss-Seidel انظر [Or2, p. 120].)

مبرهنة 21.7 إذا كانت A تتصف حصريًا بالقطرية فإن كلتا الطريقتين جاكوبي و Gauss-Seidel تعطيان – مقابل أي اختيار لِـ $x^{(0)}$ – متتالية $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تتقارب إلى الحل الوحيد لـ $Ax = b$. ■

إن علاقة التقارب المتسارع بنصف القطر الطيفي لمصفوفة التكرار T يمكن ملاحظتها من خلال النتيجة (20.7)، وبسبب تحقق المتباينات لأي معيار مصفوفة طبيعية، فإننا نستنتج من العبارة ما بعد المبرهنة (15.7) أن

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \approx \rho(T)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\| \tag{11.7}$$

ولذلك، يفضل اختيار أسلوب التكرار المتصف بأدنى $\rho(T) < 1$ لنظام منته $Ax = b$. ونظرًا لعدم ظهور نتائج عامة، فليس بوسعنا تحديد أي الأسلوبين جاكوبي أو جاوس–سيدل Gauss-Seidel الأكثر نجاحًا لنظام خطي عشوائي. وفي حالات خاصة يكون الجواب معروفًا كما تناولنا في المبرهنة الآتية. إن برهان هذه النتيجة يمكن إيجاده في [Y, pp. 120–127].

مبرهنة 22.7 ستين – روزنبرغ Stein-Rosenberg

إذا كان $a_{ik} \leq 0$ لكل $i \neq k$ و $a_{ii} > 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإن واحدة وواحدة فقط من العبارات الآتية تتحقق

أ. $0 \leq \rho(T_g) < \rho(T_j) < 1$

ب. $1 < \rho(T_j) < \rho(T_g)$

ج. $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 0$

د. $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 1$ ■

أما الحالة الخاصة التي وُضّحت في المبرهنة (22.7)، فبالنظر إلى العبارة (أ) أنه عندما تعطي إحدى الطرائق تقاربًا، فإن كلتيهما تعطيان تقاربًا، وأن طريقة Gauss-Seidel تتقارب أسرع من طريقة جاكوبي. وتشير العبارة (ب) إلى أنه عندما تتباعد إحدى الطريقتين فإن كلتيهما

تتباعدان. وأن التباعد يكون أكثر وضوحًا في طريقة Gauss-Seidel.

ولما كان معدل التقارب لعملية ما يعتمد على نصف القطر الطيفي للمصفوفة المرتبطة بالطريقة، فإن هناك طريقًا واحدًا لاختيار عملية تسريع التقارب. وهو اختيار طريقة يكون للمصفوفة المرتبطة بها نصف قطر طيفي. وقبل الدخول في شرح عملية ما لاختيار مثل هذه الطريقة نحتاج إلى تقديم وسائل جديدة لقياس حجم الاختلاف ما بين تقريب الحل لنظام خطي والحل الصحيح للنظام. تستخدم الطريقة المتجه الموضح في تعريف الآتي.

تعريف 23.7 افترض $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ عبارة عن تقريب لحلِّ النظام الخطي المعرف من خلال $Ax = b$. إن متجه البواقي residual vecto لـ $\tilde{x}$ بالنسبة إلى هذا النظام هو $r = b - A\tilde{x}$. ■

الباقي يعني ما تم تركه. وهو اسم مناسب لهذا المتجه

وفي أساليب مثل طريقة جاكوبي أو Gauss-Seidel. يكون متجه البواقي مرتبطًا بكل عملية حساب لمركبة تقريب إلى متجه الحل. والهدف هو توليد متتالية للتقريبات التي تقرب متجهات البواقي أسرع نحو الصفر. ولنفترض أن

$$r_i^{(k)} = (r_{1i}^{(k)}, r_{2i}^{(k)}, \ldots, r_{ni}^{(k)})^t$$

يمثل متجه البواقي لطريقة Gauss-Seidel المقترن بمتجه الحل التقريبي $x_i^{(k)}$ المعرف من خلال

$$x_i^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})^t$$

إن المركبة من رتبة m لـ $r_i^{(k)}$ هي

$$r_{mi}^{(k)} = b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{mj} x_j^{(k-1)} \qquad (12.7)$$

أو بما يساويها

$$r_{mi}^{(k)} = b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{mj} x_j^{(k-1)} - a_{mi} x_i^{(k-1)}$$

لكل $m = 1, 2, \ldots, n$.

فإن مركبة $r_i^{(k)}$ من رتبة i خصوصًا تكون

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} - a_{ii} x_i^{(k-1)}$$

وبذلك فإن

$$a_{ii} x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \qquad (13.7)$$

تذكر أنه في طريقة Gauss-Seidel يُختار $x_i^{(k)}$ ليكون

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right] \qquad (17.4)$$

ولذلك يمكن تكرار كتابة المعادلة (13.7) بالصيغة

$$a_{ii}x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = a_{ii}x_i^{(k)}$$

والنتيجة أن طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel يمكن تمييزها باختيار $x_i^{(k)}$ لتحقيق

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \qquad (15.7)$$

وبالإمكان اشتقاق رابط آخر بين متجهات البواقي وأسلوب جاوس–سيدل Gauss–Seidel. لنفترض أن متجه البواقي $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ مرتبط بالمتجه $\mathbf{x}_{i+1}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})^t$. ووفقًا للمعادلة (12.7)، فإن المركبة من رتبة i لـ $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ هي

$$r_{i,i+1}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k)}$$

تؤدي المعادلة (14.7) إلى أن $r_{i,i+1}^{(k)} = 0$، بمعنى أن أسلوب Gauss-Seidel يتميز باختيار $x_{i+1}^{(k)}$ بطريقة تكون فيها مركبة $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ من رتبة i صفرًا.

إن اختيار $x_{i+1}^{(k)}$ بحيث يكون أحد إحداثيات متجه البواقي صفرًا ليس بالطريقة الوافية جدًا لتقليل معيار المتجه $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$، ولو عدلنا أسلوب جاوس–سيدل Gauss–Seidel كما هو معطى في المعادلة (15.7) ليكون

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega\frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \qquad (16.7)$$

إزاء اختيارات منتهية لـ ω موجبة، لاستطعنا تقليل معيار متجه البواقي والوصول إلى تقارب أسرع معنويًا. تسمى الطرائق التي تتضمن المعادلة (16.7) طرائقَ السكون relaxation methods.

وعند اختيارات ω مع $0 < \omega < 1$، فإن العملية تسمى طرائق ما دون السكون under-relaxation methods، ويمكن استخدامها في إيجاد تقارب لبعض الأنظمة التي ليست متقاربة وفقًا لطريقة Gauss–Seidel. وعند اختيارات ω مع $1 < \omega$، فإن العمليات تسمى طرائق ما فوق السكون over-relaxation وتستخدم في تسريع تقارب أنظمة متقاربة وفقًا لطريقة Gauss–Seidel. ويرمز إلى هذه الطرائق بـ SOR اختصارًا لـ Successive Over-Relaxation. وهي مفيدة خاصة في حل الأنظمة الخطية التي تظهر في الحل العددي لمعادلات تفاضلية جزئية معينة.

وقبل شرح إيجابيات طريقة SOR، نلاحظ انه باستخدام المعادلة (13.7)، فإن المعادلة (16.7) يمكن تكرار صياغتها لأغراض حساب

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$$

ولتحديد مصفوفة طريقة SOR، نعيد كتابة هذه لتكون

$$a_{ii}x_i^{(k)} + \omega\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k-1)} - \omega\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + \omega b_i$$

وبصيغة المصفوفات يكون لدينا

$$(D - \omega L)\mathbf{x}^{(k)} = [(1 - \omega)D + \omega U]\mathbf{x}^{(k-1)} + \omega \mathbf{b}$$

أو

$$\mathbf{x}^{(k)} = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]\mathbf{x}^{(k-1)} + \omega(D - \omega L)^{-1}\mathbf{b} \qquad (17.7)$$

وإذا جعلنا $T_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$ و $\mathbf{c}_\omega = \omega(D - \omega L)^{-1}\mathbf{b}$ فإن صيغة أسلوب SOR هي

$$\mathbf{x}^{(k)} = T_\omega \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}_\omega \qquad (18.7)$$

مثال 3 النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 \qquad &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ - x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

له حلّ $(3, 4, -5)^t$. إن طريقة Gauss–Seidel وطريقة SOR مع ω=1.25 سوف تستخدم في حلّ هذا النظام مستخدمين $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ لكلتا الطريقتين. ولكل $k = 1, 2, \ldots$، فإن معادلات طريقة Gauss–Seidel هي

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= -0.75x_2^{(k-1)} + 6 \\ x_2^{(k)} &= -0.75x_1^{(k)} + 0.25x_3^{(k-1)} + 7.5 \\ x_3^{(k)} &= 0.25x_2^{(k)} - 6 \end{aligned}$$

ومعادلات طريقة SOR مع ω =1.25 هي

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= -0.25x_1^{(k-1)} - 0.9375x_2^{(k-1)} + 7.5 \\ x_2^{(k)} &= -0.9375x_1^{(k)} - 0.25x_2^{(k-1)} + 0.3125x_3^{(k-1)} + 9.375 \\ x_3^{(k)} &= 0.3125x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k-1)} - 7.5 \end{aligned}$$

إن أول سبع إعادات لكل طريقة مدونة في جدولين (3.7) و (4.7). ولكي تكون التكرار دقيقة لسبع خانات عشرية ، فإن طريقة Gauss–Seidel تتطلب 34 تكرار مقابل 14 تكرار لطريقة ما فوق السكون مع ω =1.25 . ■

جدول 3.7 جاوس – سيدل

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	5.250000	3.1406250	3.0878906	3.0549316	3.0343323	3.0214577	3.0134110
$x_2^{(k)}$	1	3.812500	3.8828125	3.9267578	3.9542236	3.9713898	3.9821186	3.9888241
$x_3^{(k)}$	1	−5.046875	−5.0292969	−5.0183105	−5.0114441	−5.0071526	−5.0044703	−5.0027940

جدول 4.7 SOR مع ω =1.25

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	6.312500	2.6223145	3.1333027	2.9570512	3.0037211	2.9963276	3.0000498
$x_2^{(k)}$	1	3.5195313	3.9585266	4.0102646	4.0074838	4.0029250	4.0009262	4.0002586
$x_3^{(k)}$	1	−6.6501465	−4.6004238	−5.0966863	−4.9734897	−5.0057135	−4.9982822	−5.0003486

والسؤال التلقائي هنا: كيف تُختار قيمة ω المناسبة؟ وعلى الرغم من عدم معرفة الجواب الكلي لهذا التساؤل بالنسبة إلى نظام خطي برتبة $n\times n$، فإنه يمكن استخدام المبرهنة الآتية في بعض الحالات.

مبرهنة 24.7 كاهان kahan

إذا كان $a_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإن $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$. يؤدي هذا إلى أن طريقة SOR يمكنها التقارب فقط إذا كانت $0 < \omega < 2$.

قد أُخِذ برهان هذه المبرهنة في الحسبان في التمرين (23). وإن برهان النظريتين الآتيتين يمكن إيجاده في [Or2, pp. 123–133]، وسوف يُستخدم في الفصل (12). ■

مبرهنة 25.7 أوستروسكي – ريخ Ostrowski - Reich

إذا كانت A مصفوفة بصفة إيجابي واضح positive definite و $0 < \omega < 2$، فإن طريقة SOR تتقارب لأي اختيار إلى متجه التقريب الابتدائي $x^{(0)}$. ■

مبرهنة 26.7 إذا كانت A مصفوفة بصفة إيجابي واضح positive definite ثلاثية الأقطار فإن $\rho(T_g) = [\rho(T_j)]^2 < 1$ والاختيار الأمثل لـ ω لطريقة SOR هو

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}}$$

ومع اختيار ω ، يكون لدينا $\rho(T_\omega) = \omega - 1$. ■

مثال 4 المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$ ■

المعطاة في مثال (3)، هي بصفة إيجابي واضح ثلاثية الأقطار. ولذلك فإن لمبرهنة (26.7) تنطبق عليها. وحيث إن

$$T_j = D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

يكون لدينا

$$T_j - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -0.75 & 0 \\ -0.75 & -\lambda & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -\lambda \end{bmatrix}$$

ولذلك فإن $\det(T_j - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 0.625)$. ومن ثم

$$\rho(T_j) = \sqrt{0.625} \text{ و } \omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 0.625}} \approx 1.24$$

هذا يوضِّح التقارب السريع الذي وُجد في مثال (1) عند استخدام $\omega = 1.25$. ■

ALGORITHM
الخوارزمية
3.7

نختم هذا الفصل بالخوارزمية 3.7 لطريقة SOR.

