الباب

6

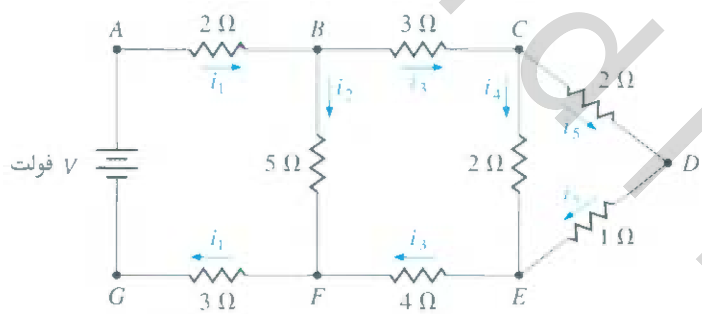
الطرائق المباشرة لحل الأنظمة الخطيّة

Direct Methods for Solving Linear Systems

مقدمة

تنص قوانين كيرشوف Kirchhoff في الدارات الكهربائية على أن صافي تدفق التيار عند كل عروة وصافي انخفاض الجهد حول كل دارة في الدارة يساوي صفرًا. افترض أن طاقة وضع قيمتها V فولت وُضعت بين النقطتين A و G في الدارة، وأن i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 تمثيل اندفاع التيار كما في الشكل أدناه بافتراض G نقطة مرجعية، وإن قوانين كيرشوف تعني أن التيارات تحقق نظام المعادلات الخطية الآتية:

$$
\begin{aligned}
5i_1 + 5i_2 &= V \\
i_3 - i_4 - i_5 &= 0 \\
2i_4 - 3i_5 &= 0 \\
i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\
5i_2 - 7i_3 - 2i_4 &= 0
\end{aligned}
$$



سيتناول هذا الباب حَلّ الأنظمة من هذا النوع. لقد شُرح هذا التطبيق في التمرين (29) من الفصل (6.6).

إن أنظمة المعادلات الخطية مرتبطة بكثير من مسائل الهندسة والعلوم وكذلك بتطبيقات الرياضيات في العلوم الاجتماعية والدراسات الكمية في الأعمال والمسائل الاقتصادية.

ندرس في هذا الباب طرائق مباشرة لحل نظام خطي على الصيغة

$$\begin{aligned} E_1: &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2: &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\quad \vdots \\ E_n: &\quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{1.6}$$

في المجاهيل (المتغيرات) $x_1, \ldots, x_n$ حيث a_{ij} ثوابت معطاة لكل $i, j = 1, 2, \ldots, n$ و b_i لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ إن الطرائق المباشرة هي طرائق تعطي الحل بعدد محدد من الخطوات، وخاضعة لأخطاء تقريب فقط. وسنقدم خلال عرضنا بعض المفاهيم الابتدائية في موضوع الجبر الخطي.

أما طرائق تقريب حل الأنظمة الخطية باستخدام الطرائق المتكررة فستعرض في الفصل السابع.

1.6 أنظمة المعادلات الخطية Linear Systems of Equations

نستخدم ثلاث عمليات (تدعى العمليات الابتدائية) لتبسيط النظام الخطي في المعادلة (1.6):

أ. يمكن ضرب المعادلة E_i في أي ثابت غير صفري λ والحصول على معادلة تكافئ المعادلة (E_i). ونعبر عن هذه العملية بالرمز $(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$.

ب. يمكن ضرب المعادلة E_i في أي ثابت λ، ثم إضافة الناتج إلى المعادلة E_j، ونعبّر عن هذه العملية بالرمز $(E_i + \lambda E_j) \rightarrow (E_i)$.

ج. يمكن تبديل المعادلتين E_i و E_j. ونعبّر عن هذه العملية بالرمز $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$.

يمكن تحويل نظام خطي باستخدام متتالية من هذه العمليات، إلى نظام خطي آخر يسهل حله، وله حلول النظام الأول نفسها.

مثال 1 حُلَّ المعادلات الأربع الآتية للمجاهيل x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{aligned} E_1: &\quad x_1 + x_2 \phantom{{}- x_3} + 3x_4 = 4 \\ E_2: &\quad 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ E_3: &\quad 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ E_4: &\quad -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{aligned} \tag{2.6}$$

نستخدم E_1 أولاً لحذف المجهول x_1 من E_2, E_3, E_4 وذلك باستخدام

$(E_4 + E_1) \rightarrow (E_4)$ و $(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2), (E_3 - 3E_1) \rightarrow (E_3)$

لنحصل على النظام

$$\begin{aligned} E_1: &\quad x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ E_2: &\quad -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ E_3: &\quad -4x_2 - x_3 - 7x_4 = -15 \\ E_4: &\quad 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \end{aligned}$$

حيث رمزنا إلى المعادلات الجديدة بالرموز E_1, E_2, E_3 و E_4 للتبسيط.

في النظام الجديد نستخدم E_2 لحذف X_2 من E_3 و E_4 من خلال تشكيل $(E_3 - 4E_2) \longrightarrow (E_3)$ و $(E_4 + 3E_2) \longrightarrow (E_4)$ فنحصل على

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad x_1 + x_2 \qquad\quad + 3x_4 = 4 \\ E_2 &: \qquad - x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ E_3 &: \qquad\qquad 3x_3 + 13x_4 = 13 \\ E_4 &: \qquad\qquad\quad - 13x_4 = -13 \end{aligned} \tag{3.6}$$

إن نظـام المعادلات (3.6) الآن في صيغة مثلثية (أو مختزلة) triangular (or reduced). وبهذا يمكن إيجاد الحلول بعملية التعويض العكسي (backward - substitution process). بما أن E_4 تعطي $x_4 = 1$ فيمكننا حل E_3 لإيجاد x_3. وذلك باستخدام

$$x_3 = \tfrac{1}{3}(13 - 13x_4) = \tfrac{1}{3}(13 - 13) = 0$$

وباستمرار هذه العملية فإن E_2 تعطي

$$x_2 = -(-7 + 5x_4 + x_3) = -(-7 + 5 + 0) = 2$$

و E_1 تعطي

$$x_1 = 4 - 3x_4 - x_2 = 4 - 3 - 2 = -1$$

ولذلك فإن حل نظام المعادلات (3.6) ومن ثم نظام المعادلات (2.6) هو $x_1 = -1$، $x_2 = 2$، $x_3 = 0$ و $x_4 = 1$. ■

عنـد القيام بالحسـابات في مثال (1)، لم تكن هناك حاجة إلـى كتابة المعادلات كاملة في كل خطوة أو حمل المتغيرات x_1، x_2، x_3 و x_4 خلال الحسابات؛ لأنها بقيت دائما في العمود نفسه. إن التغير الوحيد الذي طرأ عند الانتقال من نظام إلى آخر كان في معاملات المجاهيل وفي قيم الطرف الأيمن للمعادلات. ولهذا السـبب غالبًا ما تسـتخدم المصفوفـة بدلًا من النظام الخطي. وهذه المصفوفة تحتوي على المعلومات الضرورية جميعها في النظام للحل. ولكن بطريقة أفضل. المصفوفة من الدرجة (أو الشكل أو السعة) $n \times m$ هي مستطيل من العناصر عدد صفوفه n وعدد أعمدته m، حيث يتحدد العنصر بقيمته وموقعه معًا. ■

تعريف 1.6 يعبّـر عـن المصفوفة $n \times m$ بحرف كبير مثل A، وبحـروف صغيرة وعددي دليل مثل a_{ij} لكل مدخل (أو عنصر) في تقاطع الصف i والعمود j، أي

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

مثال 2 المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

هـي مصفوفـة 2×3 حيـث

$a_{11} = 2$، $a_{12} = -1$، $a_{13} = 7$، $a_{21} = 3$، $a_{22} = 1$ و $a_{23} = 0$ ■

تسمى المصفوفة $n \times 1$، ويعبر عنها $A = [a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}]$ متجهًا صفيًا ذا بعد n
وتسمى المصفوفة $1 \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

متجهًا عموديًّا ذا بعد n

نحـذف في العادة الرموز غير الضرورية عند التعبير عن المتجهات، وتسـتخدم حروف صغيرة غامقة اللون للتعبير عنها فمثلًا

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

متجه عمودي، و

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]$$

متجه صفي.

يمكن تمثيل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

بمصفوفة من الدرجة $n \times (n-1)$ على النحو التالي:

بوضع $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ و $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

كلمة معزّزة (مزيدة) تشير إلى حقيقة أن الحدود الثابتة قد زيدت وضمت إلى المصفوفة

ثم بتجميع هاتين المصفوفتين للحصول على المصفوفة الموسعة augmented matrix

$$[A, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

حيـث اسـتخدمنا الخط العمودي المنقـوط ليفصل بين معاملات المجاهيل عـن القيم في الجهة اليمنى للمعادلات.

إن إعادة العمليات التي أُجريت في مثال (1) باستخدام رموز المصفوفة تنتج بالمصفوفة الموسعة أولاً.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

وبإجراء العمليات الصفية للمثال المذكور نحصل على المصفوفتين

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] \quad \text{و} \quad \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right]$$

ويمكن تحويل المصفوفة النهائية للنظام الخطي المرتبط بها، ومن ثم الحصول على حل المجاهيل x_1، x_2، x_3 و x_4.

تُسمى الطريقة المستخدمة في هذه العملية طريقة الحذف لجاوس باستخدام التعويض التراجعي
Gaussian elimination with backward substitution

ظهرت طريقة مشابهة لطريقة الحذف لجاوس لأول مرة في فترة حكم سلالة هان Han في الصين. وكان ذلك في الكتاب "تسعة فصول في فن الرياضيات" الذي كتب عام 200 قبل الميلاد تقريبا

لقد وصف جوزيف لويس لاجرانج (1736–1813) طريقة مماثلة لهذه الطريقة عام 1778 في حالة أن قيمة كل معامل صفر، وأعطى جاوس وصفا أعم في كتابه
Theoria Motus corporum coelestium sectionbus solem ambientium
الذي شرح طريقة المربعات الصغرى التي استخدمها عام 1809 ليحدد مدار الكوكب الصغير سيريز

تعمم طريقة الحذف لجاوس على النظام العام للمعادلات الخطية بصورة مماثلة على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 &: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ E_n &: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{4.6}$$

إن الصيغة الأولى للمصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ هي

$$\tilde{A} = [A, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right] \tag{5.6}$$

حيث تعبر A عن المصفوفة المكوّنة من المعاملات.

إن مدخلات العمود $(n+1)$ هي قيم $\mathbf{b}$، أي أن $a_{i,n+1} = b_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$
في حالة $a_{11} \neq 0$، ويمكن تنفيذ العمليات المقابلة للتحويل $(E_j - (a_{j1}/a_{11})E_1) \to (E_j)$
لكل من $j = 2, 3, \ldots, n$؛ للتخلص من معامل x_1 في كل صف من هذه الصفوف.
وعلى الرغم من أنه من المتوقع أن تتغير المدخلات في الصفوف $2, 3, \ldots, n$، فإننا ولتبسيط الرموز سنعبر عن المدخل في الصف i والعمود j بالرمز a_{ij}. وبإبقاء هذا الأمر ضمن الافتراض سنتبع متتالية من العمليات لكل $i = 2, 3, \ldots, n-1$، ونجري العملية $(E_j - (a_{ji}/a_{ii})E_i) \to (E_j)$،
لكل $j = i+1, i+2, \ldots, n$ على أن $a_{ii} \neq 0$
إن هذا يحذف (يغير المعامل ليصبح صفراً) x_i في كل صف تحت الصف i، وللقيم $i = 1, 2, \ldots, n-1$ جميعها تأخذ المصفوفة الناتجة الصيغة الآتية:

$$\tilde{\tilde{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

إذ لا يتوقّع أن تتوافق قيم a_{ij} عدا التي في الصف الأول مع مثيلاتها في المصفوفة الأصلية A وتمثّل المصفوفة $\tilde{A}$ نظامًا خطيًا له مجموعة من حلول النظام الأصلي (4.6) نفسها.

وبما أن النظام الخطي الجديد مثلثيّ فإن

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1}\\
a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1}\\
&\;\;\vdots\\
a_{nn}x_n &= a_{n,n+1}
\end{aligned}$$

ويمكن تطبيق التعويض الارتجاعي. وبحل المعادلة ذات العدد n لإيجاد قيمة x_n نجد أن

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

وبحل المعادلة عدد $(n-1)$ لإيجاد قيمة x_{n-1} واستخدام القيمة المعلومة لـ x_n نجد أن

$$x_{n-1} = \frac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

وباستمرار هذه العملية نحصل على

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - a_{i,n}x_n - a_{i,n-1}x_{n-1} - \cdots - a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{ii}} = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

لكل $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$

ويمكــن عرض طريقة جــاوس بالحذف بدقة أكبر على الرغم من كونــه أكثر تعقيدً ، عن طريق تكوين المصفوفات الموسعة $\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \ldots, \tilde{A}^{(n)}$ حيــث إن $\tilde{A}^{(1)}$ المعطــاة في المعادلة (5.6) و $\tilde{A}^{(k)}$ ، لكل $k = 2, 3, \ldots, n$ لها المدخلات $a_{ij}^{(k)}$ حيث

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)}, & \text{عندما } i = 1, 2, \ldots, k-1 \text{ و } j = 1, 2, \ldots, n+1 \\ 0, & \text{عندما } i = k, k+1, \ldots, n \text{ و } j = 1, 2, \ldots, k-1 \\ a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}} a_{k-1,j}^{(k-1)}, & \text{عندما } i = k, k+1, \ldots, n \text{ و } j = k, k+1, \ldots, n+1 \end{cases}$$

وهكذا

$$\tilde{A}^{(k)} = \left[\begin{array}{cccccccc:c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & a_{k-1,n+1}^{(k-1)} \\
\vdots & & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & a_{n,n+1}^{(k)}
\end{array}\right] \qquad (6.6)$$

يمثّل النظام الخطي المكافئ الذي حذف فيه x_{k-1} من المعادلات $E_k, E_{k+1}, \ldots, E_n$.

وستفشل العملية إذا كان أي من $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, a_{33}^{(3)}, \ldots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}, a_{nn}^{(n)}$ يساوي صفرًا؛ لأن الخطوة

$$\left(E_i - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} E_k\right) \to E_i$$

إما أنه لا يمكن تنفيذها (هذا في حالة أن واحدًا من $a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}$ يساوي صفرًا)، وإما أنه لا يمكن إجراء التعويض الارتجاعي (في حالة $a_{nn}^{(n)} = 0$).

ومن الممكن أن النظام ما زال له حل. ولكن لا بد من تغيير الطريقة لإيجاد الحل. والتوضيح في مثال الآتي:

مثال 3 لديك النظام الخطي

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8\\
E_2 &: \quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20\\
E_3 &: \quad x_1 + x_2 + x_3 \qquad = -2\\
E_4 &: \quad x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4
\end{aligned}$$

إن المصفوفة الموسعة هي

$$\tilde{A} = \tilde{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8\\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20\\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

وإن إجراء العمليات

$$(E_4 - E_1) \to (E_4) \text{ و } (E_2 - 2E_1) \to (E_2),\ (E_3 - E_1) \to (E_3)$$

يعطي

$$\tilde{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

وبما أن $a_{22}^{(2)}$ المسمّى بالعنصر المحوري pivot element يساوي صفرًا. فإنه لا يمكن استمرار الطريقة بنمطها الحالي. ولكن العملية $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$ مسموح بها. ولذلك نبدأ بتمعن العناصر $a_{32}^{(2)}$ و $a_{42}^{(2)}$ للتوصل إلى أول عنصر غير صفري. وبما أن $a_{32}^{(2)} \neq 0$ نجري العملية $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$ لنحصل على مصفوفة جديدة

إن العنصر المحوري في أي عمود محدد هو العنصر المستخدم لوضع أصفار في الخلايا الأخرى لذلك العمود

$$\tilde{A}^{(2)'} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

بما أن x_2 قد حذفت من E_3 و E_4 فإن $\tilde{A}^{(3)}$ تصبح $\tilde{A}^{(2)'}$ ويستمر الحساب في العملية $(E_4 + 2E_3) \to (E_4)$ التي تعطي

$$\tilde{A}^{(4)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

وأخيرًا، يطبَّق التعويض الارتجاعي ليعطي

$$x_4 = \frac{4}{2} = 2,$$

$$x_3 = \frac{[-4 - (-1)x_4]}{-1} = 2$$

$$x_2 = \frac{[6 - x_4 - (-1)x_3]}{2} = 3$$

$$x_1 = \frac{[-8 - (-1)x_4 - 2x_3 - (-1)x_2]}{1} = -7$$

■

يوضح مثال (3) ما يمكن عمله إذا كان $a_{kk}^{(k)} = 0$ لعدد ما $k = 1, 2, \ldots, n-1$، يجب تمعُّن العمود k للمصفوفة $\tilde{A}^{(k-1)}$ من الصف k حتى الصف n للحصول على أول مدخل غير صفري. إذا كان $a_{pk}^{(k)} \neq 0$ لعدد ما p حيث $k+1 \le p \le n$ يجب إجراء العملية $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$ للحصول على $\tilde{A}^{(k-1)'}$. ويمكن بعد ذلك استمرار العملية لتكوين $\tilde{A}^{(k)}$. إذا كان $a_{pk}^{(k)} = 0$ لكل p يمكن برهنة (انظر المبرهنة (16.6) في الفصل 4.6) أن النظام الخطي ليس له حل وحيد، وأن العملية تتوقف. وأخيرًا إذا كان $a_{nn}^{(n)} = 0$ فإن النظام الخطي ليس له حل وحيد، وعلى تتوقف العملية مرة أخرى. إن الخوارزمية 1.6 تلخّص عملية الحذف لجاوس باستخدام التعويض الارتجاعي. وتستخدم الخوارزمية عملية التمحور عندما يقوم المحور $a_{kk}^{(k)} = 0$ بتبديل الصف k بالصف p حيث p أصغر عدد صحيح وأكبر من k، فسيكون له $a_{pk}^{(k)}$ غير صفري.

ALGORITHM
الخوارزمية
1.6

طريقة جاوس للحذف باستخدام التعويض الارتجاعي
Gaussian Elimination with Backward Substitution

لحل النظام الخطي $n \times n$ الآتي:

$$\begin{array}{lcl}
E_1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\
E_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\
\vdots & \vdots \\
E_n: & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}
\end{array}$$

المدخلات: عدد من المجاهيل والمعادلات، n، مصفوفة معزّزة $A = [a_{ij}]$، حيث

$1 \le i \le n$ و $1 \le j \le n+1$

المخرجات: حلّ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أو رسالة تقول: ليس للنظام الخطي حل وحيد

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1, \ldots, n-1$ نفذ الخطوات 2، 3، 4. (عملية الحذف)
2	افترض p أصغر عدد صحيح بحيث $a_{pi} \neq 0$ و $i \le p \le n$ إذا لم يحقق العدد p ذلك فعندئذ يكون المخرج (لا يوجد حل وحيد). توقف.
3	إذا كان $p \neq i$ فعندئذ نفّذ $(E_p) \longleftrightarrow (E_i)$.
4	لكل $j = i+1, \ldots, n$ نفّذ الخطوتين 5 و6.
5	ضع $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$

6	أجرِ العملية $(E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow (E_j)$
7	إذا كان $a_{nn} = 0$ فإن المخرج (لا يوجد حل وحيد). توقف.
8	ضع $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$ (ابدأ بالتعويض الارتجاعي).
9	لكل $i = n-1, \ldots, 1$ ضع $x_i = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right] / a_{ii}$
10	المخرج $(x_1, \ldots, x_n)$ (نجحت العملية). توقف.

■

إن برمجيــات CAS جميعها تحوي برمجيــات المصفوفات. ولتعريف المصفوفات وتنفيذ عمليات الحذف لجاوس باســتخدام مابل Maple؛ عليك أولا الدخــول إلى مكتبة الجبر الخطي Linear Algebra باستخدام الأمر

```
>with(LinearAlgebra)
```

لتعريف المصفوفة $\tilde{A}^{(1)}$ في مثال 2 التي سنسميها AA استخدم الأمر

```
>AA:=Matrix([[1,-1,2,-1,-8],[2,-2,3,-3,-20],[1,1,1,0,-2],[1,-1,4,3,4]])
```

إن هذا يعمل قائمة بالمدخلات بحسب صفوف المصفوفة الموسعة $AA \equiv \tilde{A}^{(1)}$: إن الدالة

```
RowOperation(AA,[i,j],m)
```

يجري العملية $(E_j + mE_i) \rightarrow (E_j)$.

وهذا الأمر نفســه دون المعلمة الأخيرة RowOperation(AA,[i,j],m) يجري العملية $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

ومن ثم فإن متتالية العمليات

```
>AA1:=RowOperation(AA,[2,1],-2)
>AA2:=RowOperation(AA1,[3,1],-1)
>AA3:=RowOperation(AA2,[4,1],-1)
>AA4:=RowOperation(AA3,[2,3])
>AA5:=RowOperation(AA4,[4,3],2)
```

تؤدي إلى النتيجة $AA5 \equiv \tilde{A}^{(4)}$.

وبطريقة أخرى فإن الأمر المنفرد

```
AA5:=GaussianElimination(AA)
```

يؤدي إلى المصفوفة المنخفضة نفسها.

وفي أي من الحالتين فالعملية النهائية

```
>x:=BackwardSubstitute(AA5)
```

تعطي الحل

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مثال 4 إن الغرض من هذا مثال هو توضيح ما يمكن أن يحدث لو فشلت الخوارزمية (1.6).

إن الحسابات ستجري آنيًا على نظامين خطيين

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

وإن هذين النظامين ينتجان المصفوفتين

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 2 & 2 & 1 & : & 6 \\ 1 & 1 & 2 & : & 6 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 2 & 2 & 1 & : & 4 \\ 1 & 1 & 2 & : & 6 \end{bmatrix}$$

وبما أن $a_{11} = 1$ نجري $(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2)$ و $(E_3 - E_1) \rightarrow (E_3)$ فينتج

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 0 & -1 & : & -4 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 0 & -1 & : & -2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix}$$

عند هذه النتيجة $a_{22} = a_{32} = 0$

تتطلب الخوارزمية توقف العملية، ومن ثم عدم الحصول على حل لأي من النظامين. إن كتابة المعادلات لكل نظام يعطي

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_3 &= -2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_3 &= -4 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

إن النظام الخطي الأول له عدد لانهائي من الحلول

$$x_3 = 2,\ x_2 = 2 - x_1 \text{ و } x_1$$

النظام الخطي الثاني يؤدي إلى تناقض

$x_3 = 2$ و $x_3 = 4$، لذلك لا يوجد حل. ■

لا يوجد حل وحيد لكل حالة ضمن ما نستنتجه من الخوارزمية (1.6).

