الباب
5

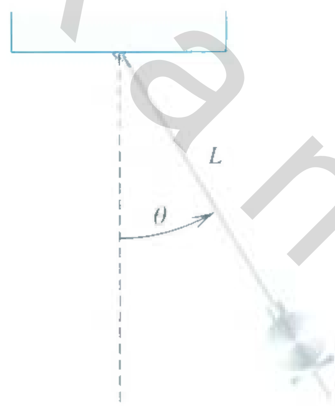
مسائل القيمة الابتدائية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية

Initial-Value Problems For Ordinary Differential Equations

مقدمة

يمكن توضيح فكرة الرقاص المتأرجح وفق شروط تبسيط معينة من خلال المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$



حيث L طول الرقاص، $g \approx 32.17\ \text{ft/s}^2$ ثابت الجاذبية الأرضية، θ هي الزاوية التي يصنعها الرقاص مع الخط العمودي. أيضا إذا حددّنا موقع الرقاص حين بدء الحركة $\theta(t_0) = \theta_0$، وسرعته عند تلك النقطة $\theta'(t_0) = \theta'_0$، يكون لدينا ما نسميه "مسألة القيمة الابتدائية *initial-value problem*".

وعند القيم الصغيرة لـ θ، يمكن استخدام التقريب $\theta \approx \sin\theta$ لتبسيط هذه المسألة وتحويلها إلى مسألة القيمة الابتدائية الخطية

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta'_0$$

هذه المسألة يمكن حلها باستخدام أسلوب المعادلة التفاضلية الاعتيادي. ومع قيم أكبر لـ θ، يجب استخدام طرائق التقريب. قد تناولنا مسألة من هذا النوع في التمرين (8) من الفصل (9.5). إن أي كتاب في المعادلات التفاضلية يعطي تفصيلاً لطرائق خاصة بإيجاد حلول لمسائل القيمة

الابتدائية من الرتبة الأولى. في المجال التطبيقي على أي حال. قليل من المسائل المستمدة من دراسة الظواهر الفيزيائية يمكن حلها بدقة.

ويتناول الجزء الأول من هذا الفصل تقريب الحل $y(t)$ للمسألة ذات الصيغة

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{لكل} \quad a \le t \le b$$

على أن الشرط الابتدائي

$$y(a) = \alpha$$

وسنتعامل فيما بعد ضمن هذه الوحدة مع توسيع هذه الطرائق لتشمل نظامًا للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى على الصورة

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

لـ $a \le t \le b$، على أن الشروط الابتدائية

$$y_1(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = \alpha_2, \quad \ldots, \quad y_n(a) = \alpha_n$$

كذلك نختبر علاقة نظام من هذا النوع مع مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة n وفق الصيغة

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

لـ $a \le t \le b$، على أن الشروط الابتدائية

$$y(a) = \alpha_1, \quad y'(a) = \alpha_2, \quad \ldots, \quad y^{n-1}(a) = \alpha_n$$

1.5 المبرهنة الابتدائية لمسائل القيمة الابتدائية
Elementary Theory of Initial-Value Problem

تُستخدم المعادلات التفاضلية لنمذجة مسائل في العلوم والهندسة تتضمن استبدال متغير ما بالنسبة إلى الآخر. وتتطلب معظم هذه المسائل حلًا لمسألة القيمة الابتدائية، أي حلًا لمعادلة تفاضلية تحقق شرطًا ابتدائيًا محددًا.

في أغلب الأمور الحياتية الحقيقية. يكون من الصعب إيجاد حل دقيق للمعادلة التفاضلية التي تنمذج المسألة. ولهذا نلجأ إلى أحد النهجين لتقريب الحل: النهج الأول هو تبسيط المعادلة التفاضلية لواحدة يمكن حلها بدقة. ومن ثم استخدام حل المعادلة المبسطة لتقريب حل المعادلة الأصلية. أما النهج الآخر الذي سنختبره في هذه الوحدة فيستخدم طرائق لتقريب حل المسألة الأصلية. وهذا النهج هو الذي غالبًا ما يؤخذ؛ لأن طرائق التقريب تعطي نتائج أدق

ومعلومات عن الخطأ أكثر واقعية.

الطرائق التي نتناولها ضمن هذه الوحدة لا تعطي تقريبات مستمرة لحل مسألة القيمة الابتدائية. وبدلاً من ذلك، فإن التقريبات توجد عند نقاط معينة محددة، وغالبًا ما تكون متساوية التباعد. تستخدم بعض طرائق الاستكمال الداخلي كطريقة هرمايت إذا كان هناك حاجة إلى قيم وسطية.

نحتاج إلى بعض التعريفات والنتائج من مبرهنة المعادلات التفاضلية الاعتيادية قبل تناول طرائق لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية. إن مسائل القيمة الابتدائية تظهر من خلال رصد ظاهرة فيزيائية مقاربة لحالة حقيقية عموما. لذلك نحتاج إلى معرفة تغييرات صغيرة في مضمون المسألة، مما يؤثر قليلا في الحل. هذا مهم أيضا بسبب المدخل للخطأ المقرب عندما تُستخدم الطرائق العددية.

تعريف 1.5 يقال للدالة $f(t, y)$ إنها تحقق شرط لبسشتز Lipschitz condition في المتغير y على مجموعة أنها تحقق $D \subset \mathbb{R}^2$ إذا وجد ثابت $L > 0$ يحقق

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

ما دام $(t, y_1), (t, y_2) \in D$. يسمى الثابت L شرط لبسشتز Lipschitz condition للدالة f. ■

مثال 1 إذا كان $D = \{(t, y) \mid 1 \leq t \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$ و $f(t, y) = t|y|$ فإن لكل زوج من النقاط (t, y_1) و (t, y_2) في D

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t|y_1| - t|y_2|| = |t|\,||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2|$$

وبذلك تحقق f شرط لبسشتز على D في المتغير y مع ثابت لبسشتز 2. إن أصغر قيمة محتملة لثابت لبسشتز في هذه المسألة هو $L = 2$، لأنه على سبيل المثال

$$|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2|1 - 0|$$ ■

تعريف 2.5 يقال للمجموعة $D \subset \mathbb{R}^2$ بأنها محدبة convex متى انتمت كل من (t_1, y_1) و (t_2, y_2) إلى D، وأن λ في $[0,1]$ تكون النقطة $((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$ منتمية أيضا إلى D. ■

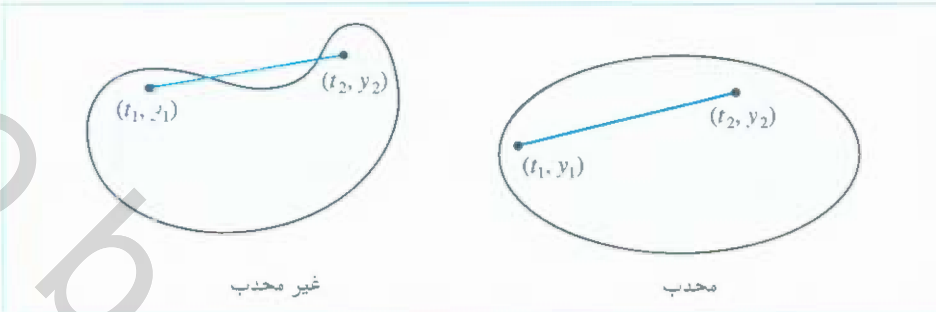
في المصطلحات الهندسية ينص التعريف (2.5) على أن المجموعة محدبة على أنه متى كانت نقطتان تنتميان إلى المجموعة فإن قطعة الخط المستقيم كاملة ما بين النقطتين وتنتمي أيضًا إلى المجموعة. (انظر شكل 1.5) تكون المجموعات التي نتناولها في هذا الفصل عمومًا بالصيغة $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ للثابتين a و b. ومن السهل التحقق (انظر التمرين 7) من أن هذه المجموعات محدبة.

مبرهنة 3.5 افترض أن $f(t, y)$ معرف على مجموعة محدبة $D \subset \mathbb{R}^2$. إذا وجد $L > 0$ يحقق

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \leq L \quad \text{لكل} \quad (t, y) \in D \qquad (1.5)$$

فإن f يحقق شرط لبسشتز على D في المتغير y مع ثابت لبسشتز L. ■

شكل 1.5



عمل رودلف لبشيتز (1832 – 1903) Rudolf Lipschitz في فروع الرياضيات المختلفة، بصفتها مبرهنة الكرّاد، سلسلة فورير، معادلات تفاضلية، الميكانيكا التحليلية، والمبرهنة الكامنة وهو معروف جدًا بتعميمه عمل أوغستن - لويس كوشي (1789 – 1857) Augustin–Louis Cauchy وجوسيب بينو (1858 – 1932) Giuseppe Peano

إن برهان مبرهنة (3.5) يناقش في التمرين (6)، وهو مشابه لبرهان التمهيدية المناظرة لها لدوال متغير واحد نوقشت ضمن التمرين (25) من الفصل (1.1).

وحسبما تبين لنا المبرهنة التالية، فغالبًا ما يتركز الاهتمام على تحديد ما إذا كان الدالة المعنية في مسألة القيمة الابتدائية يحقق شرط لبشتز في متغيره الثاني، ومن ثم فإن الشرط (1.5) عمومًا أكثر سهولة للتطبيق من التعريف. وعلى أي حال علينا ملاحظة أن المبرهنة (3.5) تعطي فقط شروطًا وافية لتحقق شرط لبشتز. الدالة في مثال (1) مثلًا تحقق شرط لبشتز، لكن المشتقة الجزئية بالنسبة إلى y لا وجود لها عندما يكون $y = 0$.

المبرهنة التالية هي صورة جوهرية لحالة وجود وحدانية المبرهنة للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. وعلى الرغم من أن المبرهنة يمكن برهنتها مع بعض التقليص للفرضية، إلا أن صيغة المبرهنة هذه تفي بأغراضنا.

(يمكن إيجاد برهان المبرهنة بهذه الصيغة تقريبًا في [BiR,pp. 142–155].

مبرهنة 4.5 افترض أن $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$، وأن $f(t, y)$ متصل على D. إذا كانت f تحقق شرط لبشتز على D في المتغير y، فإن مسألة القيمة الابتدائية

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

لها حل وحيد $y(t)$ حيث $a \le t \le b$. ■

مثال 2 افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 1 + t\sin(ty), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$$

بالإبقاء على t ثابتًا، وبتطبيق مبرهنة القيمة الوسيطية للدالة

$$f(t, y) = 1 + t\sin(ty)$$

نجد أنه عندما $y_1 < y_2$، فإن العدد ξ ضمن (y_1, y_2) يظهر مع

$$\frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial}{\partial y} f(t, \xi) = t^2\cos(\xi t)$$

ومن ثم

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = |y_2 - y_1||t^2\cos(\xi t)| \le 4|y_2 - y_1|$$

وتحقق f شرط لبشتز في المتغير y مع ثابت لبشتز $L = 4$. وبالإضافة إلى ذلك، حيث إن $f(t, y)$ متصل عندما $0 \le t \le 2$ و $-\infty < y < \infty$، فإن المبرهنة (4.5) توحي بوجود حل وحيد لمسألة القيمة الابتدائية هذه. ■

فإذا درست مقررًا في المعادلات التفاضلية، فقد تحاول إيجاد الحل الصحيح لهذه المسألة.
والآن وبعد أن عالجنا -إلى حد ما- التساؤل: "متى يكون لمسائل القيمة الابتدائية حلول وحيدة؟" يمكننا الانتقال إلى تساؤل آخر طرح مبكرًا في هذا الفصل وهو
" كيف يمكننا تحديد ما إذا كانت لمسألة معينة سمة كون تغييرات صغيرة (أو تشويش) في مضمونها يؤثر قليلا في الحل؟"
وكالمعتاد، فإننا نحتاج أولًا إلى إعطاء تعريف عملي لترسيخ هذا المفهوم.

تعريف 5.5 يقال لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \tag{2.5}$$

إنها مسألة عرض جيد well-posed problem إذا تحقق ما يلي:

- يوجد حل وحيد $y(t)$ للمسألة.
- يوجد ثابتان $\varepsilon_0 > 0$ و $k > 0$ بحيث إن لكل ε و $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$، ما دامت كانت $\delta(t)$ متصلة و $|\delta(t)| < \varepsilon$ لكل t في $[a, b]$. ومتى كانت $|\delta_0| < \varepsilon$ كذلك فإن مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t), \quad a \le t \le b, \quad z(a) = \alpha + \delta_0 \tag{3.5}$$

لها حل وحيد $z(t)$ يحقق

$$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon \quad \text{لكل } t \text{ في } [a, b]$$ ■

إن المسألة المعطاة بالمعادلة (3.5) تسمى المسألة المضطربة perturbed problem المرتبطة بالمسألة الأصلية (2.5). إنها تفترض إمكانية حدوث خطأ $\delta(t)$ المبين ضمن التعبير حول المعادلة التفاضلية. وبالإضافة إلى خطأ δ_0، فقد عرض ضمن الشرط الابتدائي.
تؤخذ الطرائق العددية دائمًا في الحسبان عند حل المسألة المضطربة، لأن أي خطأ تدوير يتم تناوله في التعبير يربك المسألة الأصلية. وما لم تُعرَض المسألة الأصلية جيدا. فثمة مبرر ضعيف لتوقع كون الحل العددي لمسألة مضطربة يقارب الحل للمسألة الأصلية بدقة.
وتحدد المبرهنة التالية شروطًا لضمان عرض واضح لمسألة القيمة الابتدائية. ويمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في [BiR, pp. 142–147].

مبرهنة 6.5 افترض أن $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$. إذا كانت f متصلة وتحقق شرط لبشتز في المتغير y على المجموعة D فإن مسألة القيمة الابتدائية.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

جيدة العرض. ■

مثال 3 ليكن $D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$. وافترض مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5 \tag{4.5}$$

وبما أن

$$\left|\frac{\partial(y - t^2 + 1)}{\partial y}\right| = |1| = 1$$

فإن المبرهنة (3.5) تؤدي إلى أن $f(t, y) = y - t^2 + 1$ يحقق شرط لبشتز في المتغير y على المجموعة D مع ثابت لبشتز 1. ولأن f متصلة على D فإن المبرهنة (6.5) تؤدي إلى أن مسألة القيمة الابتدائية جيدة العرض.

وللتحقق من ذلك مباشرة، افترض المسألة المضطربة

$$\frac{dz}{dt} = z - t^2 + 1 + \delta, \quad 0 \le t \le 2, \quad z(0) = 0.5 + \delta_0 \tag{5.5}$$

حيث إن δ و δ_0 ثابتان. وحل المعادلة (4.5) والمعادلة (5.5) هو على التوالي

$z(t) = (t + 1)^2 + (\delta + \delta_0 - 0.5)e^t - \delta$ و $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$

افترض أن ε أي عدد موجب. فإذا كان $|\delta| < \varepsilon$ و $|\delta_0| < \varepsilon$ فإن

$$|y(t) - z(t)| = |(\delta + \delta_0)e^t - \delta| \le |\delta + \delta_0|e^2 + |\delta| \le (2e^2 + 1)\varepsilon$$

لكل t. ولذلك فالمسألة (4.5) تكون جيدة العرض مع $k = 2e^2 + 1$ ولكل $\varepsilon > 0$. ■

ويمكن استخدام Maple لحل العديد من مسائل القيمة الابتدائية. افترض المسألة

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

مابل Maple يحتفظ بالحرف D للتعبير عن المشتقة

ولتعريف المعادلة التفاضلية، أدخل

```
>deq:=D(y)(t)=y(t)-t*t+1
```

والشرط الابتدائي

```
>init:=y(0)=0.5
```

وقد اختير المسميان deq و init من قبل المستخدم. والأمر لحل مسائل القيمة الابتدائية هو dsolve ولذلك

```
>deqsol:=dsolve({deq,init},y(t));
```

وتكون الاستجابة

$$\text{deqsol} := y(t) = 1 + t^2 + 2t - \frac{1}{2}e^t$$

ولغرض استخدام الحل لإيجاد قيمة محددة مثل $y(1.5)$، ندخل

```
>q:=rhs(deqsol); evalf(subs(t=1.5,q))
```

مع التمهيدية 4.009155465.

وتستخدم الدالة rhs (الجانب الأيمن) لتخصيص حل مسألة القيمة الابتدائية للدالة q التي سنقيمها عند $t = 1.5$. ويمكن أن تفشل الدالة dsolve إذا ما تعذَّر إيجاد حل واضح لمسألة القيمة الابتدائية. على سبيل المثال، في مسألة القيمة الابتدائية المعطاة في مثال (1)، فإن الأمر الابتدائية

```
>deqsol2:=dsolve({D(y)(t)=1+t*sin(t*y(t)),y(0)=0},y(t));
```

لا ينجح لتعذر إيجاد حل واضح. في هذه الحالة يجب استخدام طريقة عددية.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 1.5

1. استخدم المبرهنة (4.5) لإثبات أن أيًا من مسائل القيمة الابتدائية الآتية لها حل وحيد. أوجد الحل:

أ. $y' = y\cos t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

ب. $y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$

ج. $y' = -\frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \sqrt{2}e$

د. $y' = \frac{4t^3y}{1+t^4}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

2. استخدم المبرهنة (4.5) لإثبات أن أيًا من مسائل القيمة الابتدائية الآتية لها حل وحيد. أوجد الحل:

أ. $y' = e^{t-y}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

ب. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty), \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$

ج. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 2$

د. $y' = \frac{ty+y}{ty+t}, \quad 2 \le t \le 4, \quad y(2) = 4$

3. لكل اختيار إلى $f(t, y)$ المعطاة للأقسام من (أ) – (د):

(أ) هل يحقق f شرط لبشتز على $D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$؟

(ب) هل يمكن استخدام المبرهنة (6.5) لإثبات أن مسألة القيمة الابتدائية

$y' = f(t, y)$، $0 \le t \le 1$، $y(0) = 1$

جيدة العرض؟

أ. $f(t, y) = t^2y + 1$ ب. $f(t, y) = ty$

ج. $f(t, y) = 1 - y$ د. $f(t, y) = -ty + \frac{4t}{y}$

4. لكل اختيار إلى $f(t, y)$ المعطاة للأقسام من (أ) – (د):

أ. هل يحقق f شرط لبشتز على $D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$؟

ب. هل يمكن استخدام المبرهنة (6.5) لإثبات أن مسألة القيمة الابتدائية

$y' = f(t, y)$، $0 \le t \le 1$، $y(0) = 1$

جيدة العرض؟

أ. $f(t, y) = e^{t-y}$ ب . $f(t, y) = \dfrac{1+y}{1+t}$ ج. $f(t, y) = \cos(yt)$ د. $f(t, y) = \dfrac{y^2}{1+t}$

5. لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية، أثبت أن المعادلة المعطاة تتضمن حلًّا. قرّب إلى $y(2)$ مستخدمًا طريقة نيوتن.

أ. $y' = -\dfrac{y^3 + y}{(3y^2 + 1)t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1; \quad y^3 t + yt = 2$

ب. $y' = -\dfrac{y \cos t + 2te^y}{\sin t + t^2 e^y + 2}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0; \quad y \sin t + t^2 e^y + 2y = 1$

6. برهن المبرهنة (3.5) من خلال تطبيق مبرهنة القيمة الوسطية لـ $f(t, y)$، مبقيًا t ثابتًا.

7. في الثابتين a و b. أثبت أن المجموعة $L = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$ محدبة.

8. افترض الاضطراب $\delta(t)$ نسبيًا إلى t. بمعنى أن $\delta(t) = \delta t$ ثابت ما δ. أثبت مباشرةً أن مسائل القيمة الابتدائية الآتية جيدة العرض:

أ. $y' = 1 - y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$

ب. $y' = t + y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -1$

ج. $y' = \dfrac{2}{t} y + t^2 e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$

د. $y' = -\dfrac{2}{t} y + t^2 e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \sqrt{2}e$

9. طريقة بيكارد لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y) \qquad a \le t \le b \qquad y(a) = \alpha$$

يكون وفقًا للشرح الآتي: ليكن $y_0(t) = \alpha$ لكل t ضمن $[a, b]$. عرف متتالية الدّوال $\{y_k(t)\}$

$$y_k(t) = \alpha + \int_a^t f(\tau, y_{k-1}(\tau))\, d\tau \qquad k = 1, 2, \ldots$$

أ. اعمل التكامل $y' = f(t, y(t))$، واستخدم الشرط الابتدائي لاشتقاق طريقة بيكارد.

ب. اعمل التوليد $y_0(t), y_1(t), y_2(t)$ و $y_3(t)$ لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -y + t + 1 \qquad 0 \le t \le 1 \qquad y(0) = 1$$

ج. قارن التمهيدية في الفقرة (ب) مع سلسلة ماكلورين للحل الحقيقي $y(t) = t + e^{-t}$.

2.5 طريقة أويلر Euler's Method

على الرغم من قلة استخدام طريقة أويلر، إلا أنه لبساطة اشتقاقها يمكن توظيفها في توضيح الأساليب المستخدمة في إنشاء بعض الأساليب الأكثر تعقيدًا، دون اللجوء إلى التعقيدات الجبرية المرافقة لعملية الإنشاء هذه.

وتهدف طريقة أويلر إلى إيجاد تقريب لمسألة القيمة الابتدائية ذات العرض الجيد

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \tag{6.5}$$

في الحقيقة. إن تقريبًا متصلًا للحل $y(t)$ لن يظهر. وبدلًا من ذلك فإن تقريبات إلى y ستتولد عند قيم مختلفة تدعى نقاط ميش (نقاطًا متناغمة) mesh points في الفترة $[a, b]$. وبمجرد إيجاد الحــل التقريبــي عند النقاط. فإنه يمكن إيجاد الحل التقريبي عند النقاط الأخرى في الفترة من خلال الاستكمال الداخلي.

في البداية نشــترط توزع النقاط المتناغمة بالتســاوي في الفترة $[a, b]$. وهذا الشــرط مضمون من خلال اختيار عدد صحيح موجب N واختيار النقاط المتناغمة mesh points لكلٍّ من

$$t_i = a + ih \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N$$

المسافة الموحدة ما بين النقاط $h = (b - a)/N = t_{i+1} - t_i$ تسمى سعة الخطوة step size.

يُعــد ليونارد أويلر (1707 – 1783) Leonhard Euler مــن أكثــر المعتبرين الرياضيــين. وكان أول من عــرض للمجتمع الرياضي اســتخدام طرق الفــرق الابتدائــي لتقريب حل المعادلات التفاضلية.

سنســتخدم مبرهنة تايلور لاشــتقاق طريقة أويلر. افترض أن $y(t)$ الحل الوحيد للمعادلة (6.5) له مشتقتان متصلتان على $[a, b]$. من ثم فإنه لكلٍّ من $i = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\xi_i)$$

لعدد ما ξ_i ضمن (t_i, t_{i+1}). وحيث $h = t_{i+1} - t_i$ يكون لدينا

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

ولأن $y(t)$ يحقق المعادلة التفاضلية (6.5)، فإن

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i) \tag{7.5}$$

طريقة أويلر تبني $w_i \approx y(t_i)$ لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, N$ ومن خلال حذف الجزء المتبقي فإن طريقة أويلر تكون

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{8.5}$$

تســمى المعادلة (8.5) بمعادلة الفرق difference equation وهي مرافقة لطريقة أويلر. كذلك وكما سنرى مؤخرًا في هذا الفصل. فإن المبرهنة وحل معادلات الفرق توازي –بجوانب عدة– المبرهنة وحل المعادلات التفاضلية. تنفذ الخوارزمية (5.1) طريقة أويلر.

ALGORITHM

الخوارزمية

1.5

طريقة أويلر Euler's Method

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

عند $(N + 1)$ من الكرّاد متساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط نهاية a و b. عدد صحيح N. شرط ابتدائي α.

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N + 1)$ من القيم لـ t.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/N$

	$t = a$ $w = \alpha$ المخرجات (t, w).
2	لكلّ من $i = 1, 2, \ldots, N$ طبق الخطوتين 3 و4.
3	ضع $w = w + hf(t, w)$ (احسب w_i). $t = a + ih$ (احسب t_i).
4	المخرجات (t, w).
5	توقف.

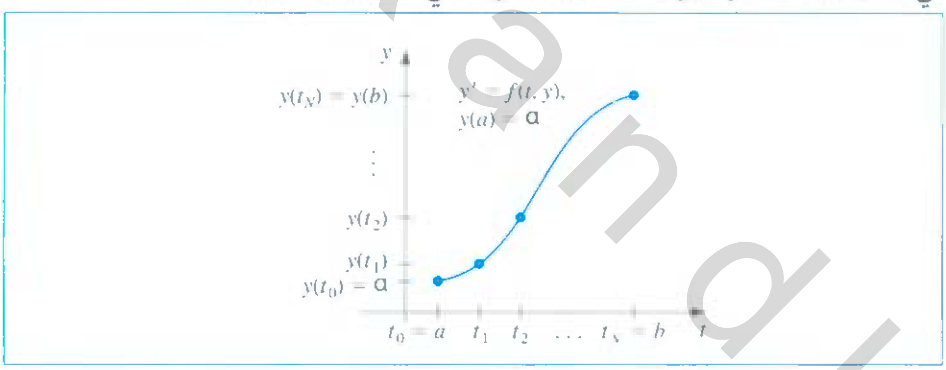
■

ولتفسير طريقة أويلر هندسيًّا، انظر أنه عندما يكون التقريب w_i قريبًا من $y(t_i)$، بأن افترض كون المسألة جيدة العرض يؤدي إلى

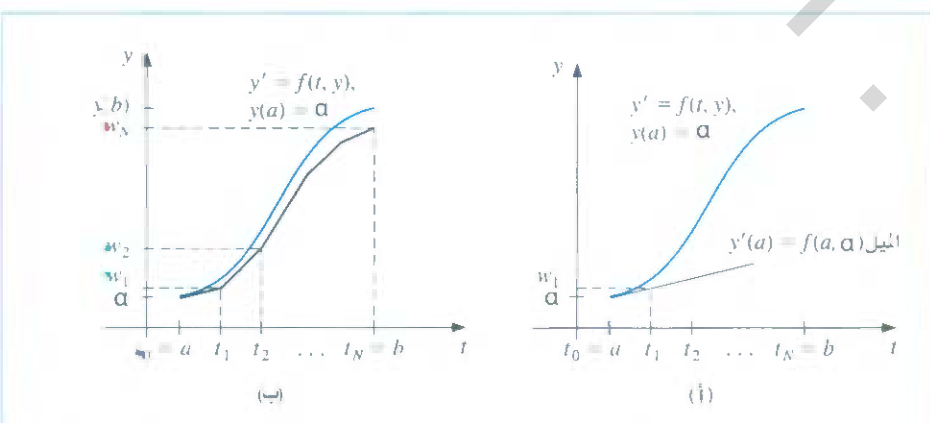
$$f(t_i, w_i) \approx y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$$

انظر الرسم البياني للدالة $y(t_i)$ الذي يبرز في شكل (2.5). وإحدى خطوات طريقة أويلر تظهر في شكل (أ) (3.5). وتظهر سلسلة من الخطوات في شكل (ب) (3.5).

شكل 2.5



شكل 3.5



مثال 1 افترض استخدام طريقة أويلر لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$y' = y - t^2 + 1$ ، $0 \le t \le 2$ ، $y(0) = 0.5$

مع $N = 10$. لذا فإن $h = 0.2, t_i = 0.2i, w_0 = 0.5$

و $w_{i+1} = w_i + h(w_i - t_i^2 + 1) = w_i + 0.2[w_i - 0.04i^2 + 1] = 1.2w_i - 0.008i^2 + 0.2$

لكلّ من $i = 0, 1, \ldots, 9$. الحل الصحيح هو $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$. يبين جدول (5.1) المقارنة ما بين القيم المقربة t_i والقيم الحقيقية. ■

جدول 5.1

t_i	w_i	$y_i = y(t_i)$	$\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874

انظر أن الخطأ يزداد تدريجيًا كلما ازداد t. وإن نمو هذا الخطأ تحت السيطرة هو تمهيدية ثبات طريقة أويلر، التي تؤدي إلى أنه من المتوقع نمو الخطأ على نحو ليس أسوأ من المنحنى الخطي.

وعلى الرغم من أن طريقة أويلر ليست دقيقة كفاية للتحذير من استخدامها عند التطبيق، إلا أنها مبدئيًا وافية لتحليل الخطأ الناتج من تطبيقها. وسنتطرق إلى تحليل الخطأ لطرائق أدق في فصول آتية تتبع نفس المنحنى، لكنها أكثر تعقيداً.

لاشتقاق حد للخطأ لطريقة أويلر، نحتاج إلى نتيجتين حسابيتين.

تمهيدية 5.7 لكل $x \ge -1$ ولكل عدد موجب m، لدينا $0 \le (1+x)^m \le e^{mx}$. ■

البرهان بتطبيق مبرهنة تايلور مع $f(x) = e^x, x_0 = 0$، و $n = 1$ نحصل على

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 e^{\xi}$$

حيث ξ ما بين x وصفر. لذا

$$0 \le 1 + x \le 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 e^{\xi} = e^x$$

ولكون $1 + x \ge 0$، فإن

$$0 \le (1+x)^m \le (e^x)^m = e^{mx}$$

■ ■ ■

تمهيدية 8.5 إذا كان s و t عددين حقيقيين. وكانت $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ متتالية تحقق $a_0 \geq -t/s$. وكان

$$a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \tag{9.5}$$

فإن

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

البرهان عند عدد صحيح محدد i. تؤدي المتباينة (9.5) إلى

$$\begin{aligned} a_{i+1} &\leq (1+s)a_i + t \\ &\leq (1+s)[(1+s)a_{i-1} + t] + t \\ &\leq (1+s)\{(1+s)[(1+s)a_{i-2} + t] + t\} + t \\ &\;\vdots \\ &\leq (1+s)^{i+1}a_0 + [1 + (1+s) + (1+s)^2 + \cdots + (1+s)^i]t \end{aligned}$$

ولكن

$$1 + (1+s) + (1+s)^2 + \cdots + (1+s)^i = \sum_{j=0}^{i}(1+s)^j$$

عبارة عن سلسلة هندسية تتناسب مع $(1+s)$ ومجموعها

$$\frac{1-(1+s)^{i+1}}{1-(1+s)} = \frac{1}{s}[(1+s)^{i+1} - 1]$$

لذا يكون

$$a_{i+1} \leq (1+s)^{i+1}a_0 + \frac{(1+s)^{i+1} - 1}{s}t = (1+s)^{i+1}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

وباستخدام التمهيدية (7.5) مع $x = s$ و $m = i + 1$ نحصل على

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

■ ■ ■

مبرهنة 9.5 افترض f متصلة وتحقق شرط لبسشتز بثابت L على

$$D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

وافترض وجود ثابت M يحقق

$$|y''(t)| \leq M \quad \text{لكل} \quad t \in [a, b]$$

ولنفترض أن $y(t)$ الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

وأن $w_0, w_1, \ldots, w_N$ عبارة عن تقريبات مولدة بطريقة أويلر لعدد صحيح موجب N. عندئذ، لكل $i = 0, 1, 2, \ldots, N$، لدينا

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - a)} - 1\right] \tag{10.5}$$

■

البرهان عندما $i = 0$ فإن النتائج صحيحة تمامًا، لأن $y(t_0) = w_0 = \alpha$.

من المعادلة (7.5)، لدينا لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N - 1$،

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

ومن المعادلات في (8.5)، لدينا

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

وبناءً على ذلك، يكون لدينا باستخدام التعبير $y_i = y(t_i)$ و $y_{i+1} = y(t_{i+1})$

$$y_{i+1} - w_{i+1} = y_i - w_i + h[f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)] + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

و

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \le |y_i - w_i| + h|f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_i)|$$

وحيث يحقق f شرط لبشتز في المتغير الثاني مع الثابت L وإن $M \le |y''(t)|$، يكون لدينا

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \le (1 + hL)|y_i - w_i| + \frac{h^2 M}{2}$$

وبالرجوع إلى التمهيدية (8.5) وجعل $s = hL, t = h^2M/2$ و $a_j = |y_j - w_j|$، لكلٍّ من $j = 0, 1, \ldots, N$، نرى أن

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \le e^{(i+1)hL}\left(|y_0 - w_0| + \frac{h^2M}{2hL}\right) - \frac{h^2M}{2hL}$$

ولأن $|y_0 - w_0| = 0$ و $(i + 1)h = t_{i+1} - t_0 = t_{i+1} - a$، يكون لدينا

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \le \frac{hM}{2L}(e^{(t_{i+1} - a)L} - 1)$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N - 1$.

■ ■ ■

وتكمن نقطة الضعف في المبرهنة (9.5) في المتطلب المتضمن وجوب معرفة الحد للمشتقة الثانية للحل. وعلى الرغم من أن هذا الشرط يمنعنا من إيجاد حد خطأ منطقي، إلا أنه يجب ملاحظة إذا كان كل من $\partial f/\partial t$ و $\partial f/\partial y$ موجودًا، وعندئذ فإن قاعدة السلسلة للتفاضل الجزئي تؤدي إلى

$$y''(t) = \frac{dy'}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \cdot f(t, y(t))$$

لذلك فمن المحتمل في بعض الأحيان إيجاد حد خطأ لـ $y''(t)$ دون معرفة صريحة لـ $y(t)$.

ورجوعًا إلى مسألة القيمة الابتدائية

مثال 2

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

نرى من مثال (1) أنه ما دام $f(t, y) = y - t^2 + 1$. فلدينا $\partial f(t, y)/\partial y = 1$ لكل قيم y لذا $L = 1$. الحل الصحيح لهذه المسألة هو $y(t) = (t+1)^2 - \frac{1}{2}e^t$ لذلك $y''(t) = 2 - 0.5e^t$ و $|y''(t)| \le 0.5e^2 - 2,$ لكل $t \in [0, 2]$.