SOR

لحلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بوجود المتغيرة ω وتقريب ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$؛

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n. العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر b_i لـ $1 \le i \le n$، العناصر $XO_i, 1 \le i \le n$ لـ $\mathbf{XO} = \mathbf{x}^{(0)}$، المتغيرة ω. حد السماح TOL. وأكبر عدد من الإعادات N.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$
2	ما دام $(k \le N)$ فطبّق الخطوات 3 − 6.
3	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $x_i = (1 - \omega) XO_i + \dfrac{\omega\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} XO_j + b_i\right)}{a_{ii}}$
4	إذا كان $\Vert\mathbf{x} - \mathbf{XO}\Vert < TOL$ فإن المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$. (العملية كانت ناجحة). توقف.
5	ضع $k = k + 1$
6	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $XO_i = x_i$.
7	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 3.7

1. أوجد أول تكرارين لطريقة جاكوبي للأنظمة الخطية الآتية مستخدمًا $\mathbf{x}^{(0)} = 0$:

أ.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 \qquad\quad &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 \qquad\qquad &= 6, \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 \qquad &= 25, \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ -x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + \qquad\quad x_5 &= 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \qquad &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 \qquad &= 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6 \end{aligned}$$

2. أوجد أول إعادتين لطريقة جاكوبي للأنظمة الخطية الآتية مستخدمًا $x^{(0)} = 0$:

أ.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -4 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_2 + 4x_3 &= 0 \\ +4x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2 \\ -x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

3. كرِّر التمرين (1) مستخدمًا طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel.

4. كرِّر التمرين (2) مستخدمًا طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel.

5. استخدم طريقة جاكوبي لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (1)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

6. استخدم طريقة جاكوبي لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (2)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

7. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (1)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

8. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (2)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

9. أوجد أول إعادتين لطريقة SOR مع $\omega = 1.1$ للأنظمة الخطية الآتية مستخدما $x^{(0)} = 0$:

أ.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25 \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ -x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6 \end{aligned}$$

10. أوجد أول تكرارين لطريقة SOR مع $\omega = 1.1$ للأنظمة الخطية الآتية مستخدمًا $x^{(0)} = 0$:

أ.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -4 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_2 + 4x_3 &= 0 \\ +4x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2 \\ -x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

11. كرِّر التمرين (9) مستخدمًا $\omega = 1.3$.

12. كرِّر التمرين (10) مستخدما $\omega = 1.3$.

13. استخدم طريقة SOR مع $\omega = 1.2$ لحلّ الأنظمة الخطية في التمرين (9) بحد سماح $TOL = 10^{-3}$ في المعيار l_∞.

14. استخدم طريقة SOR مع $\omega = 1.2$ لحلّ الأنظمة الخطية في التمرين (10) بحد سماح $TOL = 10^{-3}$ في المعيار l_∞.

15. حدّد أيٌّ من المصفوفات في التمرين (9) بصفة إيجابي واضح ثلاثية الأقطار. كرر التمرين (9) لهذه المصفوفات مستخدما الاختيار الأمثل لـω.

16. حدّد أيٌّ من المصفوفات في التمرين (10) بصفة إيجابي واضح ثلاثية الأقطار. كرر التمرين (10) لهذه المصفوفات مستخدما الاختيار الأمثل لـω.

17. النظام الخطي

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

له حلّ $(1, 2, -1)^t$.

أ. أثبت أن $\rho(T_j) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

ب. أثبت أن طريقة جاكوبي مع $x^{(0)} = 0$ تفشل في إعطاء تقريب جيد بعد 25 تكرار.

ج. أثبت أن $\rho(T_g) = \frac{1}{2}$.

د. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel مع $x^{(0)} = 0$ لتقريب حلّ النظام الخطي ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞.

18. النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

له حلّ $(1, 2, -1)^t$.

أ. أثبت أن $\rho(T_j) = 0$.

ب. استخدم طريقة جاكوبي مع $x^{(0)} = 0$ لتقريب حلّ النظام الخطي ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞.

ج. أثبت أن $\rho(T_g) = 2$.

د. أثبت أن طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel المطبقة في (ب) تفشل في إعطاء تقريب جيد بعد 25 تكرار.

19. النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0.2, \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= -1.425 \\ x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

له حلّ $(0.9, -0.8, 0.7)^t$.

أ. هل معاملات المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ذات طابع قطري؟

ب. احسب نصف القطر الطيفي لمصفوفة جاوس–سيدل Gauss–Seidel T_g.

ج. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel للتكرار لتقريب حلّ النظام الخطي بحد سماح 10^{-2} و 300 تكرار بوصفه حدًّا أعلى.

د. ماذا يحدث في (ج) عندما يتغير النظام إلى

$$\begin{aligned} x_1 - \qquad\quad 2x_3 &= 0.2 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= -1.425 \\ x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

20. كرر التمرين (19) مستخدمًا طريقة جاكوبي.

21. أ. برهن أن $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \le \|T\|^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|$ و $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \le \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$ حيث إن T مصفوفة بحجم $n \times n$ مع $\|T\| < 1$ وأن $k = 1, 2, \ldots$ ، $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ مع قيمة عشوائية $\mathbf{x}^{(0)}$، $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ و $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$.

ب. طبّق الحدود في التمرين (1) كلما كان ذلك ممكنًا مستخدمًا المعيار l_∞.

22. أثبت أنه لو كانت A ذات طابع قطري فإن $\|T_j\|_\infty < 1$.

23. برهن المبرهنة (24.7). [تلميح: إذا كانت $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ قيمًا مميزة لـ T_ω فإن $\det T_\omega = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. وبما أن $\det D^{-1} = \det(D - \omega L)^{-1}$ ومنتهى حاصل ضرب مصفوفات هو حاصل ضرب منتهات العوامل، فإن النتيجة تظهر من المعادلة (17.7).]

24. افترض وجود هدف عند أي من $n + 1$ من النقاط متساوية الأبعاد $x_0, x_1, \ldots, x_n$. وعندما يكون الهدف عند الموقع x_i، فإن له الفرصة نفسها للتحرك إلى x_{i-1} أو إلى x_{i-1} دون إمكانية تحركه مباشرةً إلى أي موقع آخر. اعتمد الاحتمالات $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ لهدف ما يبدأ عند الموقع x_i ويصل إلى النقطة اليسرى x_0 قبل وصوله إلى النقطة اليمنى x_n. ومن الواضح أن $P_0 = 1$ و $P_n = 0$. وبما أن الهدف يمكنه أن يتحرك في اتجاه x_i فقط من x_{i-1} أو x_{i+1} باحتمال مقداره $\frac{1}{2}$ لكلٍّ من هذين الموقعين، فإن $P_i = \frac{1}{2}P_{i-1} + \frac{1}{2}P_{i+1}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

أ. أثبت أن

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب. حُلّ هذا النظام مستخدمًا $n = 10, 50, 100$.

ج. غيِّر الاحتمال إلى α و $1 - \alpha$ للحركة إلى اليسار واليمين على التوالي، واشتق نظامًا خطيًا شبيهًا بالذي في (أ).

د. كرِّر (ب) مع $\alpha = \frac{1}{3}$.

25. استخدم الطرائق جميعها القابلة للتطبيق في هذا الفصل في حلّ النظام الخطي $Ax = b$ ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞، حيث عناصر A هي $j = i$ و $i = 1, 2, \ldots, 16$.

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 80 \\ 0.5i, & \text{حيث } \begin{cases} j = i + 2 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 78 \\ j = i - 2 \text{ و } i = 3, 4, \ldots, 80 \end{cases} \\ 0.25i, & \text{حيث } \begin{cases} j = i + 4 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 76 \\ j = i - 4 \text{ و } i = 5, 6, \ldots, 80 \end{cases} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و عناصر b هي $b_i = \pi$ لكل $i = 1, 2, \ldots, 80$.

26. افترض أن A إيجابي واضح:

أ. أثبت أنه يمكننا كتابة $A = D - L - L^t$، حيث إن D قطري مع $d_{ii} > 0$ لكل $1 \le i \le n$ ويمثِّل L المثلث السفلي. وأبعد من هذا، أثبت أن $D - L$ غير مفردة.

ب. ليكن $T_g = (D - L)^{-1} L^t$ و $P = A - T_g^t A T_g$، أثبت أن P متماثل.

ج. أثبت أن T_g يمكن كتابته $T_g = I - (D - L)^{-1} A$ أيضًا.

د. ليكن $Q = (D - L)^{-1} A$، أثبت أن $T_g = I - Q$ و $P = Q^t [A Q^{-1} - A + (Q^t)^{-1} A] Q$.

هـ. أثبت أن $P = Q^t D Q$، وأن P إيجابي واضح.

و. لتكن λ قيمة مميزة لـ T_g مع متجه مميز $x \ne 0$. استخدم الفقرة (ب) في إثبات أن $x^t P x > 0$ يؤدي إلى $|\lambda| < 1$.

ز. أثبت أن T_g متقاربة، وبرهن أن طريقة Gauss–Seidel تتقارب.

27. وسِّع طريقة البرهان في التمرين (26) إلى طريقة SOR مع $0 < \omega < 2$.

28. تحقق القوى على دعائم الجسر الموضحة في مقدمة هذا الفصل المعادلات في الجدول الآتي:

المفصل	المركبة الأفقية	المركبة العمودية
①	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - F_2 = 0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - f_3 - \frac{1}{2} f_4 = 0$
③	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 10{,}000 = 0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2} f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2} f_4 - F_3 = 0$

ويمكن وضع هذا النظام الخطي بصيغة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10{,}000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أ. وضِّح لماذا أعيد ترتيب نظام المعادلات.

ب. قرِّب حَلّ النظام الخطي الناتج ضمن 10^{-2} في المعيار l_∞ مستخدمًا كل متجه عناصره الواحدات و(i) طريقة Gauss–Seidel، (ii) طريقة جاكوبي، و (iii) طريقة SOR مع $\omega = 1.25$.

4.7 حدود الخطأ والتنقية الإرجاعية Error Bounds and Interative Refinement

يبدو الأمر معقولاً بديهيًا في حال كان $\tilde{x}$ تقريبًا للحلّ x إلى $Ax = b$، وأن متجه البواقي $r = b - A\tilde{x}$ له خاصية كون $\|r\| = \|b - A\tilde{x}\|$ صغيرًا، فإن $\|x - \tilde{x}\|$ سيكون صغيرًا كذلك. هذه الحالة هي الغالبة، ولكن بعض الأنظمة التي تظهر عادةً في التطبيق تفشل في أن يكون لها مثل هذه الصفة.

مثال 1 النظام الخطي $Ax = b$ الآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

له حلٌّ وحيد $x = (1, 1)^t$. التقريب الضعيف $\tilde{x} = (3, 0)^t$ له متجه بواقي

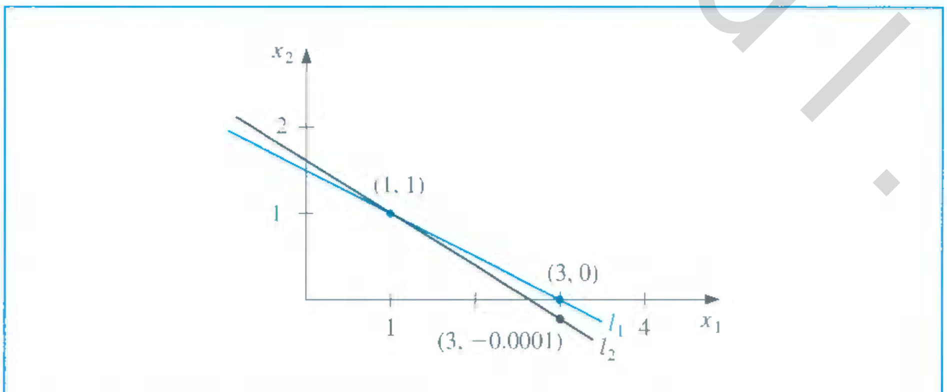
$$r = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0002 \end{bmatrix}$$

ومن ثم $\|r\|_\infty = 0.0002$. ومع كون معيار متجه البواقي صغيرًا، فإن لتقريب $\tilde{x} = (3, 0)^t$ سيكون بلا شك صغيرًا نسبيًا. وفي الحقيقة $\|x - \tilde{x}\|_\infty = 2$. ■

اتضحت الصعوبة في مثال (1) من خلال ملاحظة كون حلِّ النظام يمثِّل تقاطع الخطين $l_1: x_1 + 2x_2 = 3$ و $l_2: 1.0001x_1 + 2x_2 = 3.0001$.

إن النقطة $(3, 0)$ تقع على l_1، وإن الخطين متوازيان تقريبًا. هذا يؤدي إلى كون $(3, 0)$ قريبة من l_2 أيضًا. على الرغم من أنها تفترق معنويًا عن حلِّ النظام المعطى من خلال التقاطع $(1, 1)$ (انظر شكل7.7)

شكل7.7



بُني مثال (1) بوضوح لإثبات الصعوبات التي يمكن أن تظهر (وإنها في الواقع تظهر). وفي حالة كون الخطين ليسا متطابقين تقريبًا، فإننا نتوقع أن يعطي متجه بواقٍ صغير تقريبًا دقيقًا. لا يمكننا الاعتماد على الصيغة الهندسية للنظام عمومًا لإعطاء مؤشر عن توقيت ظهور المشاكل

ويمكننا إيجاد هذه المعلومة من خلال افتراض معايير المصفوفة A ومعكوسها.