وعلى الرغم من أنه يمكن النظر إلى الخوارزمية (1.6) على أنها إنشاء المصفوفات $\tilde{A}^{(1)}, \ldots, \tilde{A}^{(n)}$ فإنه يمكن إجراء الحسابات على الحاسوب بتخزين مصفوفة واحدة $n \times (n+1)$ فقط ويمكن أن نعوض في كل خطوة عن قيمة a_{ij}، السابقة بالقيمة الجديدة. بالإضافة إلى ذلك يمكننا تخزين m_{ji} في مواقع a_{ij}، لأن a_{ij} قيمته 0 لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$ و $j = i+1, i+2, \ldots, n$. وهكذا فبدلاً من A يمكن كتابة المضاريب تحت القطر الرئيس وكتابة مدخلات $\tilde{A}^{(n)}$ غير الصفرية على القطر الرئيس وفوقه. ويمكن استخدام هذه القيم لحل أنظمة خطية أخرى محتوية على المصفوفة الأصلية A، كما سنرى في الفصل (5.6). إن الوقت اللازم لكل من الحسابات وتدوير الخطأ الناتج يعتمد على عدد عمليات الحساب للنقطة العائمة اللازمة لحل المسألة روتينيًّا.

وعمومًا فإن الوقت اللازم لإجراء الضرب أو القسمة على الحاسوب هو نفسه تقريبًا، وهو أكثر بكثير من الوقت اللازم لإجراء الجمع أو القسمة. وعلى كل حال فإن الفروق الفعلية تعتمد على نظام الحساب المحدد. ولعرض تعداد العمليات لأي طريقة معينة، سنعدّ العمليات اللازمة لحل نظام خطي نمطي مؤلف من n معادلات بعدد n من المجاهيل باستخدام الخوارزمية 1.6. سنبقي عدد عمليات الجمع/الطرح منفصلًا عن عمليات الضرب/القسمة بسبب الفرق في الوقت. ولا يوجد أي عمليات حسابية لغاية الخطوتين 5 و 6 في الخوارزمية. وتتطلب الخطوة 5 $(n-i)$ من عمليات القسمة، وإن وضع $(E_j - m_{ji}E_i)$ بدلاً من E_j في الخطوة 6 يتطلب ضرب m_{ji} في كل حد في E_i، وينتج من ذلك $(n-i)(n-i+1)$ من عمليات الضرب.

وبعد استكمال هذا، فإن كل حد في المعادلة الناتجة يطرح من الحد المقابل في E_j.

إن هذا يتطلب $(n-i)(n-i+1)$ من عمليات الطرح. لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$، فإن العمليات اللازمة في الخطوتين 5 و 6 هي كما يلي:

ضرب/ قسمة

$$(n-i)+(n-i)(n-i+1)=(n-i)(n-i+2)$$

جمع/ طرح

$$(n-i)(n-i+1)$$

يمكن الحصول على العدد الكلي للعمليات اللازمة لهذه الخطوات بجمع تعداد العمليات لكل i.
تذكر من حساب التفاضل والتكامل أن

$$\sum_{j=1}^{m} j^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^{m} 1=m, \quad \sum_{j=1}^{m} j=\frac{m(m+1)}{2}$$

ومن ثم نحصل على تعدادات العمليات الآتية :

الضرب/ القسمة

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+2)=\sum_{i=1}^{n-1}(n^2-2ni+i^2+2n-2i)$$

$$=(n^2+2n)\sum_{i=1}^{n-1}1-2(n+1)\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-1}i^2=\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

الجمع/ الطرح

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1)=\sum_{i=1}^{n-1}(n^2-2ni+i^2+n-i)$$

$$=(n^2+n)\sum_{i=1}^{n-1}1-(2n+1)\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-1}i^2=\frac{n^3-n}{3}$$

إن الخطوات الوحيدة الأخرى في الخوارزمية (1.6) التي تحتوي على عمليات حسابية هي تلك اللازمة للتعويض الارتجاعي، وهي الخطوتان 8 و9. وتتطلّب الخطوة 8 عملية قسمة واحدة. وتتطلّب الخطوة 9 $(n-i)$ من عمليات الضرب و $(n-i-1)$ من عمليات الجمع لكل حد جمع، ثم عملية طرح واحدة وعملية قسمة واحدة.

إن العدد الكلي للعمليات في الخطوتين 8 و9 هو كما يلي :

ضرب/ قسمة

$$1+\sum_{i=1}^{n-1}((n-i)+1)=\frac{n^2+n}{2}$$

جمع/ طرح

$$\sum_{i=1}^{n-1}((n-i-1)+1)=\frac{n^2-n}{2}$$

ولذلك فإن العدد الكلي للعمليات الحسابية في الخوارزمية 1.6 هو

ضرب/ قسمة

$$\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}+\frac{n^2+n}{2}=\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}$$

جمع/ طرح

$$\frac{n^3-n}{3}+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$$

عندما تكون n كبيرة فإن العدد الكلي لعمليات الضرب والقسمة هو $n^3/3$ تقريباً، كما هو الحال في العدد الكلي لعمليات الجمع والطرح. وهكذا تزداد كمية الحساب والوقت اللازم مع n بالتناسب مع n^3 كما في جدول (1.6).

جدول 1.6

n	جمع/ طرح	ضرب/ قسمة
3	17	11
10	430	375
50	44,150	42,875
100	343,300	338,250

مجموعة التمارين 1.6 EXERCISE SET

1. أوجد حلاً بالطرائق البيانية إن أمكن لكل من الأنظمة الخطية الآتية، واشرح النتائج من وجهة نظر هندسية:

أ. $\begin{aligned} x_1+2x_2&=3\\ x_1-x_2&=0\end{aligned}$ ب. $\begin{aligned} x_1+2x_2&=3\\ 2x_1+4x_2&=6\end{aligned}$ ج. $\begin{aligned} x_1+2x_2&=0\\ 2x_1+4x_2&=0\end{aligned}$ د. $\begin{aligned} 2x_1+x_2&=-1\\ 4x_1+2x_2&=-2\\ x_1-3x_2&=5\end{aligned}$

2. أوجد حلًّا بالطرائق البيانية إن أمكن لكل من الأنظمة الخطية الآتية. واشرح النتائج من وجهة نظر هندسية:

أ. $\begin{aligned} x_1+2x_2&=0\\ x_1-x_2&=0\end{aligned}$ ب. $\begin{aligned} x_1+2x_2&=3\\ -2x_1-4x_2&=6\end{aligned}$

ج. $\begin{aligned} 2x_1+x_2&=-1\\ x_1+x_2&=2\\ x_1-3x_2&=5\end{aligned}$ د. $\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=1\\ 2x_1+4x_2-x_3&=-1\end{aligned}$

3. استخدم طريقة جاوس للحذف باستخدام التعويض الارتجاعي وحساب تقريب لعددين في حل الأنظمة الخطية الآتية، ولا تعد ترتيب المعادلات: (إن الحل لصحيح لكل نظام هو $x_1=1, x_2=-1, x_3=3$.)

أ. $\begin{aligned} 4x_1+x_2+2x_3&=9\\ 2x_1+4x_2-x_3&=-5\\ x_1+x_2-3x_3&=-9\end{aligned}$ ب. $\begin{aligned} 4x_1-x_2+x_3&=8\\ 2x_1+5x_2+2x_3&=3\\ x_1+2x_2+4x_3&=11\end{aligned}$

4. استخدم طريقة جاوس للحذف باستخدام التعويض الارتجاعي وحساب تقريب لعددين في حل الأنظمة الخطية الآتية، ولا تعد ترتيب المعادلات: (إن الحل لصحيح لكل نظام هو

$(x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$.

أ.
$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8 \\ \tfrac{5}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= -5 \\ \tfrac{1}{9}x_1 + \tfrac{1}{9}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 &= -1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

5. اســتخدم خوارزمية الحذف لجاوس لحل الأنظمة الخطية الآتية إذا كان ذلك ممكنًا. وحدّد ما إذا كانت التبادلات في الصفوف ضرورية أو لا:

أ.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 &= 3 \\ x_1 + 1.5x_2 &= 4.5 \\ -3x_2 + 0.5x_3 &= -6.6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

6. اســتخدم خوارزمية الحذف لجاوس لحل الأنظمة الخطية الآتية إذا كان ذلك ممكنًا. وحدّد ما إذا كانت التبادلات في الصفوف ضرورية أو لا:

أ.
$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 2 \\ x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_4 &= 5 \\ x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

7. استخدم الخوارزمية 1.6 ومابل Maple بالأمر DIGITS:=10 لحل الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + \tfrac{1}{6}x_3 &= 9 \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 8 \\ \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913 \\ 2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 &= 28.544 \\ 1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 &= \tfrac{1}{6} \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{5}x_4 &= \tfrac{1}{7} \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{1}{6}x_4 &= \tfrac{1}{8} \\ \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + \tfrac{1}{6}x_3 + \tfrac{1}{7}x_4 &= \tfrac{1}{9} \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 &= 7 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 2 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 &= 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

8. اســتخدم الخوارزمية 1.6 ومابــل Maple بالأمر DIGITS:=10 لحــل الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 - \tfrac{1}{8}x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{6}x_2 + \tfrac{1}{9}x_3 &= 1 \\ \tfrac{1}{7}x_1 + \tfrac{1}{7}x_2 + \tfrac{1}{10}x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 2.71x_1 + x_2 + 1032x_3 &= 12 \\ 4.12x_1 - x_2 + 500x_3 &= 11.49 \\ 3.33x_1 + 2x_2 - 200x_3 &= 41 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} \pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ e x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 - x_2 + \sqrt{3}x_3 - \sqrt{5}x_4 &= 3 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 16 \\ 16x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 32 \end{aligned}$$

9. لديك النظام الخطي

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6\alpha x_2 &= 3 \\ 3\alpha x_1 - x_2 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

أ. أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث لا يكون هناك حلول للنظام.

ب. أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث يكون للنظام ما لانهاية من الحلول.

ج. على فرض وجود حل وحيد لقيمة معطاة للمعامل α، أوجد الحل.

10. لديك النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 - \ \ x_2 + \alpha x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 &= 3 \\ \alpha x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

أ. أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث لا يكون هناك حلول للنظام.

ب. أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث يكون للنظام ما لانهاية من الحلول.

ج. على فرض وجود حل وحيد لقيمة معطاة للمعامل α. أوجد الحل.

11. أن العمليات

أ. $(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$ ب. $(E_i + \lambda E_j) \rightarrow (E_i)$ ج. $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

لا تغير مجموعة حل النظام الخطي.

12. طريقة جاوس – جوردن Gauss - Jordan Method

توصف هذه الطريقة كما يلي:

استخدم المعادلة i ليس فقط لحذف x_i من المعادلات $E_{i+1}, E_{i+2}, \ldots, E_n$. كما استخدمت في طريقة الحذف لجاوس. بل لحذف x_i من $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$. وعند تخفيض [A b] إلى الصيغة

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right]$$

نحصل على الحل بوضع

$$x_i = \frac{a_{i,n+1}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

إن هذه الطريقة تتحاشى التعويض الارجاعي في طريقة الحذف لجاوس. ابنِ خوارزمية لطريقة جاوس – جوردان على غرار الخوارزمية (1.6).

13. استخدم طريقة جاوس – جوردان وحساب تقريب لخانتين لحل الأنظمة في لتمرين (3)

14. أعد حل التمرين ٧ باستخدام طريقة جاوس – جوردان.

15. برهن أن طريقة جاوس – جوردان تتطلب $\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2}$ من عمليات الضرب/ القسمة. و $\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$ من عمليات الجمع/ الطرح.

ب. اعمل جدولًا لمقارنة عدد العمليات اللازمة لطريقة جاوس – جوردان وطريقة الحذف لجاوس للقيم $n = 3, 10, 50, 100$

أي الطريقتين تتطلب عدد عمليات أقل؟

16. افترض الطريقة الآتية الهجين من الطريقتين الحذف لجاوس/ جاوس– جوردان لحل النظام (4.6). أولًا. طبق طريقة الحذف لجاوس لتحويل النظام إلى صيغة مثلثية. ثم استخدم المعادلة n لحذف معاملات x_n في كل صف من الصفوف $n - 1$ الأولى.

بعد استكمال ذلك استخدم المعادلة $(n-1)$st لحذف معادلات x_{n-1} من الصفوف $n - 2$ الأولى وهكذا.

سيظهر النظام في النهاية مثل النظام المختزل في التمرين (12).

أ. برهن أن هذه الطريقة تتطلب $\frac{n^3}{3} + \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$ من عمليات الضرب/ القسمة و $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n$ من عمليات الجمع/ الطرح.

ب. اعمل جدولًا لمقارنة العمليات اللازمة لطريقة الحذف لجاوس. جاوس – جوردان. والطريقة الهجين للقيم $n = 3, 10, 50, 100$.

17. استخدم طريقة جاوس – جوردان وحساب تقريب لخانتين لحل الأنظمة في التمرين (3).

18. أعد حل التمرين (7) باستخدام الطريقة الموصوفة في التمرين (16).

19. افترض أنه في نظام بيولوجي يوجد n نوع من الحيوانات و m مصدر للغذاء.

افترض أن x_j تمثِّل مجتمع النوع j لكل $j = 1, \ldots, n$، وافترض b_i تمثِّل كمية الغذاء المتاحة يوميًا من الغذاء i، وأن a_{ij} تمثِّل كمية الغذاء i المستهلكة من قبل النوع j.

إن النظام الخطي

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

يمثِّل التوازن، حيث توجد كمية يومية من الغذاء تساوي الكمية المستهلكة من قبل كل نوع يوميًّا.

أ. افترض

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و $\mathbf{x} = (x_j) = [1000, 500, 350, 400]$

و $\mathbf{b} = (b_i) = [3500, 2700, 900]$

هل يوجد غذاء كافٍ لمعدل الاستهلاك اليومي؟

ب. ما أكبر عدد من الحيوانات من كل نوع يمكن إضافته إلى النظام بانفراد على أن يبقى الغذاء كافيًا للاستهلاك؟

ج. إذا انقرض النوع 1، فكم يزداد كل نوع بحيث يكون الغذاء كافيًا؟

د. إذا انقرض النوع 2، فكم يزداد كل نوع بحيث يكون الغذاء كافيًا؟

20. إن معادلة تكامل فردهولم Fredholm من النوع الثاني تكون على الصيغة

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)\, dt$$

حيث a،b والدالتان f و K معطاة.

لإيجاد تقريب للدالة u على الفترة $[a, b]$ ؛ نختار التجزئة

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

$$u(x_i) = f(x_i) + \int_a^b K(x_i, t)u(t)\, dt$$

لكل $i = 0, \ldots, m$

ونحل المعادلات لإيجاد $u(x_0), u(x_1), \ldots, u(x_m)$

تقرِّب التكاملات باستخدام معادلات التكامل المبنية على النقاط $x_0, \ldots, x_m$

ليكن في مسألتنا $a = 0, b = 1, f(x) = x^2$ و $K(x, t) = e^{|x-t|}$

أ. برهن أنه يجب حل النظام الخطي

$$u(0) = f(0) + \tfrac{1}{2}[K(0, 0)u(0) + K(0, 1)u(1)], \quad u(1) = f(1) + \tfrac{1}{2}[K(1, 0)u(0) + K(1, 1)u(1)]$$

عند استخدام قاعدة شبه المنحرف.

ب. كوِّن النظام الخطي وحُلّه عند استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة بأخذ $n = 4$.

ج. أعد الفقرة (ب) باستخدام قاعدة سمبسون المركبة.

2.6 استراتيجيات التمحور Pivoting Strategies

وجدنا في إثبات الخوارزمية (1.6) الحاجة إلى التغيير الصفي عندما يكون أحد عناصر التمحور $a_{kk}^{(k)} = 0$. إن صيغة التغيير الصفي من النوع $(E_k) \longleftrightarrow (E_p)$ حيث p أصغر عدد صحيح يكون أكبر من k . ويحقق $a_{pk}^{(k)} \neq 0$. ولتخفيض خطأ التدوير، غالبًا ما يكون من الضرورة إجراء تغييرات صفية حتى لو كان التمحور غير صفرية.

إذا كان المقدار $a_{kk}^{(k)}$ صغيرًا مقارنة بِـ $a_{jk}^{(k)}$ فإن مقدار حد الضرب

$$m_{jk} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

سيكون أكبر من 1 كثيرًا.

إن خطأ تقريب الداخل في حساب أحد الحدود $a_{kl}^{(k)}$ سيضرب في القدار m_{jk} عندما نحسب $a_{jl}^{(k+1)}$ مما يزيد من الخطأ الأصلي.

وكذلك عند إجراء التعويض الإرجاعي للمجهول

$$x_k = \frac{a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

الذي فيه $a_{kk}^{(k)}$ قيمة صغيرة. فإن أي خطأ في البسط يمكن أن يكبر دراماتيكيًا، بسبب القسمة على $a_{kk}^{(k)}$. وسنرى في مثالنا الآتي أنه في الأنظمة الصغيرة جدًا، يمكن لخطأ تقريب أن يطغى على الحسابات.

مثال 1 إن النظام الخطي

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ E_2 &: \quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{aligned}$$

له الحل الصحيح $x_2 = 1.000$ و $x_1 = 10.00$. افترض أنه أُجريت طريقة الحذف لجاوس على هذا النظام باستخدام الحساب ذي الخانات الأربع مع التدوير. إن أول عنصر التمحور $a_{11}^{(1)} = 0.003000$ صغير. والمضاعف المرتبط به هو

$$m_{21} = \frac{5.291}{0.003000} = 1763.6\overline{6}$$

ويدوّر إلى العدد الكبير 1764.

وبإجراء $(E_2 - m_{21}E_1) \longrightarrow (E_2)$

واستخدام التقريب المناسب نحصل على

$$0.003000x_1 + 59.14x_2 \approx 59.17 \quad -104300x_2 \approx -104400$$

بدلًا من القيم الدقيقة

$$0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \quad -104309.37\overline{6}x_2 = -104309.37\overline{6}$$

إن الاختلاف في مقادير $m_{21}a_{13}$ و a_{23} قد أدى إلى خطأ تدوير. ولكن لم تجر زيادات على خطأ التدوير. إن التعويض الإرجاعي يعطي $x_2 \approx 1.001$ الذي هو تقريب قريب من القيمة الفعلية $x_2 = 1.000$. وعلى كل حال فبسبب صغر عنصر التمحور $a_{11} = 0.003000$ ، فإن

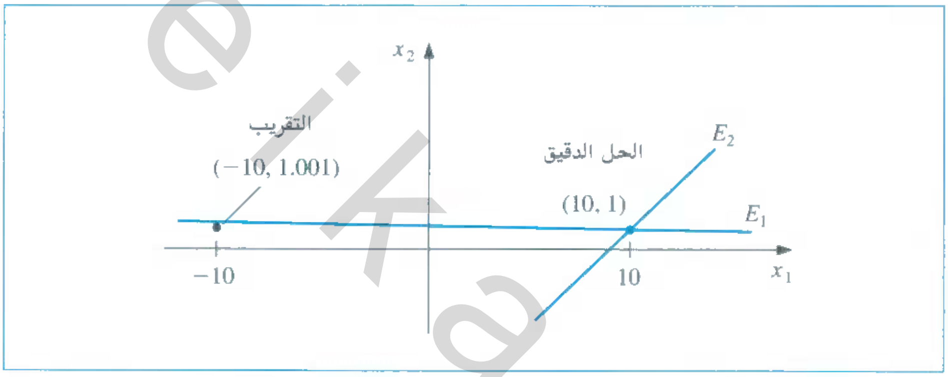
$$x_1 \approx \frac{59.17 - (59.14)(1.001)}{0.003000} = -10.00$$

يحتوي على خطأ صغير قيمته 0.001 مضروب في العدد

$$\frac{59.14}{0.003000} \approx 20000$$

إن هـذا يهدم تقريب القيمة الفعلية $x_1 = 10.00$ ، ومـن الواضح أن هذا مثال مصطنع ، ويُظهر الرسـم في شكل (1.6) كيف يمكن حدوث الخطأ بسـهولة . ولكن بالنسبة إلى الأنظمة الخطية الأكبر قليلًا فإن التنبؤ مسبقا بمتى يمكن حدوث خطأ فادح أمر صعب.

شكل 1.6



إن مثال 1 يوضّح كيفية ظهور الصعوبات عندما يكون عنصر مركز التمحور $a_{kk}^{(k)}$ صغيرا بالنسـبة إلـى المدخـلات $a_{ij}^{(k)}$ لـكل $k \le i \le n$ و $k \le j \le n$. ولتجنب هذه المشـكلة ، يجري التمحور باختيـار عنصر $a_{pq}^{(k)}$ كبير القيمة ليكون مركـزًا محوريًا . وبعد ذلك يحدث تبادل بين الصفين k وp. ونتبع بعد ذلك تبادل العمودين k وp إذا كان هناك ضرورة.

إن أبسـط استراتيجية هي أن تختار عنصرًا في العمود نفسه الواقع تحت القطر، وله أكبر قيمة مطلقة. وبالتحديد نعيّن أصغر عدد p، بحيث يحقق $p \ge k$

$$|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}|$$

ثم نجري $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$

ولا حاجة إلى تبادل الأعمدة في هذه الحالة.

مثال 2 افترض ثانية النظام

$$E_1: \quad 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17$$
$$E_2: \quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$$

إن عملية التمحور التي شرِحت تؤدي أولًا إلى إيجاد

$$\max\left\{|a_{11}^{(1)}|, |a_{21}^{(1)}|\right\} = \max\{|0.003000|, |5.291|\} = |5.291| = |a_{21}^{(1)}|$$

تنفّذ بعدئذ العملية $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$ لتعطي النظام

$$\begin{aligned} E_1: &\quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \\ E_2: &\quad 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \end{aligned}$$

إن المضاعف (العدد الذي نضرب فيه) لهذا النظام هو

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0.0005670$$

والعملية $(E_2 - m_{21}E_1) \rightarrow (E_2)$ تختزل النظام إلى

$$\begin{aligned} 5.291x_1 - 6.130x_2 &\approx 46.78 \\ 59.14x_2 &\approx 59.14 \end{aligned}$$

وتكـون الإجابـات ذات الخانت الأربع الناتجة من التعويـض الإرجاعي هي القيم الصحيحة $x_1 = 10.00$ و $x_2 = 1.000$. ■

إن الطريقة التي شـرحت تسـمى التمحـور الجزئـي Partial Pivoting أو تمحور العمود الأعظم maximal column pivoting وتفصّـل في الخوارزمية (2.6). إن التبادل الصفي الفعلي قد حوكي في الخوارزمية بتبادل القيم في الأمر NROW في الخطوة 5.