واستخدام اللامساواة في حد الخطأ لطريقة أويلر مع $h = 0.2, L = 1$ و $M = 0.5e^2 - 2$ يعطينا

$$|y_i - w_i| \le 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{t_i} - 1)$$

يعطي جدول (2.5) الخطأ الحقيقي المستخرج في مثال (1) معًا مع حد الخطأ هذا. انظر أنه حتى مع استخدام الحد الصحيح للمشتقة الثانية للحل، يتضح أن حد الخطأ أكبر من الخطأ الحقيقي.

جدول 2.5

t_i	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
الخطأ الفعلي	0.02930	0.06209	0.09854	0.13875	0.18268	0.23013	0.28063	0.33336	0.38702	0.43969
حد الخطأ	0.03752	0.08334	0.13931	0.20767	0.29117	0.39315	0.51771	0.66985	0.85568	1.08264

إن أهمية صيغة حد الخطأ المعطاة في المبرهنة (9.5) تكمن في أن الحد يعتمد خطيًا على سعة الخطوة h، وبناءً على ذلك فإن اضمحلال سعة الخطوة يحتم في المقابل عطاء دقة أكبر للتقريبات.

أما الذي تم تجاهله في تمهيدية المبرهنة (9.5) فهو الأثر الذي يلعبه خطأ التدوير في اختيار سعة الخطوة. وكلما كانت h أصغر، فإن حسابات أكثر ستغدو ضرورية وخطأ تدوير أكبر سيكون متوقعًا. إذن فإن صيغة معادلة الفرق هي

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

لا تستخدم لحساب y_i التقريب للحل عند نقطة الشبكة t_i. وبدلًا من ذلك نستخدم معادلة على الصيغة

$$u_0 = \alpha + \delta_0$$

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i) + \delta_{i+1} \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (11.5)$$

حيث ترمز δ_i إلى خطأ التدوير الترافق مع u_i. وباستخدام طرائق مشابهة لتلك التي في برهان المبرهنة (9.5)، نتمكن من إنتاج حد خطأ لتقريبات إلى y_i محدودة الخانات ومعطاة من خلال طريقة أويلر.

مبرهنة 10.5

ليكن $y(t)$ الحل الوحيد وحيد لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \qquad (12.5)$$

و $u_0, u_1, \ldots, u_N$ التقريبات التي وُجدت باستخدام المعادلة (11.5). إذا كان $|\delta_i| < \delta$ لكلٍّ من

$i = 0, 1, \ldots, N$ وفرضيات المبرهنة (9.5) متحققة في المعادلة (12.5)، فإن

$$|y(t_i) - u_i| \leq \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)[e^{L(t_i - a)} - 1] + |\delta_0| e^{L(t_i - a)} \tag{13.5}$$

لكلّ من $i = 0, 1, \ldots, N$. ■

إن حد الخطأ (13.5) لم يعد خطيًا في h. ولأن

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right) = \infty$$

فمن المتوقع أن يكون الخطأ كبيرا مقابل قيم صغيرة نسبيًا لـ h. ويمكن استخدام التفاضل والتكامل لتحديد حد أدنى لسعة الخطوة h. وبجعل $E(h) = (hM/2) + (\delta/h)$. هذا يؤدي إلى $E'(h) = (M/2) - (\delta/h^2)$.

إذا كان $h < \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$ فإن $E'(h) < 0$ و $E(h)$ يكون متناقصا.

إذا كان $h > \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$ فإن $E'(h) > 0$ و $E(h)$ يكون متزايدا.

الحد الأدنى لقيمة $E(h)$ تظهر عندما

$$h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}} \tag{14.5}$$

وتخفيض h عن هذه القيمة يميل نحو زيادة الخطأ التام في التقريب. ومن الطبيعي أن تكون قيمة δ صغيرة نسبيًا. لرتبة أن حد الخطأ هذا لـ h لا يؤثر في عمل طريقة أويلر.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 2.5

1. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0$ عند $h = 0.5$

ب. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \leq t \leq 3, \quad y(2) = 1$ عند $h = 0.5$

ج. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.25$

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.25$

2. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = e^{t-y}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.5$

ب. $y' = \frac{1+t}{1+y}, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.5$

ج. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \leq t \leq 3, \quad y(2) = 2$ عند $h = 0.25$

د. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty), \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.25$

3. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (1) معطاة هنا. قارن الخطأ الحقيقي بحد الخطأ عند كل خطوة:

أ. $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$

ب. $y(t) = t + (1/1 - t)$

ج. $y(t) = t\ln t + 2t$

د. $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$

4. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (2) معطاة هنا. قارن الخطأ الحقيقي بحد الخطأ عند كل خطوة:

أ. $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$

ب. $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$

ج. $y(t) = \left(t - 2 + \sqrt{2}ee^{-\frac{t}{2}}\right)^2$

د. $y(t) = \dfrac{4 + \cos 2 - \cos 2t}{2t^2}$

5. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$ عند $h = 0.2$

ج. $y' = -(y + 1)(y + 3), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -2$ عند $h = 0.2$

د. $y' = -5y + 5t^2 + 2t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ عند $h = 0.1$

6. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = \dfrac{2 - 2ty}{t^2 + 1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = \dfrac{y^2}{1 + t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \dfrac{-1}{\ln 2}$ عند $h = 0.1$

ج. $y' = t^{-1}(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ عند $h = 0.2$

د. $y' = -ty + 4ty^{-1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

7. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (5) معطاة هنا. احسب الخطأ الحقيقي في تقريبات التمرين (5)

أ. $y(t) = \dfrac{t}{1 + \ln t}$

ب. $y(t) = t\tan(\ln t)$

ج. $y(t) = -3 + \dfrac{2}{1 + e^{-2t}}$

د. $y(t) = t^2 + \dfrac{1}{3}e^{-5t}$

8. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (6) معطاة هنا. احسب الخطأ الحقيقي في تقريبات التمرين (5):

أ. $y(t) = \dfrac{2t + 1}{t^2 + 1}$ ب. $y(t) = \dfrac{-1}{\ln(t + 1)}$ ج. $y(t) = \dfrac{2t}{1 - 2t}$ د. $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$

9. افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$$

مع حل صحيح $y(t) = t^2(e^t - e)$.

أ. استخدم طريقة أويلر مع $h = 0.1$ لتقريب الحل، وقارنه بالقيمة الحقيقية لـ y.

ب. استخدم الجواب الذي نتج في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم y الآتية، وقارنها بالقيم الحقيقية:

1. $y(1.04)$ 2. $y(1.55)$ 3. $y(1.97)$

ج. احسب قيمة h الضرورية لـ $|y(t_i) - w_i| \le 0.1$، مستخدمًا المعادلة (10.5).

10. افترض مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -1$$

مع حل صحيح $y(t) = -1/t$:

أ. استخدم طريقة أويلر مع $h = 0.05$ لتقريب الحل. وقارنه بالقيمة الحقيقية لـ y.

ب. استخدم الجواب الذي نتج في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم y الآتية وقارنها بالقيم الحقيقية:

1. $y(1.052)$ 2. $y(1.555)$ 3. $y(1.978)$

ج. احسب قيمة h الضرورية لـ $|y(t_i) - w_i| \le 0.05$. مستخدماً المعادلة (10.5).

11. افترض مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \le t \le 5, \quad y(0) = 1$$

مع حل صحيح $y(t) = e^{-t} + t$:

أ. اكتب تقريباً إلى $y(5)$ مستخدماً طريقة أويلر مع $h = 0.1$، $h = 0.2$ و $h = 0.05$.

ب. حدّد قيمة h المثلى لاستخدامها في حساب $y(5)$. مفترضاً $\delta = 10^{-6}$، وأن المعادلة (14.5) متحققة.

12. افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -10y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 1$$

التي لها حل $y(t) = e^{-10t}$. ماذا يحدث عند تطبيق طريقة أويلر لهذه المسألة مع $h = 0.1$؟ هل هذا السلوك يخالف المبرهنة (9.5)؟

13. استخدم نتائج التمرين (5) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$ الآتية. وقارن التقريبات الناتجة بالقيم الحقيقية الناتجة من استخدام الدوال المعطاة في التمرين (7):

أ. $y(1.25)$ و $y(1.93)$ ب. $y(2.1)$ و $y(2.75)$

ج. $y(1.4)$ و $y(1.93)$ د. $y(0.54)$ و $y(0.94)$

14. استخدم نتائج التمرين (6) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$ الآتية. وقارن التقريبات الناتجة بالقيم الحقيقية الناتجة من استخدام الدوال المعطاة في التمرين (8):

أ. $y(0.25)$ و $y(0.93)$ ب. $y(1.25)$ و $y(1.93)$

ج. $y(2.10)$ و $y(2.75)$ د. $y(0.54)$ و $y(0.94)$

15. ليكن $E(h) = \dfrac{hM}{2} + \dfrac{\delta}{h}$:

أ. لمسألة القيمة الابتدائية $y' = -y + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$

احسب قيمة h لتصغير $E(h)$. افترض $\delta = 5 \times 10^{-(n+1)}$ لو استخدمت حساب n-digit في الفقرة (ج).

ب. للقيمة المثلى لـ h والمحسوبة في (أ). استخدم المعادلة (13.5) لحساب الخطأ الأدنى الذي يمكن إيجاده.

ج. قارن الخطأ الحقيقي الناتج باستخدام $h = 0.1$ و $h = 0.01$ بالخطأ الأدنى في الفقرة (ب). هل بإمكانك تفسير النتائج؟

16. في دائرة كهربائية معرضة لفولتية ξ لها مقاومة R، ومعامل حث L، وسعة كهربائية C في وضع التوازي. فإن التيار i يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{L}\xi$$

افترض $C = 0.3$ farads، $R = 1.4$ ohms، $L = 1.7$ henries، وأن الفولتية معطاة من خلال

$$\xi(t) = e^{-0.06\pi t}\sin(2t - \pi)$$

فإذا كانت $i(0)=0$ فأوجد التيار i للقيم $t=0.1j$ حيث $j=0,1,\dots,100$.

17. يعتمد الكتاب *Looking at History Through Mathematics*, Rashevsky [Ra, pp. 103–110] يعتمد على نموذج لمسألة تتضمن حدوث التوحد في المجتمع. افترض مجتمعًا بتعداد سكاني $x(t)$ عند الزمن t (بالسنوات). وأن للمتوحّدين كلهم الذين يتزوجون من متوحدين آخرين إنشاء متوحدين أيضا. حيث أن نسبة ثابتة r من جميع الأنشاء الآخرين جميعهم يتوحدون أيضا. فإذا افترضنا أن معدلي الولادات والوفيات للسكان جميعهم هما الثابتان b و d على التوالي. وإذا تزاوج المتوحدون مع غير المتوحّدين عشوائيًا. فإن المسألة يمكن التعبير عنها بالمعادلات التفاضلية:

$$\frac{dx_n(t)}{dt}=(b-d)x_n(t)+rb(x(t)-x_n(t)) \quad \text{و} \quad \frac{dx(t)}{dt}=(b-d)x(t)$$

حيث يمثل $x_n(t)$ عدد المتوحدين في المجتمع عند الزمن t.

أ. افترض أن المتغير $p(t)=x_n(t)/x(t)$ يمثّل نسبة المتوحدين في المجتمع عند الزمن t. أثبت أن هذه المعادلات يمكن دمجها وتبسيطها إلى معادلة تفاضلية واحدة

$$\frac{dp(t)}{dt}=rb(1-p(t))$$

ب. بفرض $p(0)=0.01$، $b=0.02$، $d=0.015$ و $r=0.1$ اكتب تقريبا للحل $p(t)$ من $t=0$ إلى $t=50$ عندما تكون سعة الخطوة $h=1$ سنة.

ج. حل المعادلة التفاضلية لـ $p(t)$ بدقة. وقارن نتيجتك في الفقرة (ب) عندما $t=50$ بالقيمة الصحيحة عند ذلك الزمن.

3.5 طرائق تايلور من الرتبة الكبيرة
Higher-Order Taylor Methods

لما كان هدف الأساليب العددية هو إيجاد تقريبات دقيقة بأقل جهد. فإننا نحتاج إلى وسائل لمقارنة كفاءة طرائق التقريب المختلفة. تسمى الأداة الأولى موضع اهتمامنا خطأ القطع المحلي local truncation error للطريقة. إن خطأ القطع المحلي عند خطوة معينة يقيس مقدار الحل الصحيح للمعادلة التفاضلية الذي يفشل في تحقيق معادلة الفرق المستخدمة في التقريب.

تعريف 11.5 طريقة الفرق $w_0=\alpha$

$$w_{i+1}=w_i+h\,\phi(t_i,w_i) \quad \text{لكل} \quad i=0,1,\dots,N-1$$

لها خطأ القطع المحلي

$$\tau_{i+1}(h)=\frac{y_{i+1}-(y_i+h\,\phi(t_i,y_i))}{h}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-\phi(t_i,y_i)$$

لكلّ من $i=0,1,\dots,N-1$. ■

وبالنسبة إلى طريقة أويلر. فإن خطأ القطع المحلي عند الخطوة i للمسألة

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

هو
$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(t_i, y_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

حيث تمثِّل عادة $y_i = y(t_i)$ القيمة الصحيحة للحل عند t_i. إن هذا الخطأ هو خطأ محلي؛ لأنه يقيس دقة الطريقة عند خطوة معينة، مفترضين أن الطريقة كانت صحيحة في الخطوة السابقة. وهكذا فإن ذلك يعتمد على المعادلة التفاضلية، وسعة الخطوة، والخطوة بعينها في التقريب.

وبالرجوع إلى المعادلة (7.5) في الفصل السابق، نرى أن طريقة أويلر لها
$$\tau_{i+1}(h) = \frac{h}{2} y''(\xi_i) \quad \text{لبعض } \xi_i \text{ في } (t_i, t_{i+1})$$

وعندما تكون $y''(t)$ معروفة لتُحدّد بالثابت M على $[a, b]$، فسيؤدي ذلك إلى
$$|\tau_{i+1}(h)| \le \frac{h}{2} M$$

ولهذا فإن خطأ القطع المحلي في طريقة أويلر يكون $O(h)$.

تكون إحدى السبل لاختيار طرائق المعادلة التفاضلية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية بأسلوب له أخطاء تقلص محلي $O(h^p)$ لأكبر قيمة ممكنة لـ p، حيث نبقي عدد العمليات الحسابية للطرائق وتعقيداتها ضمن حدود معقولة.

ولما اشتقت طريقة أويلر باستخدام مبرهنة تايلور مع $n = 1$ لتقريب حل المعادلة التفاضلية فإن محاولتنا الأولى لإيجاد طرائق لتحسين سمات التقارب لطرائق الفرق تكمن في توسيع أسلوب الاشتقاق هذا لقيم أكبر لـ n.

الطرائق في هذا الفصل تستخدم كثيرة حدود تايلور Taylor وإن المعلومات عن الاشتقاق عند نقطة معطاة لتقريب قيمة الدالة عند نقطة جديدة

افترض أن حل $y(t)$ مسألة القيمة الابتدائية
$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

له $(n+1)$ من المشتقات المتصلة. فإذا وسّعنا الحل $y(t)$، بدلالة كثيرة حدود تايلور من الرتبة n حول t_i، وكان التقييم عند t_{i+1}، فإننا نحصل على
$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i) \qquad (15.5)$$
لـ ξ_i ضمن (t_i, t_{i+1}).

إن التفاضل المتتابع للحل $y(t)$ يعطي
$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y''(t) = f'(t, y(t)) \quad \text{وعموما} \quad y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y(t))$$

وبتعويض هذه النتائج في المعادلة (15.5) نحصل على
$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, y(t_i)) + \cdots \qquad (16.5)$$
$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$$

إننا نحصل على طريقة معادلة الفرق المناظرة للمعادلة (16.5) عن طريق حذف الجزء المتبقي

والمتضمن ξ_i. تسمى هذه الطريقة

طريقة تايلور من الرتبة n Taylor method of order n

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{17.5}$$

حيث

$$T^{(n)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, w_i)$$

مثال 1 انظر أن طريقة أويلر هي طريقة تايلور من الرتبة واحد.

لنفترض أننا نريد تطبيق طريقة تايلور من الرتبتين 2 و4 لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

التي درِست في الفصول السابقة. علينا إيجاد أول ثلاث مشتقات لـ $f(t, y(t)) = y(t) - t^2 + 1$ بالنسبة إلى المتغير t

$$f'(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1) = y' - 2t = y - t^2 + 1 - 2t$$

$$f''(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1 - 2t) = y' - 2t - 2$$
$$= y - t^2 + 1 - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

و

$$f'''(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 - 2t - 1) = y' - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

عندئذ

$$T^{(2)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) = w_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(w_i - t_i^2 - 2t_i + 1)$$
$$= \left(1 + \frac{h}{2}\right)(w_i - t_i^2 + 1) - ht_i$$

و

$$T^{(4)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) + \frac{h^2}{6} f''(t_i, w_i) + \frac{h^3}{24} f'''(t_i, w_i)$$
$$= w_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(w_i - t_i^2 - 2t_i + 1) + \frac{h^2}{6}(w_i - t_i^2 - 2t_i - 1)$$
$$+ \frac{h^3}{24}(w_i - t_i^2 - 2t_i - 1)$$

و

$$= \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\right)(w_i - t_i^2) - \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\right)(ht_i)$$
$$+ 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24}$$

بناء على ذلك فإن طريقة تايلور من الرتبتين 2 و 4 هي

$$w_0 = 0.5,$$
$$w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 + \frac{h}{2}\right)(w_i - t_i^2 + 1) - ht_i\right]$$

و

$$w_0 = 0.5,$$
$$w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\right)(w_i - t_i^2) - \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\right)ht_i + 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24}\right],$$

لكل $i = 0, 1, \ldots, N - 1$.

فإذا كانت $h = 0.2$ فإن $N = 10$ و $t_i = 0.2i$ لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, 10$. ولذلك فإن الطريقة بالرتبة الثانية تصبح

$$w_0 = 0.5,$$
$$w_{i+1} = w_i + 0.2\left[\left(1 + \frac{0.2}{2}\right)(w_i - 0.04i^2 + 1) - 0.04i\right]$$
$$= 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.22,$$

وتصبح الطريقة من الرتبة الرابعة

$$w_{i+1} = w_i + 0.2\left[\left(1 + \frac{0.2}{2} + \frac{0.04}{6} + \frac{0.008}{24}\right)(w_i - 0.04i^2) - \left(1 + \frac{0.2}{3} + \frac{0.04}{12}\right)(0.04i) + 1 + \frac{0.2}{2} - \frac{0.04}{6} - \frac{0.008}{24}\right]$$
$$= 1.2214w_i - 0.008856i^2 - 0.00856i + 0.2186,$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, 9$.

يبين جدول (3.5) القيم الحقيقية للحل $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$ والنتائج من خلال طرائق تايلور من الرتبتين 2 و 4، والأخطاء الحقيقية المرتبطة بهذه الطرائق. وكما هو متوقع، فإن نتائج الرتبة 4 متميزة.

لنفترض أننا بحاجة إلى تحديد تقريب لنقطة وسطية في جدول. على سبيل مثال عند $t = 1.25$. فإذا استخدمنا استكمالًا داخليًا في طريقة تايلور من الرتبة أربعة تقريبات عند $t = 1.2$ و $t = 1.4$. فسنحصل على

$$y(1.25) \approx \left(\frac{1.25 - 1.4}{1.2 - 1.4}\right)3.1799640 + \left(\frac{1.25 - 1.2}{1.4 - 1.2}\right)3.7324321 = 3.3180810$$

جدول 3.5

الخطأ $\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	تايلور بالرتبة 4 w_i	الخطأ $\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	تايلور بالرتبة 2 w_i	الصحيحة $y(t_i)$	t_i
0	0.5000000	0	0.5000000	0.5000000	0.0
0.0000014	0.8293000	0.0007014	0.8300000	0.8292986	0.2
0.0000034	1.2140910	0.0017123	1.2158000	1.2140877	0.4
0.0000062	1.6489468	0.0031354	1.6520760	1.6489406	0.6
0.0000101	2.1272396	0.0051032	2.1323327	2.1272295	0.8
0.0000153	2.6408744	0.0077868	2.6486459	2.6408591	1.0
0.0000225	3.1799640	0.0114065	3.1913480	3.1799415	1.2
0.0000321	3.7324321	0.0162446	3.7486446	3.7324000	1.4
0.0000447	4.2835285	0.0226626	4.3061464	4.2834838	1.6
0.0000615	4.8152377	0.0311223	4.8462986	4.8151763	1.8
0.0000834	5.3055554	0.0422123	5.3476843	5.3054720	2.0

ولما كانت القيمة الصحيحة $y(1.25) = 3.3173285$، فإن في هذا التقريب 0.0007525 خطأ يعدل مقداره 30 مرة معدل أخطاء التقريب عند 1.2 و 1.4.

يتطلب استكمال هرمايت الداخلي كلا من قيمة الدالة ومشتقته عند كل نقطة وهذا يجعل منه طريقة لاستكمال داخلي طبيعي لتقريب معادلات تفاضلية، لأن هذه البيانات جميعها متوفرة

بإمكاننا تحسين التقريب إلى $y(1.25)$ معنويًا باستخدام استكمال داخلي هرمايت التكعيبي. وهذا يتطلب تقريبات إلى $y'(1.2)$ و $y'(1.4)$ إلى جانب التقريبات إلى $y(1.2)$ و $y(1.4)$. لكن تقريبات المشتقات ممكنة من خلال المعادلة التفاضلية؛ لأن $y'(t) = f(t, y(t))$. وفي مثلنا $y'(t) = y(t) - t^2 + 1$، ومن ثم فإن

$$y'(1.2) = y(1.2) - (1.2)^2 + 1 \approx 3.1799640 - 1.44 + 1 = 2.7399640$$

و

$$y'(1.4) = y(1.4) - (1.4)^2 + 1 \approx 3.7324327 - 1.96 + 1 = 2.7724321$$

إن عملية الفرق المنقسم في الفصل (3.3) تعطي المعلومات في جدول (4.5). وإن مصدر القيم المخططة هي البيانات. أما الأخرى فقد صيغت باستخدام صيغ الفروقات المنقسمة.

جدول 4.5

			3.1799640	2.1
		2.7399640		
	0.1118825		3.1799640	2.1
−0.3071225		2.7623405		
	0.0504580		3.7324321	4.1
		2.7724321		
			3.7324321	4.1

إن كثيرة حدود هرمايت هي

$$y(t) \approx 3.1799640 + (t - 1.2)2.7399640 + (t - 1.2)^2 0.1118825 + (t - 1.2)^2(t - 1.4)(-0.3071225)$$

ومن ثم فإن

$$y(1.25) \approx 3.1799640 + 0.1369982 + 0.0002797 + 0.0001152 = 3.3173571$$

هي تمهيدية دقيقة ضمن 0.0000286. وهذا يعادل معدل الأخطاء عند 2.1 وعند 4.1 تقريبا، أو يعادل نحو 4% من الخطأ باستخدام استيفاء داخلي خطي. ويبرّر هذا التحسن في الدقة حتمًا الحسابات المضافة المطلوبة لطريقة هرمايت. ■

مبرهنة 5.12 إذا استخدمت طريقة تايلور من الرتبة n لتقريب الحل للمسألة

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha,$$

يعدد h من الخطوات، وأن $y \in C^{n+1}[a, b]$، فإن خطأ القطع المحلي هو $O(h^n)$. ■

البرهان انظر إلى المعادلة (5.16) حيث يمكن كتابتها

$$y_{i+1} - y_i - hf(t_i, y_i) - \frac{h^2}{2} f'(t_i, y_i) - \cdots - \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y_i) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$$

لبعض قيم ξ_i ضمن (t_i, t_{i+1}). لذا فإن خطأ القطع المحلي يكون

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - T^{(n)}(t_i, y_i) = \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$$

لكلّ من $i = 0, 1, \ldots, N-1$. ولأن $y \in C^{n+1}[a, b]$، يكون لدينا $y^{(n+1)}(t) = f^{(n)}(t, y(t))$ محددا على $[a, b]$ وأن $\tau_i = O(h^n)$ لكل من $i = 1, 2, \ldots, N$. ■ ■ ■

مجموعة التمارين 5.3 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكلّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ عند $h = 0.5$

ب. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1$ عند $h = 0.5$

ج. $y' = 1 + \frac{y}{t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.25$

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.25$

2. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكلّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = e^{t-y}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.5$

ب. $y' = \frac{1+t}{1+y}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.5$

ج. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 2$ عند $h = 0.25$

د. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty), \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.25$

3. من التمرين (1) مستخدمًا طريقة تايلور من الرتبة 4.

4. من التمرين (2) مستخدمًا طريقة تايلور من الرتبة 4.

5. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكلّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 1.2, \quad y(1) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = \sin t + e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ عند $h = 0.5$

ج. $y' = 1/t(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ عند $h = 0.5$

د. $y' = -ty + 4t/y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.25$

6. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = \dfrac{2-2ty}{t^2+1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = \dfrac{y^2}{1+t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -(\ln 2)^{-1}$ عند $h = 0.1$

ج. $y' = (y^2+y)/t, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ عند $h = 0.2$

د. $y' = -ty + 4t/y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

7. كرِّر التمرين (5) مستخدمًا طريقة تايلور من الرتبة 4.

8. كرِّر التمرين (6) مستخدمًا طريقة تايلور من الرتبة 4.

9. لنفترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$$

مع حل صحيح $y(t) = t^2(e^t - e)$:

أ. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 مع $h = 0.1$ لتقريب الحل، وقارنه بقيم y الحقيقية.

ب. استخدم الإجابة في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب y عند القيم الآتية. وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.04)$ 2. $y(1.55)$ 3. $y(1.97)$

ج. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 4 مع $h = 0.1$ لتقريب الحل. وقارنه بقيم y الحقيقية.

د. استخدم الإجابة في الفقرة (ج) والاستكمال الداخلي لهرمايت التكعيبي المجزَّأ لتقريب y عند القيم الآتية. وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.04)$ 2. $y(1.55)$ 3. $y(1.97)$

10. لنفترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -1$$

مع حل صحيح $y(t) = -1/t$.

أ. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 مع $h = 0.05$ لتقريب الحل. وقارنه بقيم y الحقيقية.

ب. استخدم الإجابة في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب y عند القيم الآتية وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.052)$ 2. $y(1.555)$ 3. $y(1.978)$

ج. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 4 مع $h = 0.05$ لتقريب الحل. وقارنه بقيم y الحقيقية.

د. استخدم الإجابة في الفقرة (ج) والاستكمال الداخلي لهرمايت التكعيبي المجزَّأ لتقريب y عند القيم الآتية. وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.052)$ 2. $y(1.555)$ 3. $y(1.978)$

11. مقذوف كتلته $m = 0.11$ kg أُطلق عموديًا إلى أعلى بسرعة ابتدائية $v(0) = 8$ m/s، تؤثِّر عليه قوة الجاذبية، $F_g = -mg$. وتأثير مقاومة الهواء، $F_r = -kv|v|$، حيث $g = 9.8$ m/s^2 و $k = 0.002$ kg/m. المعادلة التفاضلية للسرعة v معطاة وفقًا للمعادلة $mv' = -mg - kv|v|$.

أ. أوجد السرعة بعد $0.1, 0.2, \ldots, 1.0$ من الثواني.

ب. إلى أقرب عشر من الثانية. حدّد متى يصل المقذوف إلى أعلى ارتفاع ويبدأ السقوط.

12. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 مع $h = 0.1$ لتقريب الحل إلى

$$y' = 1 + t\sin(ty), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$$

4.5 طرائق رونج–كوتا Runge–Kutta Methods

في أواخر الـ 1800 استخدم كارل رونج (1856 – 1927) Carle Runge طرائق مماثلة لتلك التي في هذا البند لاشتقاق صيغ مختلفة لتقريب حل مسائل القيمة الأولية

إن طرائق تايلور المقدمة في الفصول السابقة لها سمة إيجابية تكمن في خطأ القطع المحلي، لكن الجانب السلبي فيها يتعلق بعملية الحساب والتقييم المطلوبة لاشتقاقات $f(t, y)$. وهذه عملية معقدة وتستغرق وقتا طويلًا في غالبية المسائل. ولذلك فإن طرائق تايلور نادرًا ما تستخدم في التطبيق العملي. ولطرائق رونج–كوتا خطأ تقلص محلي من الرتبة العالية لطرائق تايلور، حيث تلغى الحاجة إلى حساب اشتقاقات $f(t, y)$ وتقييمها. وقبل عرض الأفكار المتعلقة باشتقاقها نحتاج إلى طرائق مبرهنة تايلور في متغيرين. وبرهان هذه التمهيدية يمكن إيجاده في أي كتاب متخصص في التفاضل والتكامل المتقدم. (انظر على سبيل مثال [Fu, p. 331]).

المبرهنة 13.5

افترض أن $f(t, y)$ وكل تفاضلاته الجزئية من الرتبة لا تزيد على $n + 1$ متصلة على $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, c \le y \le d\}$، وليكن $(t_0, y_0) \in D$. ولكل $(t, y) \in D$، يوجد ξ ما بين t و t_0 وكذلك μ ما بين y و y_0 مع

$$f(t, y) = P_n(t, y) + R_n(t, y)$$

حيث

$$\begin{aligned} P_n(t, y) = {} & f(t_0, y_0) + \left[(t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0)\right] \\ & + \left[\frac{(t - t_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + (t - t_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0)\right. \\ & \left. + \frac{(y - y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0)\right] + \cdots \\ & + \left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(t - t_0)^{n-j}(y - y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j}\partial y^j}(t_0, y_0)\right] \end{aligned}$$

في عام 1901، عمم مرتن ولهلم كوتا Martin Wilhelm Kutta (1867 – 1944) تعميما للطرائق التي طورها رونج عام 1895 لتكوين نظم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. هذه التقنيات مماثلة ولكن ليست نفسها بالضبط لتلك التي نعرفها حاليًا بطريقة رونج – كوتا Runge Kutta

و

$$R_n(t, y) = \frac{1}{(n + 1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(t - t_0)^{n+1-j}(y - y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j}\partial y^j}(\xi, \mu)$$

تسمى الدالة $P_n(t, y)$ كثيرة حدود تايلور بمتغيرين من الرتبة nth Taylor polynomial in two variables للدالة f حول (t_0, y_0)، و $R_n(t, y)$ عبارة عن الحد المتبقي المرتبط بـ $P_n(t, y)$. ■

مثال 1

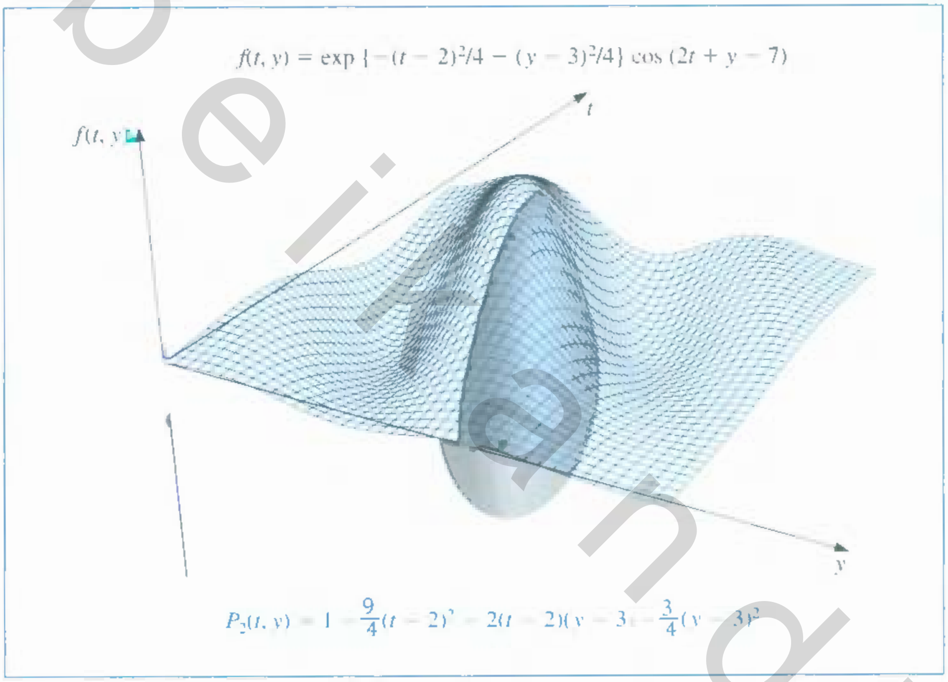
يبيّن شكل (4.5) الرسم البياني للدّالة

$$f(t, y) = \exp\left[-\frac{(t-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4}\right]\cos(2t + y - 7)$$

معا مع كثيرة حدود تايلور الثانية لـ f حول (2،3). أو كثيرة حدود بمتغيرين

$$P_2(t, y) = 1 - \tfrac{9}{4}(t-2)^2 - 2(t-2)(y-3) - \tfrac{3}{4}(y-3)^2$$

شكل 4.5



إن عمل التفاضل هذا الذي يتطلبه تحديد كثيرة حدود. سيكون متعبا باليد. ومن حسن الحظ فإن إحدى عمليات Maple تتيح ذلك. ونحتاج أولاً إلى تأسيس لعملية كثيرة حدود تايلور متعددة المتغيرات. وذلك بإدخال الأمر

```
>readlib(mtaylor)
```

الذي ينتج الاستجابة

```
Proc().....end proc
```

ويكون إيجاد كثيرة حدود تايلور التي نحتاج إليها في هذا مثال من خلال إصدار الأمر

```
>mtaylor(exp(-(t-2)^2/4-(y-3)^2/4)*cos(2*t+y-7),[t=2,y=3],3)
```

تؤدي المتغيرة الأخيرة في هذا الأمر إلى حاجتنا إلى كثيرة حدود تايلور متعددة للتغيرات الثانية بمعنى كثيرة حدود تكعيبية. فإذا كانت هذه المتغيرة 2 فإننا نحصل على كثيرة حدود ثابتة.