مبرهنة 27.7 افترض أن $\bar{x}$ هو تقريب لحل $Ax = b$. A مصفوفة غير مفردة و r هو متجه البواقي إلى $\bar{x}$. ومن ثم فإنه لأي معيار طبيعي ينتج $\|x - \bar{x}\| \le \|r\| \cdot \|A^{-1}\|$. وإذا كان $x \neq 0$ و $b \neq 0$ فإن

$$\frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|} \tag{19.7}$$

■

البرهان بما أن $r = b - A\bar{x} = Ax - A\bar{x}$ و A غير مفردة، فإن $x - \bar{x} = A^{-1}r$. تؤدي المبرهنة (11.7) في الفصل (1.7) إلى أن $\|x - \bar{x}\| = \|A^{-1}r\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|r\|$.

والأكثر من ذلك، بما أن $b = Ax$. يكون لدينا $\|b\| \le \|A\| \cdot \|x\|$. ولذلك فإن $1/\|x\| \le \|A\|/\|b\|$

و
$$\frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|} \le \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{\|b\|}\|r\|$$

■ ■ ■

تؤدي المتباينات في المبرهنة (27.7) إلى أن $\|A^{-1}\|$ و $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ توفران مؤشرًا للربط بين متجه البواقي ودقة التقريب. وإن الخطأ النسبي $\|x - \bar{x}\|/\|x\|$ ذو أهمية كبيرة عمومًا. ومن خلال المتباينة (19.7) يكون هذا الخطأ منتهيًا بمقدار ضرب $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ في الخطأ النسبي لهذا التقريب $\|r\|/\|b\|$. ويمكن استخدام أي معيار مناسب لهذا التقريب. وإن المتطلب الوحيد هو استخدامه حتى النهاية باستمرار.

مبرهنة 28.7 العدد الشرطي للمصفوفة غير المفردة A بالنسبة إلى معيار ما $\|\cdot\|$ هو
$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

■

وباستخدام هذا الترميز، فإن المتباينات في المبرهنة (27.7) تصبح

$$\|x - \bar{x}\| \le K(A)\frac{\|r\|}{\|A\|} \quad \text{و} \quad \frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|} \le K(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

ولأي مصفوفة غير مفردة A ومعيار طبيعي $\|\cdot\|$، فإن

$$1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = K(A)$$

المصفوفة A جيدة الاشتراط well-conditioned إذا كانت $K(A)$ قريبة من الواحد. وتكون معلولة الاشتراط عندما تزيد $K(A)$ على الواحد معنويًا. ووفقًا لذلك، يشير الاشتراط في هذا الموضوع إلى الاطمئنان نسبيًا بأن متجه بواقٍ صغيرًا يؤدي إلى حل تقريبي دقيق.

مثال 2 مصفوفة النظام المعتمد في مثال (1) كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$$

التي لها $\|A\|_\infty = 3.0001$. وهنا المعيار لا يعد كبيرا. وعلى أي حال

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 5000.5 & -5000 \end{bmatrix} \text{ ومن ثم } \|A^{-1}\|_\infty = 20000$$

وإن $K(A) = (20000)(3.0001) = 60002$ بالنسبة إلى معيار غير محدود. وإن حجم العدد الشرطي لهذا مثال يجب أن يبعدنا عن اتخاذ قرارات متسرعة مبنية على باقي التقريب بالتأكيد. ■

يمكن حساب العدد الشرطي K_∞ في مابل Maple كما يلي:

```
>with(LinearAlgebra);
>A := Matrix([[1,2],[1.0001,2]]);
>ConditionNumber(A);
```

60002.00000

وعلى الرغم من أن العدد الشرطي لمصفوفة ما يعتمد كليًّا على معايير المصفوفة ومعكوسها فإنه عند التطبيق يكون حساب المعكوس مرتبطًا بخطأ تقريب ومعتمدًا على الدقة التي تُجرى الحسابات وفقًا لها. وإذا كانت العمليات تتضمن حسابات مع دقة ذات t من الخانات، فإن تقريب العدد الشرطي للمصفوفة A هو معيار المصفوفة مضروبًا في معيار التقريب لمعكوسها، الذي وُجِد باستخدام حسابات ذات t من الخانات. ويعتمد هذا العدد الشرطي في الحقيقة على الطريقة المستخدمة لحساب معكوس A أيضا.

فإذا افترضنا أن الحلَّ التقريبي للنظام الخطي $Ax = b$ يتحدَّد باستخدام حسابات ذات t من الخانات وتقليص جاوس. فمن الممكن إثبات (انظر [FM.pp. 45–47]) أن متجه البواقي r للتقريب $\tilde{x}$ يكون له

$$\|r\| \approx 10^{-t}\|A\| \cdot \|\tilde{x}\| \tag{20.7}$$

ويمكن من هذا التقريب إيجاد تقدير للعدد الشرطي الفاعل ضمن حسابات ذات t من الخانات، ودون الحاجة إلى عكس المصفوفة A. وفي الواقع يفترض هذا التقريب كون العمليات الحسابية جميعها في أسلوب تقليص جاوس منفذة باستخدام حساب t من الخانات. ولكن العمليات التي نحن بحاجة إليها لتحديد الباقي تنفذ بدقة مضاعفة. (أي حساب $2t$ من الخانات). ولا يضيف هذا الأسلوب جهدًا حسابيًّا إضافيًّا. ويتقلص الكثير من فاقد الدقة المحسوبة مع خصم ما يقارب الأعداد نفسها التي تظهر في حساب الباقي.

التقريب إلى العدد الشرطي $K(A)$ ذي t من الخانات يأتي من افتراض النظام الخطي

$$Ay = r$$

ويمكن تقريب حلِّ هذا النظام مباشرة؛ لأن عوامل الضرب لطريقة تقليص جاوس قد حُسِبت. وفي الحقيقة $\tilde{y}$ إن الحل التقريبي إلى $Ay = r$ يحقق

$$\tilde{y} \approx A^{-1}r = A^{-1}(b - A\tilde{x}) = A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x} = x - \tilde{x}; \tag{21.7}$$

و
$$x \approx \tilde{x} + \tilde{y}$$

ولذلك فإن $\tilde{y}$ هو تقدير للخطأ الناتج عندما يقرب $\tilde{x}$ الحل x للنظام الأصلي. وتؤدي المعادلتان (20.7) و (21.7) إلى

$$\|\tilde{y}\| \approx \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\| \approx \|A^{-1}\| \left(10^{-t}\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|\right) = 10^{-t}\|\tilde{x}\| K(A)$$

إن هذا يعطي تقريبًا للعدد الشرطي المصاحب لحلّ النظام $Ax = b$ باستخدام تقليص جاوس وحساب نوع t من الخانات الذي يوضح توًا

$$K(A) \approx \frac{\|\tilde{y}\|}{\|\tilde{x}\|} 10^{t} \qquad (22.7)$$

مثال 3 النظام الخطي الآتي:

$$\begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{bmatrix}$$

له حلٌّ منتهٍ $x = (1, 1, 1)^t$.

يؤدي استخدام تقليص جاوس وحساب تدوير من 5 خانات بشكل متتال إلى الحصول على المصفوفات المزيدة الآتية:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3.3330 & 15920 & -10.333 & 15913 \\ 0 & -10596 & 16.501 & 10580 \\ 0 & -7451.4 & 6.5250 & -7444.9 \end{array}\right]$$

و

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3.3330 & 15920 & -10.333 & 15913 \\ 0 & -10596 & 16.501 & -10580 \\ 0 & 0 & -5.0790 & -4.7000 \end{array}\right]$$

إن الحلّ التقريبي لهذا النظام هو

$$\tilde{x} = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t.$$

إن متجه البواقي المقترن مع $\tilde{x}$ يُحسب بدقة مضاعفة ليكون

$$\begin{aligned} r &= b - A\tilde{x} \\ &= \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15913.00518 \\ 28.26987086 \\ 8.611560367 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00518 \\ 0.27412914 \\ -0.186160367 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ولذلك فإن

$$\|r\|_\infty = 0.27413$$

إن تقدير العدد الشرطي والمعطى في المناقشة السابقة يوجد من خلال حلّ النظام $Ay = r$ أولًا

لـ $\tilde{y}$

$$\begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00518 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{bmatrix}$$

وهذا يؤدي إلى أن $\tilde{y} = (-0.20008, 8.9987 \times 10^{-5}, 0.074607)^t$. واستخدام التقدير في المعادلة (22.7) يعطي

$$K(A) \approx 10^5 \frac{\|\tilde{y}\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty} = \frac{10^5(0.20008)}{1.2001} = 16672 \qquad (23.7)$$

ولتحديد العدد الشرطي الصحيح لـ A، يجب علينا أولاً إنشاء A^{-1}. وباستخدام حساب تدوير من 5 خانات للحسابات نحصل على التقريب

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1.1701 \times 10^{-4} & -1.4983 \times 10^{-1} & 8.5416 \times 10^{-1} \\ 6.2782 \times 10^{-5} & 1.2124 \times 10^{-4} & -3.0662 \times 10^{-4} \\ -8.6631 \times 10^{-5} & 1.3846 \times 10^{-1} & -1.9689 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

تؤدي المبرهنة (11.7) إلى $\|A^{-1}\|_\infty = 1.0041$ و $\|A\|_\infty = 15934$.

وإنشاءً على ذلك. فإن المصفوفة المعلولة الاشتراط A يكون لها

$$K(A) = (1.0041)(15934) = 15999$$

والتقدير في المعادلة (23.7) متقارب إلى حدٍّ ما مع $K(A)$. ويتطلب مجهودًا حسابيًا أقل كثيرًا. ولما كان الحل الحقيقي $x = (1, 1, 1)^t$ لهذا النظام معروفًا. فباستطاعتنا حساب كل من

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{0.2001}{1} = 0.2001 \quad \text{و} \quad \|x - \tilde{x}\|_\infty = 0.2001$$

حدود الخطأ المعطى في المبرهنة (27.7) لهذه القيم هي

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \le K(A)\frac{\|r\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{(15999)(0.27413)}{15934} = 0.27525$$

و

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le K(A)\frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{(15999)(0.27413)}{15913} = 0.27561$$

■

استخدمنا في المعادلة (21.7) التقدير $\tilde{y} \approx x - \tilde{x}$، حيث إن $\tilde{y}$ هو الحلُّ التقريبي للنظام $Ay = r$. وعمومًا فإن $\tilde{x} + \tilde{y}$ هو تقريب أدقّ لحلّ النظام الخطي $Ax = b$ مقارنة بالتقريب الأصلي $\tilde{x}$. وتسمى الطريقة التي تستخدم هذا الافتراض التنقية المعادة أو التطوير المعاد. وتتضمن تنفذ تكرارات على النظام الذي يكون طرفه الأيمن متجه البواقي لتقريبات متتالية إلى أن نحصل على دقة مقبولة. فإذا طبّقت العملية باستخدام حساب من t من الخانات. وإذا كان $K_\infty(A) \approx 10^q$ فإنه بعد k من تكرارات التنقية المعادة يكون للحل تقريب أصغر بين t و $k(t-q)$ من الخانات الصحيحة فإذا كان النظام جيد الاشتراط فإن تكرار واحدة أو اثنتين ستشير إلى أن الحل دقيق. وهناك احتمال لتحسين معنوي على الأنظمة معلولة الاشتراط ما لم تكن المصفوفة A معلولة الاشتراط

لرتبة أن $K_\infty(A) > 10^t$. ويجب في تلك الحالة استخدام الدقة العالية بالحسابات. تعرض الخوارزمية (4.7) أسلوب التنقية المعادة.

ALGORITHM
الخوارزمية
4.7

التنقية الإرجاعية Iterative Refinement

لتقريب حلِّ النظام الخطي $Ax = b$:

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n، العناصر a_{ij}، $1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر b_i، $1 \le i \le n$ لـ b، وأكبر عدد من التكرار N، حد السماح TOL، عدد خانات الدقة t.

المخرجات: الحل التقريبي $xx = (xx_i, \dots, xx_n)^t$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار تم تجاوزه، وتقريب $COND$ إلى $K_\infty(A)$.