ALGORITHM

الخوارزمية

2.6

طريقة الحذف لجاوس بالتمحور الجزئي
Gaussian Elimination with Partial Pivoting

لحل النظام الخطي $n \times n$

$$\begin{aligned} E_1: &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ E_2: &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ &\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ E_n: &\quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{aligned}$$

المدخلات: عدد من المجاهيل والمعادلات n، المصفوفة المزيدة $A = [a_{ij}]$ حيث $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le n+1$.

المخرجات: حل المجاهيل $x_1, \dots, x_n$ أو رسالة تقول: إن النظام الخطي ليس له حل وحيد.

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1, \dots, n$ ضع $NROW(i) = i$ (حدد مؤشر الصف الابتدائي).
2	لكل $i = 1, \dots, n-1$ نفّذ الخطوات 3-6. (عملية الحذف)
3	اجعل p أصغر عدد صحيح بحيث $i \le p \le n$ و $\lvert a(NROW(p), i)\rvert = \max_{i \le j \le n} \lvert a(NROW(j), i)\rvert$ $(Notation: a(NROW(i), j) \equiv a_{NROW_i, j}.)$
4	إذا كان $a(NROW(p), i) = 0$ تنتج المخرجات (لا يوجد حل وحيد). توقف
5	إذا كان $NROW(i) \neq NROW(p)$ فضع $NCOPY = NROW(i)$ $NROW(i) = NROW(p)$ $NROW(p) = NCOPY$ (التبادل الصفي المحاكي)

6	لكل $j = i + 1, \ldots, n$ نفّذ الخطوتين 7 و8.
7	ضع $m(NROW(j), i) = a(NROW(j), i)/ a(NROW(i), i)$.
8	نفّذ $(E_{NROW(j)} - m(NROW(j), i) \cdot E_{NROW(i)}) \rightarrow (E_{NROW(j)})$.
9	إذا كان $a(NROW(n), n) = 0$ فضع المخرجات (لا يوجد حل وحيد). توقف.
10	ضع $x_n = a(NROW(n), n + 1)/ a(NROW(n), n)$ (ابدأ بالتعويض التراجعي.)
11	لكل $i = n - 1, \ldots, 1$ ضع $x_i = \dfrac{a(NROW(i), n + 1) - \sum_{j=i+1}^{n} a(NROW(i), j) \cdot x_j}{a(NROW(i), i)}$
12	المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$ (نجحت العملية). توقف.

■

كل مضاعف m_{ji} في خوارزمية التمحور الجزئي له قيمة تساوي أو أقل من 1. وعلى الرغم من أن هذه الاستراتيجية كافية لمعظم النظم الخطية ، إلا أنه تظهر حالات لا تكون الاستراتيجية فيها ناجحة.

مثال 3

النظام الخطي الآتي هو ذاته في مثالين 1 و2. إلا أن المدخلات في المعادلة الأولى قد ضربت في العدد 10^4.

$$E_1: \quad 30.00x_1 + 591400x_2 = 591700$$
$$E_2: \quad 5.291x_1 - \quad 6.130x_2 = 46.78$$

إن العملية الموصوفة في الخوارزمية (2.6) بالحساب ذي الخانات الأربع تؤدي إلى النتائج نفسها كما في مثال (1).

إن أكبر قيمة في العمود الأول هي 30.00 والمضاعف

$$m_{21} = \frac{5.291}{30.00} = 0.1764$$

يؤدي إلى النظام

$$30.00x_1 + 591400x_2 \approx 591700$$
$$- 104300x_2 \approx - 104400$$

الذي يعطي الحلول غير الدقيقة كما في مثال 1 وهي $x_2 \approx 1.001$:1 و $x_1 \approx - 10.00$.

■

التمحور الجزئي الموزون Scaled Partial Pivoting الذي يُسمى أيضًا تمحور العمود الموزون Scaled-column Pivoting هو عملية مناسبة للنظام في مثال (3) بحيث يضع العنصر الأكبر من المدخلات في صفه بوصفه مركزًا للتمحور. إن الخطوة الأولى في هذه العملية تبدأ بتعريف عامل ضربي (وزن) s_i لكل صف كما يلي:

$$s_i = \max_{1 \le j \le n} |a_{ij}|$$

إذا حدث وكان $s_i = 0$ لأي عدد i، فهذا يعني أنه ليس للنظام حل وحيد؛ لأن المدخلات جميعها في الصف i هي أصفار.

وعلى فرض أن هذه ليست هي الحالة، فإن التبادل الصفي المناسب لوضع أصفار في العمود الأول يتحدد باختيار أصغر عدد صحيح p بحيث

$$\frac{|a_{p1}|}{s_p} = \max_{1 \le k \le n} \frac{|a_{k1}|}{s_k}$$

ومن ثم إجراء التبديل $(E_1) \leftrightarrow (E_p)$.

إن تأثير الوزن يكون لضمان أن العنصر الأكبر في كل صف له قيمة نسبية 1 قبل إجراء المقارنة لتبديل الصفوف. وبطريقة مماثلة وقبل حذف المتغير x_i باستخدام العمليات $E_k - m_{ki}E_i$ لكل $k = i+1, \ldots, n$ نختار أصغر عدد صحيح $p \ge i$ بحيث

$$\frac{|a_{pi}|}{s_p} = \max_{i \le k \le n} \frac{|a_{ki}|}{s_k}$$

وننفّذ المبادلة الصفية $E_i \leftrightarrow E_p$ إذا كان $p \ne i$. إن العوامل الضربية $s_1, \ldots, s_n$ تحسب مرة واحدة فقط عند البدء بالعليا. ويجب مبادلتها عند تنفيذ مبادلة الصفوف.

إن تطبيق التمحور الجزئي الموزون على مثال 3 يعطي

$$s_2 = \max\{|5.291|, |-6.130|\} = 6.130 \text{ و } s_1 = \max\{|30.00|, |591400|\} = 591400$$

ومن ثم

$$\frac{|a_{11}|}{s_1} = \frac{30.00}{591400} = 0.5073 \times 10^{-4}, \qquad \frac{|a_{21}|}{s_2} = \frac{5.291}{6.130} = 0.8631$$

وتحدث المبادلة $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$.

وبتطبيق عملية الحذف لجاوس على النظام الجديد

$$5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$$

$$30.00x_1 + 591400x_2 = 591700$$

نحصل على النتائج الصحيحة $x_1 = 10.00$ و $x_2 = 1.000$.

تنفّذ الخوارزمية 3.6 عملية التمحور الجزئي الموزون.

ALGORITHM

الخوارزمية

3.6

عملية جاوس بالتمحور الجزئي الموزون

Gaussian Elimination with Scaled Partial Pivoting

الخطوات الوحيدة في هذه الخوارزمية التي تختلف عن الخوارزمية 2.6 هي:

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1, \ldots, n$ ضع $s_i = \max_{1 \le j \le n} \lvert a_{ij} \rvert$ إذا كان $s_i = 0$ فعندئذ تكون المخرجات (لا يوجد حل وحيد). توقف. ضع $NROW(i) = i$.
2	لكل $i = 1, \ldots, n-1$ نفّذ الخطوات 3-6. (عملية الحذف).
3	افترض p أصغر عدد صحيح حيث $i \le p \le n$ و $\frac{\lvert a(NROW(p), i) \rvert}{s(NROW(p))} = \max_{i \le j \le n} \frac{\lvert a(NROW(j), i) \rvert}{s(NROW(j))}$

يشرح المثال الآتي طريقة التمحور الجزئي الموزون باستخدام مابل Mable ومكتبة الجبر الخطي Linear Algebra library ذات الحساب بتقريب بعدد منتهٍ من الخانات.

مثال 4 حُلَّ النظام الخطي باستخدام حساب تقريب لثلاث خانات

$$\begin{aligned} 2.11x_1 - 4.21x_2 + 0.921x_3 &= 2.01 \\ 4.01x_1 + 10.2x_2 - 1.12x_3 &= -3.09 \\ 1.09x_1 + 0.987x_2 + 0.832x_3 &= 4.21 \end{aligned}$$

لكي نحصل على حساب تقريب بثلاث خانات، أدخل

```
>Digits:=3
```

لدينا $s_1 = 4.21,\ s_2 = 10.2$ و $s_3 = 1.09$

ولذلك يكون

$$\frac{|a_{11}|}{s_1} = \frac{2.11}{4.21} = 0.501, \quad \frac{|a_{21}|}{s_1} = \frac{4.01}{10.2} = 0.393 \quad \text{و} \quad \frac{|a_{31}|}{s_3} = \frac{1.09}{1.09} = 1$$

بعد ذلك نحمّل مكتبة الجبر الخطي بالأمر

```
>with(LinearAlgebra)
```

إن المصفوفة المزيدة AA تكون معرفة بـ

```
>AA:=Matrix([[2.11,-4.21,0.921,2.01],[4.01,10.2,-1.12,-3.09],[1.09
        0.987,0.832,4.21]])
```

التي تعطي

$$AA := \begin{bmatrix} 2.11 & -4.21 & .921 & 2.01 \\ 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \end{bmatrix}$$

وبما أن $|a_{31}|/s_3$ هو الأكبر، نجري $(E_1) \leftrightarrow (E_3)$ باستخدام

```
>AA1:=RowOperation(AA,[1,3])
```

لنحصل على

$$AA := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 2.11 & -4.21 & .921 & 2.01 \end{bmatrix}$$

وحساب المضاعفات يعطي

```
>m21:=AA1[2,1]/AA1[1,1]
```

$$m21 := 3.68$$

```
>m31:=AA1[3,1]/AA1[1,1]
```

$$m31 := 1.94$$

ننفّذ أول عمليتين للحذف باستخدام

```
>AA2:=RowOperation(AA1,[2,1],-m21)
```

و

```
>AA3:=RowOperation(AA2,[3,1],-m31)
```

لنحصل على

$$AA3 := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 0 & 6.57 & -4.18 & -18.6 \\ 0 & -6.12 & -.689 & -6.16 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$\frac{|a_{22}|}{s_2} = \frac{6.57}{10.2} = 0.644 < \frac{|a_{32}|}{s_3} = \frac{6.12}{4.21} = 1.45$$

ننّفذ

```
>AA4:=RowOperation(AA3,[2,3])
```

التي تعطي

$$AA4 := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 0 & -6.12 & -.689 & -6.16 \\ 0 & 6.57 & -4.18 & -18.6 \end{bmatrix}$$

إن المضاعف m_{32} يُحسب بالأمر

```
>m32:=AA4[3,2]/AA4[2,2]
```

$$m_{32} := -1.07$$

وخطوة الحذف

```
>AA5:=RowOperation(AA4,[3,2],-m32)
```

تعطي

$$AA5 := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 0 & -6.12 & -.689 & -6.16 \\ 0 & .02 & -4.92 & -25.2 \end{bmatrix}$$

ولا نستطيع استخدام التعويض الإرجاعي Backward Substitute؛ لأن المدخل .02 موجود في المكان (3,2). وإن هذا المدخل غير صفري بسبب التدوير. ولكن يمكن أن نصوّب هذه المشكلة البسيطة باستخدام الأمر

```
>AA5[3,2]:=0
```

التي تعوّض عن .02 بالصفر. ولكي تشاهد ذلك؛ أدخل

```
>AA5
```

الذي يعرض المصفوفة $AA5$.

وأخيرًا

```
>x:=BackwardSubstitute(AA5)
```

يعطي الحل

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.431 \\ 0.430 \\ 5.12 \end{bmatrix}$$

■

إن أول الحسابات الإضافية اللازمة لطريقة التمحور الجزئي الموزون تنتج عن تحديد العوامل الضربية بثوابت؛ هناك $(n-1)$ من المقارنات لكل صف من الصفوف التي عددها n. ومن ثم فيكون $n(n-1)$ من المقارنات. لتحديد أول خطوة تبادل صحيحة؛ نجري n من عمليات القسمة متبوعة بمقارنات عددها $(n-1)$.

ولذلك فإن أول تحديد للتبادل يضيف n من عمليات القسمة مع $(n-1)$ من المقارنات.

ولما كانت العوامل الضربية تحسب لمرة واحدة، فإن الخطوة الثانية تحتاج إلى $(n-1)$ من عمليات قسمة و $(n-2)$ من عمليات مقارنة.

ونستمر بطريقة مماثلة حتى نحصل على أصفار في المدخلات جميعها تحت القطر الرئيس عدا الصف n. إن الخطوة النهائية تتطلب عمليتي قسمة وعملية مقارنة واحدة.

وبالنتيجة فإن عملية التمحور الجزئي الموزون تضيف

$$n(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1) + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3}{2}n(n-1) \qquad (7.6)$$

من عمليات المقارنة،

و
$$\sum_{k=2}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

من عمليات القسمة إلى طريقة الحذف لجاوس.

إن الوقت اللازم لإجراء مقارنة يقارب الوقت المطلوب لعمليات الجمع/ الطرح. ولما كان الوقت الكلي اللازم لإجراء عملية الحذف لجاوس هو من الرتبة $O(n^3/3)$ من عمليات الضرب/ القسمة و$O(n^3/3)$ من عمليات الجمع/ الطرح، فإن عملية التمحور الجزئي الموزون لا تحتاج إلى وقت إضافي ذي قيمة مهمة لحل نظام ذي قيم كبيرة لـ n.

ولنؤكد أهمية اختيار عوامل الضرب لمرّة واحدة؛ نفترض كمية الحسابات الإضافية التي ستكون مطلوبة في حالة تعديل الطريقة. بحيث تحدّد عوامل ضربية جديدة في كل مرّة يُتخذ فيها قرار تبادل صفي.

في هذه الحالة، فإن الحدّ $n(n-1)$ في المعادلة (7.6) يجب التعويض عنه بالمقدار

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}n(n^2-1)$$

ونتيجة لذلك، فإن طريقة التمحور ستضيف $O(n^3/3)$ من المقارنات، بالإضافة إلى $[n(n+1)/2]-1$ من عمليات القسمة.

يجب إذن ضمن نظام ما من نوع التمحور هذا استخدام ما يُسمى التمحور التام (الأعظمي) Complete (or *maximal*).

إن التمحور الكامل في الخطوة k يتفحّص استخدام المدخلات a_{ij} جميعها لكل $i = k, k+1, \ldots, n$

و $j = k, k+1, \dots, n$ لمحاولة إيجاد المدخلة ذات القيمة الأعلى. تُجرى المبادلات الصفية والعمودية كلها لتوصيل هذه المدخلة إلى مركز المحور. إن الخطوة الأولى للتمحور الكلي تتطلب إجراء $n^2 - 1$ من المقارنات. وتتطلب الخطوة الثانية $(n-1)^2 - 1$ من المقارنات. وهكذا. ولذلك فإن الوقت الإضافي الكلي اللازم لاستكمال التمحور الكامل في عملية الحذف لجاوس هو

$$\sum_{k=2}^{n}(k^2 - 1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

من المقارنات.

إن هـذا العدد قابل للمقارنة بالعدد اللازم لعملية التمحور العمودي الموزون، ولكن لا حاجة إلى عمليات القسمة. ومن ثم فإن التمحور الكامل هو استراتيجية محبّذة للأنظمة، حيث إن الدقة مهمة والوقت اللازم لتنفيذ هذه الطريقة مبرر.

مجموعة التمارين 2.6 EXERCISE SET

1. أوجد المبادلات الصفية اللازمة لحلّ الأنظمة الخطية الآتية باستخدام الخوارزمية (1.6):

أ.
$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + \quad x_3 &= 7 \\ 10x_1 \qquad\quad + 20x_3 &= 6 \\ 5x_1 \qquad\quad - \quad x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \quad x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

2. أوجد المبادلات الصفية اللازمة لحلّ الأنظمة الخطية الآتية باستخدام الخوارزمية 1.6:

أ.
$$\begin{aligned} 13x_1 + 17x_2 + \quad x_3 &= 5 \\ x_2 + 19x_3 &= 1 \\ 12x_2 - \quad x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 - x_3 &= 0 \\ 12x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + \quad x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 5x_1 + \quad x_2 - 6x_3 &= 7 \\ 2x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 12x_2 + \quad x_3 &= 9 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_1 - \quad x_2 + x_3 &= 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + \quad x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

3. كرر التمرين (1) باستخدام الخوارزمية (2.6).
4. كرر التمرين (2) باستخدام الخوارزمية (2.6).
5. كرر التمرين (1) باستخدام الخوارزمية (3.6).
6. كرر التمرين (2) باستخدام الخوارزمية (3.6).
7. كرر التمرين (1) باستخدام التمحور الكامل.
8. كرر التمرين (2) باستخدام التمحور الكامل.
9. استخدم طريقة الحذف لجاوس وحساب القطع ذي الخانات الثلاث لحلّ الأنظمة الخطية الآتية. وقارن التقريب بالحلّ الفعلي:

أ.
$$\begin{aligned} 0.03x_1 + 58.9x_2 &= 59.2, \\ 5.31x_1 - 6.10x_2 &= 47.0. \end{aligned}$$

الحل الفعلي $[10, 1]$

ب.
$$\begin{aligned} 3.03x_1 - 12.1x_2 + 14x_3 &= -119, \\ -3.03x_1 + 12.1x_2 - \quad 7x_3 &= 120, \\ 6.11x_1 - 14.2x_2 + 21x_3 &= -139, \end{aligned}$$

لحل الفعلي $[0, 10, \frac{1}{7}]$

ج.
$$\begin{aligned} 1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + x_4 &= 1.12 \\ 14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - x_4 &= 3.44 \\ 100x_2 - 99.9x_3 + x_4 &= 2.15 \\ 15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - x_4 &= 4.16 \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[0.176, 0.0126, -0.0206, -1.18]$

د.
$$\begin{aligned} \pi x_1 - e x_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 &= \sqrt{11} \\ \pi^2 x_1 + e x_2 - e^2 x_3 + \tfrac{3}{7}x_4 &= 0 \\ \sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_4 &= \pi \\ \pi^3 x_1 + e^2 x_2 - \sqrt{7}x_3 + \tfrac{1}{9}x_4 &= \sqrt{2} \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[0.788, -3.12, 0.167, 4.55]$

10 . استخدم طريقة الحذف لجاوس وحساب القطع ذي الخانات الثلاث لحل الأنظمة الخطية الآتية، وقارن التقريب بالحل الفعلي:

أ.
$$\begin{aligned} 58.9x_1 + 0.03x_2 &= 59.2 \\ -6.10x_1 + 5.31x_2 &= 47.0 \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[1, 10]$

ب.
$$\begin{aligned} 3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 &= 7953 \\ 2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 &= 0.965 \\ -1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 &= 2.714 \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[1, 0.5, -1]$

ج.
$$\begin{aligned} 2.12x_1 - 2.12x_2 + 51.3x_3 + 100x_4 &= \pi \\ 0.333x_1 - 0.333x_2 - 12.2x_3 + 19.7x_4 &= \sqrt{2} \\ 6.19x_1 + 8.20x_2 - 1.00x_3 - 2.01x_4 &= 0 \\ -5.73x_1 + 6.12x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[0.0998, -0.0683, -0.0363, 0.0465]$

د.
$$\begin{aligned} \pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ e x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - \sqrt{5}x_4 &= 3 \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[1.35, -4.68, -4.03, -1.66]$

11 . كرر التمرين (9) باستخدام حساب التقريب ذي الخانات الثلاث.

12 . كرر التمرين (10) باستخدام حساب التقريب ذي الخانات الثلاث.

13 . كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي.

14 . كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي.

15 . كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي وحساب التدوير ذي الثلاث خانات.

16 . كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي وحساب التدوير ذي الخانات الثلاث.

17 . كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون.

18 . كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون.

19 . كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون وحساب التقريب ذي الخانات الثلاث.

20. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون وحساب التقريب ذي الخانات الثلاث.

21. كرر التمرين (9) باستخدام الخوارزمية (1.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

22. كرر التمرين (10) باستخدام الخوارزمية (1.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

23. كرر التمرين (9) باستخدام الخوارزمية (2.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

24. كرر التمرين (10) باستخدام الخوارزمية (2.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

25. كرر التمرين (9) باستخدام الخوارزمية (3.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

26. كرر التمرين (10) باستخدام الخوارزمية (3.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

27. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل.
28. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل.
29. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل وحساب التقريب ذي الخانات الثلاث.
30. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل وحساب التقريب ذي الثلاث خانات.
31. افترض أن

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$
$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 5$$
$$6x_1 + \alpha x_2 + 10x_3 = 5$$

حيث $|\alpha| < 10$ لأي من قيم α الآتية. فليس هناك ضرورة لمبادلة صفية عند حل هذا النظام باستخدام التمحور الجزئي الموزون.

أ. $\alpha = 6$ ب. $\alpha = 9$ ج. $\alpha = -3$

32. أنشئ خوارزمية لعملية التمحور الكامل التي وصفت في الكتاب.
33. استخدم خوارزمية التمحور الكلي لحل التمرين (9) باستخدام مابل Maple ذي DIGITS:= 10.
34. استخدم خوارزمية التمحور الكلي لحل التمرين (10) باستخدام مابل Maple ذي DIGITS:= 10.

3.6 الجبر الخطي ومعكوس المصفوفة
Linear Algebra and Matrix Inversion

قدمنا المصفوفات في الفصل (1.6) على أنها طريقة ملائمة للتعبير عن الأنظمة الخطية والتعامل معها. وسنناقش في هذا الفصل بعض المفاهيم الجبرية المرتبطة بالمصفوفات، ثم بينّا كيفية استخدمها في حل المسائل المشتملة على أنظمة خطية.

تعريف 2.6 تكون المصفوفتان A و B متساويتين إذا كان لهما العدد نفسه من الصفوف و لأعمدة. وليكن $n \times m$ وكان $a_{ij} = b_{ij}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, m$ ■

على سبيل المثال

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

لأنهما يختلفان في البعد (dimension).