وعند حذف هذه المعلمة، تكون 6 تلقائيًا وتعطي كثيرة حدود تايلور الخامسة.

الاستجابة من أمر Maple هذا هو كثيرة حدود

$$1 - \frac{9}{4}(t-2)^2 - 2(t-2)(y-3) - \frac{3}{4}(y-3)^2$$

■

الخطوة الأولى في اشتقاق طريقة Runge-kutta هي تحديد قيم لـ a_1, α_1 و β_1 مع سمة كون $t\, a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ تقرب

$$T^{(2)}(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2} f'(t,y)$$

بخطأ ليس أكثر من $O(h^2)$. وهو خطأ تقلص محلي لطريقة تايلور من الرتبة 2. وحيث إن

$$y'(t) = f(t,y) \text{ و } f'(t,y) = \frac{df}{dt}(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\cdot y'(t)$$

فهذا يعطي

$$T^{(2)}(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\cdot f(t,y). \tag{18.5}$$

وتوسيع $f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ في كثيرة حدود تايلور من الرتبة 1 حول (t,y) الخاص بها يعطي

$$\begin{aligned} a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1) = {} & a_1 f(t,y) + a_1\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) \\ & + a_1\beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) + a_1 \cdot R_1(t+\alpha_1, y+\beta_1), \end{aligned} \tag{19.5}$$

حيث إن

$$R_1(t+\alpha_1, y+\beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu) + \alpha_1\beta_1\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y}(\xi,\mu) + \frac{\beta_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu), \tag{20.5}$$

لبعض قيم ξ ما بين t و $t+\alpha_1$ وكذلك μ ما بين y و $y+\beta_1$.

وبمطابقة معامل f واشتقاقاتها في المعادلتين (18.5 و 19.5) نحصل على المعادلات الثلاث

$$f(t,y): \quad a_1 = 1; \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(t,y): \quad a_1\alpha_1 = \frac{h}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y): \quad a_1\beta_1 = \frac{h}{2} f(t,y)$$

و

والوسيطات a_1, α_1 و β_1 تُحدَّد وحدها لتكون

$$\beta_1 = \frac{h}{2} f(t,y) \quad \text{و} \quad a_1 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{h}{2}$$

ولذلك

$$T^{(2)}(t,y) = f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) - R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)$$

ومن المعادلة (20.5) نجد أن

$$R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right) = \frac{h^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu) + \frac{h^2}{4}f(t,y)\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y}(\xi,\mu)$$

$$+ \frac{h^2}{8}(f(t,y))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu)$$

وإذا كانت المشتقات الجزئية جميعها من الرتبة الثانية لـ f محددة فإن

$$R_1\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)$$

تكون $O(h^2)$. وهي رتبة خطأ القطع المحلي لطريقة تايلور من الرتبة 2. وفقا لذلك، فإن استخدام الأسلوب الجديد بدلًا من طريقة تايلور من الرتبة 2، قد يضيف خطأً دون أن يزيد في رتبة الخطأ.

وطريقة معادلة الفروق الناتجة من استبدال $T^{(2)}(t,y)$ في طريقة تايلور من الرتبة 2 بالمقدار $f(t+(h/2), y+(h/2)f(t,y))$ هي طريقة خاصة Runge-kutta تعرف بطريقة النقطة الوسطية Midpoint method.

طريقة النقطة الوسطية Midpoint method

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i+\frac{h}{2}, w_i+\frac{h}{2}f(t_i,w_i)\right) \quad \text{لكل من} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

ولما كانت ثلاث معلمات فقط تظهر في $a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ ونحتاج إليها جميعًا في مطابقة $T^{(2)}$، فإننا نحتاج إلى صيغة أكثر تعقيدا لتحقيق الشروط المطلوبة لأيٍّ من طرائق تايلور من الرتبة العالية.

إن صيغة الأربع معلمات الأكثر مناسبة لتقريب

$$T^{(3)}(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2}f'(t,y) + \frac{h^2}{6}f''(t,y)$$

هي

$$a_1 f(t,y) + a_2 f(t+\alpha_2, y+\delta_2 f(t,y)) \tag{21.5}$$

وحتى مع هذه، فإن هناك مرونة غير وافية لمطابقة الحد

$$\frac{h^2}{6}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right]^2 f(t,y)$$

الناتج عن توسيع $(h^2/6)f''(t,y)$. وبناءً على ذلك فإن أحسن ما يمكن الحصول عليه من استخدام المعادلة (21.5) هو طرائق مع الخطأ المتقلص المحلي $O(h^2)$. وحقيقة كون المعادلة (21.5) لها أربع معلمات. فإن ذلك يعطي مرونة في اختيارها. ومن ثم فإن بالإمكان اشتقاق عدد $O(h^2)$

من الطرائق. وإحدى أكثر الطرائق أهمية هي طريقة أويلر المعدلة Modified Euler method التي تقابل الاختيار $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ و $\alpha_2 = \delta_2 = h$ ولها صيغة معادلة الفرق الآتية.

طريقة أويلر المعدلة Modified Euler method

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))],$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

وهناك طريقة مهمة أخرى $O(h^2)$ هي طريقة هانز Haun's method التي تقابل $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3}{4}$ و $\alpha_2 = \delta_2 = \frac{2}{3}h$. ولها صيغة معادلة الفرق الآتية:

طريقة هانز Heun's method

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i, w_i) + 3f\left(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3}hf(t_i, w_i)\right)\right],$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

وتصنف كل منهما على أنها من طرائق Runge-kutta من الرتبة 2. وهي رتبة خطأ القطع المحلي لها.

مثال 2 لنفترض تطبيق طرائق Runge-kutta من الرتبة 2 لمثالنا الاعتيادي

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

مع $N = 10, h = 0.2, t_i = 0.2i$ و $w_0 = 0.5$ في كل حالة. معادلات الفرق الناتجة عن صيغ مختلفة هي

طريقة النقطة الوسطية: $w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.218$

طريقة أويلر المعدلة: $w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.216$

طريقة هانز: $w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.217\overline{3}$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, 9$. ويتضمن جدول (5.5) نتائج هذه الحسابات. وبالنسبة إلى هذه المسألة. نجد أن طريقة النقطة الوسطية مناسبة جدًّا ومتبوعة بطريقة هانز. ■

وعلى الرغم من إمكانية تقريب $T^{(3)}(t, y)$ بخطأ $O(h^3)$ وفق الصيغة

$$f(t + \alpha_1, y + \delta_1 f(t + \alpha_2, y + \delta_2 f(t, y)))$$

المتضمنة لأربع معلمات، إلا أن العمليات الجبرية الداخلة في تحديد $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2$ و δ_2 تدخل فعلًا ولن تعرَض. والواقع أن طريقة Runge-kutta من الرتبة 3 الناتجة عن هذه الصيغة لا تستخدم عمومًا. وطريقة Runge-kutta الأكثر استخدامًا هي من الرتبة 4، وبصيغة معادلة الفرق، فإنها تعطى بالصيغة الآتية.

جدول 5.5

t_i	$y(t_i)$	طريقة نصف المنتصف	الخطأ	طريقة أولير المعدلة	الخطأ	طريقة هيون	الخطأ
0.0	0.5000000	0.5000000	0	0.5000000	0	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8280000	0.0012986	0.8260000	0.0032986	0.8273333	0.0019653
0.4	1.2140877	1.2113600	0.0027277	1.2069200	0.0071677	1.2098800	0.0042077
0.6	1.6489406	1.6446592	0.0042814	1.6372424	0.0116982	1.6421869	0.0067537
0.8	2.1272295	2.1212842	0.0059453	2.1102357	0.0169938	2.1176014	0.0096281
1.0	2.6408591	2.6331668	0.0076923	2.6176876	0.0231715	2.6280070	0.0128521
1.2	3.1799415	3.1704634	0.0094781	3.1495789	0.0303627	3.1635019	0.0164396
1.4	3.7324000	3.7211654	0.0112346	3.6936862	0.0387138	3.7120057	0.0203944
1.6	4.2834838	4.2706218	0.0128620	4.2350972	0.0483866	4.2587802	0.0247035
1.8	4.8151763	4.8009586	0.0142177	4.7556185	0.0595577	4.7858452	0.0293310
2.0	5.3054720	5.2903695	0.0151025	5.2330546	0.0724173	5.2712645	0.0342074

طريقة رونج–كوتا من الرتبة 4 Runge-kutta (Order Four)

$$w_0 = \alpha,$$
$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$
$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$
$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$
$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3),$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

لكلّ من $i = 0, 1, \ldots, N-1$. لهذه الطريقة خطأ القطع محلي $O(h^4)$. يتحقق بوجود خمسة اشتقاقات متصلة للحل $y(t)$. والسبب في تقديم الرموز k_1, k_2, k_3, k_4 في الطريقة هو استبعاد الحجة إلى تداخل شبكي متتال في المتغير الثاني لـ $f(t, y)$. (انظر التمرين 31) تنفذ الخوارزمية (2.5) طريقة Runge–kutta من الرتبة 4.

طريقة رونج–كوتا من الرتبة 4 Runge-kutta (Order Four)

ALGORITHM
الخوارزمية 2.5

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

عند $(N+1)$ من الكرّاد المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط النهاية a, b، عدد صحيح N ، α شرط ابتدائي.

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N+1)$ من قيم t.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/N$ $t = a$ $w = \alpha$ المخرجات (t, w)
2	لكل من $i = 1, 2, \ldots, N$ طبق الخطوات 3 – 5
3	ضع $K_1 = hf(t, w)$ $K_2 = hf(t + h/2, w + K_1/2)$ $K_3 = hf(t + h/2, w + K_2/2)$ $K_4 = hf(t + h, w + K_3)$
4	ضع $w = w + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$ (احسب w_i). $t = a + ih$ (احسب t_i)
5	المخرجات (t, w).
6	توقف.

■

مثال 3

استخدم طريقة Runge-kutta من الرتبة 4 لإيجاد تقريبات لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

مع $h = 0.2$، $N = 10$ و $t_i = 0.2i$ لنحصل على النتائج والأخطاء المبينة في جدول (6.5). ■

جدول 6.5

t_i	الصحيحة $y_i = y(t_i)$	رونج كوتا بالرتبة 4 w_i	الخطأ $\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8292933	0.0000053
0.4	1.2140877	1.2140762	0.0000114
0.6	1.6489406	1.6489220	0.0000186
0.8	2.1272295	2.1272027	0.0000269
1.0	2.6408591	2.6408227	0.0000364
1.2	3.1799415	3.1798942	0.0000474
1.4	3.7324000	3.7323401	0.0000599
1.6	4.2834838	4.2834095	0.0000743
1.8	4.8151763	4.8150857	0.0000906
2.0	5.3054720	5.3053630	0.0001089

إن الجهد الحسابي الرئيس في تطبيق طرائق Runge–kutta يكون في تقييم f. وفي الطرائق من الرتبة الثانية. فإن خطأ القطع المحلي هو $O(h^2)$، والثمن المقابل هو تقييم للدالة لكل خطوة. إن طريقة Runge–kutta من الرتبة 4 تتطلب أربعة تقييمات لكل خطوة. وخطأ القطع المحلي هو $O(h^4)$. وقد وجد بوتجر Butcher (انظر [But] للتلخيص) العلاقة بين عدد مرات التقييم لكل خطوة ورتبة خطأ القطع المحلي المبين في جدول (7.5). ويبيّن هذا الجدول لماذا تُفضّل الطرائق من الرتبة الأقل من 5 مع حجم عينة أصغر مقابل طرائق من الرتبة أكبر مستخدمين سعة خطوات أكبر.

جدول 7.5

عدد مرات التقييم لكل خطوة	2	3	4	$5 \le n \le 7$	$8 \le n \le 9$	$10 \le n$
أفضل خطأ قطع محلي ممكن	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$	$O(h^{n-3})$

يمكن توضيح أحد معايير المقارنة لطرائق Runge–kutta برتب أبطأ كما يلي:
إن طريقة Runge–kutta من الرتبة 4 تتطلب أربعة تقييمات لكل خطوة. ولذلك يجب أن تعطي أجوبة بدقة أكبر من طريقة أويلر وبربع سعة الخطوة إذا ما تطلب الأمر تميزها. ومن ثم فإنه لكي تتميز طريقة Runge–kutta من الرتبة 4 على طريقة Runge–kutta من الرتبة الثانية. يتحتم عليها إعطاء دقة أكبر مع سعة خطوة h مقارنة بطريقة الرتبة الثانية مع سعة خطوة $\frac{1}{2}h$ وذلك لأن الطريقة من الرتبة ٤ تتطلب ضعف عدد التقييمات لكل خطوة.
ومثال الآتي يوضح حالة تميز طريقة Runge–kutta من الرتبة الرابعة وفق هذا المقاس.

مثال 4

في المسألة

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

تُقارن طرائق أويلر Euler بـ $h = 0.025$ والنقطة الوسطية Midpoint بـ $h = 0.05$ وRunge–kutta من الرتبة الرابعة بـ $h = 0.1$ عند النقاط الشبكية المشتركة لهذه الطرائق $0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ و0.5. وكل واحد من هذه الأساليب يتطلب 20 تقييمًا. وننظر في هذا مثال يميز طريقة الرتبة الرابعة. ■

جدول 8.5

t_i	الصحيحة	أويلر $h = 0.025$	طريقة أويلر المعدلة $h = 0.05$	رونج – كوتا بالرتبة 4 $h = 0.1$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.5000000
0.1	0.6574145	0.6554982	0.6573085	0.6574144
0.2	0.8292986	0.8253385	0.8290778	0.8292983
0.3	1.0150706	1.0089334	1.0147254	1.0150701
0.4	1.2140877	1.2056345	1.2136079	1.2140869
0.5	1.4256394	1.4147264	1.4250141	1.4256384

مجموعة التمارين 4.5 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقرن التمهيدية بالقيمة الحقيقية:

القيمة الحقيقية قيمة h مسائل القيمة الابتدائية

أ. $y' = te^{3t} - 2y, 0 \le t \le 1, y(0) = 0$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

ب. $y' = 1 + (t - y)^2, 2 \le t \le 3, y(2) = 1$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = t + (1/1 - t)$.

ج. $y' = 1 + \frac{y}{t}, 1 \le t \le 2, y(1) = 2$ مع $h = 0.25$ الحل الصحيح $y(t) = t \ln t + 2t$.

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, 0 \le t \le 1, y(0) = 1$ مع $h = 0.25$
الحل الصحيح $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.

2. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن التمهيدية بالقيمة الحقيقية:

القيمة الحقيقية قيمة h مسائل القيمة الابتدائية

أ. $y' = e^{t-y},\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$.

ب. $y' = \dfrac{1+t}{1+y},\ 1 \le t \le 2,\ y(1) = 2$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$.

ج. $y' = -y + ty^{1/2},\ 2 \le t \le 3,\ y(2) = 2$ مع $h = 0.25$ الحل الصحيح $y(t) = \left(t - 2 + \sqrt{2}ee^{-t/2}\right)$.

د. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty),\ 1 \le t \le 2,\ y(1) = 2$ مع $h = 0.25$ الحل الصحيح $y(t) = \dfrac{4 + \cos 2 - \cos 2t}{2t^2}$.

3. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن التمهيدية بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2,\quad 1 \le t \le 2,\quad y(1) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2,\quad 1 \le t \le 3,\quad y(1) = 0$ مع $h = 0.2$ الحل الصحيح $y(t) = t\tan(\ln t)$.

ج. $y' = -(y+1)(y+3),\ 0 \le t \le 2,\ y(0) = -2$ مع $h = 0.2$ الحل الصحيح $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$.

د. $y' = -5y + 5t^2 + 2t,\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = \frac{1}{3}$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$.

4. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن التمهيدية بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = \dfrac{2 - 2ty}{t^2 + 1},\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = \dfrac{2t + 1}{t^2 + 1}$.

ب. $y' = \dfrac{y^2}{1+t},\quad 1 \le t \le 2,\quad y(1) = \dfrac{-1}{\ln 2}$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = \dfrac{-1}{\ln(t+1)}$.

ج. $y' = (y^2 + y)/t,\quad 1 \le t \le 3,\quad y(1) = -2$ مع $h = 0.2$ الحل الصحيح $y(t) = \dfrac{2t}{1 - 2t}$.

د. $y' = -ty + 4t/y,\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$.

5. كرّر تمرين (1) مستخدمًا طريقة هانز.
6. كرّر تمرين (2) مستخدمًا طريقة هانز.
7. كرّر تمرين (3) مستخدمًا طريقة هانز.
8. كرّر تمرين (4) مستخدمًا طريقة هانز.
9. كرّر تمرين (1) مستخدمًا طريقة النقطة الوسطية.
10. كرّر تمرين (2) مستخدمًا طريقة النقطة الوسطية.
11. كرّر تمرين (3) مستخدمًا طريقة النقطة الوسطية.
12. كرّر تمرين (4) مستخدمًا طريقة النقطة الوسطية.
13. كرّر تمرين (1) مستخدمًا طريقة Runge-kutta من الرتبة الرابعة.
14. كرّر تمرين (2) مستخدمًا طريقة Runge-kutta من الرتبة الرابعة.
15. كرّر تمرين (3) مستخدمًا طريقة Runge-kutta من الرتبة الرابعة.
16. كرّر تمرين (4) مستخدمًا طريقة Runge-kutta من الرتبة الرابعة.
17. استخدم نتائج تمرين (3) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y(1.25)$ و $y(1.93)$ ب. $y(2.1)$ و $y(2.75)$

ج. $y(1.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$

18. استخدم نتائج التمرين (4) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$، وقرن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y(0.94)$ و $y(0.54)$ ب. $y(1.93)$ و $y(1.25)$

ج. $y(2.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$

19. كرّر تمرين (17) مستخدما نتائج التمرين (7).

20. كرّر تمرين (18) مستخدما نتائج التمرين (8).

21. كرّر تمرين (17) مستخدما نتائج التمرين (11).

22. كرّر تمرين (18) مستخدما نتائج التمرين (12).

23. كرّر تمرين (17) مستخدما نتائج التمرين (15).

24. كرّر تمرين (18) مستخدما نتائج التمرين (16).

25. استخدم نتائج تمرين (15) والاستكمال الداخلي لهرمايت التكعيبي لتقريب قيم $y(t)$، وقارن التقريبات بالقيمة الحقيقية:

أ. $y(1.93)$ و $y(1.25)$ ب. $y(2.75)$ و $y(2.1)$

ج. $y(1.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$

26. استخدم نتائج التمرين (16) والاستكمال الداخلي لهرمايت التكعيبي لتقريب قيم $y(t)$، وقارن التقريبات بالقيمة الحقيقية:

أ. $y(0.94)$ و $y(0.54)$ ب. $y(1.93)$ و $y(1.25)$

ج. $y(2.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$

27. أثبت أن طرائق النقطة الوسطية Midpoint، وأويلر المعدلة Modified Euler، وهانز Heun تعطي التقريبات نفسها لمسألة النقطة الابتدائية

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$$

ولأي اختيار إلى h. لماذا يكون هذا صحيحا؟

28. ينساب ماء من خزان على شكل مخروطي مقلوب مع فوهة دائرية بمعدل

$$\frac{dx}{dt} = -0.6\pi r^2 \sqrt{2g} \frac{\sqrt{x}}{A(x)}$$

حيث تمثّل r نصف قطر الفوهة، وتمثّل x ارتفاع مستوى السائل عن رأس المخروط، و $A(x)$ تمثّل مساحة مقطع المخروط عند x من الوحدات فوق رأس المخروط. لنفترض $r = 0.1$ ft و $g = 32.1$ ft/s^2. وللخزان مستوى ماء ابتدائي قدره 8 ft، وحجم ابتدائي قدره $512(\pi/3)$ ft^3.

أ. احسب مستوى الماء بعد 10 min مع $h = 20$ s.

ب. حدّد ضمن 1 min، متى سيصبح الخزان فارغا.

29. التفاعل الكيميائي اللاامتراجع irreversible الذي يتضمن خلط جزيئين من كلٍّ من كرومات البوتاسيوم الصلب ($K_2Cr_2O_7$) والماء (H_2O) بثلاث ذرات من الكبريت الصلب (S) ليعطي ثلاثة جزيئات من غاز ثاني أكسيد الكبريت (SO_2)، وأربعة جزيئات من هايدروكسايد البوتاسيوم الصلب (KOH)، وجزيئين من أكسيد الكروم الصلب (Cr_2O_3) يمكن وضعه بالصيغة الرمزية

$$2K_2Cr_2O_7 + 2H_2O + 3S \longrightarrow 4KOH + 2Cr_2O_3 + 3SO_2$$

وإذا ما توفر أصلًا n_1 جزيء من $K_2Cr_2O_7$، n_2 جزيء من H_2O، و n_3 جزيء من S، فإن المعادلة التفاضلية الآتية توضح مقدار $x(t)$ من KOH بعد الزمن t:

$$\frac{dx}{dt} = k\left(n_1 - \frac{x}{2}\right)^2 \left(n_2 - \frac{x}{2}\right)^2 \left(n_3 - \frac{3x}{4}\right)^3$$

حيث يمثّل k ثابت سرعة التفاعل. فإذا كان $k = 6.22 \times 10^{-19}, n_1 = n_2 = 2 \times 10^3$، $n_3 = 3 \times 10^3$. فما عدد الوحدات من هايدروكسايد البوتاسيوم التي تكوّنت بعد $0.2\ s$ ؟

30. أثبت أن طريقة الفرق

$$w_0 = \alpha$$
$$w_{i+1} = w_i + a_1 f(t_i, w_i) + a_2 f(t_i + \alpha_2, w_1 + \delta_2 f(t_i, w_i))$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N-1$، لا يمكن أن يكون لها خطأ متقلص محلي $O(h^3)$ لأي اختيار للثوابت a_1, a_2, α_2 وδ_2.

31. إن طريقة Runge–kutta من الرتبة 4 يمكن كتابتها بالصيغة

$$w_0 = \alpha,$$
$$w_{i+1} = w_i - \frac{h}{6} f(t_i, w_i) + \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_1 h, w_i + \delta_1 h f(t_i, w_i))$$
$$+ \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_2 h, w_i + \delta_2 h f(t_i + \gamma_2 h, w_i + \gamma_3 h f(t_i, w_i)))$$
$$+ \frac{h}{6} f(t_i + \alpha_3 h, w_i + \delta_3 h f(t_i + \gamma_4 h, w_i + \gamma_5 h f(t_i + \gamma_6 h, w_i + \gamma_7 h f(t_i, w_i)))).$$

أوجد قيم الثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$، و γ_7.

5.5 التحكم بالخطأ وطريقة رونج-كوتا-فهلبرك
Error control and the Runge-Kutta-Fehlberg Method

لاحظنا في الفصل (6.4) الاستخدام المناسب لخطوة بسعات مختلفة لإنتاج طرائق تقريب تكاملية وافية من الناحية الحسابية. وهذا ليس كافيا لصالح هذه الطرائق في ضوء زيادة التعقيد عند تطبيق هذه الطرائق. وثمة مزية أخرى لدى هذه الطرائق تجعل منها ذات قيمة، حيث تتضمن العملية المتعلقة بسعة الخطوة تقديرا لخطأ القطع الذي لا يتطلّب تقريب الاشتقاقات العالية للدالة. وهذه الطرائق تدعى المتبنية Adaptive، بسبب تبنيها لكل من عدد النقاط المستخدمة في التقريب وموقعها، لضمان إبقاء خطأ القطع ضمن حد معين.

هناك اتصال وثيق بين مسألة تقريب قيمة تكامل مؤكد ومسألة تقريب الحل لمسألة القيمة الوسطية. وعلينا إذن ألّا نستغرب وجود طرائق متبنية لتقريب حلول مسائل القيمة الوسطية وكون هذه الطرائق ليست وافية فقط. بل تتضمن السيطرة على الخطأ أيضا.

ربما ترغب في مراجعة مادة التربيع المعــد في الفصل (6.4) قبل تناول مادة هذا الفصل والفصل (7.5).

يمكن وضع أي طريقة بخطوة واحدة لتقريب الحل $y(t)$ لمسألة القيمة الوسطية

$$y' = f(t, y) \quad \text{لكل} \quad a \le t \le b \quad \text{عند} \quad y(a) = \alpha$$

بالصيغة

$$w_{i+1} = w_i + h_i \phi(t_i, w_i, h_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

لدالة معين ϕ.

ثمة طريقة مثالية لمعادلة الفرق

$$w_{i+1} = w_i + h_i \phi(t_i, w_i, h_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

لتقريب الحل $y(t)$ لمسألة القيمة الوسطية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

تتسم بما يلي: عند حد السماح $\varepsilon > 0$، فإن أصغر عدد للنقاط الشبكية التي تستخدم لضمان الخطأ التام $|y(t_i) - w_i|$ لن يتجاوز ε لأي N، $i = 0, 1, \ldots,$. وليس غريبًا أن يكون لدينا أصغر عدد من النقاط الشبكية إلى جانب السيطرة على الخطأ التام لطريقة الفرق. الذي لا يتماشى والنقاط المتساوية التباعد في الفترة. سوف نختبر في هذا الفصل أساليب تستخدم في السيطرة على الخطأ لطريقة معادلة الفرق وفق أسلوب فعال من خلال اختيار مناسب للنقاط الشبكية.

وعلى الرغم من أننا لا نستطيع تحديد الخطأ التام لطريقة ما، إلا أننا سنرى في الفصل 10.5 الصلة القريبة ما بين خطأ القطع المحلي والخطأ التام. وباستخدام طرائق الترتيب المختلف يمكننا التنبؤ بخطأ القطع المحلي. وباستخدام هذا التنبؤ. نختار سعة الخطوة التي ستبقيها قيد الفحص مع الخطأ التام.

ولتوضيح الأسلوب، نفترض أن لدينا أسلوبين للتقريب: الأول عبارة عن طريقة من الرتبة n وُجدت من طريقة تايلور من الرتبة n بالصيغة

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\phi(t_i, y(t_i), h) + O(h^{n+1})$$

وتعطي تقريبات

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h) \quad \text{لكل} \quad i > 0$$

مع خطأ قطع محلي $\tau_{i+1}(h) = O(h^n)$. وتنشأ الطريقة عمومًا من خلال تطبيق تعديل Runge-kutta لطريقة تايلور مع عدم أهمية الاشتقاق المحدد.

الطريقة الثانية شبيهة بذلك، ولكنها أعلى من الرتبة واحدة، وناتجة عن طريقة تايلور من الرتبة $(n + 1)$ ذات الصيغة

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\tilde{\phi}(t_i, y(t_i), h) + O(h^{n+2})$$

وتعطي تقريبات

$$\tilde{w}_0 = \alpha$$

$$\tilde{w}_{i+1} = \tilde{w}_i + h\tilde{\phi}(t_i, \tilde{w}_i, h) \quad \text{لكل} \quad i > 0$$

مع خطأ قطع محلي $\tilde{\tau}_{i+1}(h) = O(h^{n+1})$.

نبدأ أولًا بافتراض أن $w_i = y(t_i) = \tilde{w}_i$، ونختار سعة خطوة ثابتة h لتوليد لتقريبات w_{i+1} و $\tilde{w}_{i+1}$ إلى $y(t_{i+1})$. ومن ثم

$$\begin{aligned}
\tau_{i+1}(h) &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \phi(t_i, y(t_i), h) \\
&= \frac{y(t_{i+1}) - w_i}{h} - \phi(t_i, w_i, h) \\
&= \frac{y(t_{i+1}) - [w_i + h\phi(t_i, w_i, h)]}{h} \\
&= \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - w_{i+1})
\end{aligned}$$

وبالأسلوب نفسه

$$\tilde{\tau}_{i+1}(h) = \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - \tilde{w}_{i+1})$$

وتمهيدية لذلك فإن

$$\begin{aligned}\tau_{i+1}(h) &= \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - w_{i+1})\\ &= \frac{1}{h}[(y(t_{i+1}) - \tilde{w}_{i+1}) + (\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})]\\ &= \tilde{\tau}_{i+1}(h) + \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})\end{aligned}$$

ولكن $\tau_{i+1}(h)$ هو $O(h^n)$. و $\tilde{\tau}_{i+1}(h)$ هو $O(h^{n+1})$. ولذا فإن الجزء المعنوي من $\tau_{i+1}(h)$ يجب أن يأتي من

$$\frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

هذا يعطينا تقريبًا سهل الحساب لخطأ القطع المحلي لطريقة $O(h^n)$:

$$\tau_{i+1}(h) \approx \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

وليس الهدف تقدير خطأ القطع المحلي. بل تعديل سعة الخطوة وإبقاءها ضمن حد معين.

ولعمل ذلك، نفترض الآن أنه ما دام $\tau_{i+1}(h)$ هو $O(h^n)$، فإن العدد K موجود ومستقل عن h مع

$$\tau_{i+1}(h) \approx Kh^n$$

ولذلك فإن خطأ القطع المحلي الناتج عن تطبيق طريقة من الرتبة n مع سعة خطوة جديدة qh يمكن تقديرها باستخدام التقريبات الأصلية w_{i+1} و $\tilde{w}_{i+1}$

$$\tau_{i+1}(qh) \approx K(qh)^n = q^n(Kh^n) \approx q^n\tau_{i+1}(h) \approx \frac{q^n}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

ولتحديد $\tau_{i+1}(qh)$ بالمقدار ε، فإننا نختار q بحيث إن

$$\frac{q^n}{h}|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}| \approx |\tau_{i+1}(qh)| \le \varepsilon$$

ومن ثم

$$q \le \left(\frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/n}$$

أحد الأساليب الشائعة التي تستخدم هذه المتباينة للسيطرة على الخطأ هي طريقة Runge-Kutta-Fehlberg (انظر [Fe]). ويستخدم هذا الأسلوب طريقة Runge-Kutta مع خطأ قطع محلي من الرتبة 5

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

لتقدير الخطأ المحلي في طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4 ومن خلال

$$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

فإن معادلات المعامل هي

لقد طوّر إرون فاهلبرغ Erwin Fehlberg هذه وغيرها من تقنيات تصحيح الخطأ. بينما كان يعمل مع وكالة الفضاء الأمريكية NASA في هنتسفيل/ألباما في ستينيات القرن الماضي 1960s. وفي عام 1960 نال ميدالية NASA للإنجاز العلمي المتميّز مقابل عمله هذا.

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{1}{4}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right),$$

$$k_5 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right),$$

$$k_6 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right).$$

ومن إيجابيات هذه الطريقة أنها تتطلب ستة تقييمات فقط لـ f في كل خطوة. وطرائق Runge–Kutta من الرتبتين 4 و 5 التي تُستخدم معًا عشوائية، وتتطلب (انظر جدول 7.5 في الفصل 4.5) أربعة تقييمات على الأقل لـ f بالنسبة إلى الطريقة من الرتبة 4. بالإضافة إلى ستة أخرى للطريقة من الرتبة 5، وبمجموع لا يقل عن عشرة تقييمات دالة.

في مبرهنة السيطرة على الخطأ error-control theory ثمة قيمة ابتدائية لـ h عند الخطوة (i) استخدمت لإيجاد القيم الابتدائي لـ w_{i+1} و $\tilde{w}_{i+1}$ التي تؤدي إلى تحديد q لتلك الخطوة. ومن ثم تُعاد الحسابات. وهذه العملية تتطلب ضعف عدد التقييمات الدالية لكل خطوة عند عدم السيطرة على الخطأ. وعمليًا تُختار قيمة q المستخدمة على نحو مختلف نوعًا ما لجعل تكلفة تقييم الدالة المتزايدة مجدية. وتستخدم قيمة q المحددة عند الخطوة (i) لغرضين هما

- عندما $q < 1$، لرفض الاختيار الأول لـ h عند الخطوة (i)، وتكرار الحسابات مستخدمين qh
- وعندما $q \geq 1$، لقبول القيمة المحسوبة عند الخطوة (i) مستخدمين سعة الخطوة I. ولتغيير سعة خطوة qh بالنسبة إلى الخطوة $(i + 1)$.

وبسبب مخالفة دلالة تقييم الدالة الواجب دفع ثمنها في حالة تكرار الخطوات، فإن q تُختار بتحفظ. وفي الحقيقة، مع طريقة Runge–Kutta–Fehlberg و $n = 4$ يكون الاختيار الاعتيادي

$$q = \left(\frac{\varepsilon h}{2|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/4} = 0.84\left(\frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/4}$$

في الخوارزمية (3.5) لطريقة Runge–Kutta–Fehlberg. أضيفت لخطوة 9 لاستبعاد تعديلات كبيرة في سعة الخطوة، بغرض تجنب هدر الكثير من الوقت مع سعات صغيرة للخطوة ضمن مناطق تتسم بمخالفات في اشتقاقات y. وكذلك تجنب سعات كبيرة للخطوة التي يمكنها أن تؤدي إلى تخطي مناطق حساسة ما بين الخطوات. وفي بعض الأحيان نجد أن عملية زيادة سعة الخطوة تحذف كليًا من الخوارزمية، وأن عملية تقليل سعة الخطوة تعدّل لتصبح ضمن العملية فقط عند الحاجة إليها لجعل الخطأ تحت السيطرة.

ALGORITHM

الخوارزمية

3.5

طريقة رونج-كوتا-فهلبرك Runge-Kutta-Fehlberg Method

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

مع خطأ قطع محلي ضمن حد سماح معين:

المدخلات: نقاط النهاية a و b، شرط ابتدائي α، حد سماح TOL، أكبر سعة خطوة $hmax$ أصغر سعة خطوة $hmin$.

المخرجات: t, w, h حيث إن w تقرّب $y(t)$، وقد استُخدمت سعة الخطوة h، أو ظهرت عبارة تفيد بأن أقل سعة للخطوة قد تم تجاوزها.