الخطوة	المضمون
0	حلِّ النظام $Ax = b$ لـ $x_1, \dots, x_n$ بطريقة تقليص جاوس وحفظ عوامل الضرب m_{ji}، $j = i+1, i+2, \dots, n$، $i = 1, 2, \dots, n-1$، وملاحظة تبديلات الصفوف.
1	ضع $k = 1$.
2	ما دام $(k \le N)$ فطبق الخطوات 3 – 9.
3	عند $i = 1, 2, \dots, n$ (احسب r) ضع $r_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ (نفِّذ الحسابات بعملية مضاعف الدقة).
4	حلِّ النظام $Ay = r$ لـ $x_1, \dots, x_n$ بطريقة تقليص جاوس وبنفس الترتيب كما في الخطوة 0
5	لكل $i = 1, \dots, n$ ضع $xx_i = x_i + y_i$.
6	إذا كان $k = 1$ فضع $COND = \frac{\lVert y \rVert_\infty}{\lVert xx \rVert_\infty} 10^t$
7	إذا كان $\lVert x - xx \rVert_\infty < TOL$ فإن المخرجات (xx). المخرجات $(COND)$. (العملية كانت ناجحة). توقف.
8	ضع $k = k + 1$.
9	عند $i = 1, \dots, n$، ضع $x_i = xx_i$.
10	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). المخرجات $(COND)$ (العملية كانت ناجحة). توقف.

إذا استُخدم حساب ذو t من الخانات فإن عملية التوقف المقترحة في الخطوة (7) تكون لاستمرار التكرار إلى أن يكون $|y_i^{(k)}| \le 10^{-t}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

مثال 4 وجدنا في مثال (3) تقريب المسألة التي تناولناها مستخدمين حسابًا من 5 خانات وتقليص جاوس ليكون

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t$$

وإن حلّ $A\mathbf{y} = \mathbf{r}^{(1)}$ هو

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(1)} = (-0.20008, 8.9987 \times 10^{-5}, 0.074607)^t$$

ومن خلال الخطوة (5) في هذه الخوارزمية يكون

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(2)} = \tilde{\mathbf{x}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{y}}^{(1)} = (1.0000, 1.0000, 0.99999)^t$$

وإن الخطأ الحقيقي في هذا التقريب هو

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}^{(2)}\|_\infty = 1 \times 10^{-5}.$$

مستخدمين أسلوب التوقف المقترح للخوارزمية، نحسب $\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}$ ونحلّ النظام $A\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{r}^{(2)}$ الذي يعطي

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(2)} = (1.5002 \times 10^{-9}, 2.0951 \times 10^{-10}, 1.0000 \times 10^{-5})^t$$

وحيث $\|\tilde{\mathbf{y}}^{(2)}\|_\infty \le 10^{-5}$ نستنتج بأن

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(3)} = \tilde{\mathbf{x}}^{(2)} + \tilde{\mathbf{y}}^{(2)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000)^t$$

صحيح ودقيق بما يكفي. ■

وقد افترضنا في هذا الفصل إمكانية تمثيل A و $\mathbf{b}$ في النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بالضبط. وفي الحقيقة إن العناصر a_{ij} و b_j ستُبدَل أو تشوّش بالمقدارين δa_{ij} و δb_j مسببين حلًا للنظام الخطي $(A + \delta A)\mathbf{x} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$ بدلًا من $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ومن الطبيعي أنه إذا كانت $\|\delta A\|$ و $\|\delta\mathbf{b}\|$ صغيرتين (على الترتيب 10^{-t}). فإن حسابًا ذا t من الخانات سيعطي حلًا $\tilde{\mathbf{x}}$، حيث إن $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|$ صغيرة في المقابل.

على أي حال فقد لاحظنا في حالة الأنظمة معلولة الاشتراط أنه حتى و مُثّلت A و $\mathbf{b}$ تمثيلًا صحيحًا. فإن أخطاء تقريب يمكن أن تتسبب في كون $\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|$ كبيرًا وتنسب المبرهنة التالية تشويشات الأنظمة الخطية إلى العدد الشرطي للمصفوفة. ويمكن إيجاد برهان هذه النتيجة في [Or2, p. 33].

مبرهنة 29.7 لتكن A ليست مفردة، وليكن

$$\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

عندئذ، إن الحلَّ $\tilde{x}$ لـ $(A + \delta A)\tilde{x} = b + \delta b$ يقرب الحل x لـ $Ax = b$ مع تقدير للخطأ

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \le \frac{K(A)\|A\|}{\|A\| - K(A)\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right) \qquad (24.7)$$

■

والتقدير في المتباينة (24.7) ينص على أنه إذا كانت المصفوفة A جيدة الاشتراط (بمعنى أن $K(A)$ ليست كبيرة جدًّا) فإن تغييرات صغيرة في A و b تُنتج في المقابل تغييرات صغيرة في الحل x. ومن ناحيةٍ أخرى إذا كانت المصفوفة A معلولة الاشتراط فإن تغييرات صغيرة في A و b قد تنتج تغييرات كبيرة في x.

كان جيمس هاردي ولكنسون (1919 - 1986) James Hardy Wilkinson معروفًا بعمله الواسع في الطرائق العددية لحلِّ نظم المعادلات الخطية ومسائل القيم المميزة. وقد طور أيضًا أسلوب الجبر لخطي العددي لتحليل الخطأ الإرجاعي

المبرهنة مستقلة عن العملية العددية المنتهية التي استخدمت في حلِّ $Ax = b$. ويمكن من خلال وسائل تحليل الخطأ الإرجاعي (انظر [Wil1] أو [Wil2]) إثبات أنه إذا استُخدم تقليص جاوس مع تمحور لحل $Ax = b$ في حساب t من الخانات فإن الحلَّ العددي $\tilde{x}$ هو الحلُّ الحقيقي للنظام الخطي

$$(A + \delta A)\tilde{x} = b \quad \text{عندما} \quad \|\delta A\|_\infty \le f(n)10^{1-t}\max_{i,j,k}|a_{ij}^{(k)}|$$

وجد ولكنسون عند التطبيق أن $f(n) \approx n$، وفي أسوأ الأحوال $f(n) \le 1.01(n^3 + 3n^2)$.

مجموعة التمارين 4.7 EXERCISE SET

1. احسب الأعداد الشرطية للمصفوفات الآتية بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$:

أ. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1.003 & 58.09 \\ 5.550 & 321.8 \end{bmatrix}$

2. احسب الأعداد الشرطية للمصفوفات الآتية بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$:

أ. $\begin{bmatrix} 0.03 & 58.9 \\ 5.31 & -6.10 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 58.9 & 0.03 \\ -6.10 & 5.31 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 0.04 & 0.01 & -0.01 \\ 0.2 & 0.5 & -0.2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

3. للأنظمة الخطية الآتية $Ax = b$ حلٌّ حقيقي x وحلّ تقريبي $\tilde{x}$. مستخدمًا نتائج التمرين (1) احسب:

$\|x - \tilde{x}\|_\infty$ و $K_\infty(A)\dfrac{\|b - A\tilde{x}\|_\infty}{\|A\|_\infty}$

أ.
$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 = \tfrac{1}{63}$$
$$\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 = \tfrac{1}{168}$$
$$x = \left(\tfrac{1}{7}, -\tfrac{1}{6}\right)^t$$
$$\tilde{x} = (0.142, -0.166)^t$$

ب.
$$3.9x_1 + 1.6x_2 = 5.5$$
$$6.8x_1 + 2.9x_2 = 9.7$$
$$x = (1, 1)^t$$
$$\tilde{x} = (0.98, 1.1)^t$$

ج.
$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$1.0001x_1 + 2x_2 = 3.0001$$
$$\mathrm{x} = (1, 1)'$$
$$\tilde{\mathrm{x}} = (0.96, 1.02)'$$

د.
$$1.003x_1 + 58.09x_2 = 68.12$$
$$5.550x_1 + 321.8x_2 = 377.3$$
$$\mathrm{x} = (10, 1)'$$
$$\tilde{\mathrm{x}} = (-10, 1)'$$

4. للأنظمة الخطية الآتية $Ax = \mathrm{b}$ حلّ حقيقي x وحلّ تقريبي $\tilde{\mathrm{x}}$، مستخدمًا نتائج التمرين (2) احسب:

$$\|\mathrm{x} - \tilde{\mathrm{x}}\|_\infty \quad \text{و} \quad K_\infty(A)\frac{\|\mathrm{b} - A\tilde{\mathrm{x}}\|_\infty}{\|A\|_\infty}$$

أ.
$$58.9x_1 + 0.03x_2 = 59.2$$
$$-6.10x_1 + 5.31x_2 = 47.0$$
$$\mathrm{x} = (1, 10)'$$
$$\tilde{\mathrm{x}} = (1.02, 9.98)'$$

ب.
$$0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2$$
$$5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0$$
$$\mathrm{x} = (10, 1)'$$
$$\tilde{\mathrm{x}} = (30.0, 0.990)'$$

ج.
$$0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.06$$
$$0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 0.3$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$$
$$\mathrm{x} = (1.827586, 0.6551724, 1.965517)'$$
$$\tilde{\mathrm{x}} = (1.8, 0.64, 1.9)'$$

د.
$$x_1 - x_2 - x_3 = 2\pi$$
$$x_2 - x_3 = 0$$
$$-x_3 = \pi$$
$$\mathrm{x} = (0, -\pi, -\pi)'$$
$$\tilde{\mathrm{x}} = (-0.1, -3.15, -3.14)'$$

5. (i) أولًا: استخدم تقليص جاوس وحساب تدوير من 3 خانات لتقريب حلول الأنظمة الخطية الآتية، (ii) ثم استخدم تكرار واحدة من التنقية المعادة لتحسين التقريب، وقارن التقريبات بالحلول الحقيقية:

أ.
$$0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2$$
$$5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0$$
الحل الحقيقي $(10, 1)'$

ب.
$$3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 = 7953$$
$$2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 0.965$$
$$-1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 = 2.714$$
الحل الحقيقي $(1, 0.5, -1)'$

ج.
$$1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + x_4 = 1.12$$
$$14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - x_4 = 3.44$$
$$100x_2 - 99.9x_3 + x_4 = 2.15$$
$$15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - x_4 = 4.16$$
الحل الحقيقي $(0.17682530, 0.01269269, -0.02065405, -1.18260870)'$

د.
$$\pi x_1 - ex_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 = \sqrt{11}$$
$$\pi^2 x_1 + ex_2 - e^2 x_3 + \tfrac{3}{7}x_4 = 0$$
$$\sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_4 = \pi$$
$$\pi^3 x_1 + e^2 x_2 - \sqrt{7}x_3 + \tfrac{1}{9}x_4 = \sqrt{2}$$
الحل الحقيقي $(0.78839378, -3.12541367, 0.16759660, 4.55700252)'$

6. كرر التمرين (5) مستخدمًا حساب تدوير من 4 خانات.

7. النظام الخطي $Ax = \mathrm{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

له حل $(1, 1)^t$. غيّر A قليلًا إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}$$

وافترض النظام الخطي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

احسب الحلّ الجديد مستخدمًا حساب تدوير من 5 خانات، وقارن الخطأ الحقيقي بالتقدير (24.7). هل A معلولة الاشتراط؟

8. النظام الخطي $Ax = b$ المعطى من خلال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.00001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3.00001 \end{bmatrix}$$

له حلّ $(1, 1)^t$. استخدم حساب تدوير من 7 خانات لإيجاد حلّ النظام المشوش

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.000011 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.00001 \\ 3.00003 \end{bmatrix}$$

وقارن الخطأ الحقيقي بالتقدير (24.7). هل A معلولة الاشتراط؟

9. أثبت أنه إذا كانت B مفردة فإن

$$\frac{1}{K(A)} \le \frac{\|A - B\|}{\|A\|}$$

[تلميح: ينبغي وجود متجه مع $\|x\| = 1$، بحيث $Bx = 0$. اشتق التقدير مستخدمًا $\|Ax\| \ge \|x\|/\|A^{-1}\|$.]

10. مستخدمًا التمرين (9)، قدّر الأرقام الشرطية للمصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix}$

11. إن مصفوفة هلبرت $n \times n$ *Hilbert matrix* $H^{(n)}$ تعرف من خلال

$$H_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i + j - 1}, \quad 1 \le i, j \le n$$

هي مصفوفة معلولة الاشتراط تظهر عند حلّ المعادلات الطبيعية لمعاملات كثيرة حدود المربعات الصغرى. (انظر مثال (1) في الفصل 2.8)

أ. أثبت أن

$$[H^{(4)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}$$

واحسب $K_\infty(H^{(4)})$.

ب. أثبت أن

$$[H^{(5)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600 \\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{bmatrix}$$

واحسب $K_\infty(H^{(5)})$.

ج. حُلّ النظام الخطي

$$H^{(4)}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مستخدمًا حساب تدوير من 5 خانات. وقارن الخطأ الحقيقي بالمقدر في المعادلة (24.7).

12. استخدم حساب تدوير من 4 خانات لحساب المعكوس H^{-1} لمصفوفة هلبرت H بحجم 3×3، ومن ثم احسب $\hat{H} = (H^{-1})^{-1}$. حدِّد $\|H - \hat{H}\|_\infty$.