هناك عمليتان مهمتان تُجرى على المصفوفات. وهما حاصل جمع مصفوفتين. وضرب مصفوفة في عدد حقيقي.

تعريف 3.6 إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الشكل $n \times m$ فيعرف مجموعها $A + B$ على أنه مصفوفة $n \times m$ عناصرها $a_{ij} + b_{ij}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, m$. ■

تعريف 4.6 عملية الضرب في ثابت Scalar multiplication

إذا كانت A مصفوفة $n \times m$. وكان λ عددًا حقيقيًا فإن ضرب λ في العدد A المعبّر عنه بالرمز λA هو المصفوفة $n \times m$ التي عناصرها λa_{ij} لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, m$. ■

مثال 1 ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

و $\lambda = -2$ فإن

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+4 & -1+2 & 7-8 \\ 3+0 & 1+1 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

و

$$\lambda A = \begin{bmatrix} -2(2) & -2(-1) & -2(7) \\ -2(3) & -2(1) & -2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -14 \\ -6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ ■

عبّر بالرمز O عن المصفوفة التي عناصرها جميعها هي 0 و $-A$ المصفوفة التي عناصرها $-a_{ij}$. ولدينا الخصائص العامة التالية لجمع المصفوفات والضرب في ثابت. وإن هذه الخصائص كافية لتصنيف المصفوفات $m \times n$ التي مدخلاتها (عناصرها) أعداد حقيقية بوصفها فضاء متجهات (أو فضاء خطي) Vector Space على حقل (field) الأعداد الحقيقية. انظر ([ND, pp. 107–109]).

مبرهنة 5.6 لتكن A و B و C مصفوفات $m \times n$. وليكن λ و μ عددين حقيقيين. عندئذ تتحقق الخواص الآتية لعمليات الجمع والضرب في ثابت:

أ. $A + B = B + A$ ب. $(A + B) + C = A + (B + C)$

ج. $A + O = O + A = A$ د. $A + (-A) = -A + A = 0$

هـ. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ و. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

ز. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ ح. $1A = A$

إثبات هذه الخواص مماثل لنظرياتها في الأعداد الحقيقية. ■

تعريف 6.6 ضرب المصفوفات **Matrix product**

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الشكل $n \times m$، وكانت $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من الشكل $m \times p$ فإن $AB = [c_{ij}]$ مصفوفة من الشكل $n \times p$، حيث c_{ij} هو العنصر الذي نحصل عليه على النحو التالي:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, p$ ■

يمكن النظر إلى حساب c_{ij} على أنه حاصل ضرب عناصر الصف i في المصفوفة A في العناصر المقابلة لها في العمود j للمصفوفة B متبوعًا بجمع حاصل الضرب هذا. أي

$$[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} = c_{ij}$$

حيث

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

إن هذا يفسِّر سبب كون عدد الأعمدة في A مساويًا بالضرورة عدد الصفوف في B لكي يكون حاصل الضرب AB معرّفًا.

إن المثال الآتي كافٍ لتوضيح عملية ضرب المصفوفات.

مثال 2 ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

فإن

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 11 & -4 & 11 \\ -13 & 2 & -13 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 1 & -3 & -10 \\ 6 & -3 & -12 \end{bmatrix} = DA$$

وبالإضافة إلى ذلك

$$CB = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \quad و \quad BC = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ 8 & 18 & 8 \end{bmatrix}$$

وهما ليسا من الحجم نفسه.

وأخيرًا

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 20 & 15 \\ -16 & -14 \end{bmatrix}$$

ولكن لا يمكن حساب BA. ■

المصفوفة المربعة (Square) A هي المصفوفة التي عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها

المصفوفة القطرية (diagonal) $D = [d_{ij}]$ هي مصفوفة مربعة فيها $d_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$.

تعريف 7.6 المصفوفة المحايدة ذات الرتبة n $I_n = [\delta_{ij}]$ ، (identity matrix of order n) هي مصفوفة قطرية عناصرها

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

وعندما يكون حجم I_n واضحًا في السياق، يعبَّر عنه عادة بالرمز I. ■

إن كلمة "قطري" المستعملة في المصفوفة تشير إلى عناصر القطر الذي يبدأ من أعلى اليسار، وينتهي إلى أسفل اليمين

فعلى سبيل المثال فإن المصفوفة المحايدة ذات الرتبة 3 هي

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف 8.6

المصفوفة $n \times n$ المثلثية العلوية (upper - triangular) $U = [u_{ij}]$ فيها لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ العناصر $u_{ij} = 0$ لكل $i = j+1, j+2, \ldots, n$ والمصفوفة المثلثية السفلية (lower - triangular) $L = [l_{ij}]$ فيها لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ العناصر $l_{ij} = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, j-1$

عناصر المصفوفة المثلثية جميعها أصفار، إلا تلك التي على القطر الرئيس أو فوقه (علوية) أو تلك التي على القطر الرئيس أو تحته (سفلية).

لديك المصفوفة الحيادية ذات الرتبة الثالثة

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 3

إذا كانت A مصفوفة 3×3 فإن

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A$$ ■

إن المصفوفة الحيادية I_n تبادلية مع أي مصفوفة A بالحجم $n \times n$؛ أي أن الترتيب في عملية الضرب ليس مهمًّا، أي أن $I_n A = A = AI_n$.

يتضح في مثال 2 أن $BA = AB$ ليس صحيحًا بالنسبة إلى ضرب المصفوفات. وإن خواص ضرب المصفوفات المحققة ستُعرض في المبرهنة الآتية:

مبرهنة 9.6

لتكن A مصفوفة $n \times m$، B مصفوفة $m \times k$، C مصفوفة $k \times p$، D مصفوفة $m \times k$ و λ عددًا حقيقيًّا، فإن الخواص الآتية صحيحة:

(أ) $A(BC) = (AB)C$

(ب) $A(B + D) = AB + AD$

(ج) $I_m B = B$ و $BI_k = B$

(د) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

■

البرهان نعطي برهان الخاصية في الفقرة (أ) لشرح الطريقة المستخدمة في البرهان. ويمكن برهنة الفروع الأخرى بطريقة مشابهة. ولبرهنة أن $A(BC) = (AB)C$؛ نحسب العنصر i, j لكل طرف من المعادلة. ومن الواضح أن BC هي مصفوفة $m \times p$. ويكون العنصر i, j فيها هو

$$(BC)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} b_{il} c_{lj}$$

وهكذا تكون $A(BC)$ مصفوفة $n \times p$ وعناصرها

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}(BC)_{sj} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}\left(\sum_{l=1}^{k} b_{sl}c_{lj}\right) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} a_{is}b_{sl}c_{lj}$$

وبالمثل، فإن AB تكون مصفوفة $n \times k$ وعناصرها

$$(AB)_{il} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sl}$$

وعليه $(AB)C$ تكون مصفوفة $n \times p$ وعناصرها

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{l=1}^{k}(AB)_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sl}\right)c_{lj} = \sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sl}c_{lj}$$

وبتبديل ترتيب الجمع في الطرف الأيمن نحصل على

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} a_{is}b_{sl}c_{lj} = [A(BC)]_{ij}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, p$، ولذلك فإن $A(BC) = (AB)C$. ■ ■ ■

ويمكن النظر إلى النظام الخطي

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

على أنه معادلة مصفوفات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، حيث

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ و } \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

هناك مفهوم ذو علاقة بالأنظمة الخطية، ألا وهو معكوس المصفوفة (inverse of a matrix).

تعريف 10.6

كلمة منفردة تعني أنها تخرج عن المعتاد، ولذلك فالمصفوفة المنفردة ليس لها معكوس

تسمى A المصفوفة $n \times n$ غير المنفردة (nonsingular) أو القابلة للعكس (invertible) إذا وجدت مصفوفة $n \times n$ يعبر عنها بالرمز A^{-1}، حيث $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

تسمى المصفوفة A^{-1} معكوس A أو النظير الضربي للمصفوفة A. وتسمى أي مصفوفة دون معكوس منفردة (singular) أو غير قابلة للعكس (noninvertible). ■

الخواص الآتية متعلقة بمعكوس المصفوفة من تعريف (10.6)، وبراهين هذه النتائج مطلوبة في التمرين 5.

مبرهنة 11.6

لكل مصفوفة $n \times n$ غير منفردة A، يتحقق ما يلي:

أ. A^{-1} وحيدة.

ب. A^{-1} غير منفردة ويكون $(A^{-1})^{-1} = A$.

ج. إذا كانت B مصفوفة $n \times n$ غير منفردة فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

مثال 4 ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

فإن

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

وبطريقة مماثلة $BA = I_3$، ولذلك فإن A و B غير منفردتين ويكون $B = A^{-1}$ و $A = B^{-1}$.

إذا كان لدينا معكوس A فإننا نتمكن من حل النظام الخطي على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

افترض على سبيل مثال أننا نريد حل النظام

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+ 2x_3} &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

أولًا: نحوّل النظام إلى معادلة بالمصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ثم نضرب طرفي المعادلة في المعكوس

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{13}{9} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

ولذلك فإن

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{13}{9} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{3}{9} & \frac{3}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= I_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وهذا يعطي الحل $x_1 = \frac{7}{9}$، $x_2 = \frac{13}{9}$ و $x_3 = \frac{5}{3}$. ■

وعلى الرغم من أنه من السهل حل نظام خطي على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ إذا كانت A^{-1} معلومة فإن عملية تحديد A^{-1} لحل النظام ليست ذات فاعلية حسابيًا. (انظر التمرين 8) وعلى الرغم من

هذا كله فإنه من المفيد من وجهة نظر مفاهيمية، شرح طريقة لإيجاد معكوس لمصفوفة.
ولإيجاد طريقة لحساب A^{-1} على فرض وجودها، دعنا نتفحص ضرب المصفوفات ثانية.
افترض B_j العمود j للمصفوفة B ذات $n \times n$.

$$B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

إذا كان $AB = C$ فإن العمود j للمصفوفة C يعطى بحاصل الضرب

$$\begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix} = C_j = AB_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kj} \end{bmatrix}$$

افترض أن A^{-1} موجودة، وأن $A^{-1} = B = (b_{ij})$، عندئذ $AB = I$ ويكون

$$AB_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث تظهر القيمة 1 في الصف j.
ولإيجاد B، يجب حل n من الأنظمة الخطية التي يكون فيها العمود j للمعكوس هو حل النظام الخطي الذي يكون الطرف الأيمن له العمود j في I.
ويوضح مثال الآتي هذه الطريقة:

مثال 5 لإيجاد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نجد أولاً حاصل الضرب AB حيث B هي أي مصفوفة 3×3

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} + 2b_{21} - b_{31} & b_{12} + 2b_{22} - b_{32} & b_{13} + 2b_{23} - b_{33} \\ 2b_{11} + b_{21} & 2b_{12} + b_{22} & 2b_{13} + b_{23} \\ -b_{11} + b_{21} + 2b_{31} & -b_{12} + b_{22} + 2b_{32} & -b_{13} + b_{23} + 2b_{33} \end{bmatrix}$$

إذا كانت $B = A^{-1}$ فإن $AB = I$ ولذلك يجب أن يكون لدينا

$$\begin{aligned}
b_{11} + 2b_{21} - b_{31} &= 1, & b_{12} + 2b_{22} - b_{32} &= 0, & b_{13} + 2b_{23} - b_{33} &= 0\\
2b_{11} + b_{21} \qquad &= 0, & 2b_{12} + b_{22} \qquad &= 1, & 2b_{13} + b_{23} \qquad &= 0\\
-b_{11} + b_{21} + 2b_{31} &= 0, & -b_{12} + b_{22} + 2b_{32} &= 0, & -b_{13} + b_{23} + 2b_{33} &= 1
\end{aligned}$$

انظر أن المعاملات في كل أنظمة المعادلات هي نفسها، والتغير في الأنظمة موجود في الطرف الأيمن من المعادلات. ونتيجة لذلك، يمكن إجراء عملية الحذف لجاوس على المصفوفة المزيدة المكوّنة من توليفة المصفوفات لكل نظام من الأنظمة

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

أولًا: إجراء $(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2)$ و $(E_3 + E_1) \rightarrow (E_3)$

متبوعًا بالعملية $(E_3 + E_2) \rightarrow (E_3)$ ينتج

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ و } \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

إن إجراء التعويض الإرجاعي على كل مصفوفة من المصفوفات المزيدة

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

يعطي في النهاية

$$\begin{aligned}
b_{13} &= -\tfrac{1}{9}, & b_{11} &= -\tfrac{2}{9}, & b_{12} &= \tfrac{5}{9},\\
b_{23} &= \tfrac{2}{9}, \quad \text{و} & b_{21} &= \tfrac{4}{9}, & b_{22} &= -\tfrac{1}{9},\\
b_{32} &= \tfrac{1}{3}, & b_{31} &= -\tfrac{1}{3}, & b_{32} &= \tfrac{1}{3},
\end{aligned}$$

وكما يظهر في المثال (4) هذه هي العناصر في A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

■

لقد شرحنا في المثال الأخير حساب A^{-1}. وكما رأينا في ذلك مثال، فمن الملائم تكوين مصفوفة موسعة أكبر

$$[\,A \;\vdots\; I\,]$$

وبتنفيذ الحذف بحسب الخوارزمية (1.6)، نحل المصفوفة المزيدة بالصيغة

$$[\,U \;\vdots\; Y\,]$$

حيث U مصفوفة مثلثية عليا، وY مصفوفة ناتجة من تنفيذ العمليات على المصفوفة الحيادية I التي نُفِّذت لتنقل A إلى U.

وإن عمليــة الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي تتطلب $4n^3/3 - n/3$ من عمليات الضرب/ القسمة و $4n^3/3 - 3n^2/2 + n/6$ من عمليات الجمع/ الطرح لحل الأنظمة الخطية n. (انظر التمرين 8 (أ)). يجب أخذ الحيطة التامة في ملاحظة العمليات التي لا حاجة إلى تنفيذها. فعلى سـبيل المثال في عملية الضرب عندما يكون أحد المضاعفات هو الباب 1. أو في عملية الطرح عندما يكون العـدد المطروح صفرا. فإن عدد عمليات الضرب/ القسـمة اللازمـة يمكن إنقاص إلى n^3. ويمكن إنقاص عدد عمليات الجمع/ الطرح إلى $n^3 - 2n^2 + n$. (انظر تمرين 8 (د))

وهناك مصفوفة مهمة مرتبطة بأي مصفوفة A وتسمى منقولاً (transpose). ويعبّر عنها بالرمز A^t.

تعريف 12.6 منقـول المصفوفـة $m \times n$ المعبَّـر عنها $A = [a_{ij}]$ هو المصفوفـة $n \times m$ المعبَّر عنها $A^t = [a_{ji}]$ حيث لكل i يكون العمود i في المصفوفة A^t هو نفسه الصف i في المصفوفة A. أي أن $A^t = (a_{ji})$ وتسمى المصفوفة المربعة متماثلة (symmetric) إذا كان $A = A^t$. ■

على سبيل المثال المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لها المنقولات

$$A^t = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, \quad C^t = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة C متماثلة، لأن $C^t = C$. ولكن المصفوفات A و B غير متماثلة.

وبرهان النتيجة الآتية يتضح مباشرة من تعريف المنقول.

مبرهنة 13.6 تتحقق العمليات الآتية حول منقول المصفوفة في كل حالة تكون العملية فيها ممكنة

أ. $(A^t)^t = A$ ب. $(A + B)^t = A^t + B^t$

ج. $(AB)^t = B^t A^t$ د. إذا كانت A^{-1} موجودة فإن $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ ■

يمكن استخدام أي CAS لتنفيذ أي عمليات قابلة للتنفيذ على المصفوفات. ويمكن على سبيل المثال إجراء جمع المصفوفات باستخدام مكتبة الجبر الخطي في Maple بـ A+B.

أما الضرب في ثابت فهو معرّف بـ c*A. وضرب المصفوفات AB ينفّذ باستخدام A.B. يوجد منقول المصفوفة باستخدام Transpose(A). ويوجد معكوس المصفوفة باستخدام MatrixInverse(A).

مجموعة التمارين 3.6 EXERCISE SET

1. حدّد أيًّا من المصفوفات الآتية غير منفردة (قابلة للانعكاس):

أ. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. حدّد أيًّا من المصفوفات الآتية غير منفردة، واحسب المعكوس لكل منها:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

3. لديك مجموعتان من 4×4 من الأنظمة الخطية لهما مصفوفة المعاملات نفسها:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6, \\ x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= 5; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}$$

أ. حُلَّ الأنظمة الخطية باستخدام طريقة الحذف لجاوس على المصفوفة المزيدة.

$$\left[\begin{array}{cccc:cc} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

ب. حُلَّ الأنظمة الخطية بإيجاد معكوس المصفوفة A ثم الضرب في معكوس هذه المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ج. أي الطريقتين تحتاج إلى عمليات أكثر؟

4. لديك أربعة أنظمة خطية 3×3 ذات مصفوفة معاملات واحدة:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

أ. حُلَّ الأنظمة الخطية باستخدام طريقة الحذف لجاوس على المصفوفة المزيدة

$$\left[\begin{array}{rrr:rrrr} 2 & -3 & 1 & 2 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

ب. حُلَّ الأنظمة الخطية بإيجاد معكوس المصفوفة A، ثم الضرب في معكوس هذه المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

ج. أي الطريقتين تحتاج إلى عمليات أكثر؟

5. العبارات الآتية مطلوبة لبرهان المبرهنة (11.6):

أ. برهن أن A^{-1} موجودة فهي وحيدة.

ب. برهن أنه إذا كانت A غير منفردة فإن $(A^{-1})^{-1} = A$.

ج. إذا كانت A و B مصفوفتين $n \times n$ غير منفردتين فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

6. برهن العبارات الآتية أو أعطِ أمثلة مضادة تبرهن أنها غير صحيحة:

أ. حاصل ضرب مصفوفتين متماثلتين مصفوفة متماثلة.

ب. معكوس أي مصفوفة متماثلة غير منفردة هو مصفوفة متماثلة غير منفردة.

ج. إذا كانت A و B مصفوفتين $n \times n$ فإن $(AB)' = A'B'$.

7. أ. برهن أن حاصل ضرب أي مصفوفتين مثلثتين سفليين $n \times n$ هو مصفوفة مثلثية سفلية.

ب. برهن أن حاصل ضرب أي مصفوفتين مثلثتين علويين $n \times n$ هو مصفوفة مثلثية علوية.

ج. برهن أن معكوس أي مصفوفة غير منفردة مثلثية سفلية $n \times n$ هو مصفوفة مثلثية سفلية.

8. افترض أن m من الأنظمة الخطية

$$A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}, \quad p = 1, 2, \ldots, m$$

مطلوب حلها، حيث كل منها مصفوفة المعاملات $n \times n$ هي A.

أ. برهن أن تطبيق عملية الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي على المصفوفة المزيدة

$$[\, A : \ \mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)}\cdots\mathbf{b}^{(m)} \,]$$

يتطلب عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{3}n$

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n^2 - mn + \frac{1}{6}n$

ب. برهن أن تطبيق طريقة جاوس–جوردان (انظر التمرين 12من الفصل 16) على المصفوفة المزيدة

$$[\, A : \ \mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)}\cdots\mathbf{b}^{(m)} \,]$$

يتطلب عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{2}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n$

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{2}n^3 + (m-1)n^2 + (\frac{1}{2} - m)n$

ج. بالنظر إلى الحالة الخاصة

$$\mathbf{b}^{(p)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p \text{ الصف} \\ \\ \\ \end{array}$$

لكل $p = 1, \ldots, m$ حيث $m = n$ فإن الحل $\mathbf{x}^{(p)}$ هو العمود p في المصفوفة A^{-1}.

برهن أن طريقة الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي تتطلب

عدد عمليات الضرب/ القسمة $\frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$

وعدد عمليات الجمع/ الطرح $\frac{4}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

وأن طريقة جاوس – جوردان تتطلب

عدد عمليات الضرب/ القسمة $\frac{3}{2}n^3 - \frac{1}{2}n$

وعدد عمليات الجمع/ الطرح $\frac{3}{2}n^3 - 2n^2 + \frac{1}{2}n$

د. أنشئ خوارزمية باستخدام طريقة الحذف لجاوس لإيجاد A^{-1}، ولكن لا تنفذ عمليات ضرب إذا كان أحد المضاعفات معلومًا أنه 1، ولا تنفذ أي عمليات جمع/ طرح عندما يساوي أحد العناصر صفرًا.

برهن أن الحسابات اللازمة تُنقص إلى n^3 من عمليات الضرب/ القسمة و $n^3 - 2n^2 + n$ من عمليات الجمع/ الطرح.

هـ. برهن أن حل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ عندما تكون A^{-1} معلومة ما زال يتطلب n^2 من عمليات الضرب/ القسمة و $n^2 - n$ من عمليات الجمع/ الطرح.

و. برهن أن حل m من الأنظمة الخطية $A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}$ للقيم $p = 1, 2, \ldots, m$ بالطريقة $\mathbf{x}^{(p)} = A^{-1}\mathbf{b}^{(p)}$ يتطلب mn^2 من عمليات الضرب و $m(n^2 - n)$ من عمليات الجمع إذا كانت A^{-1} معلومة.

لتكن A مصفوفة $n \times n$. قارن عدد العمليات اللازمة لحل n من الأنظمة الخطية المحتوية على A بطريقة الحذف لجاوس بالتعويض الإرجاعي وبطريقة إيجاد معكوس A أولًا، ثم بضرب طرفي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ في المصفوفة A^{-1} للأعداد $n = 3, 10, 50, 100$.

هل من المفيد على الإطلاق أن تحسب A^{-1} لغرض حل الأنظمة الخطية؟

9. استخدم الخوارزمية التي أُنشئت في التمرين (8) (د) لإيجاد معكوس كل مصفوفة غير منفردة في التمرين (1).

10. غالبًا ما يكون من المفيد تجزئة المصفوفات إلى مجموعة من المصفوفات المصغرة؛ فيمكن على سبيل المثال تجزئة المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

إلى

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ \hdashline 6 & 5 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{و} \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ \hdashline -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

أ. برهن أن حاصل ضرب A في B في هذه الحالة هو

$$AB = \left[\begin{array}{c:c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hdashline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

ب. إذا جُزّئ B بدلًا من التجزئة السابقة إلى

$$B = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 7 & 0 \\ \hdashline 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

فهل ستبقى النتيجة (أ) متحققة؟

ج. أعط اقتراحًا أو تخمينا عن الشروط الضرورية لتتحقق النتيجة في الفقرة (أ) في الحالة العامة.