الخطوة	المضمون
1	ضع $t = a$ $w = \alpha$ $h = hmax$ $FLAG = 1$ المخرجات (t, w)
2	ما دام $(FLAG = 1)$، فطبق الخطوات 3 - 11.
3	ضع $K_1 = hf(t, w);$ $K_2 = hf\left(t + \frac{1}{4}h, w + \frac{1}{4}K_1\right);$ $K_3 = hf\left(t + \frac{3}{8}h, w + \frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2\right);$ $K_4 = hf\left(t + \frac{12}{13}h, w + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3\right);$ $K_5 = hf\left(t + h, w + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4\right);$ $K_6 = hf\left(t + \frac{1}{2}h, w - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5\right).$
4	ضع $R = \frac{1}{h}\left\|\frac{1}{360}K_1 - \frac{128}{4275}K_3 - \frac{2197}{75240}K_4 + \frac{1}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6\right\|$. (ملحوظة: $R = \frac{1}{h}\|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}\|$).
5	إذا كان $R \le TOL$ فطبّق الخطوتين 6 و7.
6	ضع $t = t + h$ (التقريب مقبول). $w = w + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5$.
7	المخرجات (t, w, h).
8	ضع $\delta = 0.84(TOL/R)^{1/4}$.
9	إذا كان $\delta \le 0.1$ ضع $h = 0.1h$ وإذا كان $\delta \ge 4$ ضع $h = 4h$ وما عدا ذلك ضع $h = \delta h$. (احسب h جديدة).

10	إذا كان $h > hmax$ فضع $h = hmax$
11	إذا كان $t \geq b$ فضع $FLAG = 0$ وإذا كان $t + h > b$ فضع $h = b - t$ وإذا كان $h < hmin$ فضع $FLAG = 0;$ المخرجات (تم تجاوز أصغر h). (العملية فشلت).
12	العملية تامة. توقف.

■

مثال 1 نستخدم هنا الخوارزمية (3.5) لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية.

$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5$ التي لها حل $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$

تتضمن المدخلات حدًّا أقصى $TOL = 10^{-5}$، أعلى سعة خطوة $hmax = 0.25$، وأصغر سعة خطوة $hmin = 0.01$. والنتائج مبينة في جدول (9.5)، وآخر عمودين في جدول (9.5) يبينان نتائج طريقة الرتبة الخامسة. وعند قيم صغيرة لـ t، يكون الخطأ أقل مما هو عليه في طريقة الرتبة الرابعة، ولكنه يتجاوز ما هو عليه في طريقة الرتبة الرابعة عندما تزداد قيمة t. ■

جدول 9.5

t_i	$y_i = y(t_i)$	RKF-4 w_i	h_i	R_i	$\lvert y_i - w_i\rvert$	RKF-5 $\hat{w}_i$	$\lvert y_i - \hat{w}_i\rvert$
0	0.5	0.5			0.5		
0.2500000	0.9204873	0.9204886	0.2500000	6.2×10^{-6}	1.3×10^{-6}	0.9204870	2.424×10^{-7}
0.4865522	1.3964884	1.3964910	0.2365522	4.5×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.3964900	1.510×10^{-6}
0.7293332	1.9537446	1.9537488	0.2427810	4.3×10^{-6}	4.2×10^{-6}	1.9537477	3.136×10^{-6}
0.9793332	2.5864198	2.5864260	0.2500000	3.8×10^{-6}	6.2×10^{-6}	2.5864251	5.242×10^{-6}
1.2293332	3.2604520	3.2604605	0.2500000	2.4×10^{-6}	8.5×10^{-6}	3.2604599	7.895×10^{-6}
1.4793332	3.9520844	3.9520955	0.2500000	7×10^{-7}	1.11×10^{-5}	3.9520954	1.096×10^{-5}
1.7293332	4.6308127	4.6308268	0.2500000	1.5×10^{-6}	1.41×10^{-5}	4.6308272	1.446×10^{-5}
1.9793332	5.2574687	5.2574861	0.2500000	4.3×10^{-6}	1.73×10^{-5}	5.2574871	1.839×10^{-5}
2.0000000	5.3054720	5.3054896	0.0206668		1.77×10^{-5}	5.3054896	1.758×10^{-5}

ثمة تنفيذ لطريقة Runge-Kutta-Fehlberg متوفرة في Maple باستخدام الأمر dsolve مع خيارات عددية. لنأخذ مسألة القيمة الابتدائية للمثال (1). الأمر

```
>g:=dsolve({D(y)(t)=y(t)-t*t+1,y(0)=0.5},y(t),numeric);
```

يعيد العملية

$$g := \text{proc}(rkf45\_x) \ldots \text{end}$$

يمكننا تقييم y كما هو واضح في مثال مستخدمين

```
>g(2.0);
```

الذي يعطي

$$[t = 2.0,\ y(t) = 5.305471958400194]$$

مجموعة التمارين 5.5 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة Runge-Kutta-Fehlberg مع $TOL = 10^{-4}$ و $hmax = 0.25$ و $hmin = 0.05$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0;$ القيمة الحقيقية $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$

ب. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1;$ القيمة الحقيقية $y(t) = t + 1/(1 - t)$

ج. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2;$ القيمة الحقيقية $y(t) = t \ln t + 2t$

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ القيمة الحقيقية $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$

2. استخدم طريقة Runge-Kutta-Fehlberg مع حد سماح $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = (y/t)^2 + y/t, \quad 1 \le t \le 1.2, \quad y(1) = 1$ مع $hmax = 0.05$ و $hmin = 0.02$.

ب. $y' = \sin t + e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ مع $hmax = 0.25$ و $hmin = 0.02$.

ج. $y' = 1/t(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ مع $hmax = 0.5$ و $hmin = 0.02$.

د. $y' = t^2, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$ مع $hmax = 0.5$ و $hmin = 0.02$.

3. استخدم طريقة Runge-Kutta-Fehlberg مع $TOL = 10^{-6}$ و $hmax = 0.5$ و $hmin = 0.05$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 4, \quad y(1) = 1$ القيمة الحقيقية $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$ القيمة الحقيقية $y(t) = t\tan(\ln t)$

ج. $y' = -(y + 1)(y + 3), \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = -2$ القيمة الحقيقية $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$

د. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ القيمة الحقيقية $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$

4. طريقة Runge–Kutta–Verner method [Ve] تعتمد على الصيغ

$$w_{i+1} = w_i + \frac{13}{160}k_1 + \frac{2375}{5984}k_3 + \frac{5}{16}k_4 + \frac{12}{85}k_5 + \frac{3}{44}k_6$$

و

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{3}{40}k_1 + \frac{875}{2244}k_3 + \frac{23}{72}k_4 + \frac{264}{1955}k_5 + \frac{125}{11592}k_7 + \frac{43}{616}k_8$$

حيث إن

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{6}, w_i + \frac{1}{6}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{4h}{15}, w_i + \frac{4}{75}k_1 + \frac{16}{75}k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{5}{6}k_1 - \frac{8}{3}k_2 + \frac{5}{2}k_3\right),$$

$$k_5 = hf\left(t_i + \frac{5h}{6}, w_i - \frac{165}{64}k_1 + \frac{55}{6}k_2 - \frac{425}{64}k_3 + \frac{85}{96}k_4\right),$$

$$k_6 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{12}{5}k_1 - 8k_2 + \frac{4015}{612}k_3 - \frac{11}{36}k_4 + \frac{88}{255}k_5\right),$$

$$k_7 = hf\left(t_i + \frac{h}{15}, w_i - \frac{8263}{15000}k_1 + \frac{124}{75}k_2 - \frac{643}{680}k_3 - \frac{81}{250}k_4 + \frac{2484}{10625}k_5\right),$$

$$k_8 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{3501}{1720}k_1 - \frac{300}{43}k_2 + \frac{297275}{52632}k_3 - \frac{319}{2322}k_4 + \frac{24068}{84065}k_5 + \frac{3850}{26703}k_7\right).$$

إن طريقة الرتبة السادسة $\tilde{w}_{i+1}$ تستخدم لتقدير الخطأ في طريقة الرتبة الخامسة w_{i+1}. ابنِ خوارزمية شبيهة بخوارزمية Runge–Kutta–Fehlberg. وكرّر التمرين (3) مستخدمًا هذه الطريقة الجديدة.

5. في مبرهنة انتشار مرض وبائي (انظر [Ba1] أو [Ba2]). يمكن نسبيًّا استخدام معادلة تفاضلية ابتدائية لتوقُّع عدد الأشخاص المصابين في المجتمع عند أي زمن بعد أن تُفترَض افتراضات تبسيطية مناسبة. ولنفترض – على نحو خاص – أن الأفراد جميعهم في مجتمع ثابت لديهم الاحتمال نفسه في الإصابة متى كانت هناك حالة إصابة في تلك المنطقة. وافترض $x(t)$ تمثّل عدد الأفراد المعرَّضين للإصابة عند الزمن t، وأن $y(t)$ تمثّل عدد المصابين. يبدو منطقيًا افتراض كون معدل التغير في عدد المصابين يتناسب مع حاصل ضرب $x(t)$ في $y(t)$ لكون المعدل يعتمد على كليهما. فإذا كان المجتمع كبيرًا كفاية فبافتراض أن $x(t)$ و $y(t)$ متصلان، فإن المسألة يمكن وضعها على الصيغة

$$y'(t) = kx(t)y(t)$$

حيث k ثابت، وتمثل $x(t) + y(t) = m$ المجتمع الكلي. وهذه المعادلة يمكن كتابتها بحيث تتضمن $y(t)$ فقط على النحو الآتي:

$$y'(t) = k(m - y(t))\,y(t)$$

أ. مفترضين أن $m = 100{,}000$، $y(0) = 1000$، $k = 2 \times 10^{-6}$، وأن الزمن مقيس بالأيام، أوجد تقريبًا لعدد المصابين بعد مرور 30 يومًا.

ب. تسمى المعادلة التفاضلية في الفقرة (أ) بمعادلة برنوللي Bernoulli equation. ويمكن تحويلها إلى معادلة تفاضلية خطية في $u(t) = (y(t))^{-1}$. استخدم هذا الأسلوب لإيجاد الحل الصحيح للمعادلة تحت الافتراضات نفسها كما في الفقرة (أ)، ثم قارن قيمة $y(t)$ الحقيقية بذلك التقريب. ماذا يكون $\lim_{t\to\infty} y(t)$؟ وهل يتفق هذا وحدسك؟

6. في التمرين السابق، يبقى المصابون جميعهم في المجتمع لنشر المرض. ولعل الأكثر منطقية أن نقدم متغيرًا ثالثًا هو $z(t)$ ليمثّل عدد الأشخاص المستبعدين من المجتمع الموبوء عند زمن معلوم t تمهيدية الحجر، الشفاء تمهيدية المناعة، أو الموت. وهذا يعقد المسألة، ولكن يمكن ملاحظة (انظر [Ba2]) حل تقريبي يُعطى بالصيغة

$$x(t) = x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)} \quad \text{و} \quad y(t) = m - x(t) - z(t)$$

حيث يمثّل k_1 معدل الإصابة، ويمثّل k_2 معدل العزل (الاستبعاد)، وإن $z(t)$ تُحدَّد بالمعادلة التفاضلية

$$z'(t) = k_2\left(m - z(t) - x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)}\right)$$

إن المؤلفين غير ملمّين بأي أسلوب لحل هذه المسألة مباشرة، ولذلك فثمة عملية عددية يجب تطبيقها. أوجد تقريبًا إلى $z(30)$، $y(30)$ و $x(30)$ مفترضًا أن $m = 100{,}000$ و $x(0) = 99{,}000$ و $k_1 = 2 \times 10^{-6}$ و $k_2 = 10^{-4}$.

6.5 طرائق متعددة الخطوات Multistep Methods

تُسمى الطرائق التي نُوقشت حتى الآن طرائق الخطوة الواحدة one-step method؛ لأن تقريب النقطة الشبكية t_{i+1} يتضمن معلومات من نقطة شبكية سابقة واحدة فقط هي t_i. وعلى الرغم من أن هذه الطرائق قد تستخدم معلومات تقييم داليّة عند نقاط ما بين t_i و t_{i+1}، فهي لا تحتفظ بتلك المعلومات لاستخدامها مباشرة في تقريبات مستقبلية. والمعلومات المستخدمة كلها ضمن هذه الطرائق مستخرجة في الفترة الجزئية التي تجعل الحل قيد التقريب.

وحيث إن الحل التقريبي متوفِّر عند كل واحدة من النقاط الشبكية $t_0, t_1, \ldots, t_i$ قبل ظهور التقريب عند t_{i+1}. ولأن الخطأ $|w_j - y(t_j)|$ يتجه نحو الزيادة مع j. فسيبدو من المنطقي تطوير طرائق تستخدم هذه البيانات السابقة وبدقة أكبر عند تقريب الحل عند t_{i+1}.

وتسمى الطرائق التي تستخدم التقريب عند أكثر من نقطة شبكية واحدة لتحديد التقريب عند النقطة اللاحقة طرائقَ متعددة الخطوات Multistep Methods. والتعريف الدقيق لها هو كالآتي بالإضافة إلى تعريف لنوعين من الطرائق متعددة الخطوات.

تعريف 14.5

طريقة متعددة الخطوات عددها m لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \tag{22.5}$$

لها معادلة فرق لإيجاد التقريب w_{i+1} عند النقطة الشبكية t_{i+1} معطاة بالمعادلة الآتية، حيث m عبارة عن عدد صحيح أكبر من 1

$$\begin{aligned} w_{i+1} = {} & a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} \\ & + h[b_m f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, w_i) + \cdots \\ & + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})], \end{aligned} \tag{23.5}$$

لـ $i = m-1, m, \ldots, N-1$، حيث إن $h = (b-a)/N$ و $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ و $b_0, b_1, \ldots, b_m$ عبارة عن ثوابت، وقيم البداية

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$ ■

محددة. وعندما تكون $b_m = 0$. فإن الطريقة تسمى "واضحة أو مفتوحة"؛ لأن المعادلة (23.5) تعطي w_{i+1} بوضوح بدلالة القيم التي حُدِّدت سابقا. وعندما $b_m \neq 0$ فإن الطريقة تسمى "غير واضحة أو مغلقة"؛ لأن w_{i+1} تظهر في كلا طرفي المعادلة (5.23) ويكون تحديدها غير واضح.

كان جون كوش آدمز John Couch Adams (1892–1819) مهتمًا على نحو خاص باستخدام قابليه في الحسابات الرياضية الدقيقة لتفحص مدارات الكواكب وقد تنبَّأ بوجود نبتون Neptune من خلال تحليل الحالات اللانظامية في الكوكب أورانوس Uranus. كما طوّر تقنيات التكامل العددي للمساعدة على تقريب حل المعادلات تفاضليا.

مثال 1

المعادلات

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3 \tag{24.5}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[55 f(t_i, w_i) - 59 f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37 f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9 f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

لكلٍّ من $i = 3, 4, \ldots, N-1$، هي طريقة واضحة بأربع خطوات تُعرف بأسلوب آدمز–باشفورث من الرتبة الرابعة fourth-order Adams–Bashforth technique.

المعادلات

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2 \tag{25.5}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

لكلٍّ من $i = 2, 3, \ldots, N-1$، هي طريقة واضحة بأربع خطوات تُعرف بأسلوب آدمز–مولتون من الرتبة الرابعة fourth-order Adams-Moulton technique.

يجب تحديد قيم البداية سواءً في المعادلة (24.5) أو المعادلة (25.5) بافتراض $w_0 = \alpha$ وتوليد بقية القيم من خلال طريقة Runge–Kutta أو ثمة أسلوب خطوة واحدة آخر.

ولتطبيق طريقة واضحة مثل المعادلة (25.5) مباشرة، يتحتم علينا حل المعادلة لواضحة w_{i+1}. وليس واضحًا أنه يمكن عمل ذلك عمومًا، أو أن حلًّا وحيدًا لـ w_{i+1} يمكن ظهوره دائمًا.

لبدء اشتقاق طريقة متعددة الخطوات، انظر أن حل مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة (22.5)

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

إذا ما تكاملت على الفترة $[t_i, t_{i+1}]$، تتسم بأن

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt$$

والتمهيدية أن

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt \tag{26.5}$$

ولأنه لا يمكننا عمل تكامل $f(t, y(t))$ دون معرفة الحل $y(t)$ للمسألة، فبدلًا من ذلك نعمل تكاملًا لكثيرة حدود استكمال داخلي $P(t)$ لـ $f(t, y(t))$، المحدد من خلال بعض نقط البيانات المستخرجة سابقًا $(t_0, w_0), (t_1, w_1), \ldots, (t_i, w_i)$. وعندما نفترض بالإضافة إلى ذلك أن $y(t_i) \approx w_i$، فإن المعادلة (26.5) تصبح

$$y(t_{i+1}) \approx w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(t)\,dt \tag{27.5}$$

وعلى الرغم من إمكانية استخدام أي صيغة لكثيرة حدود استكمال داخلي للاشتقاق، إلا أنه من المناسب جدًّا استخدام صيغة نيوتن للفرق التراجع Newton backward-difference.

ولاشتقاق أسلوب Adams-Bashforth الواضح ذي m من الخطوات، ننشئ كثيرة حدود الفرق التراجعي $P_{m-1}(t)$ من خلال

$$(t_i, f(t_i, y(t_i))), \ (t_{i-1}, f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))), \ldots, (t_{i+1-m}, f(t_{i+1-m}, y(t_{i+1-m})))$$

ولأن $P_{m-1}(t)$ عبارة عن كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة $m-1$، فإن ثمة عدد ξ_i ضمن (t_{i+1-m}, t_i) يكون موجودًا مع

إن تقنيات آدمز – باشفورث Adams – Bashforth تعود إلى J. C. Adams والذي طوّر هذه التقنيات لتقريب حل مسألة تدفق السائل العائدة الى باشفورث.

كان فورست ري مولتون (1872–1952) Forest Ray Moulton فلكيًّا. وقد طوّر طرق المصحح – المقدر المحسّنة لحلّ المعادلات البالستية خلال الحرب العالمية الأولى

$$f(t, y(t)) = P_{m-1}(t) + \frac{f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))}{m!}(t - t_i)(t - t_{i-1}) \cdots (t - t_{i+1-m})$$

وبتقديم متغير الحل $t = t_i + sh$ مع $dt = h\,ds$ ضمن $P_{m-1}(t)$ وحدّ الخطأ. نحصل على

$$\begin{aligned}
\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(t_i, y(t_i))\,dt \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))}{m!}(t - t_i)(t - t_{i-1}) \cdots (t - t_{i+1-m})\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \nabla^k f(t_i, y(t_i)) h (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds \\
&\quad + \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))\,ds.
\end{aligned}$$

تُقيّم التكاملات $(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$ لقيم k المختلفة بسهولة، وهي مبيّنة في جدول (10.5). وعلى سبيل المثال، عندما $k = 3$ فإن

جدول 10.5

ك	$(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$
[illegible]	1
[illegible]	$\frac{1}{2}$
[illegible]	$\frac{5}{12}$
[illegible]	$\frac{3}{8}$
[illegible]	$\frac{251}{720}$
[illegible]	$\frac{95}{288}$

$$\begin{aligned}
(-1)^3 \int_0^1 \binom{-s}{3} ds &= -\int_0^1 \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} ds \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 (s^3 + 3s^2 + 2s)\,ds \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{s^4}{4} + s^3 + s^2\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

ومن ثم فإن

$$\begin{aligned}
\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt &= h\left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2}\nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12}\nabla^2 f(t_i, y(t_i)) + \cdots\right] \\
&\quad + \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))\,ds
\end{aligned} \tag{28.5}$$

ولأن $s(s+1) \cdots (s+m-1)$ لا تغير الإشارة على $[0, 1]$. فإن مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة للتكاملات يمكن استخدامها لنستنتج أنه لعددٍ ما μ_i حيث $t_{i+1-m} < \mu_i < t_{i+1}$. فإن حد الخطأ في المعادلة (28.5) يصبح

$$\begin{aligned}
&\frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))\,ds \\
&\quad = \frac{h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1)\,ds
\end{aligned}$$

أو

$$h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds \tag{29.5}$$

ولكون $y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$، فإن المعادلة (26.5) يمكن كتابتها على النحو الآتي

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2}\nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12}\nabla^2 f(t_i, y(t_i)) + \cdots\right]$$
$$+ h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds \qquad (30.5)$$

مثال 2 لاشتقاق أسلوب Adams-Bashforth ذي الخطوات الثلاث، نفترض المعادلة (30.5) مع $m = 3$

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + h\left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2}\nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12}\nabla^2 f(t_i, y(t_i))\right]$$
$$= y(t_i) + h\left\{f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2}[f(t_i, y(t_i)) - f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))]\right.$$
$$\left.+ \frac{5}{12}[f(t_i, y(t_i)) - 2f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))]\right\}$$
$$= y(t_i) + \frac{h}{12}[23f(t_i, y(t_i)) - 16f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 5f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))]$$

وطريقة Adams-Bashforth ذات الخطوات الثلاث تعطي

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[23f(t_i, w_i) - 16f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

لـ $i = 2, 3, \ldots, N-1$. ■

ويمكن اشتقاق الطرائق المتعددة الخطوات باستخدام سلسلة تايلور أيضًا. وقد تنولنا مثالًا على العملية المعتمدة في التمرين (12). وقد شُرح الاشتقاق باستخدام كثيرة حدود لاكرنج للاستكمال الداخلي فترى التمرين (11).

إن خطأ القطع المحلي للطرائق المتعددة الخطوات معرف بقياس الطرائق بخطوة واحدة. وفي حالة الطرائق المتعددة الخطوات، فإن خطأ القطع المحلي يعطي مقياسًا لفشل معادلة التفاضلية في حل معادلة الفرق.

تعريف 15.5 إذا كان $y(t)$ حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

وكان

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m}$$
$$+ h[b_m f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, w_i) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})]$$

هو الخطوة $(i+1)$st من طريقة متعددة الخطوات . فإن خطأ القطع المحلي عند هذه الخطوة هو

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - a_{m-1}y(t_i) - \cdots - a_0 y(t_{i+1-m})}{h} - [b_m f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, y(t_{i+1-m}))] \tag{31.5}$$

لكلّ من $i = m-1, m, \ldots, N-1$.

مثال 3 لتحديد خطأ القطع المحلي لطريقة Adams–Bashforth ذات الخطوات الثلاث التي اشتُقَّت في مثال (2)؛ افترض صيغة الخطأ المعطاة في المعادلة (29.5) والقيمة المناسبة من جدول (10.5)

$$h^4 f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))(-1)^3 \int_0^1 \binom{-s}{3} ds = \frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))$$

وباستخدام حقيقة أن $f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) = y^{(4)}(\mu_i)$ ومعادلة الفرق التي اشتُقَّت في مثال (2)، يكون لدينا

$$\begin{aligned}\tau_{i+1}(h) &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \frac{1}{12}[23f(t_i, y(t_i)) - 16f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 5f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] \\ &= \frac{1}{h}\left[\frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))\right] = \frac{3h^3}{8} y^{(4)}(\mu_i)\end{aligned}$$

لبعض $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$.

إن بعض الطرائق المتعددة الخطوات الواضحة مع قيمها الابتدائية ، وخطأ القطع المحلي المطلوبة هي كما يلي. واشتقاق هذه الأساليب مشابه للعملية في المثالين (2) و (3).

طريقة آدمز - باشفورث الواضحة ذات الخطوتين
Adams-Bashforth Two-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1,$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[3f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})], \tag{32.5}$$

حيث $i = 1, 2, \ldots, N-1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{5}{12}y'''(\mu_i)h^2$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز - باشفورث الواضحة ذات الخطوات الثلاث
Adams-Bashforth Three-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2,$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[23f(t_i, w_i) - 16f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, w_{i-2})], \tag{33.5}$$

حيث $i = 2, 3, \ldots, N-1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{3}{8}y^{(4)}(\mu_i)h^3$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز–باشفورث الواضحة ذات الأربع خطوات
Adams-Bashforth Four-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3 \tag{34.5}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

حيث $N-1$,... ,$i = 2, 3$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{251}{720}y^{(5)}(\mu_i)h^4$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز–باشفورث الواضحة ذات الخطوات الخمس
Adams-Bashforth Five-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3, \quad w_4 = \alpha_4$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720}[1901f(t_i, w_i) - 2774f(t_{i-1}, w_{i-1}) \tag{35.5}$$
$$+ 2616f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 1274f(t_{i-3}, w_{i-3}) + 251f(t_{i-4}, w_{i-4})]$$

حيث $N-1$,... ,$i = 4, 5$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{95}{288}y^{(6)}(\mu_i)h^5$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-4}, t_{i+1})$.

تُشتَق الطرائق الضمنية Implicit باستخدام $(t_{i+1}, f(t_{i+1}, y(t_{i+1})))$ بوصفها رأس استكمال داخلي إضافية في تقريب التكامل $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$.

إن من الطرائق الضمنية الأكثر شيوعًا ما يأتي:

طريقة آدمز–مولتون الضمنية ذات الخطوتين
Adams-Moulton Two-Step Implicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[5f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})], \tag{36.5}$$

حيث $N-1$,... ,$i = 1, 2$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = -\frac{1}{24}y^{(4)}(\mu_i)h^3$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز–مولتون الضمنية ذات الخطوات الثلاث
Adams-Moulton Three-Step Implicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \tag{37.5}$$

$$w_{i+1} = w_i - \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})],$$

حيث $N-1$,... ,$i = 2, 3$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\mu_i)h^4$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز–مولتون الضمنية ذات الخطوات الأربع
Adams-Moulton Four-Step Implicit

$$w_0 = \alpha \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720}[251f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 646f(t_i, w_i) \tag{38.5}$$
$$- 264f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 106f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 19f(t_{i-3}, w_{i-3})],$$

حيث $i = 3, 4, \ldots, N-1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = -\frac{3}{160}y^{(6)}(\mu_i)h^5$، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$.

والمثير للاهتمام هو مقارنة طريقة آدمز–باشفورث الواضحة ذات m من الخطوات بطريقة آدمز–مولتون الضمنية ذات $(m-1)$ من الخطوات. وتتضمن كلتا الطريقتين m من التقييمات لـ f في كل خطوة، مع وجود الحد $y^{(m+1)}(\mu_i)h^m$ ضمن خطأ القطع المحلي لهما. وعمومًا فإن معاملات الحدود التي تتضمن f في خطأ القطع المحلي تكون أصغر في الطرائق الضمنية مقارنة بالطرائق الواضحة. وهذا يؤدي إلى استقرار أكبر مع أخطاء مدورة أصغر بالنسبة إلى الطرائق الضمنية.

مثال 4 لنأخذ مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1 \qquad 0 \le t \le 2 \qquad y(0) = 0.5$$

والتقريبات من خلال طريقة Adams–Bashforth الواضحة ذات الخطوات الأربع، وطريقة Adams–Moulton الضمنية ذات الخطوات الثلاث. وإن كلتا الطريقتين تستخدم $h = 0.2$.

المعادلة التفاضلية لطريقة Adams–Bashforth هي

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

لـ $i = 3, 4, \ldots, 9$. وعند التبسيط واستخدام $f(t, y) = y - t^2 + 1, h = 0.2$ و $t_i = 0.2i$ تصبح

$$w_{i+1} = \frac{1}{24}[35w_i - 11.8w_{i-1} + 7.4w_{i-2} - 1.8w_{i-3} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

والمعادلة التفاضلية لطريقة Adams-Moulton هي

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

لـ $i = 2, 3, \ldots, 9$. وهذه تختصر لتصبح

$$w_{i+1} = \frac{1}{24}[1.8w_{i+1} + 27.8w_i - w_{i-1} + 0.2w_{i-2} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

ولأجل استخدام هذه الطريقة بوضوح، فإن حل w_{i+1} يعطي

$$w_{i+1} = \frac{1}{22.2}[27.8w_i - w_{i-1} + 0.2w_{i-2} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

لـ $i = 2, 3, \ldots, 9$.

وقد استخرجت النتائج في جدول (11.5) باستخدام القيم الصحيحة من $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$ لـ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ و α_3 في حالة طريقة Adams-Bashforth الواضحة، ولـ α, α_1 و α_2 في حالة طريقة Adams-Moulton الضمنية. ■

في مثال (4) أعطت طريقة Adams-Moulton الضمنية نتائج أفضل مما أعطته طريقة Adams-Bashforth الواضحة من نفس الرتبة. وعلى الرغم من عمومية الحالة هذه، إلا أن الطرائق الضمنية تتسم بالضعف، لأنها تكمن أولا في وجوب تحويل طريقة التمثيل الجبري الواضح إلى w_{i+1}. هذه العملية غير ممكنة دائما. وكما يمكن رؤيته من خلال افتراض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = e^y \qquad 0 \le t \le 0.25 \qquad y(0) = 1$$

جدول 5.11

t_i	الصحيحة	آدمز – باشفورث w_i	الخطأ	آدمز–مواتون w_i	الخطأ
0.0	0.5000000				
0.2	0.8292986				
0.4	1.2140877				
0.6	1.6489406			1.6489341	0.0000065
0.8	2.1272295	2.1273124	0.0000828	2.1272136	0.0000160
1.0	2.6408591	2.6410810	0.0002219	2.6408298	0.0000293
1.2	3.1799415	3.1803480	0.0004065	3.1798937	0.0000478
1.4	3.7324000	3.7330601	0.0006601	3.7323270	0.0000731
1.6	4.2834838	4.2844931	0.0010093	4.2833767	0.0001071
1.8	4.8151763	4.8166575	0.0014812	4.8150236	0.0001527
2.0	5.3054720	5.3075838	0.0021119	5.3052587	0.0002132

ولأن $f(t, y) = e^y$. فإن لطريقة Adams–Moulton ذات الخطوات الثلاث معادلة الفرق

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9e^{w_{i+1}} + 19e^{w_i} - 5e^{w_{i-1}} + e^{w_{i-2}}]$$

وهذه المعادلة لا يمكن حلها بوضوح لـ w_{i+1}.

ويمكننا استخدام طريقة نيوتن أو طريقة القاطع لتقريب w_{i+1}، ولكن هذا من شأنه تعقيد العملية إلى حد كبير. وعمليًا لا تستخدم الطرائق الواضحة المتعددة الخطوات وفق ما شُرح. بل إنها بالأحرى تُستخدم لتحسين التقريبات التي ظهرت من خلال الطرائق الواضحة. ويسمى لدمج ما بين الأسلوبين الواضح والضمني "طريقة المتنبئ – المصحح predictor-corrector method". تتنبأ الطريقة الواضحة بالتقريب. والطريقة الضمنية تصحح هذا التنبؤ.

لنأخذ الطريقة من الرتبة الرابعة التالية. نحسب في الخطوة الأولى نقاط البداية w_0، w_1، w_2، w_3 لطريقة Adams–Bashforth الواضحة ذات الخطوات الأربع. ولعمل ذلك، نستخدم طريقة بخطوة واحدة ورتبة 4. وهي طريقة Runge–Kutta من الرتبة 4. بعد ذلك نحسب التقريب $w_4^{(0)}$ إلى $y(t_4)$ مستخدمين طريقة Adams–Bashforth الواضحة بمنزلة المتنبئ

$$w_4^{(0)} = w_3 + \frac{h}{24}[55f(t_3, w_3) - 59f(t_2, w_2) + 37f(t_1, w_1) - 9f(t_0, w_0)]$$

يتحسن هذا التقريب بإدخال $w_4^{(0)}$ ضمن الطرف الأيمن لطريقة Adams–Moulton الضمنية بثلاث خطوات. واستخدام تلك الطريقة بمنزلة المصحح. هذا يعطي

$$w_4^{(1)} = w_3 + \frac{h}{24}[9f(t_4, w_4^{(0)}) + 19f(t_3, w_3) - 5f(t_2, w_2) + f(t_1, w_1)]$$

التقييم الوحيد للدالة الجديد الذي تتطلّبه هذه العملية وهو $f(t_4, w_4^{(0)})$ ضمن معادلة المصحح. والقيم الأخرى جميعها لـ f قد حُسبت في التقريبات السابقة.

تستخدم القيمة $w_4^{(1)}$ بعد ذلك بمنزلة تقريب إلى $y(t_4)$. ويُعاد أسلوب استخدام طريقة Adams–Bashforth بمنزلة المتنبئ وطريقة Adams–Moulton بمنزلة المصحح؛ لإيجاد التقريب الابتدائي $w_5^{(0)}$ والتقريب النهائي $w_5^{(1)}$ إلى $y(t_5)$. تستمر هذه العملية إلى حين إيجاد تقريب إلى $y(t_N) = y(b)$.

ويمكن إيجاد تقريبات محسّنة إلى $y(t_{i+1})$ من خلال تكرار صيغة Adams-Moulton

$$w_{i+1}^{(k+1)} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}^{(k)}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

وعلى أي حال تتقارب $\{w_{i+1}^{(k+1)}\}$ نحو التقريب المعطى من خلال الصيغة الواضحة بدلا من الحل $y(t_{i+1})$، وعادة ما يكون استخدام تقليص في سعة الخطوة أكثر كفاءة إذا ما دعت الحاجة إلى دقة أكبر.

وتستند الخوارزمية (4.5) إلى طريقة Adams-Bashforth بمنزلة المتنبئ وتكرار واحد لطريقة Adams-Moulton بمنزلة المصحح. مع قيم بداية تستخرج من طريقة Runge–Kutta من الرتبة 4.

ALGORITHM

الخوارزمية

4.5

متنبئ- مصحح آدم من الرتبة 4
Adams Fourth-Order Predictor-Corrector

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

عند $(N + 1)$ من الكرّراد المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط النهاية a و b، عدد صحيح N، شرط ابتدائي α.