5.7 طريقة الميل المرافق
The Conjugate Gradient Method

ماكنس هستنس (1906 - 1991) Magnus Hastens إدوارد ستيفل Edward Stiefel نشرا الورقة الأصلية لطريقة التدرج المتقارن عام 1952 عندما كانا يعملان في معهد التحليل العددي بجامعة كاليفورنيا / لوس أنجلس UCLA.

إن طريقة الميل المرافق المنسوبة إلى Hestenes and Stiefel [HS] تطوّرت في الأصل، لكونها طريقة مباشرة مصمّمة لحلّ نظام خطي إيجابي واضح بحجم $n \times n$. وبطريقة مباشرة فإنها عمومًا بخانة أدنى من تقليص جاوس مع تمحور لكون كلا الطريقتين تتطلب n من الخطوات لتحديد الحل. وإن خطوات طريقة الميل المرافق ذات تكلفة حسابية أكثر من تلك التي في طريقة جاوس للحذف.

ومع ذلك فإن طريقة الميل المرافق مفيدة جدًا عند استخدامها بوصفها طريقة تقريب بالتكرار لحلّ أنظمة كبيرة متفرعة مع عناصر غير صفرية تظهر في أنماط تنبؤية. وعندما يعاد اشتراط المصفوفة لجعل الحسابات أكثر فاعلية، فإن نتائج جيدة تظهر خلال $\sqrt{n}$ من الخطوات تقريبًا. وإن تطبيق هذه الطريقة بهذا الأسلوب يجعلها مفضلة على طريقة تقليص جاوس للحذف وطرائق التكرار التي سبق مناقشتها.

وخلال هذا الفصل نفترض أن المصفوفة A موجبة التحديد. وسوف نستخدم تعبير الضرب الداخلي

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \mathrm{x}^t \mathrm{y} \qquad (25.7)$$

حيث إن x و y متجهان بحجم n. وسنحتاج إلى نتائج معيارية من الجبر الخطي أيضًا. وإن مراجعة هذه المادة موجودة في الفصل (1.9).

سنحصل على النتيجة الآتية من خلال خصائص المنقولات. (انظر التمرين 12).

مبرهنة 30.7 لأي متجهات x، y و z وأي عدد حقيقي α يكون لدينا

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

(ii) $\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

(iii) $\langle \mathbf{x}+\mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$

(iv) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$

(v) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ إذا وفقط إذا $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ■

وعندما تكون A موجبة التحديد، فإن $\langle \mathrm{x}, A\mathrm{x} \rangle = \mathrm{x}^t A \mathrm{x} > 0$ ما لم يكن $\mathrm{x} = 0$ وحيث إن A متماثلة. يكون لدينا $\mathrm{x}^t A \mathrm{y} = \mathrm{x}^t A^t \mathrm{y} = (A\mathrm{x})^t \mathrm{y}$، ومن ثم فبالإضافة إلى النتائج في المبرهنة (30.7)، سيكون لدينا لكل x و y

$$\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle \tag{26.7}$$

والنتيجة الآتية هي أداة رئيسة في تطوير طريقة الميل المرافق.

مبرهنة 31.7

يكون المتجه x^* حلًا للنظام الخطي الإيجابي الواضح $Ax = b$ إذا وفقط إذا كانت القيمة الصغرى للدالة $g(x) = \langle x, Ax\rangle - 2\langle x, b\rangle$ تتحقق عند x^*. ■

البرهان

ليكن x و $v \neq 0$ متجهين ثابتين، والمتغير t عددًا حقيقيًا. ولدينا

$$\begin{aligned} g(x+tv) &= \langle x+tv, Ax+tAv\rangle - 2\langle x+tv, b\rangle \\ &= \langle x, Ax\rangle + t\langle v, Ax\rangle + t\langle x, Av\rangle + t^2\langle v, Av\rangle - 2\langle x, b\rangle - 2t\langle v, b\rangle \\ &= \langle x, Ax\rangle - 2\langle x, b\rangle + 2t\langle v, Ax\rangle - 2t\langle v, b\rangle + t^2\langle v, Av\rangle \end{aligned}$$

ولذلك فإن

$$g(x+tv) = g(x) + 2t\langle v, Ax-b\rangle + t^2\langle v, Av\rangle \tag{7.27}$$

وبما أن x و v ثابتان، يمكننا تعريف الدالة التربيعية h في t من خلال

$$h(t) = g(x+tv)$$

ومن ثم يفترض أن يكون h أقل قيمة عندما $h'(t) = 0$، لكون معامل t^2 أي $\langle v, Av\rangle$ موجبًا. وحيث إن

$$h'(t) = 2\langle v, Ax-b\rangle + 2t\langle v, Av\rangle$$

فإن القيمة الصغرى تحصل عندما

$$\hat{t} = -\frac{\langle v, Ax-b\rangle}{\langle v, Av\rangle} = \frac{\langle v, b-Ax\rangle}{\langle v, Av\rangle}$$

ومن المعادلة (27.7) يكون

$$\begin{aligned} h(\hat{t}) &= g(x) - 2\frac{\langle v, b-Ax\rangle}{\langle v, Av\rangle}\langle v, b-Ax\rangle + \left(\frac{\langle v, b-Ax\rangle}{\langle v, Av\rangle}\right)^2\langle v, Av\rangle \\ &= g(x) - \frac{\langle v, b-Ax\rangle^2}{\langle v, Av\rangle} \end{aligned}$$

ولذلك لأي متجه $v \neq 0$، يكون لدينا $g(x+\hat{t}v) < g(x)$ ما لم يكن $\langle v, b-Ax\rangle = 0$، وبهذه الحالة يكون $g(x) = g(x+\hat{t}v)$. هذه هي النتيجة الرئيسة التي نحتاج إليها لبرهنة المبرهنة (31.7).

افترض أن x^* تحقق $Ax^* = b$. لذلك $\langle v, b-Ax^*\rangle = 0$ لأي متجه v. ولا يمكن جعل $g(x)$ أصغر من $g(x^*)$. ومن ثم فإن x^* تقلل من g.

افترض من جانب آخر أن x^* هو متجه يحقق القيمة الصغرى للدالة g، لذا لأي متجه v يكون لدينا $g(x^*+\hat{t}v) \geq g(x^*)$. ولذلك فإن $\langle v, b-Ax^*\rangle = 0$. وهذا يؤدي إلى أن $b - Ax^* = 0$ والنتيجة أن $Ax^* = b$. ■ ■ ■

وللبدء بطريقة الميل المرافق، نختار x الذي هو حلٌّ تقريبي إلى $Ax^* = b$ وأن $v \neq 0$

الذي يعطي اتجاها بحثيًا اتجاه الابتعاد عن x لتحسين التقريب. ليكن $r = b - Ax$ هو متجه البواقي مع x وأن

$$t = \frac{\langle v, b - Ax\rangle}{\langle v, Av\rangle} = \frac{\langle v, r\rangle}{\langle v, Av\rangle}$$

فإذا كان $r \neq 0$. و v و r ليسا متعامدين. فإن $x + tv$ تعطي قيمة أقل لـ g مما هي لـ $g(x)$. وإنها افتراضيًا أقرب إلى x^* مما هي إلى x. وهذا يؤدي إلى اقتراح الطريقة الآتية

ليكن $x^{(0)}$ تقريبًا ابتدائيًا إلى x^*. وليكن $v^{(1)} \neq 0$ متجه بحث ابتدائيًا. ولكل $k = 1, 2, 3, \ldots$ نحسب

$$t_k = \frac{\langle v^{(k)}, b - Ax^{(k-1)}\rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + t_k v^{(k)}$$

ونختار اتجاه بحث جديد $v^{(k+1)}$. والهدف أن يؤدي هذا الاختيار إلى أن تتقارب متتالية التقريبات $\{x^{(k)}\}$ بسرعة إلى x^*.

ولاختيار اتجاهات البحث، نفترض g دالة لمركبات $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$، ومن ثم

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \langle x, Ax\rangle - 2\langle x, b\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - 2\sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

وبأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى متغيرات المركبات x_k نحصل على

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i - 2b_k$$

ولذلك فإن تدرج (ميل) g يكون

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)\right)^t = 2(Ax - b) = -2r$$

حيث إن المتجه r هو متجه البواقي إلى x.

ومن حسابات التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات، نعرف أن اتجاه النقصان الأكبر في قيمة $g(x)$ هو الاتجاه المعطى من خلال $-\nabla g(x)$، يعني أنه في اتجاه الباقي r.

تسمى الطريقة التي تختار

$$v^{(k+1)} = r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

طريقة النزول الأعمق *steepest descent*. وعلى الرغم من أننا سنرى في الفصل 4.10، أن هذه الطريقة جديرة بالأنظمة اللاخطية وبمسائل التحسين، إلا أنها لا تُستخدم في الأنظمة الخطية نتيجة تباطؤ التقارب.

وتستخدم الطريقة البديلة مجموعة من متجهات الاتجاه اللاصفرية $\{v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}\}$ التي تحقق

$$\langle v^{(i)}, Av^{(j)}\rangle = 0 \quad \text{إذا} \quad i \neq j$$

وهذا يُسمى "شرط التعامد $A-$ A-orthogonality condition". وإن مجموعة المتجهات $\{v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}\}$ تُسمى "تعامد $A-$ A-orthogonal". وليس من الصعب إثبات أن متجهات

تعامد $-A$ المرتبطة بالمصفوفة الإيجابية الواضحة A مستقلة خطيًا. (انظر التمرين 13 – أ) هذه المجموعة من اتجاهات البحث تعطي

$$t_k = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}$$

و $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k \mathbf{v}^{(k)}$.

وتثبت المبرهنة الآتية أن اختيار اتجاهات البحث تعطي تقاربًا في n من الخطوات بوصفها حدًا أعلى، ولذلك فإنها تعطي الحلّ الصحيح بوصفها طريقة مباشرة. مفترضين أن الحسابات صحيحة.

مبرهنة 32.7

لتكن $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ مجموعة متعامدة من المتجهات غير الصفرية بالنسبة إلى A مرتبطة بالمصفوفة الإيجابية الواضحة A. ولتكن $\mathbf{x}^{(0)}$ عشوائية. نعرف

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k \mathbf{v}^{(k)} \quad \text{و} \quad t_k = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}$$

لكل $k = 1, 2, \ldots, n$. ولذلك على افتراض أن الحسابات صحيحة، فإن $A\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{b}$. ■

البرهان

بما أنه لكل $k = 1, 2, \ldots, n$، نجد أن $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k \mathbf{v}^{(k)}$. فإنه يكون لدينا

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x}^{(n)} &= A\mathbf{x}^{(n-1)} + t_n A\mathbf{v}^{(n)} \\
&= (A\mathbf{x}^{(n-2)} + t_{n-1} A\mathbf{v}^{(n-1)}) + t_n A\mathbf{v}^{(n)} \\
&\vdots \\
&= A\mathbf{x}^{(0)} + t_1 A\mathbf{v}^{(1)} + t_2 A\mathbf{v}^{(2)} + \cdots + t_n A\mathbf{v}^{(n)}
\end{aligned}$$

وبطرح $\mathbf{b}$ من هذه النتيجة نحصل على

$$A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b} = A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b} + t_1 A\mathbf{v}^{(1)} + t_2 A\mathbf{v}^{(2)} + \cdots + t_n A\mathbf{v}^{(n)}$$

والآن نأخذ الضرب الداخلي لطرفي المعادلة أعلاه بالمتجه $\mathbf{v}^{(k)}$، ونستخدم خواص الضرب الداخلي وحقيقة كون A متماثلة لإيجاد

$$\begin{aligned}
\langle A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle &= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + t_1 \langle A\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + \cdots + t_n \langle A\mathbf{v}^{(n)}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle \\
&= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + t_1 \langle \mathbf{v}^{(1)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle + \cdots + t_n \langle \mathbf{v}^{(n)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle
\end{aligned}$$

إن خاصية تعامد$-A$ تعطينا لكل k

$$\langle A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle = \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + t_k \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle \qquad (28.7)$$

وعلى أي حال فإن

$$t_k = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}$$

ولذلك فإن

$$\begin{aligned}
t_k \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle &= \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} + A\mathbf{x}^{(0)} - A\mathbf{x}^{(1)} + \cdots - A\mathbf{x}^{(k-2)} + A\mathbf{x}^{(k-2)} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} \rangle + \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{x}^{(0)} - A\mathbf{x}^{(1)} \rangle + \cdots + \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{x}^{(k-2)} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle
\end{aligned}$$

ولكن لأي i نجد أن

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i-1)} + t_i \mathbf{v}^{(i)} \quad \text{و} \quad A\mathbf{x}^{(i)} = A\mathbf{x}^{(i-1)} + t_i A\mathbf{v}^{(i)}$$

لذلك فإن

$$A\mathbf{x}^{(i-1)} - A\mathbf{x}^{(i)} = -t_i A\mathbf{v}^{(i)}$$

ومن ثم يكون

$$t_k \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle = \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} \rangle - t_1 \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(1)} \rangle - \cdots - t_{k-1} \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k-1)} \rangle$$

وبسبب تعامد $-A$، فإن $\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(i)} \rangle = 0$ لكل $i \neq k$، ولذلك فإن

$$\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle t_k = \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} \rangle$$

ومن المعادلة (28.7) نجد أن

$$\begin{aligned}
\langle A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle &= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + \langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} \rangle \\
&= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + \langle \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle \\
&= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle - \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

يكون المتجه $A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b}$ متعامداً مع مجموعة متجهات تعامد $-A$، $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$. ومن هنا سيكون $A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b} = 0$. (انظر التمرين 13− ب). ■ ■ ■

مثال 1

افترض المصفوفة موجبة التحديد

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

وليكن $\mathbf{v}^{(1)} = (1, 0, 0)^t, \mathbf{v}^{(2)} = (-\frac{3}{4}, 1, 0)^t$ و $\mathbf{v}^{(3)} = (-\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 1)^t$. وبالحساب المباشر نجد

$$\langle \mathbf{v}^{(1)}, A\mathbf{v}^{(2)} \rangle = \mathbf{v}^{(1)t} A\mathbf{v}^{(2)} = (1, 0, 0) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\langle \mathbf{v}^{(1)}, A\mathbf{v}^{(3)} \rangle = \left(1, 0, 0\right) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

و

$$\langle \mathbf{v}^{(2)}, A\mathbf{v}^{(3)} \rangle = \left(-\frac{3}{4}, 1, 0\right) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

لذلك فإن $\{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\}$ هي مجموعة تعامد A−.