11. ورقة بحث بعنوان "موجات المجتمع "Population Waves," Bernadelli [Ber]" (انظر أيضًا [Se])

يضع بيرناديللي فرضية عن نوع مبسط من البيتل طول مدى حياته 3 سنوات. وإن معدل حياة أنثى هذا النوع $\frac{1}{2}$ في السنة الأولى من الحياة، و$\frac{1}{3}$ في السنة الثانية إلى السنة الثالثة، وتلد بمعدل 6 إناث جديدة قبل نهاية حياتها في نهاية السنة الثالثة. ويمكن تمثيل ما تساهم به أنثى البيتل في مجتمع نوعها بمصفوفة يعبّر عنها بمعنى احتمالي، وذلك بالمصفوفة $A = [a_{ij}]$ حيث تمثِّل a_{ij} مساهمة أنثى البيتل الواحدة في العمر j نحو المجتمع الأنثوي ذي العمر i في السنة التالية، أي أن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

أ. إن ما تساهم به أنثى البيتل في المجتمع بعد سنتين يتحدد من عناصر A^2 وبعد ثلاث سنوات A^3 وهكذا. احسب A^2 وA^3 وحاول إعطاء عبارة عامة حول مساهمة أنثى البيتل في المجتمع خلال n سنة، حيث n عدد صحيح موجب.

ب. استخدم نتائجك في الفقرة (أ) لتصف ما سيحدث في السنوات القادمة في مجتمع لبيتل المكوّن من 6000 أنثى من فئات الأعمار الثلاث.

ج. أوجد A^{-1}، وصف أهميتها لمجتمع هذا النوع.

12. إن دراسة سلاسل الغذاء موضوع مهم في تحديد انتشار الملوثات البيئية في المادة الحيّة وتراكمها. افترض أن لسلسلة غذاء ثلاث روابط: الرابط الأول يتألف من النباتات من الأنواع $v_1, v_2, \ldots, v_n$ التي تزود الأنواع جميعها نباتية الغذاء $h_1, h_2, \ldots, h_m$ في الرابط الثاني بالغذاء المطلوب. ويتألف الرابط الثالث من الحيوانات آكلة اللحوم $c_1, c_2, \ldots, c_k$ التي تعتمد في غذائها كليًا على الأنواع آكلة النبات في الرابط الثاني. إن العنصر a_{ij} في المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

تمثِّل النباتات جميعها من النوع v_i المستهلكة من قبل الحيوانات نباتية الغذاء من النوع h_j.

أما العنصر b_{ij} في المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

فيمثِّل عدد الحيوانات النباتية الغذاء من النوع h_j التي تستهلكها الحيوانات من لنوع c_j.

أ. وضّح أن نباتات النوع v_i التي تنتهي أخيرًا بحيوانات النوع c_j تعطى بالعنصر في الصف i والعمود j في المصفوفة AB.

ب. ما الأهمية الطبيعية للمصفوفات A^{-1}, B^{-1} و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$؟

13. وجدنا في الفصل 5.3 أن الصيغة البارمترية $(x(t), y(t))$ في كثيرات حدود هرمايت (Hermite) التكعيبية المارة من $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ و$(x(1), y(1)) = (x_1, y_1)$ وبنقاط مؤشرة $(x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0)$ و $(x_1 - \alpha_1, y_1 - \beta_1)$ على التوالي تعطى بالصيغتين

$$x(t) = (2(x_0 - x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1))t^3 + (3(x_1 - x_0) - \alpha_1 - 2\alpha_0)t^2 + \alpha_0 t + x_0$$

و

$$y(t) = (2(y_0 - y_1) + (\beta_0 + \beta_1))t^3 + (3(y_1 - y_0) - \beta_1 - 2\beta_0)t^2 + \beta_0 t + y_0$$

إن كثيرات حدود بيزيه (Be'zier) التكعيبية تعطى بالصيغتين

$$\hat{x}(t) = (2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1))t^3 + (3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0))t^2 + 3\alpha_0 t + x_0$$

و

$$\hat{y}(t) = (2(y_0 - y_1) + 3(\beta_0 + \beta_1))t^3 + (3(y_1 - y_0) - 3(\beta_1 + 2\beta_0))t^2 + 3\beta_0 t + y_0$$

أ. إن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تحوّل معاملات كثيرات حدود هرمايت إلى معاملات كثيرات حدود بيزيه.

ب. أوجد المصفوفة B التي تحول معاملات كثيرات حدود بيزيه إلى معاملات كثيرات حدود هرمايت.

14. لديك النظام الخطي 2×2 $\quad (A + iB)(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \mathbf{c} + i\mathbf{d}$

بمدخلات مركبة في صيغة المركبات

$$(a_{11} + ib_{11})(x_1 + iy_1) + (a_{12} + ib_{12})(x_2 + iy_2) = c_1 + id_1$$

$$(a_{21} + ib_{21})(x_1 + iy_1) + (a_{22} + ib_{22})(x_2 + iy_2) = c_2 + id_2$$

أ. استخدم خواص الأعداد المركبة لتحويل هذا النظام إلى نظام خطي حقيقي 4×4.

$$A\mathbf{x} - B\mathbf{y} = \mathbf{c},$$

$$B\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{d}.$$

حُلَّ النظام الخطي

$$(1 - 2i)(x_1 + iy_1) + (3 + 2i)(x_2 + iy_2) = 5 + 2i$$

$$(2 + i)(x_1 + iy_1) + (4 + 3i)(x_2 + iy_2) = 4 - i$$

4.6 محددة المصفوفة The Determinant of a matrix

إن محددة المصفوفة تبيّن ما إذا كانت حلول الأنظمة الخطية التي يساوي فيها عدد المجاهيل عدد المعادلات موجودة ووحيدة.

تعريف 14.6 نعبّر عن محددة المصفوفة المربعة A بالرمز $\det A$. علمًا بأن الرمز $|A|$ شائع الاستخدام أيضًا.

أ. إذا كانت $A = [a]$ مصفوفة 1×1 فإن $\det A = a$.

ب. إذا كانت A مصفوفة $n \times n$ فإن المصغر M_{ij} (minor) هو محددة المصفوفة الجزئية $(n-1) \times (n-1)$ من A التي نحصل عليها بحذف الصف i والعمود j في المصفوفة A.

لقد ظهر مفهوم المحدّدة في عام 1683 في كل من اليابان وأوروبا. على الرغم من أن تكاكازو كوا Takakazu Seki kowa (1642-1708)، وليبنتز Gottfried Leibniz (1646-1716) لم يستخدما عبارة المحددة

ج. العامل المشارك A_{ij} (cofactor) المقترن بـ M_{ij} يعرّف بالمعادلة $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

د. إن محددة المصفوفة A ذات $n \times n$، حيث $n > 1$ تعطى بإحدى المعادلتين

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

أو

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{لكل} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$ ■

يمكن برهنة (انظر التمرين 9) أنه لحساب محدّدة مصفوفة عامة $n \times n$ في تعريف السابق يلزم $O(n!)$ من عمليات الضرب/ القسمة والجمع/ الطرح. وحتى إذا كانت قيم n صغيرة نسبيًا فإن عدد الحسابات يخرج عن السيطرة.

وعلى الرغم من وجود $2n$ من التعاريف المختلفة لـ $\det A$ وفق أي صف أو عمود تختاره. فإن تعريفات جميعها تعطي النتيجة العددية نفسها.

استخدمت مرونة تعريف في حل مثال الآتي.

إن الأكثر ملاءمة في حساب $\det A$ هو استخدام الصف أو العمود ذي عدد الأصفار الأكثر.

مثال 1 لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 5 \\ 6 & -6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

لحساب $\det A$، يكون من الأسهل استخدام العمود الرابع.

$$\det A = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44} = 5A_{34} = -5M_{34}$$

وبحذف الصف الثالث والعمود الرابع نحصل على

$$\det A = -5 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \\ 6 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= -5\left\{2 \det \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} - (-1) \det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}\right\} = -30$$ ■

يمكن حساب محددة مصفوفة ما في مابل Maple عن طريق مكتبة الجبر الخطي باستخدام الأمر determinant (A)

وتعد الخواص الآتية مفيدة في ربط الأنظمة الخطية وطريقة الحذف لجاوس بالمحددات.

ويمكن الرجوع إلى أي كتاب في الجبر الخطي لبرهنة هذه الخواص. (انظر على سبيل المثال [ND, pp. 200–201])

مبرهنة 15.6 لتكن A مصفوفة $n \times n$:

أ. إذا كانت عناصر أي صف أو عمود من A أصفارًا فإن $\det A = 0$.

ب. إذا تساوى أي صفين أو عمودين في A فإن $\det A = 0$.

ج. إذا حصلنا على $\tilde{A}$ من A في العملية $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$، حيث $i \neq j$ فإن $\det \tilde{A} = -\det A$.

د. إذا حصلنا على $\tilde{A}$ من A في العملية $(E_i) \rightarrow (\lambda E_i)$ فإن $\det \tilde{A} = \lambda \det A$.

هـ. إذا حصلنا على $\tilde{A}$ من A في العملية $(E_i) \rightarrow (E_i + \lambda E_j)$، حيث $i \neq j$ فإن $\det \tilde{A} = \det A$

و. إذا كانت B مصفوفة $n \times n$ أيضًا فإن $\det AB = \det A \det B$.

ز. $\det A^t = \det A$.

ح. إذا كانت A^{-1} موجودة فإن $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

ط. إذا كانت A مصفوفة مثلثية عليا أو مثلثية سفلى أو قطرية فإن $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. ■

إن المصفوفة في الصيغة المثلثية يسهل حساب محددتها، وعليه فإن حساب محددة أي مصفوفة يمكن تبسيطه عن طريق تحويل المصفوفة إلى مصفوفة مثلثية أولاً. ثم نستخدم الفقرة (ط) من المبرهنة لحساب محددة المصفوفة.

مثال 2 احسب محدّدة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

باستخدام الفروع (ب)، (د) و(هـ) في المبرهنة (15.6)، وباستخدام الحسابات في Maple من مكتبة الجبر الخطي. وإن المصفوفة A معرّفة بالأمر

```
A:=Matrix([[2,1,-1,1],[1,1,0,3],[-1,2,3,-1],[3,-1,-1,2]]);
```

إن توالي العمليات في الجدول (2.6) يعطينا المصفوفة

$$A8 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

ومن الفقرة (ط) نجد $\det A8 = -39$ ولذلك $\det A = 39$. ■

جدول 2.6

العملية	مابل	الأثر
$\frac{1}{2}E_1 \rightarrow E_1$	A1:= RowOperation(A,1,1/2)	$\det A1 = \frac{1}{2}\det A$
$E_2 - E_1 \rightarrow E_2$	A2:=RowOperation(A1,[2,1],-1)	$\det A2 = \det A1 = \frac{1}{2}\det A$
$E_3 + E_1 \rightarrow E_3$	A3:=RowOperation(A2,[3,1],1)	$\det A3 = \det A2 = \frac{1}{2}\det A$
$E_4 - 3E_1 \rightarrow E_4$	A4:=RowOperation(A3,[4,1],-3)	$\det A4 = \det A3 = \frac{1}{2}\det A$
$2E_2 \rightarrow E_2$	A5:=RowOperation(A4,2,2)	$\det A5 = 2\det A4 = \det A$
$E_3 - \frac{5}{2}E_2 \rightarrow E_3$	A6:=RowOperation(A5,[3,2],-5/2)	$\det A6 = \det A5 = \det A$
$E_4 + \frac{5}{2}E_2 \rightarrow E_4$	A7:=RowOperation(A6,[4,2],5/2)	$\det A7 = \det A6 = \det A$
$E_3 \leftrightarrow E_4$	A8:=RowOperation(A7,[3,4])	$\det A8 = -\det A7 = -\det A$

النتيجة التالية لها أهمية خاصة حيث تربط بين قابلية العكس للمصفوفة وطريقة جاوس للحذف.

مبرهنة 16.6 العبارات الآتية جميعها متكافئة للمصفوفة المربعة A من الدرجة $n \times n$:

(أ) للمعادلة $A\mathbf{x} = 0$ حل وحيد $\mathbf{x} = 0$.

(ب) للنظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ حل وحيد لأي متجه $\mathbf{b}$ من البعد n.

(ج) المصفوفة A غير منفردة. أي A^{-1} موجودة.

(د) $\det A \neq 0$.

(هـ) يمكن أن تنفذ عملية الحذف لجاوس بالتبديل الصفي على النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ لأي متجه $\mathbf{b}$ من البعد n.

مجموعة التمارين 4.6 EXERCISE SET

1. استخدم تعريف 14.6 لتحسب محدّدات المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

2. استخدم تعريف 14.6 لتحسب محدّدات المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

3. كرر التمرين 1 باستخدام الطريقة في مثال 2.

4. كرر التمرين 2 باستخدام الطريقة في مثال 2.

5. أوجد قيم α جميعها التي تجعل المصفوفة الآتية منفردة (غير قابلة للانعكاس):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

6. أوجد قيم α جميعها التي تجعل المصفوفة الآتية منفردة (غير قابلة للانعكاس):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \end{bmatrix}$$

7. أوجد قيم α جميعها بحيث إن النظام الخطي الآتي لا يملك أي حلول:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

8. أوجد قيم α جميعها بحيث يكون للنظام الخطي الآتي ما لانهاية من الحلول:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

9. استخدم الاستقراء الرياضي لتثبت أنه إذا كان $n > 1$ فإن حساب محددة المصفوفة $n \times n$ باستخدام تعريف يتطلب عددًا من عمليات الضرب/ القسمة يساوي $n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$ وعددًا من عمليات الجمع/ الطرح يساوي $n! - 1$.

10. لتكن A مصفوفة 3×3. برهن أنه إذا حصلنا على $\tilde{A}$ من A باستخدام أي من العمليات $(E_1) \leftrightarrow (E_3)$ ، $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$، أو $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$ فإن $\det \tilde{A} = -\det A$

11. برهن أن AB غير منفردة إذا وفقط إذا كان كل من A و B غير منفردتين.

12. حُلَّ النظام الخطي

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

بقاعدة كرامر Cramer's rule يعطينا

$$x_1 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_2}{D}$$

$$x_3 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix} \equiv \frac{D_3}{D}, \qquad D = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

نشر جبرائيل كرامر Gabriel Cramer (1704-1752) قاعدة الحل (كما في التمرين 12) عام 1750 وكذلك قد نشرت من قبل ماكلورين Colin Maclaurin في عام 1748

أ. أوجد حَلَّ النظام الخطي الآتي باستخدام قاعدة كرامر:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

ب. أثبت أن النظام الخطي

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

ليس له حل. احسب D_1, D_2, D_3.

ج. أثبت أن للنظام الخطي

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

عددًا لانهائيًا من الحلول. احسب D_1، D_2 و D_3.

د. برهن إذا كان النظام الخطي 3×3 فيه $D = 0$ حلول، وأن $D_1 = D_2 = D_3 = 0$

هـ. حدّد عدد عمليات الضرب/ القسمة والجمع/ الطرح اللازمة لاستخدام قاعدة كرامر على النظام الخطي 3×3.

13. أ. عمّم قاعدة كرامر للأنظمة الخطية $n \times n$.

ب. استخدم نتيجة التمرين 9 لحساب عدد عمليات الضرب/ القسمة والجمع/ الطرح اللازمة لاستخدام قاعدة كرامر على الأنظمة $n \times n$.

5.6 تحليل المصفوفات Matrix Factorization

إن طريقة الحذف لجاوس هي الأداة الرئيسة في الحل المباشر لأنظمة المعادلات الخطية، ولذلك فليس مدهشًا ظهورها في صور أخرى. وسنرى في هذا الفصل أن الخطوات المستخدمة في حل نظام على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يمكن استخدامها لتحليل المصفوفة إلى العوامل. إن التحليل إلى العوامل مفيد وخصوصًا عندما يأخذ الصيغة $A = LU$، حيث L مثلثية سفلية، و U مثلثية علوية. وعلى الرغم من عدم امتلاك كل المصفوفات لهذا التمثيل. إلا أن كثيرًا منها يمتلكه، وتظهر كثيرًا في دراسة الطرائق العددية. ولقد وجدنا في الفصل 1.6 أن تطبيق طريقة الحذف لجاوس على أي نظام خطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يتطلب $O(n^3/3)$ من العمليات الحسابية لتحديد $\mathbf{x}$. وعلى كل حال فإن حل النظام الخطي الذي يحوي نظامًا مثلثيًا علويًا يتطلب التعويض الإرجاعي الذي يحتاج إلى $O(n^2)$ من العمليات. إن وضع الأنظمة المثلثية السفلية مشابه، لذلك إذا حلّل A إلى الصيغة المثلثية $A = LU$ فعندئذ يمكننا حل المتجه $\mathbf{x}$ بسهولة أكبر باستخدام عملية ذات خطوتين. أولًا: نفترض $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$، ونحل $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ لإيجاد $\mathbf{y}$. ولما كانت L مثلثية، فإن تحديد $\mathbf{y}$ من هذه المعادلة يحتاج إلى $O(n^2)$ من العمليات. وإذا وجدنا $\mathbf{y}$ فإن النظام المثلثي $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ يتطلب $O(n^2)$ فقط من العمليات الإضافية لإيجاد $\mathbf{x}$. إن هذه الحقيقة تعني أن عدد العمليات اللازمة لحل النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ قد نقص من $O(n^3/3)$ إلى $O(2n^2)$ في الأنظمة الأكبر من 100%، تنقص هذه الطريقة مقدار الحساب بأكثر من 99%؛ لأن $(0.01)(100)^3 = (0.01)(1,000,000) = 10,000 = 100^2$.

إن التخفيض باستخدام التحليل إلى العوامل له ثمن؛ إذ إن تحديد المصفوفين الخاصتين L و U يتطلب $O(n^3)$ من العمليات. ولكن في حال حدّد التحليل، فإن الأنظمة ذات المصفوفة A يمكن حلها بالطريقة المبسطة هذه لأي عدد من المتجهات $\mathbf{b}$. ولفحص أي المصفوفات تملك التحليل LU ولتحديدها؛ نفترض أولًا أنه يمكن إجراء طريقة الحذف لجاوس على النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بدون تبديلات صفية. وباستخدام الرموز في الفصل 1.6، فإن هذا يكافئ وجود مراكز دورانية غير صفرية $a_{ii}^{(i)}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. إن الخطوة الأولى في عملية الحذف لجاوس تتألف من تنفيذ العمليات لكل

$$(E_j - m_{j,1}E_1) \longrightarrow (E_j) \quad \text{حيث} \quad m_{j,1} = \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \tag{8.6}$$

إن هــذه العمليــات تحوّل النظــام إلى نظام آخر تكون فيه مدخــلات العمود الأول تحت القطر أصفارًا.

ويمكــن النظر إلى نظام العمليات في المعادلــة (6.8) بطريقة أخرى، بحيث يمكن تحقيقها آنيًّا بضرب المصفوفة الأصلية A عن اليسار في المصفوفة

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتسمى هذه المصفوفة جاوس التحويلية الأولى first Gaussian Transformation matrix.

تحليل المصفوفة إلى عوامل هو طريقة أخرى مهمة من تلك الطرائق التي عرضها جاوس عام 1809 في الطرائق البرهنة Theoria Motus.

سنعبر عن حاصل ضرب هذه المصفوفة في المصفوفة $A \equiv A^{(1)}$ بالرمز $A^{(2)}$ وحاصل الضرب في المتجه $\mathbf{b}$ بالرمز $\mathbf{b}^{(2)}$، لذلك يكون

$$A^{(2)}\mathbf{x} = M^{(1)}A\mathbf{x} = M^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(2)}$$

ونبني $M^{(2)}$ بطريقة مشابهة، وهي المصفوفة المحايدة بعد وضع سوالب المضاعفات

$$m_{j,2} = \frac{a_{j2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

فــي المدخلات تحت القطــر في العمود الثاني تكــون عناصر حاصل ضرب هــذه المصفوفة في المصفوفة $A^{(2)}$ أصفارًا تحت القطر في العمودين الابتدائيين، ومن ثم نضع

$$A^{(3)}\mathbf{x} = M^{(2)}A^{(2)}\mathbf{x} = M^{(2)}M^{(1)}A\mathbf{x} = M^{(2)}M^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(3)}$$

ويوجد $A^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}$ عمومًا، ونضرب في مصفوفة جاوس التحويلية ذات العدد k

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & -m_{k+1,k} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -m_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لنجد

$$A^{(k+1)}\mathbf{x} = M^{(k)}A^{(k)}\mathbf{x} = M^{(k)}\cdots M^{(1)}A\mathbf{x} = M^{(k)}\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k+1)} = M^{(k)}\cdots M^{(1)}\mathbf{b} \quad (9.6)$$

وتنتهي العملية بتكوين $A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$، حيث $A^{(n)}$ هي المصفوفة المثلثية العليا

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

المعطاة بالصيغة $A^{(n)} = M^{(n-1)}M^{(n-2)} \cdots M^{(1)}A$.

تشكل هذه العملية الجزء $U = A^{(n)}$ من تحليل المصفوفة $A = LU$.

ولتحديد المصفوفة الثلثية السفلى المتممة للتحليل L، تذكر أولاً حاصل ضرب $A^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}$ في مصفوفة جاوس التحويلية $M^{(k)}$ المستخدمة في الحصول على المعادلة (9.6)

$$A^{(k+1)}\mathbf{x} = M^{(k)}A^{(k)}\mathbf{x} = M^{(k)}\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k+1)}$$

حيث تولد $M^{(k)}$ عمليات الصف

$$(E_j - m_{j,k}E_k) \rightarrow (E_j) \quad \text{لكل} \quad j = k+1, \ldots, n$$

يتطلب عكس تأثيرات هذا التحويل والرجوع إلى $A^{(k)}$، إجراء العمليات

$$(E_j + m_{j,k}E_k) \rightarrow (E_j) \quad \text{لكل} \quad j = k+1, \ldots, n.$$

هذا مكافئ للضرب في معكوس المصفوفة $M^{(k)}$ والمصفوفة هي

$$L^{(k)} = [M^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & m_{k+1,k} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,k} & 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة الثلثية السفلية L في تحليل A هي حاصل ضرب المصفوفات $L^{(k)}$.

$$L = L^{(1)}L^{(2)} \cdots L^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

ولما كان حاصل ضرب L في المصفوفة الثلثية العليا $U = M^{(n-1)} \cdots M^{(2)}M^{(1)}A$ يعطي

$$LU = L^{(1)}L^{(2)} \cdots L^{(n-3)}L^{(n-2)}L^{(n-1)} \cdot M^{(n-1)}M^{(n-2)}M^{(n-3)} \cdots M^{(2)}M^{(1)}A$$

$$= [M^{(1)}]^{-1}[M^{(2)}]^{-1} \cdots [M^{(n-2)}]^{-1}[M^{(n-1)}]^{-1} \cdot M^{(n-1)}M^{(n-2)} \cdots M^{(2)}M^{(1)}A = A$$

عندها تنتج المبرهنة (17.6) من هذه الخطوات.