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N + 1)$ من قيم t.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/N$ $t_0 = a$ $w_0 = \alpha$ المخرجات (t_0, w_0).
2	عند $i = 1, 2, 3$. طبق الخطوات 3 − 5. (احسب القيمة البدائية مستخدما طريقة *Runge–Kutta*)
3	ضع $K_1 = hf(t_{i-1}, w_{i-1})$ $K_2 = hf(t_{i-1} + h/2, w_{i-1} + K_1/2)$ $K_3 = hf(t_{i-1} + h/2, w_{i-1} + K_2/2)$ $K_4 = hf(t_{i-1} + h, w_{i-1} + K_3)$
4	ضع $w_i = w_{i-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$ $t_i = a + ih$
5	المخرجات (t_i, w_i).
6	عند $i = 4, \ldots, N$. طبق الخطوات 7 − 10.
7	ضع $t = a + ih$ $w = w_3 + h[55f(t_3, w_3) - 59f(t_2, w_2) + 37f(t_1, w_1)$ $- 9f(t_0, w_0)]/24$ (التنبؤ w_i) $w = w_3 + h[9f(t, w) + 19f(t_3, w_3) - 5f(t_2, w_2)$ $+ f(t_1, w_1)]/24$ (صحح w_i)
8	المخرجات (t, w).

9	عند $j = 0, 1, 2$ ضع $t_j = t_{j+1}$ (حضّر الإعادة التالية) $w_j = w_{j+1}$
10	ضع $t_3 = t$ $w_3 = w$
11	توقف.

■

مثال 5

يتضمن جدول (12.5) النتائج المستخرجة باستخدام الخوارزمية (4.5) لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \le t \le 2 \quad y(0) = 0.5$$

مع $N = 10$. النتائج هنا أدق مما هي في مثال (4) التي استخدمت المصحح فقط (أي طريقة Adams–Moulton الضمنية). ولكن هذا ليس دائمًا.

جدول 12.5

t_i	$y_i = y(t_i)$	w_i	الخطأ $\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8292933	0.0000053
0.4	1.2140877	1.2140762	0.0000114
0.6	1.6489406	1.6489220	0.0000186
0.8	2.1272295	2.1272056	0.0000239
1.0	2.6408591	2.6408286	0.0000305
1.2	3.1799415	3.1799026	0.0000389
1.4	3.7324000	3.7323505	0.0000495
1.6	4.2834838	4.2834208	0.0000630
1.8	4.8151763	4.8150964	0.0000799
2.0	5.3054720	5.3053707	0.0001013

إدوارد آرثر ملني (1896–1950) Edward Arthur Milne عمل في البحث الباستي خلال الحرب العالمية الأولى. وبعد ذلك في مرصد الفيزياء للطاقة الشمسية في جامعة كامبردج وفي عام 1929 تم ترشيحه لكرسي روز بول Rouse Ball في جامعة أوكسفورد W W

وهناك طرائق أخرى متعددة الخطوات يمكن اشتقاقها باستخدام تكامل كثيرات حدود استكمال داخلي على الفترات بصيغة $[t_j, t_{i+1}]$ لـ $j \le i - 1$، لإيجاد تقريب إلى $y(t_{i+1})$. وعند تكامل كثيرة حدود استكمال داخلي على الفترة $[t_{i-3}, t_{i+1}]$، فإن التمهيدية هي "طريقة ملن Milne's method"

$$w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3}[2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

التي فيها القطع $\frac{14}{45}h^4y^{(5)}(\xi_i)$. من أجل قيمة ما $\xi_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$ تستخدم هذه الطريقة أحيانًا كمتنبئ لطريقة سمبسون الضمنية **Simpson's method**.

$$w_{i-1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 4f(t_i, w_i) + f(t_{i-1}, w_{i-1})]$$

التي لها خطأ قطع محلي $-(h^4/90)y^{(5)}(\xi_i)$ لبعض قيم $\xi_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$، والمستخرجة من خلال تكامل كثيرة حدود استكمال داخلي على الفترة $[t_{i-1}, t_{i+1}]$.

إن اسم سمبسون Simpson مرتبط بهذه التقنية، لأنها تستند إلى قاعدة سمبسون للتكامل

خطأ القطع المحلي المرتبط بطريقة متنبئ – مصحح من نوع Milne Simpson أقل عمومًا من طريقة Adams–Bashforth– Moulto.

لكن لهذا الأسلوب استخدامات محددة، بسبب مشاكل تدوير الخطأ التي لا تظهر مع عملية Adams. سنتناول تفاصيل هذه الصعوبة في الفصل (10.5).

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 6.5

1. استخدم طرائق Adams–Bashforth لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية. وفي كل حالة استخدم قيم بداية صحيحة، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$

ب. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$

ج. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = t \ln t + 2t$

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \ 0 \le t \le 1, \ y(0) = 1$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$

2. استخدم طرائق Adams-Bashforth لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية. وفي كل حالة استخدم قيم بداية مستخرجة من طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4. وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = \frac{2 - 2ty}{t^2 + 1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{2t + 1}{t^2 + 2}$.

ب. $y' = \frac{y^2}{1 + t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad (1) = \frac{-1}{\ln 2}$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{-1}{\ln(t + 1)}$.

ج. $y' = (y^2 + y)/t, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{2t}{1 - 2t}$.

د. $y' = -ty + 4t/y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$.

3. استخدم طرائق Adams-Bashforth لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية. وفي كل حالة استخدم قيم بداية مستخرجة من طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{t}{1 + \ln t}$.

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = t\tan(\ln t)$.

ج. $y' = -(y + 1)(y + 3), \ 0 \le t \le 2, \ y(0) = -2$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيق $y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$.

د. $y' = -5y + 5t^2 + 2t, \ 0 \le t \le 1, \ y(0) = \frac{1}{3}$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$.

4. استخدم طرائق Adams-Moulton جميعها لتقريب حلول التمرين 1 (أ، ج، د). وفي كل حالة استخدم قيم بداية صحيحة. وضمّن حل w_{i+1}. وقارن النتائج بالقيم الحقيقية.

5. استخدم الخوارزمية (4.5) لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (1).

6. استخدم الخوارزمية (4.5) لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (2).

7. استخدم الخوارزمية (4.5) لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (3).

8. غيّر الخوارزمية (4.5) بحيث يكون بالإمكان تكرار المصحح لعدد p من المرات. كرّر التمرين (7) مع $p = 2, 3$ و 4 من المرات. ما اختيار p الذي يعطي أحسن جواب لكل مسألة للقيمة الابتدائية؟

9. مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = e^y, \quad 0 \le t \le 0.20, \quad y(0) = 1$$

لها حل

$$y(t) = 1 - \ln(1 - et)$$

إن تطبيق طريقة Adams–Moulton بثلاث خطوات على هذه المسألة يعادل إيجاد النقطة الثابتة w_{i+1} لـ

$$g(w) = w_i + \frac{h}{24}(9e^{w} + 19e^{w_i} - 5e^{w_{i-1}} + e^{w_{i-2}})$$

أ. مع $h = 0.01$، أوجد w_{i+1} من خلال تكرار دالية لـ $i = 2, \ldots, 19$ مستخدمًا قيم بداية صحيحة w_0, w_1 و w_2. استخدم في كل خطوة w_i لتقريب ابتدائي إلى w_{i+1}.

ب. هل ستعمل طريقة نيوتن على تسريع التقارب عما هي مع تكرار دالية؟

10. استخدم طريقة Milne–Simpson Predictor-Corrector لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (3).

11. أ. اشتق المعادلة (32.5) باستخدام صيغة لاكرنج لكثيرة حدود استكمال دخلي.

ب. اشتق المعادلة (34.5) باستخدام صيغة الفرق التراجع لنيوتن لكثيرة حدود ستكمال داخلي.

12. اشتق المعادلة (33.5) من خلال الطريقة الآتية. ضع

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + ahf(t_i, y(t_i)) + bhf(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + chf(t_{i-2}, y(t_{i-2}))$$

وسّع $y(t_{i+1}), f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))$ و $f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$ في سلسلة تايلور حول $(t_i, y(t_i))$ وعدّل معاملات h, h^2, h^3 لإيجاد a, b, c.

13. اشتق المعادلة (36.5) وخطأ القطع المحلي لها باستخدام صيغة مناسبة لكثيرة حدود استكمال داخلي.

14. اشتق طريقة Simpson's من خلال تطبيق قاعدة Simpson's للتكامل

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$$

15. اشتق طريقة Milne's من خلال تطبيق صيغة Newton–Cotes المفتوحة (المعادلة (29.4)) للتكامل.

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-3}) = \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$$

16. تحقق من بيانات جدول (10.5).

7.5 طرائق متعددة الخطوات متغيرة السعة Variable Step-size Multistep Methods

تستخدم طريقة Runge–Kutta–Fehlberg للسيطرة على الخطأ؛ لأنها في كل خطوة بكلفة إضافية قليلة تعطي تقريبين يمكن مقارنتهما وربطهما بخطأ القطع المحلي. إن أساليب المتنبئ – المصحح تنتج دائمًا اثنين من التقريبات عند كل خطوة. و من ثم فإنهما مرشحان طبيعيان تبني السيطرة على الخطأ. ولتوضيح عملية السيطرة على الخطأ؛ سننشئ طريقة المتنبئ – المصحح متغيرة السعة مستخدمين طريقة Adams–Bashforth الواضحة بأربع خطوات بمنزلة المتنبئ. وطريقة Adams–Moulton الضمنية بثلاث خطوات بمنزلة المصحح.

وتأتي طريقة Adams–Bashforth بأربع خطوات من العلاقة

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24}[55f(t_i, y(t_i)) - 59f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$$

$$- 37f(t_{i-2}, y(t_{i-2})) - 9f(t_{i-3}, y(t_{i-3}))] + \frac{251}{720}y^{(5)}(\hat{\mu}_i)h^5$$

لبعض القيم $\hat{\mu}_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$. بافتراض أن التقريبات $w_0, w_1, \ldots, w_i$ جميعها صحيحة يؤدي إلى خطأ قطع

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{251}{720} y^{(5)}(\hat{\mu}_i) h^4 \tag{39.5}$$

وإن التحليل المماثل لطريقة Adams–Moulton بثلاث خطوات تأتي من

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + 19f(t_i, y(t_i)) - 5f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] - \frac{19}{720} y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) h^4$$

لبعض القيم $\tilde{\mu}_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$، يؤدي إلى خطأ قطع محلي

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}}{h} = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) h^4 \tag{40.5}$$

وللمضي في ذلك أكثر، يجب أن نفترض أن لقيم h الصغيرة يكون

$$y^{(5)}(\hat{\mu}_i) \approx y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$$

إن فاعلية أسلوب السيطرة على الخطأ تعتمد مباشرةً على هذا الافتراض.

وإذا طرحنا المعادلة (40.5) من المعادلة (39.5) يكون لدينا

$$\frac{w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{h^4}{720}[251 y^{(5)}(\hat{\mu}_i) + 19 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)] \approx \frac{3}{8} h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$$

ولذلك

$$y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) \approx \frac{8}{3h^5}(w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}) \tag{41.5}$$

واستخدام هذه التمهيدية لحذف الحد المتضمن $h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$ من المعادلة (40.5) يعطي التقريب لخطأ القطع المحلي لـ

$$|\tau_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19h^4}{720} \cdot \frac{8}{3h^5}|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}| = \frac{19|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{270h}$$

لنفترض أننا الآن نعود إلى المعادلة (40.5) مع سعة خطوة جديدة qh وتوليد تقريبات جديدة $\hat{w}_{i+1}^{(0)}$ و $\hat{w}_{i+1}$. والهدف اختيار q بما يحقق كون خطأ القطع المحلي المعطى بالمعادلة (40.5) محدداً بحد سماح ε المبين مسبقاً. فإذا افترضنا أن القيمة $y^{(5)}(\mu)$ في المعادلة (40.5) المرتبطة بـ qh مقربة أيضاً باستخدام المعادلة (41.5) فإن

$$\frac{|y(t_i + qh) - \hat{w}_{i+1}|}{qh} = \frac{19q^4h^4}{720}|y^{(5)}(\mu)| \approx \frac{19q^4h^4}{720}\left[\frac{8}{3h^5}|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|\right]$$

ونحتاج إلى اختيار q ليكون

$$\frac{|y(t_i + qh) - \hat{w}_{i+1}|}{qh} \approx \frac{19q^4}{270} \frac{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{h} < \varepsilon$$

بمعنى أننا نختار q ليكون

$$q < \left(\frac{270}{19}\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4} \approx 2\left(\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4}$$

عددًا من افتراضات التقريب قد افتُرضت في هذا التطوير. لذا تُختار q عمليًا وبتحفظ. وعادة تكون

$$q = 1.5\left(\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}\right)^{1/4}$$

إن التغيير في سعة الخطوة للطريقة المتعددة الخطوات أكثر تكلفة من حيث تقييمات الدالة مقارنة بطريقة الخطوة الواحدة؛ إذ يجب حساب قيم البداية الجديدة المتساوية التباعد. وتمهيدية لذلك نتجاهل عادةً تغيير سعة الخطوة ما دام أن خطأ القطع المحلي ما بين $\varepsilon/10$ و ε. معنى أن

$$\frac{\varepsilon}{10} < |\tau_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{270h} < \varepsilon$$

وبالإضافة إلى ذلك. فإن q تعطي حدًّا أعلى لضمان أن تقريبًا دقيقًا واحدًا على غير العادة لا يظهر خطوة ذات سعة كبيرة جدًّا. وتعتمد الخوارزمية (5.5) هذه الحماية مع حد أعلى 4.

وتذكر أنه لكون الطرائق المتعددة الخطوات تتطلب سعة خطوات متساوية لقيم البداية. فإن أي تغيير في سعة الخطوة يتطلب بالضرورة تكرار حساب قيم بداية جديدة عند تلك النقطة. وقد تم ذلك في الخوارزمية (5.5) من خلال استدعاء خوارزمية Runge–Kutta الجزئية (الخوارزمية 2.5).

ALGORITHM
الخوارزمية
5.5

متنبئ- مصحح آدم بسعة خطوة متغير
Adams Variable Step-Size Predictor-Corrector

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

مع خطأ قطع محلي ضمن حد سماح معين:

المدخلات: نقاط النهاية a و b، شرط ابتدائي α، حد سماح TOL، أكبر سعة خطوة $hmax$، أصغر سعة خطوة $hmin$.

المخرجات: i, t_i, w_i, h حيث عند الخطوة i، فإن w_i تقرب $y(t_i)$. وقد استخدمت سعة الخطوة h أو ظهرت عبارة تفيد بأن أقل سعة للخطوة قد تم تجاوزها.

الخطوة	المضمون
1	هي خوارزمية جزئية من طريقة Runge–Kutta من الرتبة 4. وتسميتها $RK4(h, v_0, x_0, v_1, x_1, v_2, x_2, v_3, x_3)$. وتقبل سعة خطوة h بوصفها مدخلات وقيمة البداية $v_0 \approx y(x_0)$ ونعيد $\{(x_j, v_j) \mid j = 1, 2, 3\}$ معرفا وفق ما يلي: عند $j = 1, 2, 3$. ضع $K_1 = hf(x_{j-1}, v_{j-1})$; $K_2 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_1/2)$ $K_3 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_2/2)$ $K_4 = hf(x_{j-1} + h, v_{j-1} + K_3)$

	$v_j = v_{j-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6;$ $x_j = x_0 + jh.$
2	ضع $t_0 = a$ $w_0 = \alpha$ $h = hmax$ $FLAG = 1$ (سيستخدم لتنفيذ الحلقة في الخطوة 4). $LAST = 0$ (سيؤشر متى تحسب القيمة الأخيرة). المخرجات (t_0, w_0)
3	استدع $RK4(h, w_0, t_0, w_1, t_1, w_2, t_2, w_3, t_3)$ ضع $NFLAG = 1$ (يشير إلى حساب من $RK4$). $i = 4$ $t = t_3 + h$
4	بما أن (FLAG = 1)، فطبّق الخطوات 5 – 20.
5	ضع $WP = w_{i-1} + \frac{h}{24}[55f(t_{i-1}, w_{i-1}) - 59f(t_{i-2}, w_{i-2})$ $+ 37f(t_{i-3}, w_{i-3}) - 9f(t_{i-4}, w_{i-4})];$ (التنبؤ w_i) $WC = w_{i-1} + \frac{h}{24}[9f(t, WP) + 19f(t_{i-1}, w_{i-1})$ $- 5f(t_{i-2}, w_{i-2}) + f(t_{i-3}, w_{i-3})];$ (صحح w_i) $\sigma = 19\|WC - WP\|/(270h).$
6	إذا كان $\sigma \le TOL$ فطبّق الخطوات 7 – 16. (قُبلت التمهيدية). وإلا فطبق الخطوات 17 – 19. (رفضت التمهيدية).
7	ضع $w_i = WC$ (قبلت التمهيدية). $t_i = t$
8	إذا كان $NFLAG = 1$. فإنه عند $j = i-3, i-2, i-1, i$ تكون المخرجات (j, t_j, w_j, h). (النتائج السابقة مقبولة أيضا). وما عدا ذلك تكون المخرجات (i, t_i, w_i, h). (قُبلت النتائج السابقة).
9	إذا كان $LAST = 1$ فضع $FLAG = 0$ (الخطوة التالية هي 20). وإلا فطبّق الخطوات 10 – 16.
10	ضع $i = i + 1$ $NFLAG = 0$
11	إذا كان $\sigma \le 0.1\ TOL$ أو $t_{i-1} + h > b$ فطبق الخطوات 12 – 16. (زد h إذا كانت أدق من المطلوب أو أنقص h لجعل b بمنزلة نقطة شبكية).
12	ضع $q = (TOL/(2\sigma))^{1/4}$

إذا كان $q > 4$ فضع $h = 4h$ ما عدا ذلك ضع $h = qh$.	13
إذا كان $h > hmax$ فضع $h = hmax$.	14
إذا كان $t_{i-1} + 4h > b$ فضع $h = (b - t_{i-1})/4$ $LAST = 1$	15
استدع $RK4(h, w_{i-1}, t_{i-1}, w_i, t_i, w_{i+1}, t_{i+1}, w_{i+2}, t_{i+2})$ ضع $NFLAG = 1$ $i = i + 3$ (الفرع الحقيقي قد استكمل. والخطوة التالية هي 20)	16
ضع $q = (TOL/(2\sigma))^{1/4}$ (فرع فاشل من الخطوة 6. التمهيدية مرفوضة).	17
إذا كان $q < 0.1$ ضع $h = 0.1h$ وإلا فضع $h = qh$.	18
إذا كان $h < hmin$ فضع $FLAG = 0$. المخرجات ($hmin$ تم تجاوزه). وما عدا ذلك إذا كان $NFLAG = 1$ فضع $i = i - 3$ (النتائج السابقة مرفوضة أيضا). استدع $RK4(h, w_{i-1}, t_{i-1}, w_i, t_i, w_{i+1}, t_{i+1}, w_{i+2}, t_{i+2})$ ضع $i = i + 3$ $NFLAG = 1$	19
ضع $t = t_{i-1} + h$.	20
توقف.	21

جدول 5 13

$\|y(t_i) - w_i\|$	σ_i	h_i	w_i	$y(t_i)$	t_i
			0.5	0.5	0
0.0000005	4.051×10^{-6}	0.1257017	0.7002318	0.7002323	0.1257017
0.0000011	4.051×10^{-6}	0.1257017	0.9230949	0.9230960	0.2514033
0.0000017	4.051×10^{-6}	0.1257017	1.1673877	1.1673894	0.3771050
0.0000022	4.051×10^{-6}	0.1257017	1.4317480	1.4317502	0.5028066
0.0000028	4.610×10^{-6}	0.1257017	1.7146306	1.7146334	0.6285083
0.0000035	5.210×10^{-6}	0.1257017	2.0142834	2.0142869	0.7542100
0.0000043	5.913×10^{-6}	0.1257017	2.3287200	2.3287244	0.8799116
0.0000054	6.706×10^{-6}	0.1257017	2.6556877	2.6556930	1.0056133
0.0000066	7.604×10^{-6}	0.1257017	2.9926319	2.9926385	1.1313149
0.0000080	8.622×10^{-6}	0.1257017	3.3366562	3.3366642	1.2570166
0.0000097	9.777×10^{-6}	0.1257017	3.6844761	3.6844857	1.3827183
0.0000108	7.029×10^{-6}	0.1030100	3.9697433	3.9697541	1.4857283
0.0000120	7.029×10^{-6}	0.1030100	4.2527711	4.2527830	1.5887383
0.0000133	7.029×10^{-6}	0.1030100	4.5310137	4.5310269	1.6917483
0.0000151	7.029×10^{-6}	0.1030100	4.8016488	4.8016639	1.7947583
0.0000172	7.760×10^{-6}	0.1030100	5.0615488	5.0615660	1.8977683
0.0000177	3.918×10^{-8}	0.0255579	5.1239764	5.1239941	1.9233262
0.0000181	3.918×10^{-8}	0.0255579	5.1854751	5.1854932	1.9488841
0.0000186	3.918×10^{-8}	0.0255579	5.2459870	5.2460056	1.9744421
0.0000191	3.918×10^{-8}	0.0255579	5.3054529	5.3054720	2.0000000

مثال 1

يتضمن جدول (13.5) النتائج المستخرجة باستخدام الخوارزمية (5.5) لإيجاد تقريبات لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1 \qquad 0 \le t \le 2 \qquad y(0) = 0.5$$

التي لها حل $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$. وتتضمن المدخلات حد السماح $TOL = 10^{-5}$، أكبر سعة خطوة $hmax = 0.25$، وأصغر سعة خطوة $hmin = 0.01$. وقد أدرجنا في العمود الخامس من جدول تقدير الخطأ

$$\sigma_i = \frac{19}{270h}\left|w_i - w_i^{(0)}\right| \approx |y(t_i) - w_i| \qquad ■$$

مجموعة التمارين 7.5 EXERCISE SET

1. استخدم خوارزمية آدمز المتنبئ – المصحح لسعة خطوة متغير مع حد سماح $TOL = 10^{-4}$ و $hmax = 0.25$ و $hmin = 0.025$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y,\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 0$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

ب. $y' = 1 + (t-y)^2,\ 2 \le t \le 3,\ y(2) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = t + 1/(1-t)$.

ج. $y' = 1 + y/t,\ 1 \le t \le 2,\ y(1) = 2$ الحل الحقيقي $y(t) = t\ln t + 2t$.

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t,\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.

2. استخدم خوارزمية آدمز المتنبئ – المصحح لسعة خطوة متغير مع $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = (y/t)^2 + y/t,\ 1 \le t \le 1.2,\ y(1) = 1$ مع الحل الحقيقي $hmax = 0.05$ و $hmin = 0.01$.

ب. $y' = \sin t + e^{-t},\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 0$ مع الحل الحقيقي $hmax = 0.2$ و $hmin = 0.01$.

ج. $y' = (1/t)(y^2 + y),\ 1 \le t \le 3,\ y(1) = -2$ مع الحل الحقيقي $hmax = 0.4$ و $hmin = 0.01$.

د. $y' = -ty + 4t/y,\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1$ مع الحل الحقيقي $hmax = 0.2$ و $hmin = 0.01$.

3. استخدم خوارزمية آدمز المتنبئ – المصحح لسعة خطوة متغير مع $TOL = 10^{-6}$، $hmax = 0.5$ و $hmin = 0.02$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2,\ 1 \le t \le 4,\ y(1) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2,\ 1 \le t \le 3,\ y(1) = 0$ الحل الحقيقي $y(t) = t\tan(\ln t)$.

ج. $y' = -(y+1)(y+3),\ 0 \le t \le 3,\ y(0) = -2$ الحل الحقيقي $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$.

د. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty,\ 0 \le t \le 2,\ y(0) = \frac{1}{3}$ الحل الحقيقي $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$.

4. أنشئ الخوارزمية متنبئ– مصحح آدم بسعة خطوة متغير بالاعتماد على طريقة Adams–Bashforth ذات الخطوات الخمس وطريقة Adams–Moulton ذات الخطوات الأربع. كرّر التمرين (3) مستخدمًا هذه الطريقة الجديدة.

5. دائرة كهربائية تتضمن مكثفًا بتكثيف ثابت $C = 1.1$ فارادي على التوالي مع مقاوم بمقاومة ثابتة $R_0 = 2.1$ أوم. مُرّرت فولتية $E(t) = 110\sin t$ عند الزمن $t = 0$ وعندما ترتفع رتبة حرارة المقاوم، فإن المقاومة تصبح دالة للتيار i. $R(t) = R_0 + ki$ حيث $k = 0.9$، والمعادلة التفاضلية لـ $i(t)$ تصبح

$$\left(1 + \frac{2k}{R_0}i\right)\frac{di}{dt} + \frac{1}{R_0C}i = \frac{1}{R_0C}\frac{dE}{dt}$$

أوجد $i(2)$. مفترضًا أن $i(0) = 0$.

8.5 طرائق الاستكمال الخارجي Extrapolation Methods

استُخدم الاستكمال الخارجي في الفصل (5.4) لتقريب تكاملات محدودة، حيث وجدنا أنه عن طريق أخذ المعدلات الصحيحة للتقريبات بطريقة شبه المنحرف غير الدقيقة نسبيًا نستطيع عمل تقريبات جديدة، وتكون دقيقة إلى حدٍّ بعيد. وسوف نطبق في هذا الفصل الاستكمال الخارجي لزيادة دقة التقريبات لحل مسائل القيمة الابتدائية. وكما لاحظنا سابقًا، يجب أن يكون للتقريبات الأصلية امتداد خطأ بصيغة معينة لتكون العملية ناجحة.

لتطبيق الاستكمال الخارجي في حل مسائل القيمة الابتدائية، فإننا نستخدم أسلوبًا يعتمد على طريقة النقطة الوسطية

$$w_{i+1} = w_{i-1} + 2hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i \geq 1 \tag{42.5}$$

يتطلب هذا الأسلوب قيمتين للبداية، بسبب الحاجة إلى كل من w_0 و w_1 قبل التمكن من تحديد أول تقريب لنقطة وسطية w_2. وإحدى القيمتين عادة هي الشرط الابتدائي لـ $w_0 = y(a) = \alpha$. ولتحديد نقطة البداية الثانية w_1، نطبق طريقة أويلر. وتوجد التقريبات اللاحقة من المعادلة (42.5). وبعد سلسلة من تقريبات هذا النوع المتولدة التي تنتهي عند القيمة t، فإننا نجري تصحيحًا لنقطة نهاية يتضمن آخر تقريبين لنقطة النهاية. وهذا يعطي التقريب $w(t, h)$ لـ $y(t)$ وصيغته

$$y(t) = w(t, h) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k h^{2k} \tag{43.5}$$

حيث إن δ_k عبارة عن ثوابت تعود إلى مشتقات الحل $y(t)$. والنقطة المهمة هي أن δ_k لا تعتمد على سعة الخطوة h. وتوجد تفصيلات هذه العملية في ورقة بحثية لـ Gragg (Gr).

ولتوضيح أسلوب الاستكمال الخارجي لحل

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

نفترض خطوة بسعة ثابتة h. وأننا نرغب في تقريب $y(t_1) = y(a + h)$.

وبالنسبة إلى خطوة الاستكمال الخارجي الأولى نضع $h_0 = h/2$، ونستخدم طريقة أويلر مع $w_0 = \alpha$ لتقريب $y(a + h/2) = y(a + h_0)$ وهي

$$w_1 = w_0 + h_0 f(a, w_0)$$

وعند تطبيق طريقة النقطة الوسطية مع $t_{i-1} = a$ و $t_i = a + h_0 = a + h/2$ نعمل أول تقريب لـ $y(a + h) = y(a + 2h_0)$ وهو

$$w_2 = w_0 + 2h_0 f(a + h_0, w_1)$$

إن تصحيح نقطة النهاية يُطبّق لإيجاد التقريب النهائي لـ $y(a + h)$ عند سعة خطوة h_0. وهذا يؤدي إلى ظهور التقريب $O(h_0^2)$ إلى $y(t_1)$

$$y_{1,1} = \frac{1}{2}[w_2 + w_1 + h_0 f(a + 2h_0, w_2)]$$

لقد وفّرنا التقريب $y_{1,1}$ تقريبًا، وأهملنا النتائج الوسطية w_1 و w_2.

لإيجاد التقريب التالي $y_{2,1}$ لـ $y(t_1)$، نضع $h_1 = h/4$، ونستخدم طريقة أويلر مع $w_0 = \alpha$ لإيجاد تقريب لـ $y(a+h_1) = y(a+h/4)$ الذي سنرمز إليه بـ w_1:

$$w_1 = w_0 + h_1 f(a, w_0)$$

بعد ذلك نقرب $y(a+2h_1) = y(a+h/2)$ مع w_2 و $y(a+3h_1) = y(a+3h/4)$ مع w_3 حيث

$$w_2 = w_0 + 2h_1 f(a+h_1, w_1) \quad \text{و} \quad w_3 = w_1 + 2h_1 f(a+2h_1, w_2)$$

ثم نوجد التقريب w_4 لـ $y(a+4h_1) = y(t_1)$ حيث

$$w_4 = w_2 + 2h_1 f(a+3h_1, w_3)$$

إن تصحيح نقطة النهاية يُطبّق الآن على w_3 و w_4 للحصول على تقريب $O(h_1^2)$ محسن لـ $y(t_1)$

$$y_{2,1} = \tfrac{1}{2}[w_4 + w_3 + h_1 f(a+4h_1, w_4)]$$

وبسبب صيغة الخطأ المعطى في المعادلة (5.43)، فإن التقريبين لـ $y(a+h)$ يتميزان بالآتي:

$$y(a+h) = y_{1,1} + \delta_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \delta_2\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \cdots = y_{1,1} + \delta_1\frac{h^2}{4} + \delta_2\frac{h^4}{16} + \cdots$$

و

$$y(a+h) = y_{2,1} + \delta_1\left(\frac{h}{4}\right)^2 + \delta_2\left(\frac{h}{4}\right)^4 + \cdots = y_{2,1} + \delta_1\frac{h^2}{16} + \delta_2\frac{h^4}{256} + \cdots$$

ويمكننا حذف جزء $O(h^2)$ من هذا الخطأ المتقلص من خلال عمل معدل هاتين الصيغتين على نحو مناسب. وعلى نحو خاص، فإذا طرحنا الصيغة الأولى من 4 أمثال الثانية وقسمنا الناتج على 3، يكون لدينا

$$y(a+h) = y_{2,1} + \frac{1}{3}(y_{2,1} - y_{1,1}) - \delta_2\frac{h^4}{64} + \cdots$$

و من ثم فإن تقريب $y(t_1)$ المعطى من خلال

$$y_{2,2} = y_{2,1} + \tfrac{1}{3}(y_{2,1} - y_{1,1})$$

له خطأ من رتبة $O(h^4)$.

وباستمرار هذا الأسلوب، نضع بعد ذلك $h_2 = h/6$ ونطبّق طريقة أويلر مرة واحدة. ثم نتبعها بطريقة النقطة الوسطية خمس مرات، وبعد ذلك نستخدم تصحيح نقطة النهاية لتحديد تقريب h^2، $y_{3,1}$ إلى $y(t_1) = y(a+h)$. ويمكن إيجاد معدل هذا التقريب مع $y_{2,1}$ للحصول على تقريب $O(h^4)$ الثاني الذي نرمز إليه بـ $y_{3,2}$. ومن ثم فإن معدل $y_{3,2}$ و $y_{2,2}$ من شأنه إلغاء حدود خطأ $O(h^4)$ وإعطاء تقريب بخطأ من رتبة $O(h^6)$. ويمكن توليد صيغ أخرى من الرتبة أعلى باستمرار العملية.

والفرق المعنوي الوحيد ما بين الاستكمال الخارجي المطبق هنا وذلك الذي استُخدم في تكامل Romberg في الفصل (5.4) يكمن في طريقة اختيار التقسيمات الجزئية. إن لتكامل Romberg صيغة مريحة لتمثيل تقريبات قاعدة Composite Trapezoidal التي تستخدم تقسيمات متتابعة لسعة الخطوة بكرّاد صحيحة $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$. يسمح هذا الإجراء لعملية عمل المعدل بالاستمرار وفق أسلوب سهل المتابعة.

ونحن لا نملك وسائل للحصول على تقريبات منتقاة بسهولة لمسائل القيمة الابتدائية، لذا فإن تقسيمات أساليب الاستكمال الخارجي تُختار لتقليل عدد تقييمات الدالة المطلوبة وعملية عمل المعدل ناتجة من هذا الاختيار للتقسيم الجزئي، والمبينة في جدول (14.5)، هي ليست بهذه البدائية، ولكن العملية هي نفسها التي استخدمت في تكامل Romberg.

جدول 14.5

$$
\begin{array}{lll}
y_{1,1} = w(t, h_0) & & \\
y_{2,1} = w(t, h_1) & y_{2,2} = y_{2,1} + \dfrac{h_1^2}{h_0^2 - h_1^2}(y_{2,1} - y_{1,1}) & \\
y_{3,1} = w(t, h_2) & y_{3,2} = y_{3,1} + \dfrac{h_2^2}{h_1^2 - h_2^2}(y_{3,1} - y_{2,1}) & y_{3,3} = y_{3,2} + \dfrac{h_2^2}{h_0^2 - h_2^2}(y_{3,2} - y_{2,2})
\end{array}
$$

تستخدم الخوارزمية (6.5) أسلوب الاستكمال الخارجي مع متتالية كرّاد صحيحة بصيغة $q_0 = 2$، $q_1 = 4$، $q_2 = 6$، $q_3 = 8$، $q_4 = 12$، $q_5 = 16$، $q_6 = 24$ و $q_7 = 32$

الخوارزمية تستخدم نقاطاً مع تقسيمات بالصيغة 2^n و $3 \cdot 2^n$، اختيارات أخرى يمكن استخدامها.