إن النظام الخطي

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

له حلٌّ صحيح هو $x^* = (3, 4, -5)^t$. ولتقريب هذا الحلّ، افترض أن $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$. ولأن $b = (24, 30, -24)^t$، يكون لدينا

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = b = (24, 30, -24)^t$$

ولذلك فإن

$$\langle v^{(1)}, r^{(0)}\rangle = v^{(1)t}r^{(0)} = 24 \text{ ، } \langle v^{(1)}, Av^{(1)}\rangle = 4 \text{ و } t_0 = \tfrac{24}{4} = 6$$

ومن ثم فإن

$$x^{(1)} = x^{(0)} + t_0 v^{(1)} = (0, 0, 0)^t + 6(1, 0, 0)^t = (6, 0, 0)^t$$

وبالاستمرار على هذا النحو، يكون لدينا

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = (0, 12, -24)^t; \quad t_1 = \frac{\langle v^{(2)}, r^{(1)}\rangle}{\langle v^{(2)}, Av^{(2)}\rangle} = \frac{12}{7/4} = \frac{48}{7}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + t_1 v^{(2)} = (6, 0, 0)^t + \frac{48}{7}\left(-\frac{3}{4}, 1, 0\right)^t = \left(\frac{6}{7}, \frac{48}{7}, 0\right)^t$$

$$r^{(2)} = b - Ax^{(2)} = \left(0, 0, -\frac{120}{7}\right); \quad t_2 = \frac{\langle v^{(3)}, r^{(2)}\rangle}{\langle v^{(3)}, Av^{(3)}\rangle} = \frac{-120/7}{24/7} = -5$$

و

$$x^{(3)} = x^{(2)} + t_2 v^{(3)} = \left(\tfrac{6}{7}, \tfrac{48}{7}, 0\right)^t + (-5)\left(-\tfrac{3}{7}, \tfrac{4}{7}, 1\right)^t = (3, 4, -5)^t$$

ولأننا طبَّقنا الأسلوب ثلاث مرات ($n = 3$)، فإن هذا يعدُّ حلًّا حقيقيًّا. ■

وقبل مناقشة كيفية تحديد مجموعة تعامد A−، سنستمر في التطوير. إن استخدام مجموعة تعامد A− $\{v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}\}$ لمتجهات الاتجاه تعطينا ما نسمّيه طريقة الاتجاه المرافق *conjugate direction*. تثبت المبرهنة الآتية تعامدية متجهات البواقي $r^{(k)}$ ومتجهات الاتجاه $v^{(j)}$. وقد أخذ في الحسبان برهان هذه النتيجة باستخدام الاستقراء الرياضي في التمرين (14).

مبرهنة 7 33

إن متجهات البواقي $r^{(k)}$، حيث $k = 1, 2, \ldots, n$، لطريقة الميل المرافقة تحقق المعادلات لكل

$$\langle r^{(k)}, v^{(j)}\rangle = 0 \text{ لكل } j = 1, 2, \ldots, k$$ ■

إن طريقة الميل المرافق لهستنس وستيفل تختار اتجاهات البحث $\{v^{(k)}\}$ خلال عملية التكرار. لذلك فإن متجهات البواقي $\{r^{(k)}\}$ متعامدة تبادليًّا. ولإنشاء متجهات الاتجاه $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots\}$

والتقريبات $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\}$، فإننا نبدأ بتقريب ابتدائي $x^{(0)}$، ومن ثم نستخدم اتجاه النزول الأعمق $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ حيث أول اتجاه بحث $v^{(1)}$.

افترض أن الميول المرافقة $v^{(1)}, \ldots, v^{(k-1)}$ والتقريبات $x^{(1)}, \ldots, x^{(k-1)}$ حُسبت مع

$$x^{(k-1)} = x^{(k-2)} + t_{k-1} v^{(k-1)}$$

حيث إن

$$\langle v^{(i)}, Av^{(j)} \rangle = 0 \text{ و } \langle r^{(i)}, r^{(j)} \rangle = 0 \text{ لكل } i \neq j$$

وإذا كان $x^{(k-1)}$ هو الحلُّ لـ $Ax = b$ فقد وصلنا إلى النهاية. وبعكس ذلك، يكون $r^{(k-1)} = b - Ax^{(k-1)} \neq 0$ وتؤدي المبرهنة (33.7) إلى أن $\langle r^{(k-1)}, v^{(i)} \rangle = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, k-1$. عندئذ نستخدم $r^{(k-1)}$ لتوليد $v^{(k)}$ بوضع

$$v^{(k)} = r^{(k-1)} + s_{k-1} v^{(k-1)}$$

ونريد اختيار s_{k-1} بحيث يكون

$$\langle v^{(k-1)}, Av^{(k)} \rangle = 0$$

وحيث إن

$$Av^{(k)} = Ar^{(k-1)} + s_{k-1} Av^{(k-1)}$$

و

$$\langle v^{(k-1)}, Av^{(k)} \rangle = \langle v^{(k-1)}, Ar^{(k-1)} \rangle + s_{k-1} \langle v^{(k-1)}, Av^{(k-1)} \rangle$$

سيكون لدينا $\langle v^{(k-1)}, Av^{(k)} \rangle = 0$ عندما

$$s_{k-1} = -\frac{\langle v^{(k-1)}, Ar^{(k-1)} \rangle}{\langle v^{(k-1)}, Av^{(k-1)} \rangle}$$

وبالإمكان أيضًا إثبات أنه مع هذا الاختيار لـ s_{k-1} يكون لدينا $\langle v^{(k)}, Av^{(i)} \rangle = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, k-2$ (انظر [Lu, p. 245]). ولذلك فإن $\{v^{(1)}, \ldots, v^{(k)}\}$ هي مجموعة تعامد $-A$.
وباختيارنا $v^{(k)}$ نحسب

$$t_k = \frac{\langle v^{(k)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle} = \frac{\langle r^{(k-1)} + s_{k-1} v^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle}$$

$$= \frac{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle} + s_{k-1} \frac{\langle v^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle}$$

ومن خلال المبرهنة (33.7) يكون لدينا $\langle v^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle = 0$. ولذلك فإن

$$t_k = \frac{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle} \tag{29.7}$$

ومن ثم فإن

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + t_k v^{(k)}$$

ولحساب $r^{(k)}$، نضرب في A، ونطرح b لنحصل على

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} - t_k A\mathbf{v}^{(k)} \quad \text{أو} \quad A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} = A\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{b} + t_k A\mathbf{v}^{(k)}$$

ومن ثم فإن

$$\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle = \langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle - t_k \langle A\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle = -t_k \langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle$$

والأكثر من ذلك، فإننا نحصل من المعادلة (29.7) على

$$\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle = t_k \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle$$

ولذلك فإن

$$s_k = -\frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle} = -\frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}$$
$$= \frac{(1/t_k)\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{(1/t_k)\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle}$$

وباختصار لدينا الصيغ

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}; \quad \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)}$$

وعند $k = 1, 2, \ldots, n$، يكون لدينا

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle} \\ \mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k \mathbf{v}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k-1)} - t_k A\mathbf{v}^{(k)} \\ s_k &= \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle} \\ \mathbf{v}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} + s_k \mathbf{v}^{(k)} \end{aligned} \tag{30.7}$$

وبدلاً من عرض خوارزمية لطريقة الميل المرافق مستخدمين هذه الصيغ، سنوسّع الطريقة لتشمل الاشتراط المسبق *preconditioning*. فإذا كانت المصفوفة A معلولة الاشتراط فإن طريقة الميل المرافق تكون معرضة لأخطاء تقريب بصورة كبيرة. وعلى الرغم من وجوب الحصول على الإجابة الصحيحة في n من الخطوات، فإن ذلك لم يعد هو الحالة. ولأنها طريقة مباشرة، فإن طريقة الميل المرافق ليست بجودة تقليص جاوس مع التمحور. وإن الاستخدام الرئيس لطريقة التدرج المتقارن هو طريقة تكرار تُطبّق على نظام مشروط بصورة أحسن. وفي هذه الحالة سنحصل غالبا على حلٍّ تقريبي مقبول خلال $\sqrt{n}$ من الخطوات.

ولتطبيق الطريقة على نظام جيد الاشتراط، نريد اختيار مصفوفة اشتراطية غير مفردة C بحيث يكون

$$\tilde{A} = C^{-1}A(C^{-1})^t$$

جيد الاشتراط. ولتبسيط الترميز، سنستخدم المصفوفة C^{-t} لترمز إلى $(C^{-1})^t$.

افترض النظام الخطي $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$، حيث $\tilde{\mathbf{x}} = C^t\mathbf{x}$ و $\tilde{\mathbf{b}} = C^{-1}\mathbf{b}$. لذلك فإن

$$\tilde{A}\tilde{x} = (C^{-1}AC^{-t})(C^{t}x) = C^{-1}Ax$$

ولذلك فإنه يمكننا حل $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ لـ $\tilde{x}$ ومن ثم إيجاد x من خلال الضرب في C^{-t}. وعلى أي حال فبدلًا من تكرار كتابة المعادلة (30.7) مستخدمين $\tilde{x}^{(k)}, \tilde{t}_k, \tilde{v}^{(k)}, \tilde{r}^{(k)}$، و $\tilde{s}_k$ سندمج الاشتراط المسبق.