مبرهنة 17.6 إذا أمكن تطبيق طريقة الحذف لجاوس على النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دون تبديل صفي فإن المصفوفة A قابلة للتحليل إلى حاصل ضرب مصفوفة مثلثية سفلى L في مصفوفة مثلثية عليا U

أي $A = LU$، حيث $m_{ji} = a_{ji}^{(i)}/a_{ii}^{(i)}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

مثال 1 لقد تعاملنا مع النظام الخطي الآتي في الفصل (1.6):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

إن توالي العمليات

$$(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3)$$

$$(E_4 - (-1)E_1) \to (E_4), (E_3 - 4E_2) \to (E_3), (E_4 - (-3)E_2) \to (E_4)$$

يحوّل النظام إلى الصيغة المثلثية

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_4 &= 4 \\ -x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 3x_3 + 13x_4 &= 13 \\ -13x_4 &= -13 \end{aligned}$$

إن المضاعفات m_{ij} والمصفوفة المثلثية العليا تنتج التحليل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} = LU$$

إن هذا التحليل يتيح لنا حل أي نظام يحوي A بسهولة، فعلى سبيل المثال لكي تحل

$$A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

نعوض أولاً $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$، ثم $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ بمعنى أن

$$LU\mathbf{x} = L\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

ويُحلّ هذا النظام لإيجاد $\mathbf{y}$ بعملية تعويض أمامي سهلة

$y_1 = 8;$

$2y_1 + y_2 = 7,$ لذا $y_2 = 7 - 2y_1 = -9;$

$3y_1 + 4y_2 + y_3 = 14,$ لذا $y_3 = 14 - 3y_1 - 4y_2 = 26;$

$-y_1 - 3y_2 + y_4 = -7,$ لذا $y_4 = -7 + y_1 + 3y_2 = -26.$

بعد ذلك نحل $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ لإيجاد $\mathbf{x}$ وهو حل النظام الأصلي، أي أن

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 26 \\ -26 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التعويض الإرجاعي نحصل على $x_4 = 2, x_3 = 0, x_2 = -1, x_1 = 3$ ■

إن التحليل إلى العوامل المستخدمة في مثال (1) يسمى طريقة دوليتل Doolittle's method. ويتطلب أن يكون 1 في عناصر قطر L جميعها الذي يؤدي إلى التحليل الذي شرح في المبرهنة (17.6) سنبحث في الفصل (6.6) في طريقة كروات Crout's method التي تتطلب وجود 1 في عنصر قطر U جميعها. وسنبحث في طريقة تشولسكي Cholesky's method التي تتطلب أن يكون $l_{ii} = u_{ii}$ لكل i.

إن الخوارزمية (4.6) تعطي طريقة عامة لتحليل المصفوفات إلى حاصل ضرب مصفوفات مثلثية. وعلى الرغم من إنشاء مصفوفتين جديدتين L وU، فإن القيم الناتجة تحل محل عناصر A المقابلة التي لم تعد هناك حاجة إليها.

تسمح الخوارزمية (4.6) بأن يكون قطر L أو قطر U هو المحدد.

ALGORITHM

الخوارزمية

4.6

تحليل LU Factirization LU

لتحليل المصفوفة $n \times n$ المعبر عنها $A = [a_{ij}]$ لحاصل ضرب مصفوفة مثلثية سفية $L = [l_{ij}]$ في مصفوفة مثلثية عليا $U = [u_{ij}]$. أي $A = LU$ حيث كل عنصر (مدخله) في لقطر الرئيس في L أو U هو 1 (الوحدة)؛

المدخلات: البعد n. العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A. حيث $l_{11} = \cdots = l_{nn} = 1$، القطر $u_{11} = \cdots = u_{nn} = 1$ في المصفوفة L أو القطر U في المصفوفة.

المخرجات: العناصر l_{ij} حيث $1 \le i \le n$، $1 \le j \le i$ في المصفوفة L والعناصر u_{ij} حيث $i \le j \le n$، $1 \le i \le n$ في U.

الخطوة	المضمون
1	اختر l_{11} و u_{11} بحيث $l_{11}u_{11} = a_{11}$. إذا كان $l_{11}u_{11} = 0$ فالمخرجات (التحليل مستحيل). توقف.
2	لكل $j = 2, \ldots, n$ ضع $u_{1j} = a_{1j}/l_{11}$ (الصف الأول في U). $l_{j1} = a_{j1}/u_{11}$ (العمود الأول في L).
3	لكل $i = 2, \ldots, n-1$ نفذ الخطوتين 4 و5.
4	اختر l_{ii} و u_{ii} بحيث $l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$ إذا كان $l_{ii}u_{ii} = 0$ فإن المخرجات (التحليل مستحيل). توقف.
5	لكل $j = i+1, \ldots, n$ ضع $u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right]$ (الصف i في U). $l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}\left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}\right]$ (العمود i في L).

6	اختر l_{nn} و u_{nn} بحيث إن $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$ (ملحوظة: إذا كان $l_{nn}u_{nn} = 0$ فإن $A = LU$، ولكن A منفردة).
7	المخرجات (l_{ij} لكل $j = 1,\dots, i$ و $i = 1,\dots, n$)، المخرجات (u_{ij} لكل $j = i,\dots, n$ و $i = 1,\dots, n$) توقف.

عندمــا يكتمل تحليل المصفوفة، يوجــد حل النظام الخطي على الصيغة $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ عن طريق وضع $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ أولًا، ثم حُلَّ $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ لإيجاد $\mathbf{y}$.

بما أن L مثلثية سفلية يكون لدينا $y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}}$

ولكل $i = 2, 3,\dots, n$ يكون

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j\right]$$

وبعــد إيجاد $\mathbf{y}$ بعمليــة التعويض الأمامي هذه، نحل النظــام المثلثي العلوي $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ لإيجاد $\mathbf{x}$ بعملية التعويض الإرجاعي وباستخدام

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \quad \text{و} \quad x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right]$$

لقد افترضنا في الشــرح الســابق أن $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ قابلة للحل باســتخدام طريقة الحذف لجاوس دون مبادلات صفية. ومن وجهة نظر عملية يكون التحليل إلى العوامل مفيدًا فقط عندما لا يكون هناك لــزوم للمبادلات الصفية للتحكم في خطأ تقريب الناتج عن اســتخدام الحســاب منتهي الأرقام. ولحسن الحظ، فإن كثيرًا من الأنظمة التي تقابلنا عند استخدام التقريب هي من هذا النوع. ولكن ســنتعامل الآن مع التعديــلات التي يجب إجراؤها عندما يتطلب الأمر مبادلات صفية. وســنبدأ الشرح بتقديم مجموعة من المصفوفات التي تستخدم لإعادة ترتيب صفوف مصفوفة ما أو تبديلها.

مصفوفــة التبادل (Permutation Matrix) $n \times n$ هي $P = [p_{ij}]$ ناتجة عن تبادل صفوف المصفوفة الحيادية I_n. وإن هذا يعطي مصفوفة في كل صف فيها مدخلة واحدة فقط غير صفرية، وفي كل عمود فيها مدخلة واحدة فقط غير صفرية، وكل قيمة غير صفرية هي 1.

مثال 2 المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

هــي مصفوفــة التبادل 3×3 لأي مصفوفة A بحجم 3×3. الضرب من اليســار في المصفوفة P ينتج أثر تبادل الصفين الثاني والثالث للمصفوفة A:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

وبالمثل فالضرب من اليمين في المصفوفة A ينتج P عند تبادل العمودين الثاني والثالث للمصفوفة A. ■

تتعلق طريقة الحذف لجاوس بخاصيتين مفيدتين للمصفوفات التبادلية. وضّحت الأولى في مثال السابق. افترض أن $k_1, \ldots, k_n$ هي تبادل للأعداد الصحيحة $1, \ldots, n$. وأن مصفوفة التبادل $P = (p_{ij})$ معرّفة بما يلي:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & j = k_i \text{ إذا كان} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ملحوظة: ينتج ضرب المصفوفة من جهة اليمين. أي PA تبديل أعمدة A.

(i) فإن PA تنتج تبديل صفوف A أي أن

$$PA = \begin{bmatrix} a_{k_1 1} & a_{k_1 2} & \cdots & a_{k_1 n} \\ a_{k_2 1} & a_{k_2 2} & \cdots & a_{k_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_n 1} & a_{k_n 2} & \cdots & a_{k_n n} \end{bmatrix}$$

(ii) P^{-1} موجودة ويكون $P^{-1} = P^t$

رأينا في نهاية الفصل 4.6 أنه يمكن لكل مصفوفة غير منفردة A حل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بطريقة الحذف لجاوس مع إمكانية استخدام مبادلة الصفوف. إذا ما علمنا مبادلات الصيغة اللازمة لحل النظام بطريقة الحذف لجاوس، أمكننا ترتيب المعادلات الأصلية في ترتيب يضمن عدم الحاجة إلى مبادلة صفوف.

يُعاد إذن ترتيب المعادلات في النظام، بحيث يسمح لطريقة الحذف لجوس بالاستمرار دون مبادلات صفية. وإن هذا يحتم وجود مصفوفة تبديل P لكل مصفوفة غير منفردة، بحيث يمكن حل النظام $PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$ دون مبادلة صفية. ولكن يمكن تحليل هذه المصفوفة PA إلى $PA = LU$. حيث L مثلثية سفلية. و U مثلثية علوية. بما أن $P^{-1} = P^t$. يكون لدينا التحليل

$$A = P^{-1}LU = (P^tL)U$$

لا تزال المصفوفة U مثلثية علوية. أما P^tL فليست مثلثية سفلية إلا إذا كان $P = I$.

مثال 3 بما أن $a_{11} = 0$، فإن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

لا تملك تحليلًا LU.

على كل حال، فإن استخدام المبادلة الصفية $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$ متبوعًا بالعمليات $(E_3 + E_1) \rightarrow E_3$ ثم $(E_4 - E_1) \rightarrow E_4$ ينتج

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بعد ذلك يعطي $(E_4) \leftrightarrow (E_3)$ متبوعًا بالعملية $E_3 \rightarrow (E_3 - E_2)$ المصفوفة

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وإن مصفوفة التبديل المقترنة بالمبادلات الصفية $(E_2) \leftrightarrow (E_1)$ و $(E_4) \leftrightarrow (E_3)$ هي

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ويمكن تنفيذ طريقة الحذف لجاوس على PA دون مبادلات صفية لتعطي التحليل UL للمصفوفة PA على الصيغة

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

وعليه ينتج

$$A = P^{-1}(LU) = P^t(LU) = (P^tL)U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

■

إن التحليل على الصيغة $A = PLU$ للمصفوفة A يمكن الحصول عليه باستخدام مكتبة الجبر الخطي في مابل بالأمر LUDecomposition(A)

وعندما تنشأ المصفوفة A، فإن الاستدعاء الدالي

```
>(P, L, U) := LUDecomposition(A)
```

سيعطي التحليل، ويخزّن مصفوفة التبديل بوصفها قيمة للمصفوفة P. والمصفوفة المثلثية السفلية بوصفها قيمة، والمصفوفة L المثلثية العلوية بوصفها قيمة للمصفوفة U.

EXERCISE SET   مجموعة التمارين 5.6

1. حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ب. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ب. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3. لديك المصفوفات الآتية. أوجد مصفوفة التبديل P بحيث تكون PA قابلة لتحليل إلى حاصل الضرب LU، حيث L مثلثية سفلية عناصر قطرها كلها الباب 1، وU مثلثية علوية:

أ. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ب. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ج. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

د. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. لديك المصفوفات الآتية. أوجد مصفوفة التبديل P بحيث تكون PA قابلة لتحليل إلى حاصل الضرب LU. حيث L مثلثية سفلية عناصر قطرها كلها الباب 1، وU مثلثية علوية:

أ. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

ب. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ج. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

د. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

5. حلِّل المصفوفات الآتية إلى التحليل LU باستخدام خوارزمية التحليل LU حيث $l_{ii} = 1$ لكل i مما يلي:

أ. $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ب. $$\begin{bmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ -2.132 & 4.906 & -7.013 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 \end{bmatrix}$$

ج. $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

د. $$\begin{bmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & -5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & -4.1561 \end{bmatrix}$$

6. حلِّل المصفوفات الآتية إلى التحليل LU باستخدام خوارزمية التحليل LU حيث $l_{ii} = 1$ لـ i جميعها:

أ. $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ب. $$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

ج. $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

د. $\begin{bmatrix} 2.121 & -3.460 & 0 & 5.217 \\ 0 & 5.193 & -2.197 & 4.206 \\ 5.132 & 1.414 & 3.141 & 0 \\ -3.111 & -1.732 & 2.718 & 5.212 \end{bmatrix}$

7. عدّل خوارزمية التحليل LU لكي تكون قابلة للاستخدام بوصفها حلًّا لنظام خطي. ثم حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} 1.012x_1 - 2.132x_2 + 3.104x_3 &= 1.984 \\ -2.132x_1 + 4.906x_2 - 7.013x_3 &= -5.049 \\ 3.104x_1 - 7.013x_2 + 0.014x_3 &= -3.895 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ x_1 + 1.5x_2 \qquad\quad &= 4.5 \\ -3x_2 + 0.5x_3 \quad &= -6.6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 2.1756x_1 + 4.0231x_2 - 2.1732x_3 + 5.1967x_4 &= 17.102 \\ -4.0231x_1 + 6.0000x_2 + 1.1973x_4 &= -6.1593 \\ -1.0000x_1 - 5.2107x_2 + 1.1111x_3 &= 3.0004 \\ 6.0235x_1 + 7.0000x_2 - 4.1561x_4 &= 0.0000 \end{aligned}$$

8. عدّل خوارزمية التحليل LU لكي تكون قابلة للاستخدام بوصفها حلًّا لنظام خطي، ثم حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= 1 \\ \tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{3}{8}x_3 &= 2 \\ \tfrac{2}{5}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{5}{8}x_3 &= -3 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 \quad &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 6 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 2.121x_1 - 3.460x_2 + 5.217x_4 &= 1.909 \\ 5.193x_2 - 2.197x_3 + 4.206x_4 &= 0 \\ 5.132x_1 + 1.414x_2 + 3.141x_3 &= -2.101 \\ -3.111x_1 - 1.732x_2 + 2.718x_3 + 5.212x_4 &= 6.824 \end{aligned}$$

9. أوجد التحليل بالصيغة $A = P^t LU$ للمصفوفات الآتية:

أ. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ب. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

د. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

10. افترض أن $A = P^t LU$ حيث P مصفوفة تبديل. L مصفوفة مثلثية سفلية حيث كل عنصر على القطر هو 1. وU مصفوفة مثلثية علوية.

أ. احسب عدد العمليات اللازمة لحساب $P^t LU$ لمصفوفة معطاة.

ب. برهن أنه إذا احتوت P مبادلات صفية عددها k فإن

$$\det P = \det P^t = (-1)^k$$

ج. استخدم $\det A = \det P^t \det L \det U = (-1)^k \cdot 1 \cdot \det U$ لإيجاد عدد العمليات لتحديد det A بالتحليل.

د. احسب det A. وأوجد عدد العمليات عندما

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

11. أ. برهن أن خوارزمية التحليل LU تتطلب

عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$.

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

ب. برهن أن حل $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$، حيث L مصفوفة مثلثية سفلية في العناصر $l_{ii} = 1$ لكل i يتطلب :

عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

ج. برهن أن حلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ عن طريق تحليل A إلى $A = LU$ أولاً، وأن حلّ $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ و $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ يتطلب عدد العمليات نفسه التي تتطلبه خوارزمية الحذف لجاوس (1.6).

د. أوجد عدد العمليات اللازمة لحل m من الأنظمة الخطية على الصيغة $A\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)}$ لكل $k = 1,\dots,m$ عن طريق تحليل A أولاً، ثم استخدام الطريقة في الفقرة (جـ) m من المرات.

6.6 أنماط خاصة من المصفوفات Special Types of Matrices

سنحوّل الآن اهتمامنا إلى فئتين من المصفوفات، ويمكن أن نطبق عليهما طريقة الحذف لجاوس تطبيقًا فعالًا دون مبادلات صفية.

الفئة الأولى توصف من خلال التعريف الآتي:

تعريف 18.6

في كل صف من صفوف المصفوفة ذات القطر السائد بالكامل يكون مقدار كل عنصر في القطر الرئيس أكبر من مجموع مقادير عناصر ذلك الصف مقدار العنصر هو القيمة المطلقة لذلك العنصر

تُسمى المصفوفة A ذات $n \times n$ مصفوفة ذات قطر سائد بالكامل (Strictly diagonally dominant) إذا كان

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

لكل $i = 1, 2, \dots, n$. ■

مثال 1

لديك المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة غير المتماثلة A هي ذات قطر سائد بالكامل؛ لأن $|7| > |2| + |0|$ و $|5| > |3| + |-1|$ و $|-6| > |0| + |5|$

أما المصفوفة المتماثلة B فهي ليست ذات قطر سائد بالكامل؛ لأنه في الصف الأول على سبيل المثال $|6| < |4| + |-3| = 7$.

ومما يثير الدهشة أن A^t ليست ذات قطر سائد بالكامل؛ لأن الصف الأوسط للمصفوفة A^t هو $[2\ 5\ 5]$، وكذلك فإن B^t التي تساوي B بدهيًا ليست ذات قطر سائد بالكامل أيضًا. ■

اســتخدمت المبرهنة الآتيــة في الفصل 4.3 لضمان وجود حلول وحيــدة للأنظمة الخطية المطلوبة لتحديد استكمالات الشريحة المكعبة.

مبرهنة 19.6 كل مصفوفة ذات قطر ســائد بالكامل غير منفردة. ويمكن بالإضافة إلى ذلك تنفيذ طريقة الحذف لجاوس على أي نظام خطي على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ للحصول على حله الوحيد دون مبادلات صفية أو عمودية. كما ستكون حسابات نمو أخطاء تقريب مستقرة. ■

البرهان نستخدم البرهان بالتناقض لنثبت أن A غير منفردة. افترض أن النظام الخطي الموصوف بالصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. وافترض أن حلًا غير صفري $\mathbf{x} = (x_i)$ لهذا النظام موجود.

افترض k مؤشرًا له

$$0 < |x_k| = \max_{1 \le j \le n} |x_j|$$

بما أن $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

يكون لدينا عندما $i = k$

$$a_{kk} x_k = -\sum_{\substack{j=1,\\ j \ne k}}^{n} a_{kj} x_j$$

إن هذا يتضمن

$$|a_{kk}||x_k| \le \sum_{\substack{j=1\\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}||x_j| \quad \text{او} \quad |a_{kk}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \le \sum_{\substack{j=1\\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}|$$

إن هــذه المتراجحة تناقض خاصية أن A ذات قطر ســائد بالكامــل، ومن ثم فإن الحل الوحيد للنظــام $A\mathbf{x} = 0$ هو $\mathbf{x} = 0$، وهذه الحالة مكافئــة لخاصية A غير المنفردة وفق المبرهنة (16.6) لبرهنــة أن طريقــة الحــذف لجاوس يمكــن تطبيقها دون مبادلــة صفية. ســنثبت أن كلًا من المصفوفــات $A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots, A^{(n)}$ التي تولّدت بطريقة الحــذف لجاوس (كما وصفت في الفصل 5.6) هي ذات قطر سائد بالكامل.

بمــا أن A ذات قطــر ســائد بالكامــل. فــإن $a_{11} \ne 0$ و $A^{(2)}$ يمكــن تركيبهــا. وهكذا لكل $i = 2, 3, \ldots, n$ يكون

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad \text{لكل} \quad 2 \le j \le n$$

بما أن $a_{i1}^{(2)} = 0$، فإن

$$\sum_{\substack{j=2\\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}^{(2)}| = \sum_{\substack{j=2\\ j \ne i}}^{n} \left| a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right| \le \sum_{\substack{j=2\\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}^{(1)}| + \sum_{\substack{j=2\\ j \ne i}}^{n} \left| \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right|$$

$$< |a_{ii}^{(1)}| - |a_{i1}^{(1)}| + \frac{|a_{i1}^{(1)}|}{|a_{11}^{(1)}|} \sum_{\substack{j=2\\ j \ne i}}^{n} |a_{1j}^{(1)}| < |a_{ii}^{(1)}| - |a_{i1}^{(1)}| + \frac{|a_{i1}^{(1)}|}{|a_{11}^{(1)}|} \left(|a_{11}^{(1)}| - |a_{1i}^{(1)}| \right)$$

$$= |a_{ii}^{(1)}| - \frac{|a_{i1}^{(1)}||a_{1i}^{(1)}|}{|a_{11}^{(1)}|} \le \left| a_{ii}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)} a_{1i}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right| = |a_{ii}^{(2)}|$$

إن هذا يثبت خاصية القطر السائد بالكامل في الصفوف n ، $2,\ldots$، ولما كان الصف الأول للمصفوفة $A^{(2)}$ هو نفسه للمصفوفة A. فهذا يعني أن $A^{(2)}$ ذات قطر سائد بالكامل.

يستمر تنفيذ هذه العملية بالاستقراء حتى الحصول على المصفوفة المثلثية العلوية ذات القطر السائد بالكامل $A^{(n)}$. ■ ■ ■

ويتضمن هذا أن عناصر القطر جميعها غير صفرية، ومن ثم يمكن تنفيذ عملية الحذف لجاوس دون مبادلات صفية.

إن إثبات استقرار هذه العملية يمكن الرجوع إليه في [We].

الفئة الثانية من المصفوفات الخاصة هي موجبة التحديد.