تُختار سعة خطوة رئيسة h. وتستمر الطريقة باستخدام $h_i = h/q_i$ لكل $i = 0, \ldots, 7$ من لتقريب $y(t + h)$. ويعد الخطأ مسيطراً عليه على أن تحسَب التقريبات $y_{1,1}, y_{2,2}, \ldots$ حتى يكون $|y_{i,i} - y_{i-1,i-1}|$ أقل من حد السماح المحدد. وإذا لم تصل إلى حد السماح عند $i = 8$ تخفض h، ويعاد تطبيق العملية. تحدّد القيمة الدنيا $hmin$ والقيمة العليا $hmax$ لـ h لضمان سيطرة الطريقة. فإذا وجدت $y_{i,i}$ مقبولة فإن w_1 تعطى لـ $y_{i,i}$، وتبدأ الحسابات مجدداً بتحديد w_2 التي ستقرب $y(t_2) = y(a + 2h)$. وتعاد العملية إلى أن يكون التقريب w_N إلى $y(b)$ قد حدّد.

ALGORITHM
الخوارزمية
6.5

الاستكمال الخارجي Extrapolation

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

مع خطأ قطع محلي ضمن حد سماح معين:

المدخلات: نقاط النهاية a و b، شرط ابتدائي α، حد سماح TOL، أكبر سعة خطوة $hmax$ أصغر سعة خطوة $hmin$.

المخرجات: T, W, h حيث W تقرّب $y(t)$ وقد استُخدمت سعة الخطوة h، أو ظهرت عبارة تفيد بأن أقل سعة للخطوة تم تجاوزها.

الخطوة	المضمون
1	هيّئ الصف $NK = (2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32)$.
2	ضع $TO = a$ $WO = \alpha$ $h = hmax$ $FLAG = 1$ ($FLAG$ سيستخدم لتنفيذ الحلقة في الخطوة 4).

3	عند $i = 1, 2, \ldots, 7$ و $j = 1, \ldots, i$ ضع $Q_{i,j} = (NK_{i+1}/NK_j)^2$. (ملحوظة: $Q_{i,j} = h_j^2/h_{i+1}^2$)
4	ما دام (FLAG = 1)، فطبّق الخطوات 5 – 20.
5	ضع $k = 1$ $NFLAG = 0$ (وعند حصول الدقة المطلوبة، ضع $NFLAG = 1$)
6	ما دام ($k \le 8$ و $NFLAG = 0$)، فطبّق الخطوات 7 – 14.
7	ضع $HK = h/NK_k$ $T = TO$ $W2 = WO$ $W3 = W2 + HK \cdot f(T, W2)$ (أولى خطوات أويلر Euler) $T = TO + HK$
8	عند $j = 1, \ldots, NK_k - 1$ ضع $W1 = W2$ $W2 = W3$ $W3 = W1 + 2HK \cdot f(T, W2)$ (طريقة النقطة الوسطية) $T = TO + (j + 1) \cdot HK$
9	ضع $y_k = [W3 + W2 + HK \cdot f(T, W3)]/2$ (تصحّح نقطة النهاية لحساب $y_{k,1}$).
10	إذا كان $k \ge 2$ فطبّق الخطوات 11 – 13. (ملحوظة: $y_1 \equiv y_{k-1,k-1}, \ldots, y_{k-2} \equiv y_{k-2,2}, y_{k-1} \equiv y_{k-1,1}$، لأنه قد حُفظ السطر السابق للجدول فقط).
11	ضع $j = k$ $v = y_1$ (حفظ $y_{k-1,k-1}$)
12	ما دام ($j \ge 2$) فاعمل الآتي: ضع $y_{j-1} = y_j + \dfrac{y_j - y_{j-1}}{Q_{k-1,j-1} - 1}$ (استكمال خارجي لحساب $y_{j-1} \equiv y_{k,k-j+2}$) (ملحوظة: $y_{j-1} = \dfrac{h_{j-1}^2 y_j - h_k^2 y_{j-1}}{h_{j-1}^2 - h_k^2}$) $j = j - 1$.
13	إذا كان $\|y_1 - v\| \le TOL$ فضع $NFLAG = 1$ (تُقبَل y_1 بمنزلة w الجديدة).
14	ضع $k = k + 1$.
15	ضع $k = k - 1$.
16	إذا كان $NFLAG = 0$ فطبّق الخطوتين 17 و 18. (التمهيدية مرفوضة). أيضًا طبق الخطوتين 19 و 20. (التمهيدية مقبولة).

17	ضع $h = h/2$ (قيمة جديدة لـ w مرفوضة. أنقص h).
18	إذا كان $h < hmin$ فإن المخرجات ($hmin$ تم تجاوزه). ضع $FLAG = 0$ (فرع صحيح قد استكمل. الخطوة الآتية هي الذهاب إلى الخطوة 4).
19	ضع $WO = y_1$ (قيمة جديدة لـ w مقبولة). ضع $TO = TO + h$ المخرجات (TO, WO, h)
20	إذا كان $TO \geq b$ فضع $FLAG = 0$ (العملية استكملت بنجاح). وما عدا ذلك إذا كان $TO + h > b$ فضع $h = b - TO$ (توقف عند $t = b$) وما عدا ذلك إذا كان ($k \leq 3$ و $h < 0.5(hmax)$) فضع $h = 2h$. (زيادة سعة الخطوة إذا أمكن).
21	توقف.

■

مثال 1

لنأخذ مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \leq t \leq 2 \quad y(0) = 0.5$$

التي لها حل $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$. ستطبق خوارزمية الاستكمال الخارجي على هذه المسألة مع $h = 0.25$، $TOL = 10^{-10}$ و $hmin = 0.01$ وقد استخرج جدول (15.5) ضمن حساب $w_1 \approx y(0.25)$. ■

تتوقف الحسابات مع $w_1 = y_{5,5}$، لأن $|y_{5,5} - y_{4,4}| \leq 10^{-10}$ وقد قبلت $y_{5,5}$ بوصفها تقريبًا إلى $y(t_1) = y(0.25)$ تكون المجموعة الكاملة لهذه التقريبات دقيقة، والمواقع المعطاة في جدول (5.16) أيضًا.

جدول 15.5

$y_{1,1} = 0.9187011719$				
$y_{2,1} = 0.9200379348$	$y_{2,2} = 0.9204835892$			
$y_{3,1} = 0.9202873689$	$y_{3,2} = 0.9204868761$	$y_{3,3} = 0.9204872870$		
$y_{4,1} = 0.9203747896$	$y_{4,2} = 0.9204871876$	$y_{4,3} = 0.9204872914$	$y_{4,4} = 0.9204872917$	
$y_{5,1} = 0.9204372763$	$y_{5,2} = 0.9204872656$	$y_{5,3} = 0.9204872916$	$y_{5,4} = 0.9204872917$	$y_{5,5} = 0.9204872917$

جدول 16.5

t_i	$y_i = y(t_i)$	w_i	h_i	k
0.25	0.9204872917	0.9204872917	0.25	5
0.50	1.4256393646	1.4256393646	0.25	5
0.75	2.0039999917	2.0039999917	0.25	5
1.00	2.6408590858	2.6408590858	0.25	5
1.25	3.3173285213	3.3173285212	0.25	4
1.50	4.0091554648	4.0091554648	0.25	3
1.75	4.6851986620	4.6851986619	0.25	3
2.00	5.3054719505	5.3054719505	0.25	3

إن البرهان الذي بيَّنته الطريقة في تقاربات الخوارزمية (6.5) يتضمن نتائج من مبرهنة الجمع التي يمكن إيجادها في ورقة Gragg [Gr] البحثية الأصلية. وهناك عدد آخر من عمليات الاستكمال الخارجي المتوفرة، وبعضها يعتمد أساليب سعة الخطوة. وبشأن أساليب إضافية تستند إلى عملية الاستكمال الخارجي، انظر أوراق Bulirsch and Stoer ([BS1], [BS2], [BS3]) أو كتاب Stetter [Stet]. تتضمن الطرائق المستخدمة في Bulirsch and Stoer استيفاءً داخليًا مع دوال معقولة بدلًا من كثيرة حدود الاستكمال الداخلي المستخدم في عملية Gragg.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 8.5

1. استخدم خوارزمية الاستكمال الخارجي مع حد سماح $TOL = 10^{-4}$, $hmax = 0.25$ و $hmin = 0.05$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

ب. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = t + 1/(1 - t)$.

ج. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ الحل الحقيقي $y(t) = t \ln t + 2t$.

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.

2. استخدم خوارزمية الاستكمال الخارجي مع $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = (y/t)^2 + y/t, \quad 1 \le t \le 1.2, \quad y(1) = 1$ مع $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.05$.

ب. $y' = \sin t + e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ مع $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.25$.

ج. $y' = (1/t)(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ مع $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.5$.

د. $y' = -ty + 4t/y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ مع $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.25$.

3. استخدم خوارزمية الاستكمال الخارجي مع $hmin = 0.05$ و $hmax = 0.5$, $TOL = 10$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 4, \quad y(1) = 1$ الحل الحقيقي $y(t) = t/(1 + \ln t)$

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$ الحل الحقيقي $y(t) = t\tan(\ln t)$

ج. $y' = -(y + 1)(y + 3), \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = -2$ الحل الحقيقي $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$

د. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ الحل الحقيقي $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$

4. ليمثّل $P(t)$ عدد الأشخاص في مجتمع عند الزمن t، مقيسًا بالسنوات. فإذا كان معدل الولادات b ثابتًا، ومعدل الوفيات d يتناسب مع حجم المجتمع (بسبب الكثافة السكانية المفرطة)، فإن معدل نمو المجتمع مُعطى من خلال المعادلة اللوجستية

$$\frac{dP(t)}{dt} = bP(t) - k[P(t)]^2$$

حيث $d = kP(t)$ افترض أن $P(0) = 50,976$, $b = 2.9 \times 10^{-2}$ و $k = 1.4 \times 10^{-7}$ أوجد حجم المجتمع بعد 5 سنوات.

9.5 معادلات عالية الرتبة وأنظمة المعادلات التفاضلية

Higher – Order Equations and Systems of Differential Equations

يتضمن هذا الفصل مقدمة للحل العددي لمسائل القيمة الابتدائية العالية الرتبة. والأساليب المعروضة محددة بتلك التي تتضمن تحويل معادلة عالية الرتبة إلى نظام معادلات تفاضلية

بالرتبة الأولى. وقبل شرح عملية التحويل، نحتاج إلى بعض الملاحظات ذات العلاقة بأنظمة تتضمن معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

إن نظامًا من الرتبة m لمسائل القيمة الابتدائية من الرتبة الأولى تمتلك الصيغة

$$\frac{du_1}{dt}(t) = f_1(t, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$
$$\frac{du_2}{dt}(t) = f_2(t, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$
$$\vdots$$
$$\frac{du_m}{dt}(t) = f_m(t, u_1, u_2, \ldots, u_m) \qquad (44.5)$$

لـ $a \le t \le b$ مع الشروط الابتدائية

$$u_1(a) = \alpha_1,\ u_2(a) = \alpha_2, \ldots,\ u_m(a) = \alpha_m \qquad (45.5)$$

الهدف هو إيجاد m من الدوال $u_1, u_2, \ldots, u_m$ من شأنها تحقيق كل واحدة من المعادلات التفاضلية مع الشروط الابتدائية جميعها.

ولمناقشة وجود الحلول لأنظمة المعادلات ووحدانيتها، فإننا نحتاج إلى توسيع تعريف شرط Lipschitz لدوال بعدة متغيرات.

تعريف 16.5 الدالة $f(t, y_1, \ldots, y_m)$ المعرف على المجموعة

$$D = \{(t, u_1, \ldots, u_m) \mid a \le t \le b, -\infty < u_i < \infty \text{ لكل } i = 1, 2, \ldots, m\}$$ ■

يقال إنه يحقق شرط Lipschitz على D. في المتغيرات $u_1, u_2, \ldots, u_m$ في حالة وجود ثابت $L > 0$ حيث

$$|f(t, u_1, \ldots, u_m) - f(t, z_1, \ldots, z_m)| \le L \sum_{j=1}^{m} |u_j - z_j| \qquad (46.5)$$

لكل من $(t, u_1, \ldots, u_m)$ و $(t, z_1, \ldots, z_m)$ ينتمي إلى D. ■

وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطية، يمكن إثبات أنه إذا كانت f ومشتقاتها الجزئية الأولى متصلة على D. وإذا كان

$$\left|\frac{\partial f(t, u_1, \ldots, u_m)}{\partial u_i}\right| \le L$$

لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, m$ و $(t, u_1, \ldots, u_m)$ جميعها ضمن D. فإن f يحقق شرط Lipschitz على D مع ثابت Lipschitz L. (انظر [BiR, p. 141]). وفيما يلي مبرهنة الوجود والوحدانية الرئيسة. ويمكن إيجاد برهانها في [BiR, pp. 152–154].

مبرهنة 17.5 افترض أن

$$D = \{(t, u_1, u_2, \ldots, u_m) \mid a \le t \le b, -\infty < u_i < \infty \text{ لكل } i = 1, 2, \ldots, m\}$$

وليكن $f_i(t, u_1, \ldots, u_m)$ لكل من $i = 1, 2, \ldots, m$ متصلاً على D، ويحقق شرط Lipschitz هناك. إن نظام المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى (معادلة 44.5) ضمن الشروط الابتدائية (معادلة 45.5) له حل وحيد $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ لـ $a \le t \le b$. ■

إن طرائق حل أنظمة المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى عبارة عن تعميمات لطرائق معادلة الرتبة الأولى المفردة التي قد شُرحت مبكرًا ضمن هذه الوحدة. وعلى سبيل المثال فطريقة Runge–Kutta التقليدية من الرتبة 4 المعطاة بالصيغة

$$w_0 = \alpha,$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3),$$

و $w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ لكل من $i = 0, 1, \ldots, N-1$

المستخدمة لحل مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الأولى

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

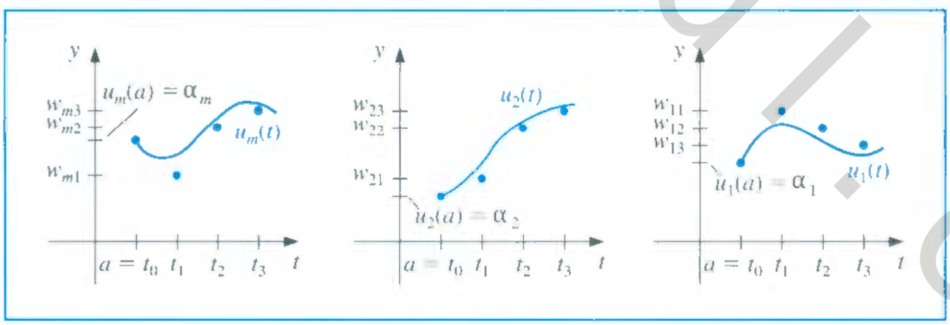
يمكن تعميمها كما يلي:

افترض أن اختيار $N > 0$ عدد صحيح، وضع $h = (b-a)/N$. قسِّم الفترة $[a, b]$ إلى N من الفترات الجزئية مع النقاط الشبكية

$$t_j = a + jh \quad \text{لكل من} \quad j = 0, 1, \ldots, N$$

استخدم الرمز w_{ij} لكل من $j = 0, 1, \ldots, N$ و $i = 1, 2, \ldots, m$ لتمثيل تقريب إلى $u_i(t_j)$ بمعنى أن w_{ij} تقرب الحل بتسلسل i وهو $u_i(t)$ للمعادلة (44.5) عند النقطة الشبكية t_j بتسلسل j. أما الشروط الابتدائية، فضع: (انظر شكل 5.5)

$$w_{1,0} = \alpha_1, \; w_{2,0} = \alpha_2, \ldots, w_{m,0} = \alpha_m \tag{47.5}$$



شكل 5.5

افترض أن القيم $w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m,j}$ قد حُسِبت. فنجد $w_{1,j+1}$ من خلال حساب $w_{2,j+1}, \ldots, w_{m,j+1}$ من خلال حساب

$$k_{1,i} = hf_i(t_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m,j}), \tag{48.5}$$

$$k_{2,i} = hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \ldots, w_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m}\right) \tag{49.5}$$

$$k_{3,i} = hf\left(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \ldots, w_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m}\right) \tag{50.5}$$

$$k_{4,i} = hf_i(t_j + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, \ldots, w_{m,j} + k_{3,m}) \tag{51.5}$$

ثم بعد ذلك

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}) \tag{52.5}$$

وذلك في المعادلات جميعها لكل من m ,... ,$i = 1, 2$.

ولكل من $i = 1, 2, \ldots, m$ انظر أن القيم $k_{1,1}, k_{1,2}, \ldots, k_{1,m}$ يجب حسابها قبل أن نتمكن من حساب أي من الحدود ذات الصيغة $k_{2,i}$. وعمومًا يجب حساب كل من $k_{l,1}, k_{l,2}, \ldots, k_{l,m}$ قبل أي من القيم $k_{l+1,i}$. تنفذ الخوارزمية (7.5) طريقة من الرتبة الرابعة لأنظمة مسائل القيمة الابتدائية.

ALGORITHM
الخوارزمية
7.5

طريقة رونج-كوتا لأنظمة معادلات تفاضلية

Runge-Kutta Methods for Systems of Differential Equations

لتقريب حل نظام من رتبة m لمسائل القيمة الابتدائية من الرتبة أولى

$u_j' = f_j(t, u_1, u_2, \ldots, u_m)$ ، $a \le t \le b$ مع $u_j(a) = \alpha_j$

لكل $j = 1, 2, \ldots, m$ عند $(N+1)$ من الأرقام المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$

المدخلات: نقاط نهاية a, b، عدد المعادلات m، N عدد صحيح، شروط ابتدائية $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

المخرجات: التقريبات w_j إلى $u_j(t)$ عند $(N+1)$ من القيم لـ t.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/N$ $t = a$
2	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $w_j = \alpha_j$
3	المخرجات $(t, w_1, w_2, \ldots, w_m)$
4	عند $i = 1, 2, \ldots, N$ طبق الخطوات 5 - 11.
5	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{1,j} = hf_j(t, w_1, w_2, \ldots, w_m)$
6	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{2,j} = hf_j\left(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{1,2}, \ldots, w_m + \frac{1}{2}k_{1,m}\right)$
7	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{3,j} = hf_j\left(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{2,2}, \ldots, w_m + \frac{1}{2}k_{2,m}\right)$
8	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $k_{4,j} = hf_j(t + h, w_1 + k_{3,1}, w_2 + k_{3,2}, \ldots, w_m + k_{3,m})$

9	عند $j = 1, 2, \ldots, m$ ضع $w_j = w_j + (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j})/6$
10	ضع $t = a + ih$
11	المخرجات $(t, w_1, w_2, \ldots, w_m)$
12	توقف.

مثال 1

إن قانون Kirchhoff's ينص على أن مجموع كل التغيرات اللحظية في الفولتية حول دائرة مغلقة يساوي صفرًا. ويؤدي هذا القانون إلى أن التيار $I(t)$ في دائرة مغلقة مقدار مقاومتها R ohms وحمل مقداره C، وحث مقداره L. ومصدر فولتية مقداره $E(t)$ يحقق المعادلة

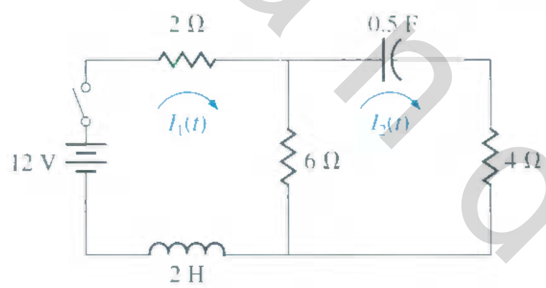
$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = E(t)$$

إن التيارين $I_1(t)$ و $I_2(t)$ في الحلقتين اليسرى واليمنى على التوالي من الدائرة المبينة في شكل (6.5) هما الحل لنظام المعادلات

$$2I_1(t) + 6[I_1(t) - I_2(t)] + 2I_1'(t) = 12$$

$$\frac{1}{0.5}\int I_2(t)\,dt + 4I_2(t) + 6[I_2(t) - I_1(t)] = 0$$

شكل 6.5



افترض أن المفتاح في الدائرة مغلق عند الزمن $t = 0$، وبذلك $I_1(0) = 0$ و $I_2(0) = 0$. طبّق الحل لـ $I_1'(t)$ في المعادلة الأولى. وفاضل المعادلة الثانية. ومن ثم عوّض $I_1'(t)$ لتحصل على

$$I_1' = f_1(t, I_1, I_2) = -4I_1 + 3I_2 + 6\ , \quad I_1(0) = 0$$

$$I_2' = f_2(t, I_1, I_2) = 0.6I_1' - 0.2I_2 = -2.4I_1 + 1.6I_2 + 3.6\ , \quad I_2(0) = 0$$

والحل الصحيح لهذا النظام هو

$$I_1(t) = -3.375e^{-2t} + 1.875e^{-0.4t} + 1.5$$

$$I_2(t) = -2.25e^{-2t} + 2.25e^{-0.4t}$$

سنطبق طريقة Runge–Kutta من الرتبة 4 لهذا النظام مع $h = 0.1$ وحيث $w_{1,0} = I_1(0) = 0$ و $w_{2,0} = I_2(0) = 0$ فإن

$$k_{1,1} = hf_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = 0.1\ f_1(0,0,0) = 0.1(-4(0)+3(0)+6) = 0.6$$
$$k_{1,2} = hf_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = 0.1\ f_2(0,0,0) = 0.1(-2.4(0)+1.6(0)+3.6) = 0.36$$
$$k_{2,1} = hf_1\left(t_0+\tfrac{1}{2}h,\ w_{1,0}+\tfrac{1}{2}k_{1,1},\ w_{2,0}+\tfrac{1}{2}k_{1,2}\right) = 0.1\ f_1(0.05, 0.3, 0.18)$$
$$= 0.1(-4(0.3)+3(0.18)+6) = 0.534$$
$$k_{2,2} = hf_2\left(t_0+\tfrac{1}{2}h,\ w_{1,0}+\tfrac{1}{2}k_{1,1},\ w_{2,0}+\tfrac{1}{2}k_{1,2}\right) = 0.1\ f_2(0.05, 0.3, 0.18)$$
$$= 0.1(-2.4(0.3)+1.6(0.18)+3.6) = 0.3168$$

وتوليد بقية المدخلات بنفس الأسلوب يعطينا

$$k_{3,1} = (0.1)\ f_1(0.05, 0.267, 0.1584) = 0.54072$$
$$k_{3,2} = (0.1)\ f_2(0.05, 0.267, 0.1584) = 0.321264$$
$$k_{4,1} = (0.1)\ f_1(0.1, 0.54072, 0.321264) = 0.4800912$$

و

$$k_{4,2} = (0.1)\ f_2(0.1, 0.54072, 0.321264) = 0.28162944$$

وتمهيدية لذلك

$$I_1(0.1) \approx w_{1,1} = w_{1,0} + \tfrac{1}{6}(k_{1,1}+2k_{2,1}+2k_{3,1}+k_{4,1})$$
$$= 0 + \tfrac{1}{6}(0.6+2(0.534)+2(0.54072)+0.4800912) = 0.5382552$$

و

$$I_2(0.1) \approx w_{2,1} = w_{2,0} + \tfrac{1}{6}(k_{1,2}+2k_{2,2}+2k_{3,2}+k_{4,2}) = 0.3196263$$

وتتولّد البيانات المتبقية في جدول (5.17) بنفس الأسلوب.

جدول 17.5

$\lvert I_2(t_j)-w_{2,j}\rvert$	$\lvert I_1(t_j)-w_{1,j}\rvert$	$w_{2,j}$	$w_{1,j}$	t_j
0	0	0	0	0.0
0.5303×10^{-5}	0.8285×10^{-5}	0.3196263	0.5382550	0.1
0.9596×10^{-5}	0.1514×10^{-4}	0.5687817	0.9684983	0.2
0.1216×10^{-4}	0.1907×10^{-4}	0.7607328	1.310717	0.3
0.1311×10^{-4}	0.2098×10^{-4}	0.9063208	1.581263	0.4
0.1240×10^{-4}	0.2193×10^{-4}	1.014402	1.793505	0.5

ويمكن استخدام الأمر dsolve في Maple's لحل أنظمة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

يحتفظ مابل Maple بالحرف D للتعبير عن المشتقة

ويُعرّف النظام في مثال (1) من خلال

```
>sys2:=D(u1)(t)=-4*u1(t)+3*u2(t)+6,D(u2)(t)=-2.4*u1(t)+1.6*u2(t)+3.6;
```

والشروط الابتدائية من خلال

```
>init2:=u1(0)=0,u2(0)=0;
```

يكون حل النظام من خلال الأمر

```
>sol2:=dsolve({sys2,init2},{u1(t),u2(t)});
```

لإيجاد

$$\text{sol2} := \left\{u1(t) = \tfrac{3}{2} - \tfrac{27}{8}e^{(-2t)} + \tfrac{15}{8}e^{(-2/5t)},\ u2(t) = -\tfrac{9}{4}e^{(-2t)} + \tfrac{9}{4}e^{(-2/5t)}\right\}$$

ولحصر الحل في صيغة دالة، استخدم

```
>r1:=rhs(sol2[2]);
```

$$r1 := \tfrac{3}{2} - \tfrac{27}{8}e^{(-2t)} + \tfrac{15}{8}e^{(-2/5t)}$$

و

```
>r2:=rhs(sol2[1]);
```

الذي يعطي استجابة مماثلة.

ولتقييم $u_1(0.5)$ و $u_2(0.5)$، استخدم

```
>evalf(subs(t=0.5,r1));evalf(subs(t=0.5,r2));
```

لتحصل على 1.793527048 و 1.014415451.

سيفشل الأمر dsolve لو كان ثمة حل ضمني لا يمكن إيجاده. ويمكننا في تلك الحالة استخدام معادلة عددية في dsolve التي تطبق أسلوب Runge–Kutta–Fehlberg وعلى سبيل المثال فإن

```
>g:=dsolve({sys2,init2},{u1(t),u2(t)},numeric);
```

يعيد العملية

$$g := \text{proc}(rkf45\_x)\ldots\ \text{end proc}$$

ولتقريب الحل عند $t = 0.5$، أدخل

```
>g(0.5);
```

لإيجاد

$$[t = .5,\ u2(t) = 1.01441545470291761,\ u1(t) = 1.79352705243766586]$$

تتضمن العديد من المسائل الفيزيائية المهمة، مثل الدوائر الكهربائية ونظم الاهتزاز مسائل القيمة الابتدائية ومعادلاتها من الرتبة أكبر من 1. ولا يتطلب الأمر أساليب جديدة لحل هذه المسائل، ويمكننا من خلال إعادة تسمية المتغيرات، تخفيض المعادلة التفاضلية من الرتبة العالية إلى نظام معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى. وبعد ذلك نطبّق إحدى الطرائق التي شُرِحت. إن مسألة قيمة ابتدائية عامة من الرتبة m

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}),\quad a \le t \le b$$

مع شروط ابتدائية $y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \ldots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$ يمكن قلبها إلى نظام

معادلات بصيغة المعادلتين (44.5) و(45.5).

لتكن $u_1(t) = y(t), u_2(t) = y'(t), \ldots,$ و $u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$. هذا يعطي النظام من لرتبة الأولى

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u_3, \quad \ldots \quad \frac{du_{m-1}}{dt} = \frac{dy^{(m-2)}}{dt} = u_m$$

و

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) = f(t, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

مع شروط ابتدائية

$$u_1(a) = y(a) = \alpha_1, \quad u_2(a) = y'(a) = \alpha_2, \quad \ldots, \quad u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$$

مثال 2 افترض مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t}\sin t \quad \text{لكل} \quad 0 \le t \le 1 \quad \text{مع} \quad y(0) = -0.4, \; y'(0) = -0.6$$

ليكن $u_1(t) = y(t)$ و $u_2(t) = y'(t)$، وهذا يحول المعادلة إلى النظام

$$u_1'(t) = u_2(t), \quad u_2'(t) = e^{2t}\sin t - 2u_1(t) + 2u_2(t)$$

مع شروط ابتدائية

$$u_1(0) = -0.4, \quad u_2(0) = -0.6$$

وستُستخدم طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة لتقريب حل هذه المسألة باستخدام $h = 0.1$. الشروط الابتدائية تعطي $w_{1,0} = -0.4$ و $w_{2,0} = -0.6$. المعادلات من (48.5) إلى (51.5) مع $j = 0$ تعطي

$$k_{1,1} = hf_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = hw_{2,0} = -0.06$$

$$k_{1,2} = hf_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = h\left[e^{2t_0}\sin t_0 - 2w_{1,0} + 2w_{2,0}\right] = -0.04$$

$$k_{2,1} = hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right) = h\left[w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right] = -0.062$$

$$k_{2,2} = hf_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right)$$

$$= h\left[e^{2(t_0+0.05)}\sin(t_0 + 0.05) - 2\left(w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}\right) + 2\left(w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right)\right]$$

$$= -0.03247644757$$

$$k_{3,1} = h\left[w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right] = -0.06162832238$$

$$k_{3,2} = h\left[e^{2(t_0+0.05)}\sin(t_0 + 0.05) - 2\left(w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{2,1}\right) + 2\left(w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right)\right]$$

$$= -0.03152409237$$

$$k_{4,1} = h\left[w_{2,0} + k_{3,2}\right] = -0.06315240924$$

و

$$k_{4,2} = h\left[e^{2(t_0+0.1)}\sin(t_0+0.1) - 2(w_{1,0}+k_{3,1}) + 2(w_{2,0}+k_{3,2})\right] = -0.02178637298$$

ومن ثم فإن

$$w_{1,1} = w_{1,0} + \tfrac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}) = -0.4617333423$$

و

$$w_{2,1} = w_{2,0} + \tfrac{1}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}) = -0.6316312421$$

القيمة $w_{1,1}$ تقرب $u_1(0.1) = y(0.1) = 0.2e^{2(0.1)}(\sin 0.1 - 2\cos 0.1)$ والقيمة $w_{2,1}$ تقرب $u_2(0.1) = y'(0.1) = 0.2e^{2(0.1)}(4\sin 0.1 - 3\cos 0.1)$.

وتوجد مجموعة القيم $w_{1,j}$ و $w_{2,j}$ عند $j = 0, 1, \ldots, 10$ باستخدام طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة، وقد عُرضت في جدول (18.5) وقُورنت بالقيم الحقيقية لـ $u_1(t) = 0.2e^{2t}(\sin t - 2\cos t)$ و $u_2(t) = u_1'(t) = 0.2e^{2t}(4\sin t - 3\cos t)$. ■

جدول 18.5

$\lvert y'(t_j) - w_{2,j}\rvert$	$\lvert y(t_j) - w_{1,j}\rvert$	$w_{2,j}$	$y'(t_j) = u_2(t_j)$	$w_{1,j}$	$y(t_j) = u_1(t_j)$	t_j
0	0	−0.60000000	−0.6000000	−0.40000000	−0.40000000	0.0
7.75×10^{-7}	3.7×10^{-7}	−0.63163124	−0.6316304	−0.46173334	−0.46173297	0.1
1.01×10^{-6}	8.3×10^{-7}	−0.64014895	−0.6401478	−0.52555988	−0.52555905	0.2
8.34×10^{-7}	1.39×10^{-6}	−0.61366381	−0.6136630	−0.58860144	−0.58860005	0.3
1.79×10^{-7}	2.03×10^{-6}	−0.53658203	−0.5365821	−0.64661231	−0.64661028	0.4
5.96×10^{-7}	2.71×10^{-6}	−0.38873810	−0.3887395	−0.69356666	−0.69356395	0.5
7.75×10^{-7}	3.41×10^{-6}	−0.14438087	−0.1443834	−0.72115190	−0.72114849	0.6
2.03×10^{-6}	4.05×10^{-6}	0.22899702	0.2289917	−0.71815295	−0.71814890	0.7
5.30×10^{-6}	4.56×10^{-6}	0.77199180	0.7719815	−0.66971133	−0.66970677	0.8
9.54×10^{-6}	4.76×10^{-6}	1.5347815	1.534764	−0.55644290	−0.55643814	0.9
1.34×10^{-5}	4.50×10^{-6}	2.5787663	2.578741	−0.35339886	−0.35339436	1.0

في Maple المشتقة اليونانية $y^{(n)}(t)$ محددة بـ (D@@n)(y)(t)

يمكننا أيضًا تطبيق dsolve من Maple على معادلات برتب أعلى. ولتعريف المعادلة التفاضلية في مثال (2)، استخدم

```
>def2:=(D@@2)(y)(t)-2*D(y)(t)+2*y(t)=exp(2*t)*sin(t);
```

ولوصف الشروط الابتدائية، استخدم

```
>init2:=y(0)=-0.4,  D(y)(0)=-0.6;
```

ويستخرج الحل من خلال الأمر

```
>sol2:=dsolve({def2,init2},y(t));
```

لإيجاد

$$sol2 := y(t) = -\frac{2}{5}e^{(2t)}\cos(t) + \frac{1}{5}e^{(2t)}\sin(t)$$

ولحصر الحل في صيغة دالة باستخدام

```
>g:=rhs(sol2);
```

ولإيجاد $y(1.0) = g(1.0)$، أدخل

```
>evalf(subs(t=1.0,g));
```

الذي يعطي التمهيدية -0.3533943558.

وطريقة Runge–Kutta–Fehlberg متوفرة أيضًا لمعادلات برتب أعلى من خلال الأمر dsolve مع خيار عددي. ندخل الأمر

```
>g:=dsolve({def2,init2},y(t),numeric);
```

مع استجابة Maple

$$g := \text{proc}(rkf45\_x)\ldots \text{ end proc}$$

ويمكننا تقريب $y(1.0)$ باستخدام الأمر

```
>g(1.0);
```

لنحصل على

$$\left[t = 1.0, y(t) = -.353394346807534676, \frac{\partial}{\partial t}y(t) = 2.57874665940482072\right]$$

يمكن توسيع طرائق الخطوة الواحدة الأخرى للنظم بالأسلوب نفسه. وعند توسيع طرائق سيطرة الخطأ مثل طريقة Runge–Kutta–Fehlberg، يجب فحص دقة كل مركبة من الحل العددي $(w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{mj})$. وفي حالة كون أيٍّ من هذه المركبات غير دقيقة، يجب إعادة حساب الحل العددي $(w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{mj})$ برمته.