وحيث إن

$$\tilde{x}^{(k)} = C^{t}x^{(k)}$$

يكون لدينا

$$\tilde{r}^{(k)} = \tilde{b} - \tilde{A}\tilde{x}^{(k)} = C^{-1}b - (C^{-1}AC^{-t})C^{t}x^{(k)} = C^{-1}(b - Ax^{(k)}) = C^{-1}r^{(k)}$$

ليكن $\tilde{v}^{(k)} = C^{t}v^{(k)}$ و $w^{(k)} = C^{-1}r^{(k)}$، لذا فإن

$$\tilde{s}_k = \frac{\langle \tilde{r}^{(k)}, \tilde{r}^{(k)} \rangle}{\langle \tilde{r}^{(k-1)}, \tilde{r}^{(k-1)} \rangle} = \frac{\langle C^{-1}r^{(k)}, C^{-1}r^{(k)} \rangle}{\langle C^{-1}r^{(k-1)}, C^{-1}r^{(k-1)} \rangle}$$

وبذلك فإن

$$\tilde{s}_k = \frac{\langle w^{(k)}, w^{(k)} \rangle}{\langle w^{(k-1)}, w^{(k-1)} \rangle} \tag{31.7}$$

ومن ثم فإن

$$\tilde{t}_k = \frac{\langle \tilde{r}^{(k-1)}, \tilde{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \tilde{v}^{(k)}, \tilde{A}\tilde{v}^{(k)} \rangle} = \frac{\langle C^{-1}r^{(k-1)}, C^{-1}r^{(k-1)} \rangle}{\langle C^{t}v^{(k)}, C^{-1}AC^{-t}C^{t}v^{(k)} \rangle} = \frac{\langle w^{(k-1)}, w^{(k-1)} \rangle}{\langle C^{t}v^{(k)}, C^{-1}Av^{(k)} \rangle}$$

ولكون

$$\begin{aligned}\langle C^{t}v^{(k)}, C^{-1}Av^{(k)} \rangle &= [C^{t}v^{(k)}]^{t}C^{-1}Av^{(k)} \\ &= [v^{(k)}]^{t}CC^{-1}Av^{(k)} = [v^{(k)}]^{t}Av^{(k)} = \langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle\end{aligned}$$

يكون لدينا

$$\tilde{t}_k = \frac{\langle w^{(k-1)}, w^{(k-1)} \rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle} \tag{32.7}$$

والأكثر من ذلك، فإن

$\tilde{x}^{(k)} = \tilde{x}^{(k-1)} + \tilde{t}_k\tilde{v}^{(k)}$ لذلك فإن $C^{t}x^{(k)} = C^{t}x^{(k-1)} + \tilde{t}_kC^{t}v^{(k)}$

و

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \tilde{t}_kv^{(k)} \tag{33.7}$$

وبالاستمرار سيكون

$$\tilde{r}^{(k)} = \tilde{r}^{(k-1)} - \tilde{t}_k\tilde{A}\tilde{v}^{(k)}$$

ولذلك فإن

$$C^{-1}r^{(k)} = C^{-1}r^{(k-1)} - \tilde{t}_kC^{-1}AC^{-t}\tilde{v}^{(k)}, \qquad r^{(k)} = r^{(k-1)} - \tilde{t}_kAC^{-t}C^{t}v^{(k)}$$

و

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} - \tilde{t}_kAv^{(k)} \tag{34.7}$$

وفي النهاية إن

$$C^{t}\mathbf{v}^{(k+1)} = C^{-1}\mathbf{r}^{(k)} + \tilde{s}_k C^{t}\mathbf{v}^{(k)} \quad \text{و} \quad \tilde{\mathbf{v}}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} + \tilde{s}_k \tilde{\mathbf{v}}^{(k)}$$

ولذلك فإن

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = C^{-t}C^{-1}\mathbf{r}^{(k)} + \tilde{s}_k\mathbf{v}^{(k)} = C^{-t}\mathbf{w}^{(k)} + \tilde{s}_k\mathbf{v}^{(k)} \qquad (35.7)$$

الاشتراط المسبق يستبدل النظام المعطى بآخر له الحلول نفسها. ولكن بسمات تقريبية أفضل.

إن طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط تستند إلى استخدام المعادلات (31.7) – (35.7) بالترتيب (32.7)، (33.7)، (34.7)، (31.7) ثم (35.7). وتنفذ الخوارزمية (5.7) هذه العملية.

ALGORITHM
الخوارزمية
5.7

طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط

Preconditioned Conjugate Gradient Method

لحلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ آخذين في الحسبان المصفوفة مسبقة الاشتراط C^{-1} والتقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$؛

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n. العناصر $a_{ij},\ 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر $b_j,\ 1 \le j \le n$ للمتجه $\mathbf{b}$، العناصر $\gamma_{ij},\ 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة مسبقة الاشتراط C^{-1}، العناصر $x_i,\ 1 \le i \le n$ للتقريب الابتدائي $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$ وأكبر عدد من الإعادات N، حد السماح TOL.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ والباقي $r_1, \ldots, r_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ (احسب $\mathbf{r}^{(0)}$). $\mathbf{w} = C^{-1}\mathbf{r}$ (إرشاد: $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$). $\mathbf{v} = C^{-t}\mathbf{w}$ (إرشاد: $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}$). $\alpha = \sum_{j=1}^{n} w_j^2$
2	ضع $k = 1$.
3	ما دام $(k \le N)$ فطبّق الخطوات 4 – 7.
4	إذا كان $\lVert\mathbf{v}\rVert < TOL$. المخرجات (متجه الحل $x_1, \ldots, x_n$). المخرجات (مع الباقي $r_1, \ldots, r_n$). (العملية كانت ناجحة). توقف.
5	ضع $\mathbf{u} = A\mathbf{v}$ (إرشاد: $\mathbf{u} = A\mathbf{v}^{(k)}$). $t = \dfrac{\alpha}{\sum_{j=1}^{n} v_j u_j}$ (إرشاد: $t = t_k$). $\mathbf{x} = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$ (إرشاد: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$). $\mathbf{r} = \mathbf{r} - t\mathbf{u}$ (إرشاد: $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(k)}$). $\mathbf{w} = C^{-1}\mathbf{r}$ (إرشاد: $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(k)}$). $\beta = \sum_{j=1}^{n} w_j^2$ (إرشاد: $\beta = \langle\mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}\rangle$).

6	إذا كان $\lvert\beta\rvert < TOL$ فإنه إذا كان $\lVert \mathbf{r} \rVert < TOL$ فإنه المخرجات (متجه الحل $x_1, \ldots , x_n$). المخرجات (مع الباقي $r_1, \ldots , r_n$). (العملية كانت ناجحة). توقف.
7	ضع $s = \beta/\alpha \quad (s = s_k)$ $\mathrm{v} = C^{-t}\mathrm{w} + s\mathrm{v}$ (إرشاد: $\mathrm{v} = \mathrm{v}^{(k+1)}$). $\alpha = \beta$ (تحديث α). $k = k + 1$
8	إذا كان $(k > n)$ فإن المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت غير ناجحة). توقف.

■

يوضح المثال الآتي الحسابات في مسألة سهلة.

مثال 2 النظام الخطي $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ - x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

له حلّ $(3, 4, -5)^t$. وقد تناولناه في مثال (3) من الفصل (3.7). وقد استُخدم في ذلك المثال طريقتا جاوس – سيدل و SOR. وسنستخدم طريقة الميل المرافق دون اشتراط مسبق. ولذلك فإن $C = C^{-1} = I$. ليكن $\mathrm{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$، ومن ثم فإن

$$\mathrm{r}^{(0)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(0)} = \mathrm{b} = (24, 30, -24)^t$$

$$\mathrm{w} = C^{-1}\mathrm{r}^{(0)} = (24, 30, -24)^t$$

$$\mathrm{v}^{(1)} = C^{-t}\mathrm{w} = (24, 30, -24)^t$$

$$\alpha = \langle \mathrm{w}, \mathrm{w} \rangle = 2052$$

سنبدأ أول تكرار مع $k = 1$. لذا فإن

$$\mathrm{u} = A\mathrm{v}^{(1)} = (186.0, 216.0, -126.0)^t$$

$$t_1 = \frac{\alpha}{\langle \mathrm{v}^{(1)}, \mathrm{u} \rangle} = 0.1469072165$$

$$\mathrm{x}^{(1)} = \mathrm{x}^{(0)} + t_1\mathrm{v}^{(1)} = (3.525773196, 4.407216495, -3.525773196)^t$$

$$\mathrm{r}^{(1)} = \mathrm{r}^{(0)} - t_1\mathrm{u} = (-3.32474227, -1.73195876, -5.48969072)^t$$

$$\mathrm{w} = C^{-1}\mathrm{r}^{(1)} = \mathrm{r}^{(1)}$$

$$\beta = \langle \mathrm{w}, \mathrm{w} \rangle = 44.19029651$$

$$s_1 = \frac{\beta}{\alpha} = 0.02153523222$$

$$\mathrm{v}^{(2)} = C^{-t}\mathrm{w} + s_1\mathrm{v}^{(1)} = (-2.807896697, -1.085901793, -6.006536293)^t$$

ضع $\alpha = \beta = 44.19029651$.

ونحن الآن على استعداد للبدء بالتكرار الثاني. فيكون لدينا

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= A\mathbf{v}^{(2)} = (-14.48929217, -6.760760967, -22.94024338)^t \\
t_2 &= 0.2378157558 \\
\mathbf{x}^{(2)} &= (2.858011121, 4.148971939, -4.954222164)^t \\
\mathbf{r}^{(2)} &= (0.121039698, -0.124143281, -0.034139402)^t \\
\mathbf{w} &= C^{-1}\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r}^{(2)} \\
\beta &= 0.03122766148 \\
s_2 &= 0.0007066633163 \\
\mathbf{v}^{(3)} &= (0.1190554504, -0.1249106480, -0.03838400086)^t
\end{aligned}$$

ضع $\alpha = \beta = 0.03122766148$

وأخيرًا تعطينا التكرار الثالثة

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= A\mathbf{v}^{(3)} = (0.1014898976, -0.1040922099, -0.0286253554)^t \\
t_3 &= 1.192628008 \\
\mathbf{x}^{(3)} &= (2.999999998, 4.000000002, -4.999999998)^t \\
\mathbf{r}^{(3)} &= (0.36\times 10^{-8}, 0.39\times 10^{-8}, -0.141\times 10^{-8})^t
\end{aligned}$$

ولأن $\mathbf{x}^{(3)}$ هو الحلّ الصحيح تقريبًا، فإن خطأ تقريب لا يؤثّر معنويًا في النتيجة. وفي المثال (3) من الفصل (3.7) تطلبت طريقة جاوس–سيدل 34 تكرارًا. أما طريقة SOR، مع $\omega = 1.25$، فقد تطلبت 14 تكرارًا فقط لدقة بحدود 10^{-7}. ومن الجدير ملاحظة أننا نقارن في هذا المثال بين طريقة مباشرة وطرائق تكرار. ■

ويعرض مثال الآتي تأثير الاشتراط المسبق في مصفوفة ضعيفة الاشتراط. ونستخدم في هذا مثال وما بعده $D^{-1/2}$ ليمثل المصفوفة القطرية، التي عناصرها عبارة عن مقلوب الجذور التربيعية للعناصر القطرية لمصفوفة المعاملات A.

مثال 3 النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مع

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 60 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 700 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

له حل

$$\mathbf{x}^* = (7.859713071, 0.4229264082, -0.07359223906, -0.5406430164, 0.01062616286)^t$$

المصفوفة A متماثلة وموجبة التحديد، لكنها معلولة الاشتراط مع عدد الشرط $K_\infty(A) = 13961.71$. سنستخدم حد سماح 0.01 ونقارن النتائج التي ظهرت من الطرائق (جاكوبي)، (جاوس – سيدل) و(SOR للتكرار مع $\omega = 1.25$) و(التدرج المتقارن) بـ $C^{-1} = I$. وبعد ذلك فإننا نكون قد نفذنا اشتراطًا مسبقًا من خلال اختيار C^{-1} بمنزلة المصفوفة القطرية $D^{-1/2}$ التي عناصرها القطرية عبارة عن معكوس الجذور التربيعية الموجبة للعناصر القطرية في المصفوفة الإيجابية الواضحة A. النتائج مبينة في جدول (5.7). إن طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط تعطي التقريب الأدق مع أصغر عدد من مرات التكرار.

جدول 5.7

الطريقة		عدد مرات الإعادة	$\mathbf{x}^{(k)}$	$\Vert\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}\Vert_\infty$
جاكوبي	Jacobi	49	$(7.86277141, 0.42320802, -0.07348669$ $-0.53975964, 0.01062847)^t$	0.00305834
جاوس – سيدل	Gauss–Seidel	15	$(7.83525748, 0.42257868, -0.07319124$ $-0.53753055, 0.01060903)^t$	0.02445559
	SOR ($\omega = 1.25$)	7	$(7.85152706, 0.42277371, -0.07348303$ $-0.53978369, 0.01062286)^t$	0.00818607
التدرج المتقارن	Conjugate Gradient	5	$(7.85341523, 0.42298677, -0.07347963$ $-0.53987920, 0.008628916)^t$	0.00629785
مسبق الاشتراط	Conjugate Gradient (Preconditioned)	4	$(7.85968827, 0.42288329, -0.07359878$ $-0.54063200, 0.01064344)^t$	0.00009312

إن طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط conjugate gradient غالبًا ما تستخدم في حلِّ أنظمة خطية كبيرة تكون فيها المصفوفة متشعبة وإيجابية واضحة. ويجب حلُّ هذه الأنظمة لتقريب حلول مسائل القيمة الحدية في معادلات تفاضلية اعتيادية (الفصول 3.11، 4.11، 5.11). وكلما كان النظام كبيرًا أصبحت طريقة الميل المرافق لافتة للإعجاب؛ لأنها تقلص عدد مرات التكرار المطلوبة معنويًا. ونجد في هذه الأنظمة أن المصفوفة مسبقة الاشتراط C تكون مساوية تقريبًا لـ L في تحليل شولسكي العاملي LL^t للمصفوفة A. وعمومًا يتم تجاهل العناصر الصغيرة في A وتطبّق طريقة شولسكي لإيجاد ما يدعى تحليلًا عامليًا غير مكتمل LL^t للمصفوفة A. ولذلك فإن $C^{-t}C^{-1} \approx A^{-1}$ وقد وُجِد تقريب جيد. ويمكن إيجاد المزيد من المعلومات حول طريقة الميل المرافق في [Kelley].