تعريف 6 20 يقال للمصفوفة A إنها موجبة التحديد (Positive definite) إذا كانت متماثلة، وكان $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ لكل متجه $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. ■

يشير التعبير موجب التحديد الى حقيقة أن العدد $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ يجب أن يكون موجبا لكل $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

لا يرى كل المؤلفين ضرورة التماثل لمصفوفة موجبة التحديد. وعلى سبيل المثال فإن Golub و Van Loan [GV]، اللذين يعدان مرجعين رئيسين لطرائق المصفوفات ضرورة $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ لكل $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ وتسمى المصفوفات من نوع موجبة التحديد موجبة التحديد المتماثلة في [GV]. خذ هذا التوضيح في الحسبان إذا كنت تستخدم مواد من مصادر أخرى.

ولكي نكون دقيقين، فإن تعريف (6.20) يجب أن يحدد بأن المصفوفة 1×1 قد تولَّدت بالعملية $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ التي لها قيمة موجبة لعنصرها الوحيد، لأن العملية تنفَّذ بشكل الآتي:

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j\right]$$

مثال 2 تكون المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

موجبة التحديد عند افتراضنا أن $\mathbf{x}$ عبارة عن أي متجه عمودي بالبعد الثالث. لذلك

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^t A\mathbf{x} &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2\end{aligned}$$

و

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0,$$

إلا إذا كان $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. ■

ويجب أن يكون واضحًا من مثال 2 أن استخدام تعريف لتقرير ما إذا كانت المصفوفة موجبة التحديد Positive definite قد يؤدي إلى صعوبات. ولحسن الحظ، توجد معايير أسهل ستناقش في الباب 9، لتحديد أفراد هذه الفئة المهمة.

تبين النتيجة الآتية بعض الشروط التي يمكن استخدامها لاستبعاد بعض المصفوفات.

مبرهنة 21.6 إذا كانت A مصفوفة $n \times n$ موجبة التحديد:

أ. يوجد معكوس للمصفوفة A.

ب. إن العناصر $a_{ii} > 0$ لكل n ,... ,$i = 1, 2$.

ج. $\max_{1 \le k, j \le n} |a_{kj}| \le \max_{1 \le i \le n} |a_{ii}|$

د. $(a_{ij})^2 < a_{ii}a_{jj}$ لكل $i \neq j$. ■

البرهان أ. إذا كان $\mathbf{x}$ يحقق $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ فإن $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = 0$. ولما كانت A موجبة التحديد فإن $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ لها الحل الصفري فقط. ومن ثم A غير منفردة (لها معكوس).

ب. لأي i، ضع $\mathbf{x} = (x_j)$ وعرّفها كما يلي:

$x_i = 1$ و $x_j = 0$ إذا كان $j \neq i$.

بما أن $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ فإن

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = a_{ii}$$

ج. لكل $k \neq j$ عرّف $\mathbf{x} = (x_i)$ كما يلي:

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } i \neq k \text{ و } i \neq j \\ 1, & \text{إذا كان } i = j \\ -1, & \text{إذا كان } i = k \end{cases}$$

بما أن $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$، فإن

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = a_{jj} + a_{kk} - a_{jk} - a_{kj}$$

ولكن $A^t = A$ لذا فإن $a_{jk} = a_{kj}$

و

$$2a_{kj} < a_{jj} + a_{kk}. \qquad (10.6)$$

والآن عرّف $\mathbf{z} = (z_i)$ كما يلي:

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } i \neq k \text{ و } i \neq j \\ 1, & \text{إذا كان } i = k \text{ أو } i = j \end{cases}$$

عندئذ $\mathbf{z}^t A\mathbf{z} > 0$ لذلك

$$-2a_{kj} < a_{kk} + a_{jj} \tag{11.6}$$

إن المعادلتين (10.6) و (11.6) تتضمنان لكل $k \neq j$.

$$|a_{kj}| < \frac{a_{kk} + a_{jj}}{2} \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_{ii}| \quad \text{لذلك} \quad \max_{1\leq k,j\leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_{ii}|$$

د. لكل $j \neq i$. عرّف $\mathbf{x} = (x_k)$ كما يلي:

$$x_k = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } k \neq j \text{ و } k \neq i \\ \alpha, & \text{إذا كان } k = i \\ 1, & \text{إذا كان } k = j \end{cases}$$

حيث تمثل α عددا حقيقيًا مهما اتفق.

بما أن $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. فإن

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = a_{ii}\alpha^2 + 2a_{ij}\alpha + a_{jj}$$

وبالنظـر إلى $P(\alpha) = a_{ii}\alpha^2 + 2a_{ij}\alpha + a_{jj}$ بافتراض كثيرة حدود تربيعية في α ذي الجذور غير الحقيقية. فإن المميزة لـ $P(\alpha)$ يجب أن تكون سالبة.

وهكذا فإن $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$ و $4a_{ij}^2 - 4a_{ii}a_{jj} < 0$ ■ ■ ■

ومع أن المبرهنة (21.6) تعطي بعض الشروط المهمة التي يجب أن تتحقق في صفوفات الموجبة التحديد. إلا أنها لا تضمن للمصفوفة التي تحقق هذه الشروط أن تكون موجبة التحديد.

إن المفهوم الآتي سيستخدم استخدام الشرط الضروري والكافي:

تعريف 22.6 تعرّف المصفوفة الجزئية المتقدمة الرئيسة A (leading principal submatrix) على أنها مصفوفة من النوع

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

لعدد ما $1 \leq k \leq n$. ■

إن برهان النتيجة الآتية موجود في [stew 2,p.250].

تمهيدية 23.6 تكون المصفوفة المتماثلة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا كانت مصفوفاتها جميعها جزئية متقدمة رئيسة ذات محددات موجبة. ■

مثال 3 استخدمنا في مثال (2) تعريف لبرهنة أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

موجبة التحديد.

ولكي نؤكد هذا باستخدام المبرهنة 23.6، انظر أن

$$\det A_1 = \det[2] = 2 > 0$$

$$\det A_2 = \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

و

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 2\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - (-1)\det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2(4-1) + (-2+0) = 4 > 0$$ ■

إن أمر مابل Maple في مكتبة الجبر الخطي

>IsDefinite(A, query = 'positive_definite')

يعطي "صحيحة" true إذا كانت المصفوفة A المدخلات الحقيقية جميعها موجبة التحديد، فيما عدا ذلك يعطي "خطأ" false بوصفها إشارة للتحديد الموجب.

وبالتلاؤم مع تعريفنا فإن التماثل مطلوب للحصول على نتيجة صحيحة true.

تعطي النتيجة الآتية تعميمًا للفقرة (أ) للمبرهنة (21.6)، وتوازي النتائج الخاصة بالقطر السائد المعطاة في المبرهنة (14.6)، ولن نعطي برهانًا لهذه المبرهنة، لأنها تتطلب تقديم مصطلحات ونتائج غير ضرورية لأي غرض آخر.

إن تطوير هذه المبرهنة وبرهانها موجودان في [We,p.120ff].

مبرهنة 24.6 المصفوفة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا أمكن إجراء عملية الحذف لجاوس دون مبادلات صفية على النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ حيث التمحور موجب. ■

وفي هذه الحالة، وبالإضافة إلى ذلك فإن الحسابات الخاصة بأخطاء تقريب مستقرة.

وإن بعض الحقائق الممتعة التي لا يكشف عنها برهان المبرهنة (24.6) تُعرض في النتائج الآتية:

تمهيدية 25.6 المصفوفة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا أمكن تحليل A على الصيغة LDL^t، حيث L مصفوفة مثلثية سفلية بعناصر القطر كلها 1، و D مصفوفة قطرية بعناصر القطر الموجبة. ■

تمهيدية 26.6 تكون المصفوفة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا أمكن تحليلها على الصيغة LL^t، حيث L مثلثية سفلية بعناصر القطر كلها غير الصفرية. ■

إن المصفوفة L في النتيجة (26.6) ليست هي نفسها في النتيجة (25.6). وهناك علاقة بينهما تعرض في التمرين (32). إن الخوارزمية (5.6) مبنية على خوارزمية التحليل LU (4.6)، وتنتج التحليل LDL^t الموصوف في النتيجة (25.6).

ALGORITHM
الخوارزمية 5.6

التحليل LDL^t Factorization LDL^t

لتحليل المصفوفة $n \times n$ موجبة التحديد A بالصيغة LDL^t، حيث L مصفوفة مثلثية سفلية بعناصر القطر كلها 1، و D مصفوفة قطرية بعناصر القطر كلها الموجبة:
المدخلات: البعد n، العناصر المدخلة a_{ij} . لكل $1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A.
المخرجات: العناصر الدخلة l_{ij}، لكل $1 \le j < i$ و $1 \le i \le n$ للمصفوفة L و d_i لكل $1 \le i \le n$ للمصفوفة L، و d_i لكل $1 \le i \le n$ للمصفوفة D.

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1, \ldots, n$، نفّذ الخطوات 2-4.
2	لكل $j = 1, \ldots, i-1$ ضع $v_j = l_{ij} d_j$.
3	ضع $d_i = a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} v_j$.
4	لكل $j = i+1, \ldots, n$ ضع $l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} v_k)/d_i$
5	المخرجات (l_{ij} لكل $i = 1, \ldots, n$ و $j = 1, \ldots, i-1$) المخرجات (d_i لكل $i = 1, \ldots, n$) توقف.

للنتيجة 25.6 نتيجة مقابلة عندما تكون A متماثلة، ولكنها ليست بالضرورة موجبة التحديد. إن هذه النتيجة واسعة التطبيق؛ لأن المصفوفات المتماثلة شائعة، ويمكن تعرفها بسهولة.

تمهيدية 27.6

لتكن A مصفوفة متماثلة $n \times n$ يمكن أن نطبق عليها عملية الحذف لجاوس دون مبادلات صفية، ويمكن تحليل A إلى LDL^t، حيث L مثلثية سفلية كل عناصر قطرها 1، و D لمصفوفة القطرية عناصر قطرها $a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(n)}$.

يمكن تعديل الخوارزمية (5.6) لتحليل المصفوفات في النتيجة (27.6). وإنها تتطلب بكل سهولة فحصًا إضافيًّا لضمان أن العناصر القطرية غير صفرية. إن خوارزمية تشولسكي (6.6) تنتج التحليل LL^t الموصوف في النتيجة (26.6).

آندريه – لويس تشولسكي كان قائدًا عسكريًا فرنسيًا، وكان مسؤولًا عن المساحة. وفي عام 1900 Andre - Louis Cho-] lesky(1875 - 1918)] -طوّر طريقة التحليل لحساب حلول مسائل التربيعات الصغرى.

ALGORITHM
الخوارزمية 6.6

تشولسكي Cholesky

لتحليل المصفوفة موجبة التحديد A من نوع $n \times n$ لـ LL^t حيث L مثلثية سفلية:
المدخلات: البعد n. العناصر المدخلة a_{ij} لكل $1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A.
المخرجات: العناصر المدخلة l_{ij}، لكل $1 \le j \le i$ و $1 \le i \le n$ للمصفوفة L (مدخلات $U = L^t$ هي $u_{ij} = l_{ji}$ لكل $i \le j \le n$ و $1 \le i \le n$).

الخطوة	المضمون
1	ضع $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$.
2	لكل $j = 2, \ldots, n$ ضع $l_{j1} = a_{j1}/l_{11}$.
3	لكل $i = 2, \ldots, n-1$ نفّذ الخطوتين 5 و 4.
4	ضع $l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{1/2}$

5	لكل $j = i+1, \ldots, n$ ضع $l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}\right) / l_{ii}$
6	ضع $l_{nn} = \left(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2\right)^{1/2}$
7	المخرجات (l_{ij} لكل $i = 1, \ldots, n$ و $j = 1, \ldots, i$) توقف.

■

إن تحليل تشولسكي للمصفوفة A يحسب من مكتبة الجبر الخطي باستخدام عبارة Maple

```
>L:=LUDecomposition(A, method='Cholesky')
```

ويعطي المصفوفة المثلثية السفلية L بوصفها مخرجًا.

مثال 4 المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}$$

موجبة التحديد. إن التحليل LDL^t للمصفوفة A المعطى في الخوارزمية (5.6) هو

$$A = LDL^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وخوارزمية تشولسكي (6.6) تعطي التحليل

$$A = LL^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

إن التحليل LDL^t الموصوف في الخوارزمية (5.6) يتطلب عمليات ضرب/قسمة عددها $n^3/6 + n^2 - 7n/6$ وعمليات جمع/طرح عددها $n^3/6 - n/6$.

ويتطلب تحليل تشولسكي LL^t للمصفوفة موجبة التحديد عمليات ضرب/قسمة عددها $n^3/6 + n^2/2 - 2n/3$، وعمليات جمع/ طرح عددها $n^3/6 - n/6$.

لكن المزية الحسابية لتحليل تشولسكي مضللة، لأنها تتطلب إجراء n من الجذور التربيعية. لكن عدد العمليات اللازمة لحساب n، من الجذور التربيعية هو عامل خطي في n وسيتناقض بشدة مع زيادة n.

توفر الخوارزمية (5.6) طريقة مستقرة لتحليل المصفوفة موجبة التحديد بالصيغة $A = LDL^t$، ولكن يجب تعديلها لحل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

ولعمل ذلك، نحذف عبارة توقف STOP من الخطوة 5 في الخوارزمية. ونضيف الخطوات الآتية لحلّ النظام المثلثي السفلي $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

6	ضع $y_1 = b_1$.
7	لكل $i = 2, \ldots, n$ ضع $y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$

بعد ذلك يمكن حل النظام الخطي $D\mathbf{z} = \mathbf{y}$.

8	لكل $i = 1, \ldots, n$ ضع $z_i = y_i / d_i$.

أخيرًا يُحلُّ النظام المثلثي العلوي $L^t\mathbf{x} = \mathbf{z}$ بالخطوات:

9	ضع $x_n = z_n$.
10	لكل $i = n-1, \ldots, 1$ ضع $x_i = z_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j$.
11	المخرجات (x_i لكل $i = 1, \ldots, n$). توقف.

يظهر جدول (3.6) العمليات الإضافية اللازمة لحل النظام الخطي.

جدول 3.6

الخطوة	الضرب/القسمة	الجمع/الطرح
6	0	0
7	$n(n-1)/2$	$n(n-1)/2$
8	n	0
9	0	0
10	$n(n-1)/2$	$n(n-1)/2$
المجموع	n^2	$n^2 - n$

إذا فضِّل تحليل تشولسكي المعطى في الخوارزمية 6.6 فإن الخطوات الإضافية المطلوبة لحل النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ هي كما يلي: أولًا: احذف عبارة توقف STOP من الخطوة 7 ثم أضف:

8	ضع $y_1 = b_1 / l_{11}$.
9	لكل $i = 2, \ldots, n$ ضع $y_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j\right) / l_{ii}$.
10	ضع $x_n = y_n / l_{nn}$.
11	لكل $i = n-1, \ldots, 1$ ضع $x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j\right) / l_{ii}$.
12	المخرجات (x_i لكل $i = 1, \ldots, n$). توقف.

تحتاج الخطوات 8-12 إلى عمليات ضرب/ قسمة عددها $n^2 + n$ وعمليات جمع/ طرح عددها $n^2 - n$.

إن فئة المصفوفات التي افتُرضت تسمى مصفوفات طوقية (band matrices) في معظم التطبيقات وهي أيضًا مصفوفات قطرية حتمًا أو موجبة التحديد.

تسمى المصفوفة $n \times n$ مصفوفة طوقية إذا وجد عددان صحيحان q و p، حيث $1 < p, q < n$ في الخاصية $a_{ij} = 0$ عندما $p \leq j - i$ أو $q \leq i - j$.

تعريف 28.6

تسمى المصفوفة $n \times n$ مصفوفة طوقية إذا وجد عددان صحيحان q و p، حيث $1 < p, q < n$ في الخاصية $a_{ij} = 0$ عندما $p \leq j - i$ أو $q \leq i - j$. إن طول طوق المصفوفة (bandwidth) الطوقية هو $w = p + q - 1$. ■

يأتي اسم مصفوفة طوقية من حقيقة أن عناصر غير الصفرية جميعها تقع في طوق يتمركز حول القطر الرئيس

إن العدد p يصف عدد الأقطار أعلى القطر الرئيس ومتضمناً إياه، بحيث تقع العناصر غير الصفرية عليها. والعدد q يصف عدد الأقطار تحت القطر الرئيس ومتضمنا إياه، بحيث تقع العناصر غير الصفرية عليها. فعلى سبيل المثال المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة طوقية فيها $p = q = 2$ وطول الطوق $3 = 1 - 2 + 2$.

إن تعريف المصفوفة الطوقية تجبر تلك المصفوفات على تركيز عناصرها غير الصفرية جميعها حول القطر. وهناك حالتان خاصتان من المصفوفات الطوقية المتكررة. وهما اللتان يكون فيهما $p = q = 2$ و $p = q = 4$.

إن المصفوفات التي فيها طول الطوق 3 والتي تحدث عندما $p = q = 2$ تُسمى ثلاثية الأقطار (tridiagonal)؛ لأنها تكون على الصيغة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ستُعالَج المصفوفات الثلاثية الأقطار في الباب 11، بربطها بدراسة التقريب الخطي المنقطع لمسائل القيم الحدودية. ستستخدم حالة $p = q = 4$ لحل مسائل القيم الحدودية عندما تتخذ الدالة التقريبية صيغ الشريحة التكعيبية.

من الممكن تبسيط خوارزميات التحليل على نحو كبير في حالة المصفوفات الطوقية؛ لأن عدداً كبيراً من الأصفار يظهر في هذه المصفوفات في صيغها المنتظمة. وعليك أن تناظر الصيغة التي تتخذها عملية كراوت Crout أو دوليتل Doolittle في هذه الحالة.

ولشرح هذه الحالة، افترض أن المصفوفة الثلاثية القطر A قابلة للتحليل إلى المصفوفات المثلثية U و L، وبما أن A فيها $(3n - 2)$ من المدخلات غير الصفرية فقط. فإن هناك $(3n - 2)$ فقط من الحالات اللازم تطبيقها لتحديد مدخلات U و L، على شرط الحصول على المدخلات الصفرية في A. افترض إمكانية الحصول على المصفوفات بالصيغة:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix}$$

يوجد $(2n - 1)$ من المدخلات غير المحددة في L و $(n - 1)$ من المدخلات غير المحددة في U التي مجموعها عدد الحالات $(3n - 2)$.

فنحصل على المدخلات الصفرية في A تلقائياً.

إن عملية الضرب المتضمنة في $A = LU$ تعطينا بالإضافة إلى المدخلات الصفرية المـدخلات الآتية :

$$a_{11} = l_{11}$$

$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1} \quad i = 2, 3, \ldots, n \text{ لكل} \tag{12.6}$$

$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii} \quad i = 2, 3, \ldots, n \text{ لكل} \tag{13.6}$$

و

$$a_{i,i+1} = l_{ii}u_{i,i+1} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ لكل} \tag{14.6}$$

ويمكـن إيجاد حـل لهذا النظام باسـتخدام المعادلة (12.6) أولاً للحصـول على الحدود غير الصفريـة جميعها خارج القطر في L، ثم باسـتخدام المعادلتـين (13.6) و (14.6) للحصول على المدخلات المتبقية في L و U على نحو متبادل.

ويمكن تخزين هذه المدخلات في مدخلات A المقابلة.

إن الخوارزميـة (7.6) تحـل نظـام المعـادلات $n \times n$ ذي مصفوفة معاملات ثلاثيـة. إن هذه الخوارزمية تتطلب $(5n - 4)$ فقط من عمليات الضرب/ القسمة و $(3n - 3)$ من عمليات الجمع/ الطرح، ومن ثم فإن لها مزية حسـابية في الطرائق الأخرى التي لا تسـتخدم الخاصية المثلثية للمصفوفة.

طريقة كراوت لتحليل الأنظمة الخطية ثلاثية الأقطار

Crout Factorization for Tridiagonal Linear Systems

ALGORITHM

الخوارزمية 7.6

لحلّ النظام الخطي $n \times n$

$$\begin{array}{llll}
E_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & & = a_{1,n+1} \\
E_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & & = a_{2,n+1} \\
\vdots & \quad\vdots & & \vdots \\
E_{n-1}: & & a_{n-1,n-2}x_{n-2} + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = a_{n-1,n+1} \\
E_n & & a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n & = a_{n,n+1}
\end{array}$$

ومن المفترض أن له حلًّا وحيداً.

المدخلات: البعد n، مدخلات A

المخرجات: الحل $x_1, \ldots, x_n$.

(الخطوات 1-3 وحل $Lz = b$.)

الخطوة	المضمون
1	ضع $l_{11} = a_{11}$ $u_{12} = a_{12}/l_{11}$ $z_1 = a_{1,n+1}/l_{11}$
2	لكل $i = 2, \ldots, n-1$ ضع $l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$ (الصف i في L) $l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}$ $u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii}$ (العمود $(i+1)$ في U) $z_i = (a_{i,n+1} - l_{i,i-1}z_{i-1})/l_{ii}$
3	ضع $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$ (الصف n في L) $l_{nn} = a_{nn} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}$ $z_n = (a_{n,n+1} - l_{n,n-1}z_{n-1})/l_{nn}$ (تنفذ الخطوتان 4 و 5 $Ux = z$.)

4	ضع $x_n = z_n$.
5	لكل $i = n - 1, \ldots, 1$ ضع $x_i = z_i - u_{i,i+1} x_{i+1}$
6	المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$ توقف.

■

مثال 5 لتوضيح عملية المصفوفات الثلاثية الأقطار، لديك نظام ثلاثي الأقطار ذو المعادلات

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 1\\
-x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 0\\
- x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0\\
- x_3 + 2x_4 &= 1
\end{aligned}$$

الذي له المصفوفة الممتدة (الموسعة)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

إن خوارزمية كراوت للتحليل تعطي التحليل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & 0\\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & 0\\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

إن حلّ النظام $L\mathbf{z} = \mathbf{b}$ يعطي $\mathbf{z} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1\right)^t$، وحلّ النظام $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ هو $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)^t$. ■

يمكن تطبيق خوارزمية كراوت للتحليل عندما $l_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

إن أيًّا من الحالتين الآتيتين تضمن صحة هذا، فإما أن تكون مصفوفة المعادلات للنظام موجبة التحديد، وإما أنها ذات قطر سائد حتمًا.