ويمكن توسيع طرائق متعددة الخطوات وأساليب المتنبئ – المصحح أيضًا للنظم وفي حالة استخدام السيطرة على الخطأ مرة أخرى. فإن كل مركبة يجب أن تكون دقيقة. وإن توسيع أسلوب الاستكمال الخارجي للأنظمة ممكن أيضًا، لكن ستشمل الرموز إلى حدّ ما. وإذا كان هذا الموضوع يستقطب اهتمامك فانظر [HNW1].

إن نظريات التقارب وتقديرات الخطأ للأنظمة هي نفسها التي تناولناها في الفصل (5.10) لمعادلة مفردة. فضلًا عن أن الحدود معطاة بدلالة صيغ المتجه. وهو الموضوع الذي سنتناوله في الباب السابع. ([Gea1.pp. 45–72] مصدر جيد لهذه النظريات.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 9.5

1. استخدم طريقة Runge–Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأولى. وقارن النتائج بالحلول الحقيقية.

أ.
$$u_1' = 3u_1 - 2u_2 - (2t^2 + 1)e^{2t}, \quad u_1(0) = 1$$
$$u_2' = 4u_1 - u_2 + (t^2 + 2t - 4)e^{2t}, \quad u_2(0) = 1; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.2$$

الحلول الحقيقية $u_2(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} + t^2e^{2t}$ و $u_1(t) = \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} + e^{2t}$

ب.
$$u_1' = -4u_1 - 2u_2 + \cos t + 4\sin t, \quad u_1(0) = 0$$
$$u_2' = 3u_1 + u_2 - 3\sin t, \quad u_2(0) = -1; \quad 0 \le t \le 2; \quad h = 0.1$$

الحلول الحقيقية $u_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t}$ و $u_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin t$

ج.
$$u_1' = u_2, \quad u_1(0) = 1$$
$$u_2' = -u_1 - 2e^t + 1, \quad u_2(0) = 0$$
$$u_3' = -u_1 - e^t + 1, \quad u_3(0) = 1; \quad 0 \le t \le 2; \quad h = 0.5$$

الحلول الحقيقية $u_3(t) = -\sin t + \cos t$ و
$u_1(t) = \cos t + \sin t - e^t + 1, \quad u_2(t) = -\sin t + \cos t - e^t$

د.
$$u_1' = u_2 - u_3 + t, \quad u_1(0) = 1$$
$$u_2' = 3t^2, \quad u_2(0) = 1$$
$$u_3' = u_2 + e^{-t}, \quad u_3(0) = -1; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.1$$

الحلول الحقيقية $u_2(t) = t^3 + 1$ ، $u_1(t) = -0.05t^5 + 0.25t^4 + t + 2 - e^{-t}$ و
$u_3(t) = 0.25t^4 + t - e^{-t}$

2. استخدم طريقة Runge–Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأولى. وقارن النتائج بالحلول الحقيقية.

أ.
$$u_1' = u_1 - u_2 + 2, \quad u_1(0) = -1$$
$$u_2' = -u_1 + u_2 + 4t, \quad u_2(0) = 0; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.1$$

الحلول الحقيقية $u_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + t^2 - \frac{1}{2}$ و $u_1(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + t^2 + 2t - \frac{1}{2}$

ب.
$$u_1' = \frac{1}{9}u_1 - \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{9}t^2 + \frac{2}{3}, \quad u_1(0) = -3$$
$$u_2' = u_2 + 3t - 4, \quad u_2(0) = 5; \quad 0 \le t \le 2; \quad h = 0.2$$

الحلول الحقيقية $u_2(t) = 4e^t - 3t + 1$ و $u_1(t) = -3e^t + t^2$

ج.
$$u_1' = u_1 + 2u_2 - 2u_3 + e^{-t}, \quad u_1(0) = 3$$
$$u_2' = u_2 + u_3 - 2e^{-t}, \quad u_2(0) = -1$$
$$u_3' = u_1 + 2u_2 + e^{-t}, \quad u_3(0) = 1; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.1$$

الحلول الحقيقية $u_1(t) = -3e^{-t} - 3\sin t + 6\cos t$ و $u_2(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{10}\sin t - \frac{21}{10}\cos t - \frac{2}{5}e^{2t}$
و $u_3(t) = -e^{-t} + \frac{12}{5}\cos t + \frac{9}{5}\sin t - \frac{2}{5}e^{2t}$.

د.
$$u_1' = 3u_1 + 2u_2 - u_3 - 1 - 3t - 2\sin t, \quad u_1(0) = 5$$
$$u_2' = u_1 - 2u_2 + 3u_3 + 6 - t + 2\sin t + \cos t, \quad u_2(0) = -9$$
$$u_3' = 2u_1 + 4u_3 + 8 - 2t, \quad u_3(0) = -5; \quad 0 \le t \le 2; \quad h = 0.2$$

الحلول الحقيقية $u_3(t) = 2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-2t} - 2$
و $u_2(t) = -8e^{-2t} + e^{4t} - 2e^{3t} + \sin t$ ، $u_1(t) = 2e^{3t} + 3e^{-2t} + 1$.

3. استخدم خوارزمية Runge–Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأعلى. وقارن النتائج بالحلول الحقيقية.

أ. $y'' - 2y' + y = te^t - t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$ عند $h = 0.1$
الحلول الحقيقية $y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2$.

ب. $t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3\ln t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$ عند $h = 0.1$
الحلول الحقيقية $y(t) = \frac{7}{4}t + \frac{1}{2}t^3\ln t - \frac{3}{4}t^3$.

ج. $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t, \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0$ عند $h = 0.2$
الحلول الحقيقية $y(t) = \frac{43}{36}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{1}{6}te^t$

د. $t^3y''' - t^2y' + 3ty' - 4y = 5t^3\ln t + 9t^3, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 3$
مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = -t^2 + t\cos(\ln t) + t\sin(\ln t) + t^3\ln t$

4. استخدم خوارزمية Runge–Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأعلى، وقارن النتائج بالحلول الحقيقية:

أ. $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = y'(0) = 2$ عند $h = 0.1$
الحلول الحقيقية $y(t) = 2e^{2t} - e^t + e^{-t}$

ب. $t^2y'' + ty' - 4y = -3t, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 3$ عند $h = 0.2$
الحلول الحقيقية $y(t) = 2t^2 + t + t^{-2}$

ج. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 9$ عند $h = 0.2$
الحلول الحقيقية $y(t) = e^{-t} + e^{2t} + e^{-2t}$

د. $t^3y''' + t^2y'' - 2ty' + 2y = 8t^3 - 2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 8, \quad y''(1) = 6$ عند $h = 0.1$
الحلول الحقيقية $y(t) = 2t - t^{-1} + t^2 + t^3 - 1$

5. غيّر خوارزمية متنبئ– مصحح آدم من الرتبة 4 لإيجاد حلول تقريبية لأنظمة معادلات من الرتبة أولى.

6. كرّر التمرين (2) مستخدمًا الخوارزمية التي طوّرت في التمرين (5).

7. كرّر التمرين (1) مستخدمًا الخوارزمية التي طوّرت في التمرين (5).

8. افترض أن الرقاص الموضح في المثال السابق لهذا الفصل بطول 2 ft وأن $g = 32.17\ \text{ft/s}^2$ مع $h = 0.1$ s. قارن الزاوية θ الناتجة من مسألتي القيمة الابتدائية الآتيتين عند $t = 0, 1$ و 2:

أ. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0, \quad \theta(0) = \dfrac{\pi}{6}, \quad \theta'(0) = 0$

ب. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\theta = 0, \quad \theta(0) = \dfrac{\pi}{6}, \quad \theta'(0) = 0$

9. إن دراسة النماذج الرياضية للتنبؤ بديناميكية مجتمع تنافس الأنواع لها صة بعمال مستقلة نشرت في بدايات هذا القرن من قبل A.J. Lotka و V. Volterra. لنأخذ مسألة التنبؤ بمجتمع من نوعين، أحدهما من النوع المفترس وحجم مجتمعه في الزمن t هو $x_2(t)$، ويقتات على النوع الآخر الذي هو الفريسة، وحجم مجتمعه $x_1(t)$. سنفترض توفر ما يكفي من القوت لتقتات الفريسة عليه، وأن معدل تواالده عند أي زمن يتناسب مع حجم المجتمع الحي في ذلك الوقت ويساوي $k_1x_1(t)$. ويعتمد معدل وفيات الفريسة على عددها وعدد المفترسين الأحياء في ذلك الوقت. وللتبسيط؛ لنفترض أن معدل وفيات الفريسة هو $k_2x_1(t)x_2(t)$. ومن جانب آخر يعتمد معدل ولادات المفترس على إمدادات الغذاء $x_1(t)$، بالإضافة إلى عدد المفترسين المتاح لأغراض التوالد. لذا نفترض أن معدل ولادات المفترس هو $k_3x_1(t)x_2(t)$. ومعدل وفيات المفترس سوف يكون متناسبًا مع عدد المفترسين الأحياء في زمن معين يساوي $k_4x_2(t)$. ولما كان $x_1'(t)$ و $x_2'(t)$ يمثلان التغير في مجتمعي الفريسة والمفترس على التوالي نسبة إلى الزمن. فإن المسألة يمكن وضعها على صورة نظام لمعادلات تفاضلية لاخطيّة

$$x_1'(t) = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)x_2(t) \quad \text{و} \quad x_2'(t) = k_3x_1(t)x_2(t) - k_4x_2(t)$$

حلّ هذا النظام لـ $0 \le t \le 4$ مفترضًا أن المجتمع الابتدائي للفريسة هو 1000 وللمفترس 500، والثوابت هي $k_1 = 3, k_2 = 0.002, k_3 = 0.0006$ و $k_4 = 0.5$. ارسم رسمًا بيانيًّا لحلول هذه المسألة، ورسمًا بيانيًّا للمجتمعين مع الزمن، ووضح الظاهرة الفيزيائية المثلّة. وهل هناك حل مستقر لنموذج المجتمع هذا؟ وإذا كان كذلك فلأي قيم x_1 و x_2 يكون الحل مستقرًّا؟

10. في التمرين (9) افترضنا مسألة التنبؤ للمجتمع في نموذج المفترس–الفريسة. وإن مسألة أخرى

من هذا النوع تأخذ في الحسبان تنافسَ النوعين على نفس كمية الغذاء. فإذا كانت $x_1(t)$ و$x_2(t)$ ترمزان إلى عدد الأحياء من النوعين عند الزمن t فإنه غالبًا ما يفترض الآتي: على الرغم من أن معدل الولادات لكل نوع يتناسب مع عدد الأحياء من ذلك النوع عند ذلك الزمن، إلا أن معدل الوفيات لكل نوع يتناسب مع مجموع كلا النوعين. سنفترض أن مجتمع زوج معين من الأنواع موضح في المعادلتين

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)[4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t)]$$

و

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)[2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)]$$

فإذا كان معروفًا أن المجتمع الابتدائي لكل نوع هو 10000 فأوجد حلًّا لهذا النظام $0 \le t \le 4$. هل هناك حل مستقر لنموذج المجتمع هذا؟ وإذا كان كذلك فلأي قيم x_1 و x_2 يكون الحل مستقرًّا؟

10.5 الاستقرارية Stability

تناولنا عددًا من الطرائق ضمن هذا الباب لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية. وعلى الرغم من توفر العديد من الأساليب الأخرى، إلا أننا اخترنا الطرائق المبينّة هنا؛ لأنها تحقق ثلاثة معايير عمومًا:

- إن تكوينها عملية واضحة على نحو كافٍ لجعلك تفهم كيف تعمل، ولماذا.
- واحدة أو أكثر من هذه الطرائق ستعطي نتائج وافية لغالبية المسائل التي تواجه الطلبة في العلوم والهندسة.
- تستند غالبية الأساليب الأكثر تقدمًا وتعقيدًا إلى واحدة أو مجموعة من العمليات الموضحة هنا.

نناقش في هذا الفصل لماذا تعطي هذه الطرائق نتائج وافية، حيث إن بعض الطرائق الأخرى المماثلة ليست كذلك.

وقبل بدء نقاشنا هذا، نحتاج إلى عرض تعريفين متعلّقين بتقارب طرائق معادلة الفرق بخطوة واحدة لحل المعادلة التفاضلية مع تناقص سعة الخطوة.

تعريف 18.5

طريقة الخطوة الواحدة تكون ثابتة عندما تكون معادلة الفرق للطريقة تقترب من المعادلة التفاضلية مع اقتراب حجم الخطوة للصفر

نقول إن طريقة معادلة الفرق بخطوة واحدة مع خطأ قطع محلي $\tau_i(h)$ عند الخطوة i نقول متسقة مع المعادلة التفاضلية التي تقربها إذا كان

$$\lim_{h\to 0} \max_{1\le i\le N} |\tau_i(h)| = 0$$

■

انظر أن هذا التعريف هو تعريف محلي؛ لأننا نفترض لكل من القيم $\tau_i(h)$ أن التقريب w_{i-1} والحل الصحيح $y(t_{i-1})$ هما نفس الشيء. وتكمن السبل الأخرى الواقعية لتحليل الآثار الناتجة عن جعل h صغيرة في تحديد الأثر الكلي للطريقة. وهذا الأثر هو أكبر خطأ للطريقة خلال كامل مدى التقريب، مفترضين فقط أن الطريقة تعطي التمهيدية الصحيحة عند القيمة الابتدائية.

تعريف 19.5

تكون الطريقة تقاربية عندما يقترب حل معادلة الفرق من حل المعادلة التفاضلية مع اقتراب حجم الخطوة للصفر.

يقال إن طريقة معادلة الفرق بخطوة واحدة متقاربة نسبة إلى المعادلة التفاضلية التي تقربها إذا كان

$$\lim_{h\to 0} \max_{1\le i\le N} |w_i - y(t_i)| = 0$$

حيث يمثّل $y_i = y(t_i)$ القيمة الصحيحة لحل المعادلة التفاضلية و w_i هو التقريب المستخرَج من طريقة الفرق عند الخطوة i.

■

ومن خلال فحص المتباينة (10.5) من الفصل (2.5) بصيغة حد الخطأ لطريقة Euler. يمكننا القول إنه في ظل فرضيات المبرهنة (9.5) يكون

$$\max_{1\le i\le N} |w_i - y(t_i)| \le \frac{Mh}{2L}|e^{L(b-a)} - 1|$$

وبذلك فإن طريقة Euler متقاربة بالنسبة إلى معادلة تفاضلية تحقق شروط هذا التعريف، ومعدل التقارب هو $O(h)$.

الطريقة المستقرة هي التي تعتمد نتائجها باستمرار على البيانات الابتدائية.

إن الطريقة المتسقة بخطوة واحدة تمتاز باقتراب معادلة الفرق لهذه الطريقة من المعادلة التفاضلية عندما تقترب سعة الخطوة إلى الصفر. لذا فإن خطأ القطع المحلي لطريقة متسقة يقترب إلى الصفر مع اقتراب سعة الخطوة من الصفر.

أما النوع الآخر من حد الخطأ لمسألة ما تظهر عند استخدام طرائق الفرق لتقريب حلول المعادلات التفاضلية فإنه ناتج عن عدم استخدام نتائج صحيحة. في التطبيق العملي، لا الشروط الابتدائية ولا العمليات الحسابية المتبعة بعد ذلك تكون ممثلة بدقة بسبب خطأ التدوير المرتبط بالعمليات الحسابية محدودة المواقع العشرية. ولقد رأينا في الفصل (2.5) أن هذا الافتراض يمكن أن يؤدي إلى مصاعب حتى مع طريقة Euler المتقاربة. ولتحليل هذه الحالة جزئيًا، سنحاول تحديد أي الطرائق مستقرة، لكون تغييرات أو تشويشات صغيرة في الشروط الابتدائية تنتج في المقابل تغييرات صغيرة في التقريبات التي تلي ذلك.

ولأن الأساس في استقرارية معادلة الفرق بخطوة واحدة يكون إلى حد ما مماثلا لشرط المعادلة التفاضلية الجيدة التقديم، فإنه ليس بمستغرب أن يظهر شرط Lipschitz هنا، كما حدث في المبرهنة المقابلة للمعادلات التفاضلية، المبرهنة (6.5).

إن الجزء (i) من المبرهنة التالية يأخذ في الحسبان استقرارية طريقة الخطوة الواحدة، وبرهان هذه التمهيدية ليس صعبًا وقد أُخذ في الحسبان في التمرين (1). والجزء (ii) من المبرهنة (20.5) يتضمن شروطًا وافية لطريقة متسقة لكي تكون متقاربة. ويبرر الجزء (iii) الملاحظة التي ظهرت في الفصل (5.5) حول السيطرة على الخطأ التام لطريقة ما من خلال السيطرة على خطأ القطع المحلي له، الذي يؤدي إلى أنه حينما يكون للخطأ بالقطع المحلي معدل تقارب $O(h^n)$ فسيكون للخطأ الكلي نفس معدل التقارب. وإن برهان الجزأين (ii) و (iii) أكثر صعوبة من الجزء (i)، ويمكن إيجاده ضمن موضوع عُرض في [Gea1, pp. 57–58].

مبرهنة 20.5 لنفترض أن مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

تم تقريبها بطريقة الفرق بخطوة واحدة بالصيغة

$$w_0 = \alpha, \quad w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h)$$

لنفترض أيضًا وجود $h_0 > 0$، وأن $\phi(t, w, h)$ متصلة، وتحقق شرط Lipschitz في المتغير w مع ثابت L على المجموعة

$$D = \{(t, w, h) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty, 0 \le h \le h_0\}$$

عندئذ

(i) الطريقة مستقرة.

(ii) طريقة الفرق متقاربة إذا وفقط إذا كانت متسقة. وتكافئ

$$a \le t \le b \text{ لكل } \phi(t, y, 0) = f(t, y)$$

(iii) إذا كانت الدالة τ موجودة، ولكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, N$ يكون خطأ القطع المحلي $\tau_i(h)$ محققًا $|\tau_i(h)| \le \tau(h)$، حيث $0 \le h \le h_0$ فإن

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{\tau(h)}{L} e^{L(t_i - a)}$$ ■

مثال 1 افترض طريقة Modified Euler المعطاة من خلال

$$w_0 = \alpha, \quad w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))]$$

عند $i = 0, 1, \ldots, N-1$. سنتحقق من أن هذه الطريقة تحقق فرضية المبرهنة hypothesis (5.20). ولهذه الطريقة

$$\phi(t, w, h) = \tfrac{1}{2} f(t, w) + \tfrac{1}{2} f(t + h, w + hf(t, w))$$

فإذا كانت f تحقق شرط Lipschitz على $\{(t, w) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty\}$ في المتغير w مع ثابت L فإن

$$\begin{aligned}\phi(t, w, h) - \phi(t, \overline{w}, h) &= \tfrac{1}{2} f(t, w) + \tfrac{1}{2} f(t + h, w + hf(t, w)) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} f(t, \overline{w}) - \tfrac{1}{2} f(t + h, \overline{w} + hf(t, \overline{w}))\end{aligned}$$

وإن شرط Lipschitz على f يؤدي إلى

$$\begin{aligned}|\phi(t, w, h) - \phi(t, \overline{w}, h)| &\le \tfrac{1}{2} L|w - \overline{w}| + \tfrac{1}{2} L\,|w + hf(t, w) - \overline{w} - hf(t, \overline{w})| \\ &\le L|w - \overline{w}| + \tfrac{1}{2} L\,|hf(t, w) - hf(t, \overline{w})| \\ &\le L|w - \overline{w}| + \tfrac{1}{2} hL^2|w - \overline{w}| \\ &= \left(L + \tfrac{1}{2} hL^2\right)|w - \overline{w}|.\end{aligned}$$

لذا فإن ϕ تحقق شرط Lipschitz في w على المجموعة

$$\{(t, w, h) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty, 0 \le h \le h_0\}$$

ولأي $h_0 > 0$ مع ثابت

$$L' = L + \tfrac{1}{2} h_0 L^2$$

وأخيرًا إذا كانت f متصلة على $\{(t, w) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty\}$، فإن ϕ متصلة على

$$\{(t, w, h) \mid a \le t \le b, -\infty < w < \infty, 0 \le h \le h_0\}$$

ومن ثم فالمبرهنة (20.5) تؤدي إلى أن طريقة Modified Euler متسقة. وبوضع $h = 0$، يكون لدينا

$$\phi(t, w, 0) = \tfrac{1}{2} f(t, w) + \tfrac{1}{2} f(t + 0, w + 0 \cdot f(t, w)) = f(t, w)$$

ولذا فإن شرط الاتساق المنوّه عنه في الجزء (ii) من المبرهنة (20.5) يتحقق، وبذلك فالطريقة متقاربة. والأكثر من ذلك لاحظنا أن خطأ القطع المحلي لهذه الطريقة يكون $O(h^2)$، ولذلك فإن $O(h^2)$ تقارب طريقة Modified Euler هو أيضًا $O(h^2)$. ■

أما الطرائق المتعددة الخطوات. فإن المسائل ذات العلاقة بالاتساق. والاستمرورية والاستقرارية تكون مركبة بسبب عدد التقريبات الداخلة في كل خطوة. ونجد في طرائق الخطوة الواحدة أن التقريب w_{i+1} يعتمد مباشرة على التقريب السابق w_i، حيث تستخدم طرائق متعددة الخطوات على الأقل اثنين من التقريبات السابقة. وتتضمن الطرائق الاعتيادية المطبّقة أكثر من ذلك.

ويمكن كتابة الطريقة المتعددة الخطوات العامة لتقريب حل معادلة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \tag{53.5}$$

بالصيغة

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$
$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i+1-m}), \tag{54.5}$$

لكلّ من $i = m-1, m, \ldots, N-1$ حيث إن $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ ثوابت و $h = (b-a)/N$ كالعادة و $t_i = a + ih$.

إن خطأ القطع المحلي للطريقة المتعددة الخطوات وفقًا لهذه الصيغة يكون

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - a_{m-1}y(t_i) - \cdots - a_0 y(t_{i+1-m})}{h} - F(t_i, h, y(t_{i+1}), y(t_i), \ldots, y(t_{i+1-m})),$$

لكلّ من $i = m-1, m, \ldots, N-1$. وكما في طريقة الخطوة الواحدة. فإن خطأ القطع المحلي يقيس فشل الحل y للمعادلة التفاضلية في تحقيق معادلة الفرق.

لقد لاحظنا في طريقة Adams–Bashforth بأربع خطوات أن

$\tau_{i+1}(h) = \frac{251}{720} y^{(5)}(\mu_i)h^4$ بالنسبة إلى بعض $\mu_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$

أما الطريقة Adams–Moulton بثلاث خطوات فلها

$\tau_{i+1}(h) = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\mu_i)h^4$ بالنسبة إلى بعض $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$

مع تحقق كون $y \in C^5[a, b]$ على أي حال.

ومن خلال التحليل. افترضنا افتراضين يتعلقان بالدالة F:

1. إذا كان $f \equiv 0$ (بمعنى أنه إذا كانت المعادلة التفاضلية متجانسة). فإن $F \equiv 0$ أيضًا.
2. تحقق F شرط Lipschitz بالنسبة إلى $\{w_j\}$، في ضوء وجود الثابت L، وأنه لكل من أزواج المتتاليات $\{v_j\}_{j=0}^{N}$ و $\{\tilde{v}_j\}_{j=0}^{N}$. وعند $i = m-1, m, \ldots, N-1$، يكون لدينا

$$|F(t_i, h, v_{i+1}, \ldots, v_{i+1-m}) - F(t_i, h, \tilde{v}_{i+1}, \ldots, \tilde{v}_{i+1-m})| \le L \sum_{j=0}^{m} |v_{i+1-j} - \tilde{v}_{i+1-j}|$$

إن طرائق Adams–Bashforth الواضحة و Adams–Moulton الضمنية تحقق كلا الشرطين.

مفترضين أن f تحقق شرط Lipschitz. (انظر التمرين 2).

إن مفهوم تقارب الطرائق متعددة الخطوات هو نفسه في طرائق الخطوة الواحدة والطرائق متعددة الخطوات متقاربة إذا كان حل معادلة الفرق يقترب من حل المعادلة التفاضلية كلما اقتربت سعة الخطوة من الصفر. معنى ذلك أن $\lim_{h\to 0}\max_{0\le i\le N}|w_i - y(t_i)| = 0$.

وبالنسبة إلى الاتساق، فهناك حالة مختلفة قليلاً. ومرةً أخرى نريد للطريقة المتعددة الخطوات أن تكون متسقة على أن تقترب معادلة الفرق من المعادلة التفاضلية كلما اقتربت سعة الخطوة من الصفر، بمعنى أن خطأ القطع المحلي يقترب من الصفر كلما اقتربت سعة الخطوة منه. ويظهر الشرط الخارجي هنا بسبب عدد نقاط البداية التي تتطلبها الطرائق متعددة الخطوات. ولأن قيمة البداية الأولى $w_0 = \alpha$ فقط تكون موجودة عادةً، فإننا نحتاج - كمتطلب - إلى اقتراب الأخطاء في قيم البداية $\{\alpha_i\}$ جميعها من الصفر كلما اقتربت سعة الخطوة منه. ولذلك فإن كلاً من:

$$\lim_{h\to 0}|\tau_i(h)| = 0 \quad \text{لكل} \quad i = m, m+1, \ldots, N \tag{55.5}$$

و

$$\lim_{h\to 0}|\alpha_i - y(t_i)| = 0 \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{56.5}$$

يجب أن تكون صحيحة. لكي تكون الطريقة متعددة الخطوات بصيغة المعادلة (54.5) متسقة. انظر إلى المعادلة (56.5) التي تشير إلى أن الطريقة المتعددة الخطوات لن تكون متسقة ما لم تكن طريقة الخطوة الواحدة التي تولد قيم البداية متسقة أيضاً.

وإن المبرهنة التالية للطرائق المتعددة الخطوات مشابهة للمبرهنة (20.5) الجزء (iii)، وتعطي علاقة ما بين خطأ القطع المحلي والخطأ التام لطريقة متعددة الخطوات. إنها تعطي التبرير النظري لمحاولة السيطرة على الخطأ التام من خلال السيطرة على خطأ القطع المحلي. ويمكن إيجاد برهان صيغة لهذه المبرهنة أعمّ قليلًا في [IK, pp. 387–388].

مبرهنة 21.5 لنفترض أنه تم تقريب مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

بطريقة متنبئ - مصحح آدمز الواضحة مع معادلة متنبئ Adams–Bashforth في m من الخطوات

$$w_{i+1} = w_i + h[b_{m-1}f(t_i, w_i) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})]$$

بخطأ قطع محلي $\tau_{i+1}(h)$ ومعادلة المصحح Adams–Moulton الضمنية في $(m-1)$ من الخطوات

$$w_{i+1} = w_i + h\left[\tilde{b}_{m-1}f(t_i, w_{i+1}) + \tilde{b}_{m-2}f(t_i, w_i) + \cdots + \tilde{b}_0 f(t_{i+2-m}, w_{i+2-m})\right]$$

بخطأ قطع محلي $\tilde{\tau}_{i+1}(h)$. بالإضافة إلى ذلك لنفترض أن $f(t, y)$ و $f_y(t, y)$ متصلان على $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b$ و $-\infty < y < \infty\}$، وأن f_y محددة، لذا فإن خطأ القطع المحلي $\sigma_{i+1}(h)$ لطريقة متنبئ - مصحح هو

$$\sigma_{i+1}(h) = \tilde{\tau}_{i+1}(h) + \tau_{i+1}\tilde{b}_{m-1}\frac{\partial f}{\partial y}(t_{i+1}, \theta_{i+1})$$

حيث إن θ_{i+1} عبارة عن عدد ما بين الصفر و $h\tau_{i+1}(h)$.
بالإضافة إلى ذلك يوجد ثابتان k_1 و k_2 بحيث

$$|w_i - y(t_i)| \le \left[\max_{0 \le j \le m-1} |w_j - y(t_j)| + k_1\sigma(h)\right]e^{k_2(t_i-a)}$$

حيث إن $\sigma(h) = \max_{m \le j \le N} |\sigma_j(h)|$. ■

وقبل مناقشة الروابط ما بين الاتساق، والتقارب، واستقرارية الطرائق المتعددة الخطوات، علينا أن نأخذ في الحسبان تفصيلات أكثر لمعادلة الفرق للطريقة متعددة الخطوات. وبذلك سنكتشف سبب اختيار طرائق Adams بمثابة الطرائق المتعددة الخطوات المعيارية المعتمدة.

وبالربط بمعادلة الفرق (54.5) المعطاة في بداية هذا النقاش، فإن

$$w_0 = \alpha,\ w_1 = \alpha_1, \ldots, w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i - a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i+1-m})$$

كثيرة حدود. وتسمى كثيرة حدود المميزة Characteristic polynomial للطريقة، ويكون

$$P(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - a_{m-2}\lambda^{m-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0 \qquad (57.5)$$

إن استقرارية الطريقة المتعددة الخطوات بالنسبة إلى خطأ التدوير تكون محتلفة من حيث مقادير الأصفار لكثيرة حدود المميزة. ولكي نرى ذلك، افترض تطبيق الطريقة المتعددة الخطوات المعيارية في المعادلة (54.5) لمسألة القيمة الابتدائية الاعتيادية

$$y(a) = \alpha, \quad y' \equiv 0, \quad \text{حيث} \quad \alpha \neq 0 \qquad (58.5)$$

لهذه المسألة حل صحيح $y(t) \equiv \alpha$. ومن خلال فحص المعادلتين (26.5) و (27.5) في الفصل (6.5) نستطيع أن نرى بأن أي طريقة متعددة الخطوات سوف تنتج نظريًا الحل الصحيح $w_n = c$ لكل قيم n. الانحراف الوحيد عن الحل الصحيح هو تمهيدية خطأ التدوير للطريقة

الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية في (58.5) له $f(t, y) \equiv 0$. ولذلك من خلال الافتراض (1) يكون لدينا $F(t_i, h, w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_{i+1-m}) = 0$ في معادلة الفرق (54.5). وتمهيدية لتلك تصبح الصيغة المعيارية لمعادلة الفرق

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} \qquad (59.5)$$

لنفترض أن λ أحد أصفار كثيرة حدود المميزة المرتبطة بالمعادلة (54.5). لذا فإن $w_n = \lambda^n$ وكل n هو حل للمعادلة (59.5)، لأن

$$\lambda^{i+1} - a_{m-1}\lambda^i - a_{m-2}\lambda^{i-1} - \cdots - a_0\lambda^{i+1-m} = \lambda^{i+1-m}[\lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - \cdots - a_0] = 0$$

وفي الحقيقة إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ أصفارًا مختلفة لكثيرة حدود المميزة لمعادلة (54.5) فمن الممكن ملاحظة أن كل حل للمعادلة (59.5) يمكن وضعه بالصيغة

$$w_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i^n \qquad (60.5)$$

لمجموعة وحيدة من الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

ولما كان الحل الصحيح للمعادلة (58.5) هو $y(t) = \alpha$. فإن اختيار $w_n = \alpha$ لقيم n كلها هو حل

للمعادلة (59.5). وباستخدام هذه الحقيقة في المعادلة (59.5) نحصل على

$$0 = \alpha - \alpha a_{m-1} - \alpha a_{m-2} - \cdots - \alpha a_0 = \alpha(1 - a_{m-1} - a_{m-2} - \cdots - a_0)$$

هذا يشير إلى أن $\lambda = 1$ هو أحد أصفار كثيرة حدود المميزة (57.5). سنفترض توضيح الحل في التمثيل (60.5) من خلال $\lambda_1 = 1$ و $c_1 = \alpha$. ولذلك فإن كل حلول المعادلة (59.5) يعبر عنها بالصيغة

$$w_n = \alpha + \sum_{i=2}^{m} c_i \lambda_i^n \qquad (61.5)$$

فإذا كانت الحسابات جميعها صحيحة فستكون أصفارًا. وفي التطبيق العملي لا تكون الثوابت $c_2, c_3, \ldots, c_m$ أصفارًا، بسبب خطأ التدوير. وخطأ التدوير في الحقيقة ينمو أسيًا ما لم يكن $|\lambda_i| \le 1$ للجذور $c_2, c_3, \ldots, c_m$ جميعها. وكلما كانت قيم هذه الجذور صغيرة $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ زادت استقرارية الطريقة بالنسبة إلى نمو خطأ التدوير.

عند اشتقاق المعادلة (61.5) افترضنا افتراضًا تبسيطيًا بأن أصفار كثيرة حدود المميزة مختلفة. والحالة k مماثلة عندما تظهر أصفار متعددة. وعلى سبيل المثال إذا كان $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+p}$ لقيم k وp المعينة. فإن ذلك يتطلب استبدال المجموع

$$c_k\lambda_k^n + c_{k+1}\lambda_{k+1}^n + \cdots + c_{k+p}\lambda_{k+p}^n$$

في المعادلة (61.5) بالمقدار

$$c_k\lambda_k^n + c_{k+1}n\lambda_k^{n-1} + c_{k+2}n(n-1)\lambda_k^{n-2} + \cdots + c_{k+p}[n(n-1)\cdots(n-p+1)]\lambda_k^{n-p} \qquad (62.5)$$

(انظر [He2, pp. 119–145]) وعلى الرغم من تعديل صيغة الحل، إلا أن خطأ التدوير يستمر في النمو أسيًا إذا كان $|\lambda_k| > 1$.