مجموعة التمارين 5.7 EXERCISE SET

1. النظام الخطي

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 = \tfrac{5}{21}$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 = \tfrac{11}{84}$$

له حل $(x_1, x_2)^t = (\frac{1}{6}, \frac{1}{7})^t$.

أ. حُلَّ النظام الخطي مستخدمًا تقليص جاوس مع حساب تدويري بمرتبتين.

ب. حُلَّ النظام الخطي مستخدمًا طريقة الميل المرافق ($C = C^{-1} = I$) مع حساب تدويري بمرتبتين.

ج. أي الطريقتين تعطي نتيجة أفضل؟

د. اختر $C^{-1} = D^{-1/2}$. هل هذا الاختيار يحسّن طريقة الميل المرافق؟

2. النظام الخطي

$$\begin{aligned} 0.1x_1 + 0.2x_2 &= 0.3 \\ 0.2x_1 + 113x_2 &= 113.2 \end{aligned}$$

له حلّ $(x_1, x_2)^t = (1, 1)^t$. كرر توجيهات التمرين (1) لهذا النظام الخطي.

3. النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= \tfrac{5}{6} \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 &= \tfrac{5}{12} \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= \tfrac{17}{60} \end{aligned}$$

له حل $(1, -1, 1)^t$.

أ. حُلَّ النظام الخطي مستخدمًا تقليص جاوس مع حساب تدويري بثلاث خانات.

ب. حُلَّ النظام الخطي مستخدمًا طريقة الميل المرافق مع حساب تدويري بثلاث خانات.

ج. هل التمحور يحسّن النتيجة في (أ)؟

د. كرّر الفقرة (ب) مستخدمًا $C^{-1} = D^{-1/2}$. هل هذا يحسّن النتيجة في (ب)؟

4. كرر التمرين (3) مستخدمًا حسابًا أحادي الدقة على جهاز حاسوب.

5. نفّذ خطوتين فقط من طريقة الميل المرافق مع $C = C^{-1} = I$ على كل من الأنظمة الخطية الآتية. وقارن النتائج في الفقرتين (ب) و (ج) بتلك التي وُجدت في التمارين (1 و 3 و 9) من الفصل (3.7):

أ.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25 \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ -x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

هـ.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_1 - x_3 + + 4x_5 &= 6 \end{aligned}$$

و.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 &= 5 \\ -x_2 + 4x_3 - x_6 &= 0 \\ -x_1 + 4x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2 \\ -x_3 - x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

6. كرر التمرين (5) مستخدمًا $C^{-1} = D^{-1/2}$.

7. كرر التمرين (5) مع $TOL = 10^{-3}$ في المعيار l_∞. قارن النتائج في الفقرتين (ب) و (ج) بتلك التي وُجدت في التمارين (5 و 7 و 13) من الفصل (3.7).

8. كرر التمرين (7) مستخدمًا $C^{-1} = D^{-1/2}$.

9. قرّب حلول الأنظمة الخطية $Ax = b$ الآتية ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞:

(i)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4, & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \dots, 16 \\ -1, & \text{حيث } \begin{cases} j = i+1 \text{ و } i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15 \\ j = i-1 \text{ و } i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16 \\ j = i+4 \text{ و } i = 1, 2, \dots, 12 \\ j = i-4 \text{ و } i = 5, 6, \dots, 16 \end{cases} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و

$$b = (1.902207, 1.051143, 1.175689, 3.480083, 0.819600, -0.264419, -0.412789, 1.175689, 0.913337, -0.150209, -0.264419, 1.051143, 1.966694, 0.913337, 0.819600, 1.902207)^t$$

(ii)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4, & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \dots, 25 \\ -1, & \text{حيث } \begin{cases} j = i+1 \text{ و } i = \begin{cases} 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 \\ 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, \end{cases} \\ j = i-1 \text{ و } i = \begin{cases} 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15 \\ 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25 \end{cases} \\ j = i+5 \text{ و } i = 1, 2, \dots, 20 \\ j = i-5 \text{ و } i = 6, 7, \dots, 25 \end{cases} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و $b = (1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2)^t$

(iii)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \dots, 40 \\ -1, & \text{حيث } \begin{cases} j = i+1 \text{ و } i = 1, 2, \dots, 39 \\ j = i-1 \text{ و } i = 2, 3, \dots, 40 \end{cases} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و $b_i = 1.5i - 6$ لكل $i = 1, 2, \dots, 40$

أ. استخدم طريقة جاكوبي.

ب. استخدم طريقة جاوس – سيدل.

ج. استخدم طريقة SOR مع $\omega = 1.3$ في (i) و $\omega = 1.2$ في (ii) و $\omega = 1.1$ في (iii).

د. استخدم طريقة الميل المرافق واشتراطا مسبقًا مع $C^{-1} = D^{-1/2}$.

10. حُلّ النظام الخطي في التمرين (24 (ب)) من مجموعة التمارين (3.7) مستخدمًا طريقة الميل المرافق مع $C^{-1} = I$.

11. افترض

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومن مصفوفة A بحجم 16×16 بالصيغة المجزأة

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -I & O & O \\ -I & A_1 & -I & O \\ O & -I & A_1 & -I \\ O & O & -I & A_1 \end{bmatrix}$$

افترض $\mathbf{b} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)^t$.

أ. حُلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مستخدمًا طريقة الميل المرافق مع حد سماح 0.05.

ب. حُلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مستخدمًا طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط مع $C^{-1} = D^{-1/2}$ وحد سماح 0.05.

ج. هل هناك أي حد سماح تتطلب فيه الطريقتان (أ) و (ب) عددًا مختلفًا من التكرار؟

12. استخدم خصائص المنقول المعطى في المبرهنة (13.6) لبرهنة المبرهنة (30.7).

13. أ. أثبت أن مجموعة متعامد-A لمتجهات لاصفرية مرتبطة بمصفوفة إيجابية واضحة تكون مستقلة خطيًا.

ب. أثبت أنه إذا كانت $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ عبارة عن مجموعة متعامد-A لمتجهات لاصفرية في $\mathbb{R}$، وأن $\mathbf{z}^t\mathbf{v}^{(i)} = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإن $\mathbf{z} = 0$.

14. برهن المبرهنة (33.7) مستخدمًا الاستنتاج الرياضي وفق الآتي:

أ. أثبت أن $\langle \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle = 0$.

ب. افترض أن $\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$ لكل $k \le l$ و $j = 1, 2, \ldots, k$. وأثبت أن هذا يؤدي إلى أن $\langle \mathbf{r}^{(l+1)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$ لكل $j = 1, 2, \ldots, l$.

ج. أثبت أن $\langle \mathbf{r}^{(l+1)}, \mathbf{v}^{(l+1)} \rangle = 0$.

7.6 مسح للطرائق والبرمجيات Survey of Methods and Software

درسنا في هذا الباب أساليب تكرار لتقريب حل الأنظمة الخطية. وبدأنا بطريقة جاكوبي وطريقة جاوس – سيدل لتقديم طرائق التكرار. وتتطلب كلتا الطريقتين تقريبا ابتدائيًا عشوائيًا $\mathbf{x}^{(0)}$ وتوليد متتالية من المتجهات $\mathbf{x}^{(i+1)}$ مستخدمين معادلة بالصيغة

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = T\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{c}$$

ولقد لُوحظ أن الطريقة ستتقارب إذا وفقط إذا كان نصف القطر الطبيعي لمصفوفة التكرار $\rho(T) < 1$، وكلما كان نصف القطر الطبيعي أصغر كان التقارب أسرع. وإن تحليل متجهات البواقي لأسلوب جاوس–سيدل أدّى إلى طريقة SOR للتكرار، التي تتضمن المتغيرة ω لتسريع التقارب. إن طرائق التكرار وتعديلاتها هذه تُستخدم بصورة واسعة في حلول الأنظمة الخطية التي تبرز في الحلول العددية لمسائل قيمة الحد والمعادلات التفاضلية الجزئية (انظر البابين 11 و 12). وغالبًا ما تكون هذه الأنظمة كبيرة جدًا. حيث تعد 10,000 معادلة في 10,000 من

عمل الكسي نيكولفج كريلوف (1863-1945) Aleksey Nikolayevich Krylov في الرياضيات التطبيقية وخصوصا في مجال مسائل القيمة الحدية. تسريع تقارب سلاسل فورير Fourier ووسائل كلاسيكية مختلفة تتضمن نظما رياضية. وخلال بداية الـ 1930 كان مديرا لمعهد الرياضيات الفيزيائية التابع لأكاديمية العلوم السوفيتية

المجاهيل ومتشعبة بعناصرها اللاصفرية في مواقع قابلة للتنبؤ. وإن طرائق التكرار مفيدة أيضًا في أنظمة متشعبة وأخرى كبيرة. ومن السهولة تبنيها لاستخدامها جيدًا في الحسبات المتوازية.

إن البرمجيات السائدة جميعها التجارية والعامة التي تتضمن طرائق تكرار لحلّ النظم الخطي لمعادلات ما غالبا ما تتطلب اشتراطا مسبقا لاستخدامها مع تلك الطرائق. وغالبا ما يمكن تحقيق تقارب أسرع لأدوات حل التكرار من خلال استخدام اشتراط مسبق. فالاشتراط المسبق ينتج نظاما مكافئًا من المعادلات التي من المؤمل أن تساهم في خصائص تقارب أفضل مما هو في النظام الأصلي. وإن مكتبة IMSL تتضمن البرنامج الفرعي PCGRC الذي هو طريقة الميل المرافق مسبق الاشتراط. وتتضمن مكتبة NAG برامج فرعية متعددة هي prefixed F11 لحلّ التكرار لأنظمة خطية.

تستند البرمجيات الفرعية كلها إلى طرائق فضاءات Krylov الجزئية. يحتوي المرجع Saad [Sa2] وصفًا مفصلًا لطرائق فضاء Krylov الجزئي. وتتضمن برامج LINPACK و LAPACK الطرائق المباشرة لحلّ الأنظمة الخطية فقط. وعلى الرغم من ذلك فإن البرمجيات هذه تتضمن العديد من البرامج الفرعية التي تستخدم قبل حل التكرار. إن البرمجيات السائدة العامة IML++, ITPACK, SLAP، والقوالب تتضمن طرائق تكرار. وإن MATLAB يتضمن طرائق تكرار متعددة تستند أيضًا إلى فضاءات Krylov الجزئية. وعلى سبيل المثال، فإن الأمر $x = \mathrm{PCG}(A, b)$ ينفذ طريقة الميل المرافق المسبق الاشتراط لحلّ النظام الخطي $Ax = b$. بعض المتغيرات المدخلة الاختيارية لـ PCG هي TOL حد السماح للتقارب، أكبر عدد من مرات التكرار MAXIT والاشتراط المسبق M.

تناولنا مفاهيم العدد الشرطي والمصفوفات الضعيفة الاشتراط في الفصل (7.4). ويتضمن العديد من البرامج الفرعية لحلّ النظام الخطي أو لتحليل مصفوفة إلى العوامل LU فحوصًا للمصفوفات معلولة الاشتراط، وتعطي تقديرًا للعدد الشرطي كذلك.

ويحلّل البرنامج الفرعي SGETRF في LAPACK عامليًا المصفوفة الحقيقية A إلى العوامل LU ويعطي ترتيب الصف لمصفوفة التباديل P، حيث إن $PA = LU$. والبرنامج الفرعي SGECON يعطي مقلوب العدد الشرطي لـ A، مستخدما العوامل LU والمحسوبة من خلال SGETRF. يتضمن LAPACK كذلك برامج فرعية لتقدير العدد الشرطي لمصفوفات خاصة. وعلى سبيل المثال ينفذ SPOTRF عوامل شولسكي لمصفوفة إيجابية واضحة A، وإن SPOCON يقدّر مقلوب العدد الشرطي مستخدمًا عوامل شولسكي المحسوبة من خلال SPOTRF.

إن مكتبة IMSL تتضمن برامج فرعية لتقدير العدد الشرطي. وعلى سبيل المثال يحسب LFCRG عاملية LU، $PA = LU$ للمصفوفة A، ويعطي تقدير العدد الشرطي أيضًا. ومكتبة NAG تتضمن برامج فرعية مماثلة. تتضمن LAPACK, LINPACK، مكتبة IMSL ومكتبة NAG برامج فرعية تحسّن حلّ النظام الخطي ذي الاشتراط الضعيف. وتختبر البرامج الفرعية العدد الشرطي، ثم تستخدم تنقية التكرار لإيجاد أدقّ الحلول المحتملة وفق الدقة المنتهية للحاسبة.

ويمكن إيجاد معلومات أكثر حول استخدام طرائق التكرار لحلّ أنظمة خطية في Varga [Var1], Young [Y], Hageman and Young [HY].

وكذلك في كتاب حديث لـ Axelsson [Ax]. تناقش طرائق التكرار لأنظمة كبيرة متفرعة في Barrett et al.[Barr], Hackbusch [Hac], Kelley [Kelley] و Saad [Sa2].