هناك حالة ثالثة تضمن إمكانية تطبيق هذه الخوارزمية وترد في المبرهنة الآتية، ويرد برهانها في التمرين (28).

مبرهنة 6.29 افترض أن $A = [a_{ij}]$ ثلاثية الأقطار وفيها $a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0$ لكل $i = 2, 3, \ldots, n-1$ إذا كان $|a_{11}| > |a_{12}|$، $|a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|$ لكل $i = 2, 3, \ldots, n-1$ و $|a_{nn}| > |a_{n,n-1}|$ فإن A تكون غير منفردة، وقيم l_{ii} المصفوفة في خوارزمية كراوت للتحليل غير صفرية لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 6.6

1. حدّد أيٌّ من المصفوفات الآتية تكون (i) متماثلة، (ii) منفردة، (iii) ذات قطر سائد حتمًا، (iv) موجبة التحديد:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. حدّد أيًّ من المصفوفات الآتية تكون (i) متماثلة، (ii) منفردة، (iii) ذات قطر سائد حتمًا، (iv) موجبة التحديد:

أ. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 1.5 & 1 \\ 6 & -9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

3. استخدم خوارزمية التحليل LDL^t لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LDL^t$ للمصفوفات الآتية:

أ. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4. استخدم خوارزمية التحليل LDL^t لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LDL^t$ للمصفوفات الآتية:

أ. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. استخدم خوارزمية تشولسكي لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LL^t$ للمصفوفات في التمرين (3).

6. استخدم خوارزمية تشولسكي لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LL^t$ للمصفوفات في التمرين (4).

7. طوّر خوارزمية التحليل LDL^t كما اقتُرح في الكتاب، لكي تكون صالحة لاستخدام لحل الأنظمة الخطية. استخدم الخوارزمية المطورة لحلّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0.65 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0.05 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0.5 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 2x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 - x_3 + 3x_4 &= -2 \end{aligned}$$

8. استخدم الخوارزمية المطوّرة في التمرين (7) لحلّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 \phantom{{}+ x_3} &= 4 \\ x_1 \phantom{{}+ 3x_2} + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 4x_1 \phantom{{}+ 3x_2} + 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -2 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 \phantom{{}+ x_3} - x_4 &= 2 \\ x_1 \phantom{{}+ x_2} + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

9. طوّر خوارزمية تشولسكي كما اقتُرح في الكتاب؛ لكي تكون صالحة لحل أنظمة خطية، واستخدم الخوارزمية المطورة لحل الأنظمة الخطية الواردة في التمرين (7).

10. استخدم الخوارزمية المطوّرة الواردة في التمرين (9) لحل الأنظمة الخطية في التمرين (8).

11. استخدم تحليل كراوت للأنظمة الثلاثية الأقطار لحلّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \phantom{{}- 2x_3} &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1.5 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \phantom{{}- x_3} &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 0.5x_1 + 0.25x_2 \phantom{{}+ 0.4x_3} &= 0.35 \\ 0.35x_1 + 0.8x_2 + 0.4x_3 &= 0.77 \\ 0.25x_2 + x_3 + 0.5x_4 &= -0.5 \\ x_3 - 2x_4 &= -2.25 \end{aligned}$$

12. استخدم تحليل كراوت للأنظمة ثلاثية الأقطار لحلّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \phantom{{}+ x_3} &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \phantom{{}- x_3} &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_4 - x_5 &= -2 \\ x_4 + 2x_5 &= -1 \end{aligned}$$

13. لتكن A المصفوفة 10×10 ثلاثية الأقطار، حيث $a_{ii} = 2, a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = -1$ لكل $i = 2, \ldots, 9$ و $a_{11} = a_{10,10} = 2, a_{12} = a_{10,9} = -1$. ليكن $\mathbf{b}$ المتجــه العمودي ذا 10 أبعاد المعطى بالعناصر $b_1 = b_{10} = 1$ ، و $b_i = 0$ لكل $i = 2, 3, \ldots, 9$؛

حُلَّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ باستخدام تحليل كراوت للأنظمة ثلاثية الأقطار.

14. طوّر التحليل LDL^t للتمكن من تحليل المصفوفة المتماثلة A.

[ملحوظــة: ليــس مضمونا أن يكــون التحليل ممكنــا دائمًا]. طبّق الخوارزميــة الجديدة على المصفوفات الآتية:

أ. $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & -7 \\ 6 & -7 & 13 \end{bmatrix}$

ب. $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 14 & -20 \\ 9 & -20 & 29 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

د. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 4 & -4 & 10 & -10 \\ -4 & 5 & -10 & 14 \end{bmatrix}$

15. أي المصفوفات في التمرين (14) موجبة التحديد؟

16. أوجد α بحيث تكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ موجبة التحديد.

17. أوجد α بحيث تكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ موجبة التحديد.

18. أوجد α و $\beta > 0$ لكي تكون

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 1 \\ 2\beta & 5 & 4 \\ \beta & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

ذات قطر سائد حتمًا.

19. أوجد $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ لكي تكون المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \beta \\ \alpha & 5 & \beta \\ 2 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

ذات قطر سائد حتمًا.

20. لتكن كل من A و B مصفوفة $n \times n$ ذات قطر سائد حتمًا.

أ. هل $-A$ ذات قطر سائد حتمًا؟

ب. هل A^t ذات قطر سائد حتمًا؟

ج. هل $A + B$ ذات قطر سائد حتمًا؟

د. هل A^2 ذات قطر سائد حتمًا؟

هـ. هل $A - B$ ذات قطر سائد حتمًا؟

21. لتكن A و B مصفوفتين $n \times n$ موجبتي التحديد:

أ. هل $-A$ موجبة التحديد؟

ب. هل A^t موجبة التحديد؟

ج. هل $A + B$ موجبة التحديد؟

د. هل A^2 موجبة التحديد؟

هـ. هل $A - B$ موجبة التحديد؟

22. لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

أوجد قيم α جميعها التي تجعل A:

أ. منفردة. ب. ذات قطر سائد حتمًا.

ج. متماثلة. د. موجبة التحديد.

23. لتكن

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد قيم α و β جميعها التي تجعل A:

أ. منفردة. ب. ذات قطر سائد حتمًا.

ج. متماثلة. د. موجبة التحديد.

24. افترض أن A و B تحققان خاصية التبديل أي $AB = BA$، فهل تحقق A^t و B^t خاصية التبديل أيضًا؟

25. أنشيء مصفوفة غير متماثلة A بحيث يكون $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ لـ $\mathbf{x} \neq 0$ جميعها.

26. أثبت أن عملية الحذف لجاوس يمكن تطبيقها على أي مصفوفة A دون مبادلات صفية إذا وفقط إذا كانت المصفوفات المصغرة الرئيسة جميعها المتقدمة للمصفوفة A غير منفردة.
[ملحوظة: جزّئت كل مصفوفة في المعادلة $A^{(k)} = M^{(k-1)}M^{(k-2)} \cdots M^{(1)}A$ عموديًا بين العمودين عدد k وعدد $(k+1)$ وأفقيًا بين الصفين عدد k وعدد $(k+1)$. (انظر التمرين 10 الفصل 3.6) برهن أن المصفوفة المصغرة الرئيسة المتقدمة للمصفوفة A تكافئ $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$

27. عادة ما يعبر عن المصفوفات الثلاثية الأقطار بالصيغة:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & b_3 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

وذلك للتأكيد على عدم الحاجة إلى التعبير عن مدخلات المصفوفة جميعها. اكتب مرة أخرى خوارزمية كراوت للتحليل باستخدام هذا التعبير. وغيّر التعبير l_{ii} و u_{ij} بطريقة مماثلة].

28. برهن المبرهنة (29.6).
[ملحوظة: برهن أن $|u_{i,i+1}| < 1$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$، وأن $|l_{ii}| > 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. واستنتج أن $\det A = \det L \cdot \det U \neq 0$].

29. افترض أن $V = 5.5$ فولت في مثال في مقدمة هذا الفصل. وبإعادة ترتيب المعادلات يمكنك تكوين نظام خطي ثلاثي الأقطار. استخدم خوارزمية كراوت للتحليل لإيجاد حلّ النظام المعدّل.

30. أنشئ طريقة لعد العمليات لحلّ نظام خطي $n \times n$ باستخدام خوارزمية كراوت للتحليل.

31. في بحث قام به دورن وبردك Dorn and Burdick [DoB] استنتجا منه أنه يمكن التعبير عن معدل طول جناح ذبابة الفاكهة (Drosophila melanogaster) المهجنة من تزاوج ثلاثة أنواع من ذباب الفاكهة، بصيغة المصفوفة المتماثلة

$$A = \begin{bmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{bmatrix}$$

حيث تمثّل a_{ij} معدل طول جناح الجيل الناتج من تزاوج الذكور من نوع i مع الأنثى من نوع j.
أ. ما الأهمية في الطبيعة التي يمكن ربطها بتماثل هذه المصفوفة؟
ب. هل هذه المصفوفة موجبة التحديد؟
إذا كان الأمر كذلك فبرهنه. وإذا كان غير ذلك. فأوجد متجهًا $\mathbf{x}$ بحيث $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \leq 0$.

32. افترض أن المصفوفة موجبة التحديد A قابلة لتحليل تشولسكي $A = LL^t$ وكذلك التحليل $A = \hat{L}D\hat{L}^t$. حيث D المصفوفة القطرية بمدخلات قطرية موجبة $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$. لتكن $D^{1/2}$ المصفوفة القطرية بمدخلات قطرية $\sqrt{d_{11}}, \sqrt{d_{22}}, \ldots, \sqrt{d_{nn}}$.
أ. أثبت أن $D = D^{1/2}D^{1/2}$.   ب. أثبت أن $L = \hat{L}D^{1/2}$.

7.6 مسح الطرائق والبرمجيات Survey of Methods and Software

لقد درسنا في هذا الفصل طرائق مباشرة لحل الأنظمة الخطية. ويتألف النظام الخطي من n من المعادلات التي تحتوي على n من المجاهيل. والتي يعبر عنها بالمصفوفات على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. تستخدم هذه الطرائق متتالية منتهية من العمليات الحسابية للتوصل إلى الحل الصحيح للنظام

مـع الخضـوع لخطأ تقريـب فقط. لقد وجدنـا أن النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يمـلك حلًّا وحيدًا إذا وفقـط إذا كانـت A^{-1} موجـودة، أي ما يكافئ $\det A \neq 0$. إن حلَّ هـذا النظام الخطي هو $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. لقـد اسـتُخدمت طرائق التمحـور لتقليل آثار خطأ التقريـب الذي يمكن أن يطغى على الحل باستخدام الطرائق المباشرة. لقد درسنا التمحور الجزئي، والتمحور الجزئي الموزون، والتمحور الكلي. وإننا ننصح باستخدام طرائق التمحور الجزئي أو التمحور الجزئي الموزون، في معظم المسـائل؛ لأن هذه الطرائق حسـابية زائدة. ويجب استخدام التمحور الكلي إذا كان هناك شك في وجود خطأ تدوير كبير.

سنتعرف في الفصل 4.7 بعض الطرائق لتقدير خطأ تقريب هذا. لقد ثبت أن طريقة الحذف لجـاوس بتعديلات بسـيطة تعطي تحليـلاً للمصفوفة A بالصيغة LU، حيث L مثلثية سـفلية بمدخلات 1 على القطر، وU مثلثية علوية. وتسـمى هذه العملية بتحليل دوليتل Doolittle. ولا تخضـع المصفوفات غير المنفردة جميعها للتحليل بهذه الطريقـة، ولكن تبديل الصفوف يعطي دائمًـا تحليلًا على الصيغة $PA = LU$، حيث P مصفوفة التباديل المسـتخدمة لإعادة ترتيب صفـوف A. إن مزية التحليل تتجلى في تقليـل العمل عند حلِّ الأنظمة الخطية $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ذات مصفوفة المعاملات A نفسها ومتجهات مختلفة $\mathbf{b}$.

إن التحليل يأخذ صيغة أسـهل عندما تكون A موجبة التحديد. وعلى سـبيل المثال فإن تحليل تشولسـكي يكون علـى الصيغة $A = LL^t$، حيث L مثلثية سـفلية، وإن المصفوفـة المتماثلة ذات التحليل LU يمكن تحليلها أيضًا على الصيغة $A = LDL^t$، حيث D قطرية، و L مثلثية سـفلية بمدخلات قطرية 1. ومن الممكن تبسـيط العمليات حول A ثلاثية الأقطار. ويأخذ التحليل UL صيغة بسـيطة خاصة، حيث إن مدخلات القطر الرئيـس وباقي المدخلات أصفار ما عدا مدخلات القطر الذي يعلو القطر الأساس مباشرة. وبالإضافة إلى ذلك فإن المدخلات غير الصفرية في L تكون علـى القطر الرئيس والقطر تحته. إن الطرائق المباشـرة هي الطرائق المختارة لمعظم الأنظمة الخطية. وفي حالات المصفوفات الثلاثية الأقطار، الطوقية، وموجبة التحديد، فإنه ينصح باستخدام الطرائق الخاصـة. أمـا في الحالة العامة فـإن طريقة الحذف لجاوس أو طريقـة التحليل على الصيغة LU التي تسمح بالتمحور تكون المفضلة. ويجب في هذه الحالات مناقشة تقدير الأخطاء في الطرائق المباشرة.

إن الأنظمـة الخطيـة الكبيرة التي تكون مدخلاتها الصفرية أساسًـا واقعةً في أنماط منتظمة قابلة للحل على نحو فعّال باستخدام طريقة ارتجاع مثل تلك المعطاة في الباب 7. وإن أنظمة من هذا النوع تظهر طبيعيًا على سـبيل مثال، عند اسـتخدام طرائق الفرق المنتهي لحل مسـائل القيمة الحدودية التـي هي تطبيق مألوف في الحل العـددي للمعادلات التفاضلية الجزئية. ومن الممكن أن تكون هناك صعوبة في حل نظام خطي كبير، بحيث لا تدفع مدخلاته غير الصفرية أساسًا أو مدخلاته الصفرية نمطـا متنبأً به. ويمكن أن نضع المصفوفـة المقابلة للنظام في مخزن ثانوي بصيغة مجزأة وبأجزاء تُقرأ في الذاكرة الرئيسة كلما احتجنا إليها للحساب. إن الطرائق التي تحتاج إلى تخزين ثانوي يمكن أن تكـون متراجعة أو مباشـرة، ولكنها عادة ما تحتاج إلـى طرائق من حقول هيكلية البيانات أو مبرهنة الرسـم. نوجّه عناية القارئ إلى المرجعين [BuR] و [RW] لمناقشـة هذه الطرائق. إن برمجيات عمليات المصفوفات والحل المباشـر للأنظمة الخطية المسـتخدمة في IMSL وNAG مبنية على LAPACK، وهي حقيبـة برمجيـات في الحقـل العام، ويوجد توثيق متميـز متاح معها والكتب التـي كتبت حولها.

سنركز على برمجيات متعددة متاحة في المصادر الثلاثة. يصاحب LAPACK مجموعة من العمليات منخفضة المستوى المسماة (Basic Linear Algebra Subprograms (BLAS يتكون المستوى 1 من BLAS عمومًا من عمليات متجه – متجه مع بيانات الإدخال وعدد العمليات برتبة $O(n)$. يتكون المستوى 2 من عمليات مصفوفة – متجه مع بيانات الإدخال وعدد العمليات برتبة $O(n^2)$. يتكون المستوى 3 من عمليات مصفوفة – مصفوفة مع بيانات الإدخال وعدد العمليات برتبة $O(n^3)$. فعلى سبيل المثال في المستوى 1، تكتب البرمجية SCOPY المتجه $\mathbf{y}$ مع المتجه $\mathbf{x}$. وتحسب SSCAL العدد الثابت a مضروبًا في المتجه $\mathbf{x}$، وتجمع SAXPY العدد الثابت a مضروبًا في المتجه $\mathbf{x}$ مع المتجه $\mathbf{y}$ أي $\mathbf{y}\ (\mathbf{y} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y})$. وأن SDOT تحسب الضرب الداخلي لمتجهين. وكذلك الضرب في ثابت. وتحسب SNRM2 القياس الإقليدي للمتجه بطريقة مماثلة لتلك التي شُرحت في الفصل (1.4). وأن ISAMAX تحسب مؤشر (index) مركبة المتجه التي تعطي أعظم قيمة مطلقة للمركبات جميعها. في المستوى 2 تحسب SGEMV حاصل ضرب مصفوفة في متجه. وفي المستوى 3 تحسب SGEMM حاصل ضرب مصفوفة في مصفوفة. إن البرمجيات في LAPACK لحل الأنظمة الخطية تحلل المصفوفة A إلى العوامل أولا. ويعتمد التحليل على نوع المصفوفة بالطرائق الآتية:

1. المصفوفة العامة $PA = LU$
2. المصفوفة موجبة التحديد $A = LL^t$
3. المصفوفة المتماثلة $A = LDL^t$
4. المصفوفة ثلاثية الأقطار $A = LU$ (بصيغة الطوق)

إن البرمجية STRTRS تحل النظام الخطي المثلثي عندما تكون المصفوفة علوية أو سفلية. والبرمجية SGETRF تحلل PA إلى LU بوصفها عملية مبدئية للبرمجية SGETRS، التي تحسب بعد ذلك حلّ النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. تستخدم البرمجية SGETRI لإيجاد معكوس (النظير الضربي) للمصفوفة A. وتستخدم لحساب محددة A عندما تكون A قد حلّلت عن طريق SGETRF. ويوجد تحليل تشولسكي للمصفوفة موجبة التحديد A عن طريق البرمجية SPOTRF. يمكن بعدئذ حل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ باستخدام البرمجية SPOTRS. ويمكن إيجاد المعكوس والمحدّدة للمصفوفة الموجبة التحديد. إذا ما أُعطي تحليل تشولسكي لها باستخدام SPOTRI. إذا كانت A متماثلة فإنه يمكن إيجاد التحليل LDL^t باستخدام SSYTRF. عندئذ يمكن حل الأنظمة الخطية باستخدام SSYTRS. وإذا ما رغبت في إيجاد المعكوس أو المحددة فاستخدم SSYTRI. إن الكثير من البرمجيات في LINPACK و LAPACK التي تلتها يمكن تنفيذها باستخدام MATLAB. باستخدام الأمر

$$[L, U, P] = lu(A)$$

يمكن تحليل المصفوفة غير المنفردة A إلى الصيغة $PA = LU$. حيث P هي مصفوفة التبديل المعرّفة عن طريق تنفيذ التمحور الجزئي لحل النظام الخطي المنطوي على A.

إذا ما عُرّفت المصفوفة غير المنفردة A والمتجه $\mathbf{b}$ في MATLAB فإن الأمر

$$x = A\backslash b$$

يحلُّ النظام الخطي باستخدام أمر التحليل $PA = LU$ أولًا. وبعدئذ يحلُّ النظام المثلثي السفلي $L\mathbf{z} = \mathbf{b}$ للمتجه $\mathbf{z}$ باستخدام الأمر

$$z = L\backslash b$$

ويتبع هذا حلّ النظام المثلثي العلوي $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ باستخدام الأمر

$$x = U\backslash z$$

وتوجد أوامر أخرى في MATLAB. منها ما يستخدم لحساب المعكوس، المنقول، والمحددة للمصفوفة A عن طريق الأوامر $\mathrm{inv}(A)$، A' و $\det(A)$ على التوالي. تحتوي مكتبة IMSL برمجيات مقابلة لمعظم برمجيات LAPACK، بالإضافة إلى بعض الزيادات.

وتُسمى وفق المهمات التي تؤديها بما يلي:

1. الحروف الثلاثة الأولى للاسم بالإنجليزية:

أ. LSL: تحلُّ النظام الخطي.

ب. LFT: تحلّل مصفوفة معاملات.

ج. LFS: تحلُّ نظامًا خطيًا إذا أعطيت العوامل من LFT.

د. LFD: تحسب محددات العوامل المعطاة.

هـ. LIN: تحسب معكوس العوامل المعطاة.

2. يحدد الحرفان الأخيران نوع المصفوفة المعطاة:

أ. RG: حقيقية عامة

ب. RT: حقيقية مثلثية

ج. DS: حقيقية موجبة التحديد

د. SF: حقيقية متماثلة

هـ. RB: حقيقية طوقية

فعلى سبيل المثال تحلّل البرمجية LFTDS المصفوفة الحقيقية موجبة التحديد إن مكتبة NAG تحوي كثيرًا من البرمجيات الخاصة بالطرائق المباشرة لحل الأنظمة الخطية المماثلة تلك في LA-PACK و IMSL فعلى سبيل المثال يحلُّ البرنامج F04AEF أنظمة خطية باستخدام تحليل كراوت. ويحلُّ البرنامج F04ATF نظامًا خطيًا واحدًا باستخدام تحليل كراوت كما في F04AEF. يحلُّ البرنامج F04EAF نظامًا خطيًا واحدًا، حيث المصفوفة حقيقية والثلاثية الأقطار. ويحلُّ F04ASF النظام الذي مصفوفته حقيقية وموجبة التحديد. ويمكن حساب معكوس المصفوفات بالبرنامج F07AJF بعد استخدام F07ADF لأي مصفوفة حقيقية، وبعد استخدام F01ABF إذا كانت المحددة باستخدام F03AAF. ويمكن إيجاد التحليل باستخدام F07ADF لتحليل LU للمصفوفة الحقيقية، وباستخدام F01LEF لتحليل المصفوفة ثلاثية الأقطار. بعد ذلك يمكن حلُّ الأنظمة الخطية باستخدام F07AEF. ويمكن إيجاد تحليل تشولسكي للمصفوفة موجبة التحديد باستخدام F07FDF، ثم حل النظام الخطي باستخدام F07FEF. إن مكتبة NAG تحوي أيضًا عمليات المصفوفة – المتجه من المستوى الأدنى. للمزيد من المعلومات عن الحلول العددية للأنظمة الخطية والمصفوفات، يمكنك الرجوع إلى Golub و Van Loan [GV]، Forsythe and Moler [FM] و Stewart [Stew1]. ويمكن الرجوع إلى George and Liu [GL] و Pissanetzky [Pi] اللذين بحثا موضوع الطرائق المباشرة لحلّ الأنظمة الكبيرة بالتفصيل. أما Coleman and Van Loan [CV] فقد بحثا استخدام BLAS، LINPACK و MATLAB.