وعلى الرغم من أننا افترضنا الحالة الخاصة فقط لتقريب مسائل القيمة الابتدائية بصيغة المعادلة (58.5)، إلا أن سمات استقرارية هذه المعادلة تحدد استقرارية الحالة عندما لا تكون $f(t, y)$ صفرًا بالتحديد، وهذا بسبب كون حل المعادلة المتجانسة (58.5) جزءًا من حل أي معادلة. وقد صيغت التعريفات الآتية من خلال هذا النقاش.

تعريف 22.5 لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ جذور المعادلة المميزة (ليس بالضرورة أن تكون مختلفة).

$$P(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0 = 0$$

المرتبطة بطريقة الفرق متعددة الخطوات

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

و $$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i+1-m})$$

فإذا كانت $|\lambda_i| \le 1$ لكل من $i = 1, 2, \ldots, m$ والجذور جميعها ذات القيمة المطلقة 1 هي جذور بسيطة، فإن طريقة الفرق توصف بأنها تحقق شرط الجذر root condition.

مبرهنة 23.5 (i) الطرائق التي تحقق شرط الجذر وفيها $\lambda = 1$ بمنزلة الجذر الوحيد للمعادلة المميزة بقيمة 1 تسمى مستقرة بقوة strongly stable.

(ii) الطرائق التي تحقق شرط الجذر ولها أكثر من جذر واحد مختلف بقيمة 1 تسمى مستقرة بضعف weakly stable.

(iii) الطرائق التي لا تحقق شرط الجذر تسمى غير مستقرة unstable. ■

الاتساق والتقارب للطريقة متعددة الخطوات مرتبطان باستقرارية التدوير لطريقة. تعطي المبرهنة الآتية تفصيلاً لهذه الارتباطات. ولبرهنة هذه النتائج والمبرهنة المستندة إليها، انظر [IK, pp. 410–417].

مبرهنة 24.5 الطريقة المتعددة الخطوات بالصيغة

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

حيث إن

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i+1-m})$$

مستقرة إذا وفقط إذا تحقق شرط الجذر. والأكثر من ذلك، إذا كانت طريقة الفرق متسقة مع المعادلة التفاضلية، فإن الطريقة مستقرة إذا وفقط إذا كانت متقاربة. ■

مثال 2 قد لاحظنا أن طريقة Adams–Bashforth من الرتبة الرابعة يمكن وضعها بالصيغة

$$w_{i+1} = w_i + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i-3})$$

حيث إن

$$F(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i-3}) = \frac{h}{24}[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

وبذلك فإن $m = 4$، $a_0 = 0$، $a_1 = 0$، $a_2 = 0$ و $a_3 = 1$.

إن المعادلة المميزة لطريقة Adams–Bashforth هذه تعطينا

$$0 = P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 1)$$

التي لها جذور $\lambda_1 = 1$، $\lambda_2 = 0$، $\lambda_3 = 0$ و $\lambda_4 = 0$، وإنها تحقق شرط الجذر ومستقرة بقوة ولطريقة Adams–Bashforth نفس كثيرة حدود المميزة $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2$ مع أصفار $\lambda_1 = 1$، $\lambda_2 = 0$، $\lambda_3 = 0$، وإنها أيضاً مستقرة بقوة. ■

مثال 3 إن الطريقة متعددة الخطوات الواضحة المعطاة من خلال

$$w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3}[2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

قد تناولناها في الفصل (5.6) على أنها طريقة Milne من الرتبة رابعة. وحيث إن المعادلة المميزة لهذه الطريقة $0 = P(\lambda) = \lambda^4 - 1$ لها أربعة جذور بقيمة 1 $\lambda_1 = 1$، $\lambda_2 = -1$، $\lambda_3 = i$ و $\lambda_4 = -i$ فإن الطريقة تحقق شرط الجذر، لكنها فقط مستقرة بضعف.

افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -6y + 6, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 2$$

التي لها حل صحيح $y(t) = 1 + e^{-6t}$. ولأغراض المقارنة فإن طريقة Adams–Bashforth من الرتبة الرابعة والمستقرة بقوة وطريقة Milne المستقرة بضعف تُستخدمان في تقريب حل هذه المسألة عند $h = 0.1$ مع قيم بداية صحيحة. وتبين النتائج في جدول (19.5) تأثيرات الطريقة المستقرة بضعف لهذه المسألة مقابل الطريقة المستقرة بقوة.

جدول 19.5

t_i	الصحيحة $y(t_i)$	طريقة آدمز – باشفورث w_i	الخطأ $\lvert y_i - w_i \rvert$	طريقة مالين w_i	الخطأ $\lvert y_i - w_i \rvert$
0.10000000		1.5488116		1.5488116	
0.20000000		1.3011942		1.3011942	
0.30000000		1.1652989		1.1652989	
0.40000000	1.0907180	1.0996236	8.906×10^{-3}	1.0983785	7.661×10^{-3}
0.50000000	1.0497871	1.0513350	1.548×10^{-3}	1.0417344	8.053×10^{-3}
0.60000000	1.0273237	1.0425614	1.524×10^{-2}	1.0486438	2.132×10^{-2}
0.70000000	1.0149956	1.0047990	1.020×10^{-2}	0.9634506	5.154×10^{-2}
0.80000000	1.0082297	1.0359090	2.768×10^{-2}	1.1289977	1.208×10^{-1}
0.90000000	1.0045166	0.9657936	3.872×10^{-2}	0.7282684	2.762×10^{-1}
1.00000000	1.0024788	1.0709304	6.845×10^{-2}	1.6450917	6.426×10^{-1}

إن سبب اختيارنا Adams–Bashforth–Moulton ليكون أسلوب المتنبئ – المصحح المعياري من الرتبة الرابعة، الذي نعتمده في الفصل (6.5) والمقدم على طريقة Milne–Simpson بنفس الرتبة هو أن كلًا من طريقتي Adams–Bashforth و Adams–Moulton مستقرة بقوة. وهما أكثر احتمالاً لإعطاء تقريبات دقيقة لصنف أوسع من المسائل مقارنة بالمتنبئ – المصحح المستند إلى أساليب Milne و Simpson، حيث إن كلًا منهما مستقر بضعف. ■

مجموعة التمرين 10.5 EXERCISE SET

1. لبرهنة المبرهنة (20.5) الفقرة (i)، أثبت أن الفرضيات تؤدي إلى وجود ثابت $K > 0$ بحيث

$$|u_i - v_i| \leq K|u_0 - v_0| \quad \text{لكل} \quad 1 \leq i \leq N$$

متى ما حققت $\{u_i\}_{i=1}^{N}$ و $\{v_i\}_{i=1}^{N}$ معادلة الفرق $w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h)$

2. لكلٍّ من طريقتي Adams–Bashforth و Adams–Moulton من الرتبة رابعة

أ. أثبت أنه إذا كانت $f = 0$ فإن

$$F(t_i, h, w_{i+1}, \ldots, w_{i+1-m}) = 0$$

ب. أثبت أنه إذا كانت f تحقق شرط Lipschitz بثابت L فإن ثابت C موجود مع

$$|F(t_i, h, w_{i+1}, \ldots, w_{i+1-m}) - F(t_i, h, v_{i+1}, \ldots, v_{i+1-m})| \leq C \sum_{j=0}^{m} |w_{i+1-j} - v_{i+1-j}|$$

3. استخدم نتائج التمرين (31) في الفصل (4.5) لإثبات أن طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة المتسقة.

4. افترض المعادلة التفاضلية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

أ. أثبت أن

$$y'(t_i) = \frac{-3y(t_i) + 4y(t_{i+1}) - y(t_{i+2})}{2h} + \frac{h^2}{3}y'''(\xi_1)$$

لـ ξ معينة، حيث $t_i < \xi_i < t_{i+2}$

ب. تقترح الفقرة (أ) طريقة الفرق الآتية:

$$w_{i+2} = 4w_{i+1} - 3w_i - 2hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-2$$

استخدم هذه الطريقة لحل المسألة

$$y' = 1 - y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$$

مع $h = 0.1$. استخدم قيم البداية $w_0 = 0$ و $w_1 = y(t_1) = 1 - e^{-0.1}$.

ج. كرِّر الفقرة (ب) مع $h = 0.01$ و $w_1 = 1 - e^{-0.01}$.

د. حلِّل هذه الطريقة بالنسبة إلى الاتساق، الاستقرارية، والتقارب.

5. لنفترض طريقة متعددة الخطوات

$$w_{i+1} = -\tfrac{3}{2}w_i + 3w_{i-1} - \tfrac{1}{2}w_{i-2} + 3hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 2, \ldots, N-1$$

مع قيم بداية w_0, w_1, w_2:

أ. أوجد خطأ القطع المحلي.

ب. علق على حالات الاتساق، الاستقرارية، والتقارب.

6. أوجد حلًا تقريبيًا للمعادلة التفاضلية

$$y' = -y, \quad 0 \le t \le 10, \quad y(0) = 1$$

مستخدمًا طريقة Milne مع $h = 0.1$، ثم مع $h = 0.01$، وقيم بداية $w_0 = 1$ و $w_1 = e^{-h}$ لكلا الحالتين.

كيف يظهر تأثير انخفاض h من $h = 0.1$ إلى $h = 0.01$ في عدد الخانات الصحيحة في تقريب الحلول عند $t = 1$ و $t = 10$؟

7. تحقق من استقرارية طريقة الفرق

$$w_{i+1} = -4w_i + 5w_{i-1} + 2h[f(t_i, w_i) + 2hf(t_{i-1}, w_{i-1})]$$

عند $i = 1, 2, \ldots, N-1$ مع قيم بداية w_0, w_1.

8. افترض المسألة $y' = 0, 0 \le t \le 10, y(0) = 0$ التي لها حل $y \equiv 0$. فإذا كانت طريقة الفرق في التمرين (4) هي المطبقة على المسألة فإن

$$w_{i+1} = 4w_i - 3w_{i-1} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$w_0 = 0 \text{ و } w_1 = \alpha_1$$

افترض $w_1 = \alpha_1 = \varepsilon$، حيث إن ε خطأ تدوير صغير. احسب w_i بدقة عند $i = 2, 3, \ldots, 6$ للوقوف على كيفية تضخم الخطأ ε.

11.5 المعادلات التفاضلية الشديدة Stiff Differential Equations

للطرائق المستخدمة في تقريب حل مسائل القيمة الابتدائية حدود خطأ تتضمن مشتقة عالية لحل المعادلة. فإذا كان بالإمكان وضع حدود معقولة للمشتقة فإن الطريقة سيكون لها حد خطأ متوقَّع يمكن استخدامه في تقدير دقة التقريب. وحتى لو أن المشتقة تنمو مع زيادة الخطوات، فإنه يمكن إبقاء الخطأ ضمن سيطرة نسبية، مع تحقق نمو الحل من حيث القيمة. على أي حال فغالبًا ما تظهر مشاكل عندما تزداد قيمة المشتقة، ولكن لا يكون الحل كذلك. ويمكن للخطأ في هذه الحالة أن ينمو نموًا كبيرًا لرتبة تجعله يسيطر على الحسابات. إن مسائل القيمة الابتدائية التي من المحتمل أن يحصل لها مثل ذلك تسمى معادلات شديدة stiff equations. وهي شائعة إلى حدٍّ ما، وخصوصًا في دراسة الاهتزازات، التفاعلات الكيميائية، والدوائر الكهربائية.

تتميز المعادلات التفاضلية الشديدة بأن لحلها الصحيح حدًا بالصيغة e^{-ct}، حيث c ثابت كبير موجب.

النظم الشديدة تستقي اسمها من حركة النابض ونظم الكتلة التي لها ثوابت ناخية كبيرة.

وهذا عادةً يشكّل جزءًا فقط من الحل، ويُسمى الحل العابر transient solution. الجزء الأكثر أهمية في الحل يسمى حل الحالة المستقرة steady-state solution. الجزء العابر من المعادلة الشديدة سيتضاءل بسرعة نحو الصفر مع زيادة t. ولكن لما كان للمشتقة من الرتبة n لهذا الجزء قيمة $c^n e^{-ct}$، فإن المشتقة لن تتضاءل بمثل هذه السرعة. وفي الحقيقة لما كانت المشتقة في حد الخطأ فإنها لا تُقيَّم عند t، بل عند عدد ما بين الصفر و t، فإن حدود المشتقة يمكن أن تزداد مع زيادة t وبسرعة كبيرة في الواقع. ولحسن الحظ، فالمعادلات الشديدة عمومًا يمكن التنبؤ بها من طبيعة المسألة التي اشتُقت المعادلة منها، ويمكن إبقاء الخطأ تحت السيطرة مع الحذر. وسنتناول في هذا الفصل الأسلوب الذي يمكن من خلاله عمل ذلك.

مثال 1

إن نظام مسائل القيمة الابتدائية

$$u_1' = 9u_1 + 24u_2 + 5\cos t - \tfrac{1}{3}\sin t, \quad u_1(0) = \tfrac{4}{3}$$
$$u_2' = -24u_1 - 51u_2 - 9\cos t + \tfrac{1}{3}\sin t, \quad u_2(0) = \tfrac{2}{3}$$

له حل وحيد

$$u_1(t) = 2e^{-3t} - e^{-39t} + \tfrac{1}{3}\cos t$$
$$u_2(t) = -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \tfrac{1}{3}\cos t$$

إن الحد العابر e^{-39t} في الحل يدفع هذا النظام إلى أن يكون شديدًا. وبتطبيق الخوارزمية (7.5) فإن طريقة Runge–Kutta للأنظمة من الرتبة الرابعة تعطي النتائج المبينة في جدول (20.5). وعندما $h = 0.05$، نحصل على الاستقرارية، وتكون التقريبات دقيقة. وعلى أي حال تؤدي زيادة سعة الخطوة لـ $h = 0.1$ إلى نتائج خطيرة تُنظر في جدول. ■

وعلى الرغم من أن الشدة ترتبط عادة بأنظمة المعادلات التفاضلية، فإن خصائص التقريب لطريقة عددية معينة تطبَّق على نظام شديد يمكن التنبؤ به من خلال فحص الخطأ الناتج عند تطبيق الطريقة على معادلة اختبار بسيطة

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = \alpha \quad \text{حيث} \quad \lambda < 0 \qquad (63.5)$$

جدول 20.5

$w_2(t)$ $h = 0.1$	$w_2(t)$ $h = 0.05$	$u_2(t)$	$w_1(t)$ $h = 0.1$	$w_1(t)$ $h = 0.05$	$u_1(t)$	t
−7.844527	−0.8703152	−1.032001	−2.645169	1.712219	1.793061	0.1
−38.87631	−0.8550148	−0.8746809	−18.45158	1.414070	1.423901	0.2
−176.4828	−0.7228910	−0.7249984	−87.47221	1.130523	1.131575	0.3
−789.3540	−0.6079475	−0.6082141	−934.0722	0.9092763	0.9094086	0.4
−3520.00	−0.5155810	−0.5156575	−1760.016	9.7387506	0.7387877	0.5
−15697.84	−0.4403558	−0.4404108	−7848.550	0.6056833	0.6057094	0.6
−69979.87	−0.3773540	−0.3774038	−34989.63	0.4998361	0.4998603	0.7
−311959.5	−0.3229078	−0.3229535	−155979.4	0.4136490	0.4136714	0.8
−1390664.	−0.2743673	−0.2744088	−695332.0	0.3415939	0.3416143	0.9
−6199352.	−0.2298511	−0.2298877	−3099671.	0.2796568	0.2796748	1.0

وحلُّ هذه المعادلة هو $y(t) = \alpha e^{\lambda t}$، الذي يتضمن الحل العابر $e^{\lambda t}$. إن حل الحالة المستقرة هو صفر، ولذلك فمن السهل تحديد خصائص تقريب الطريقة. (تتطلب مناقشة أكثر شمولية لخطأ التدوير المرتبط بالأنظمة الشديدة فحص معادلة الاختبار عندما تكون λ عددًا معقدًا بجزء حقيقي سالب، انظر (Gea1, p. 222).

افترض أولًا طريقة أويلر Euler مطبقة على معادلة الاختبار، وبجعل $h = (b - a)/N$ و $t_j = jh$ عند $j = 0, 1, 2, \ldots, N$، فإن المعادلة (5.8) تعطي

$$w_{j+1} = w_j + h(\lambda w_j) = (1 + h\lambda)w_j \quad \text{و} \quad w_0 = \alpha$$

ومن ثم فإن

$$w_{j+1} = (1 + h\lambda)^{j+1} w_0 = (1 + h\lambda)^{j+1}\alpha \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{64.5}$$

وحيث إن الحل الصحيح هو $y(t) = \alpha e^{\lambda t}$، فإن الخطأ المطلق هو

$$|y(t_j) - w_j| = |e^{jh\lambda} - (1 + h\lambda)^j||\alpha| = |(e^{h\lambda})^j - (1 + h\lambda)^j||\alpha|$$

وتُحدّد الدقة من خلال أي مدى يكون الحد $1 + h\lambda$ يقرب $e^{h\lambda}$. وعندما $\lambda < 0$، فإن الحل الصحيح $(e^{h\lambda})^j$ يتضاءل نحو الصفر مع تزايد j، ولكن من خلال المعادلة (5.64). ستكون هذه سمة التقريب فقط إذا كان $|1 + h\lambda| < 1$، التي تعطي $-2 < h\lambda < 0$. وهذا يجعل سعة الخطوة h لطريقة Euler مقتصرة على تحقق $h < 2/|\lambda|$.

لنفترض الآن أن خطأ التدوير δ_0 قد أدخل ضمن الشرط الابتدائي لطريقة Euler، $w_0 = \alpha + \delta_0$. وعند الخطوة j يكون خطأ التدوير

$$\delta_j = (1 + h\lambda)^j \delta_0$$

ولأن $\lambda < 0$ فإن شرط السيطرة على نمو خطأ التدوير هو نفسه شرط السيطرة على الخطأ المطلق $|1 + h\lambda| < 1$، الذي يؤدي إلى أن $h < 2/|\lambda|$.

والحالة شبيهة بطرائق خطوة واحدة أخرى. وعمومًا فالدالة Q موجودة مع خاصية وجود طريقة فالدالة الفرق، وعند تطبيقها على معادلة الاختبار تعطي

$$w_{i+1} = Q(h\lambda)w_i \tag{65.5}$$

وتعتمد دقة الطريقة على أي مدى تكون $Q(h\lambda)$ أقرب إلى $e^{h\lambda}$، وعلى أن الخطأ سوف ينمو بلا حدود إذا كانت $|Q(h\lambda)| > 1$. وسيكون لطريقة Taylor من الرتبة n على سبيل مثال استقرارية

بالنسبة إلى كل من نمو خطأ التدوير والخطأ المطلق، على شرط اختيار h لتحقيق

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \cdots + \frac{1}{n!}h^n\lambda^n\right| < 1$$

يختبر التمرين (10) الحالة الخاصة حينما تكون الطريقة هي طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة الاعتيادية، وهي طريقة Taylor من الرتبة الرابعة.

وعند تطبيق طريقة كثيرة الحدود من صيغة المعادلة (54.5) في معادلة الاختبار، فإن التمهيدية هي

$$w_{j+1} = a_{m-1}w_j + \cdots + a_0 w_{j+1-m} + h\lambda(b_m w_{j+1} + b_{m-1}w_j + \cdots + b_0 w_{j+1-m})$$

عند $j = m-1, \ldots, N-1$ أو

$$(1 - h\lambda b_m)w_{j+1} - (a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})w_j - \cdots - (a_0 + h\lambda b_0)w_{j+1-m} = 0$$

وترتبط بمعادلة الفرق المتجانس هذه كثيرة حدود المميزة

$$Q(z, h\lambda) = (1 - h\lambda b_m)z^m - (a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})z^{m-1} - \cdots - (a_0 + h\lambda b_0)$$

وكثيرة الحدود هذه تشبه كثيرة حدود المميزة (57.5)، لكنها تشمل معادلة الاختبار أيضًا. والبرهنة هنا توازي نقاش الاستقرارية في الفصل (10.5).

افرض أنك أعطيت $w_0, \ldots, w_{m-1}$، وعند ثبوت $h\lambda$، لتعبر $\beta_1, \ldots, \beta_m$ عن أصفار كثيرة حدود $Q(z, h\lambda)$. فإذا كانت $\beta_1, \ldots, \beta_m$ مختلفة فإن $c_1, \ldots, c_m$ موجودة مع

$$w_j = \sum_{k=1}^{m} c_k(\beta_k)^j \quad \text{لكل} \quad j = 0, \ldots, N \tag{66.5}$$

إذا كانت لـ $Q(z, h\lambda)$ أصفار متعددة فإن w_j تعرف بنفس الأسلوب. (انظر المعادلة (62.5)) في الفصل (10.5). وإذا كانت w_j تقرب $y(t_j) = e^{jh\lambda} = (e^{h\lambda})^j$ بدقة فإن على الأصفار β_k جميعها أن تحقق $|\beta_k| < 1$، وبخلاف ذلك، فإن اختيارات معينة لـ α ستنتج $c_k \neq 0$، وإن الحد $c_k(\beta_k)^j$ لن يتضاءل نحو الصفر.

مثال 1 إن معادلة الاختبار التفاضلية

$$y' = -30y, \quad 0 \le t \le 1.5, \quad y(0) = \tfrac{1}{3}$$

لها حل صحيح $y = \frac{1}{3}e^{-30t}$ باستخدام $h = 0.1$ لخوارزمية Euler (1.5)، وخوارزمية Runge–Kutta (2.5) من الرتبة رابعة، وخوارزمية متنبئ– مصحح آدم Adams Predictor-Correcto (4.5). وتعطي عند $t = 1.5$ النتائج المبينة في جدول (5.21). ■

جدول 21.5

الحل الصحيح	9.54173×10^{-21}
طريقة أويلر	-1.09225×10^{4}
طريقة رونج كوتا	3.95730×10^{1}
طريقة توقع – المصحح	8.03840×10^{5}

إن عدم الدقة في مثال (2) يعود إلى حقيقة كون $|Q(h\lambda)| > 1$ لطريقتي Euler و Runge–Kutta. وإن لـ $Q(z, h\lambda)$ أصفارًا مع معامل تزيد على 1 لطريقة المتنبئ– المصحح. ولتطبيق هذه الطرائق على هذه المسألة، يجب إنقاص سعة الخطوة. ويُستخدم التعريف الآتي لتوضيح مقدار الإنقاص المطلوب لسعة الخطوة.

تعريف 25.5 المنطقة R للاستقرارية المطلقة لطريقة بخطوة واحدة هو $R = \{h\lambda \in C \mid |Q(h\lambda)| < 1\}$، وللطرائق متعددة الخطوات فهو $R = \{h\lambda \in C \mid |\beta_k| < 1\}$ للأصفار β_k جميعها لـ $Q(z, h\lambda)$ ■

تشير المعادلتان (65.5) و(66.5) إلى إمكانية تطبيق طريقة ما بكفاءة على معادلة شديدة فقط إذا كانت $h\lambda$ ضمن حقل الاستقرارية المطلقة، الذي يضع قيدًا على السعة h لمسألة ما. وعلى الرغم من أن الحد الأسي في الحل الصحيح يتضاءل بسرعة نحو الصفر، إلا أن λh يجب أن تبقى ضمن حقل الاستقرارية المطلقة عبر فترة قيم t لجعل التقريب يتضاءل نحو الصفر، وليبقى نمو الخطأ تحت السيطرة. هذا يعني أنه على الرغم من أن h يمكن أن يزداد طبيعيًّا بسبب افتراضات خطأ القطع، إلا أن المعيار يدفع h ليبقى صغيرًا. وتكون الطرائق متغيرة سعة الخطوة غير حصينة تجاه هذه المشكلة؛ لأن فحص خطأ القطع المحلي قد يشير إلى إمكانية زيادة سعة الخطوة، التي قد تعطي من غير قصد قيمًا لـ λh خارج حقل الاستقرارية المطلقة.

ولما كان حقل الاستقرارية المطلقة لطريقة ما هو عمومًا العامل الحرج في الحصول على تقريبات دقيقة للأنظمة الشديدة، فإن الطرائق العددية يؤمل أن تكون ذات حقل كبير للاستقرارية المطلقة قدر الإمكان.

يقال للطريقة العددية: إنها A-stable إذا كان R حقلها للاستقرارية المطلقة يتضمن نصف السطح الأيسر كاملًا.

إن طريقة شبه المنحرف الضمني Implicit Trapezoidal المعطاة من خلال

هذه الطريقة ضمنية لكونها، تتضمن w_{j+1} بطرفي المعادلة.

$$w_0 = \alpha, \tag{67.5}$$

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2}\left[f(t_{j+1}, w_{j+1}) + f(t_j, w_j)\right], \quad 0 \le j \le N-1$$

تكون A-stable. (انظر التمرين 15) وهي الطريقة متعددة الخطوات الوحيدة بصفة A-stable. وعلى الرغم من أن طريقة شبه المنحرف لا تعطي تقريبات دقيقة عند سعات كبيرة للخطوة، إلا أن خطأها لا ينمو أسيًّا.

إن أساليب الأنظمة الشديدة المستخدمة عادة هي طرائق ضمنية متعددة الخطوات. ونحصل عمومًا على w_{i+1} من خلال حل معادلة لاخطية أو نظام لاخطي على نحو تكراري، وغالبًا من خلال طريقة نيوتن. افترض على سبيل مثال طريقة شبه المنحرف الضمني

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2}[f(t_{j+1}, w_{j+1}) + f(t_j, w_j)]$$

لقيم محسوبة لـ t_j, t_{j+1} و w_j، فإننا نحتاج إلى تحديد w_{j+1}، وهو الحل لـ

$$F(w) = w - w_j - \frac{h}{2}[f(t_{j+1}, w) + f(t_j, w_j)] = 0 \tag{68.5}$$

ولتقريب هذا الحل، نختار $w_{j+1}^{(0)}$ وهو عادةً w_j، وتنتج $w_{j+1}^{(k)}$ من خلال تطبيق طريقة نيوتن للمعادلة (68.5)

$$w_{j+1}^{(k)} = w_{j+1}^{(k-1)} - \frac{F(w_{j+1}^{(k-1)})}{F'(w_{j+1}^{(k-1)})}$$

$$= w_{j+1}^{(k-1)} - \frac{w_{j+1}^{(k-1)} - w_j - \frac{h}{2}[f(t_j, w_j) + f(t_{j+1}, w_{j+1}^{(k-1)})]}{1 - \frac{h}{2} f_y(t_{j+1}, w_{j+1}^{(k-1)})}$$

حتى نحصل على $|w_{j+1}^{(k)} - w_{j+1}^{(k-1)}|$ صغيرة بما يكفي. وتستخدم هذه العملية في الخوارزمية

(8.5). ومن الطبيعي أن يتطلب هذا 3 أو 4 فقط من الإعادات لكل خطوة.

إن طريقة القاطع يمكن استخدامها بديلًا لطريقة نيوتن في المعادلة (68.5). ولكن هذا يتطلب تقريبين ابتدائيين مختلفين لـ w_{j+1}. ولتطبيق طريقة القاطع، فإن الإجراء المعتاد هو جعل $w_{j+1}^{(0)} = w_j$ وإيجاد $w_{j+1}^{(1)}$ من طريقة ما متعددة الخطوات الواضحة. وعندما يكون نظام معادلات شديدة ضمن العملية، فإن ذلك يتطلب تعميمًا ما لطريقة نيوتن أو طريقة القاطع. وسنتناول هذه المواضيع في الباب العاشرة.

ALGORITHM
الخوارزمية
3.5

شبه المنحرف مع إعادة نيوتن Trapezoidal with Newton iteration

لتقريب الحل لنظام من رتبة m لمسائل القيمة الابتدائية من الرتبة أولى

$y' = f(t, y)$ لكل $a \le t \le b$ عند $y(a) = \alpha$

عند $(N + 1)$ من الأرقام المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط نهاية a, b، عدد صحيح N. شرط ابتدائي α. حد سماح TOL، أكبر عدد إعادات M عند أيٍّ من الخطوات.

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N + 1)$ من القيم لـ t، أو عبارة فشل.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/N$ $t = a$ $w = \alpha$ المخرجات (t, w).
2	عند $i = 1, 2, \ldots, N$ طبق الخطوات 3 – 7.
3	ضع $k_1 = w + \frac{h}{2} f(t, w)$ $w_0 = k_1$ $j = 1$ $FLAG = 0$
4	ما دام $FLAG = 0$. فطبق الخطوتين 5 و 6.
5	ضع $w = w_0 - \dfrac{w_0 - \frac{h}{2} f(t + h, w_0) - k_1}{1 - \frac{h}{2} f_y(t + h, w_0)}$
6	إذا كان $\lvert w - w_0 \rvert < TOL$ فضع $FLAG = 1$ وما عدا ذلك ضع $j = j + 1$ $w_0 = w$ وإذا كان $j > M$ فإن المخرجات (تم تجاوز أكبر عدد من الإعادات). توقف.
7	ضع $t = a + ih$; المخرجات (t, w)
8	توقف.

مثال 3

إن مسألة القيمة الابتدائية الشديدة

$$y' = 5e^{5t}(y-t)^2 + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = -1$$

لها حل $y(t) = t - e^{-5t}$. وللوقوف على آثار الشدة، نطبّق طريقة شبه المنحرف الضمنية وطريقة Runge–Kutta من الرتبة رابعة مع $N = 4$، لتعطي $h = 0.25$، و$N = 5$ لتعطي $h = 0.20$. إن أداء طريقة شبه المنحرف جيد في كلا الحالتين مستخدمين $M = 10$ و $TOL = 10^{-6}$ وكما هو الحال في طريقة Runge–Kutta مع $h = 0.2$. وعلى أي حال تقع $h = 0.25$ خارج حقل الاستقرارية المطلقة لطريقة Runge–Kutta، وهو ما تثبته النتائج في جدول (22.5). ■

جدول 22.5

طريقة شبه المنحرف		طريقة رونج – كوتا		
$h = 0.2$		$h = 0.2$		
w_i	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	w_i	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	t_i
-1.0000000	0	-1.0000000	0	0.0
-0.1414969	2.6383×10^{-2}	-0.1488521	1.9027×10^{-2}	0.2
0.2743614	1.0197×10^{-2}	0.2684884	3.8237×10^{-3}	0.4
0.5539328	3.7700×10^{-3}	0.5519927	1.7798×10^{-3}	0.6
0.7830720	1.3876×10^{-3}	0.7822857	6.0131×10^{-4}	0.8
0.9937726	5.1050×10^{-4}	0.9934905	2.2845×10^{-4}	1.0
$h = 0.25$		$h = 0.25$		
w_i	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	w_i	$\lvert y(t_i) - w_i \rvert$	t_i
-1.0000000	0	-1.0000000	0	0.0
0.0054557	4.1961×10^{-2}	0.4014315	4.37936×10^{-1}	0.25
0.4267572	8.8422×10^{-3}	3.4374753	3.01956×10^{0}	0.5
0.7291528	2.6706×10^{-3}	1.44639×10^{23}	1.44639×10^{23}	0.75
0.9940199	7.5790×10^{-4}	فيض Overflow		1.0

لقد قدمنا هنا كمية صغيرة فقط مما يجب على القارئ معرفته حول المعادلات التفاضلية الشديدة ولمزيد من التفاصيل، راجع ([Gea2], [Lam] أو [SGe]).

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 11.5

1. حلّ مسائل القيمة الابتدائية الشديدة الآتية مستخدمًا طريقة Euler. قارن النتائج بالحل الحقيقي:

   أ. $y' = -9y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = e$ عند $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = e^{1-9t}$.

   ب. $y' = -20(y - t^2) + 2t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ عند $h = 0.1$

   الحل الحقيقي $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-20t}$.

   ج. $y' = -20y + 20\sin t + \cos t, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.25$

   الحل الحقيقي $y(t) = \sin t + e^{-20t}$.

د. $y' = 50/y - 50y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \sqrt{2}$ عند $h = 0.1$

الحل الحقيقي $y(t) = (1 + e^{-100t})^{1/2}$.

2. حُلَّ مسائل القيمة الابتدائية الشديدة الآتية مستخدمًا طريقة Euler. وقارن النتائج بالحل الحقيقي:

أ. $y' = -5y + 6e^t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 2$ عند $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = e^{-5t} + e^t$.

ب. $y' = -10y + 10t + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = e$ عند $h = 0.1$

الحل الحقيقي $y(t) = e^{-10t+1} + t$.

ج. $y' = -15(y - t^{-3}) - 3/t^4, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0.9999997$ عند $h = 0.25$

الحل الحقيقي $y(t) = -e^{-15t} + t^{-3}$.

د. $y' = -20y + 20\cos t - \sin t, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$ عند $h = 0.25$

الحل الحقيقي $y(t) = -e^{-20t} + \cos t$.

3. كرِّر تمرين (1) مستخدمًا طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة.

4. كرِّر تمرين (2) مستخدمًا طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة.

5. كرِّر تمرين (1) مستخدمًا طريقة Adams fourth-order predictor-corrector.

6. كرِّر تمرين (2) مستخدمًا طريقة Adams fourth-order predictor-corrector.

7. كرِّر تمرين (1) مستخدمًا خوارزمية شبه المنحرف مع $TOL = 10^{-5}$.

8. كرِّر تمرين (2) مستخدمًا خوارزمية شبه المنحرف مع $TOL = 10^{-5}$.

9. حل مسائل القيمة الابتدائية الشديدة الآتية مستخدمًا طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة، مع (أ) $h = 0.1$ و (ب) $h = 0.025$.

$$u_1' = 32u_1 + 66u_2 + \tfrac{2}{3}t + \tfrac{2}{3}, \quad 0 \le t \le 0.5, \quad u_1(0) = \tfrac{1}{3}$$

$$u_2' = -66u_1 - 133u_2 - \tfrac{1}{3}t - \tfrac{1}{3}, \quad 0 \le t \le 0.5, \quad u_2(0) = \tfrac{1}{3}$$

قارن النتائج بالحل الحقيقي:

$$u_1(t) = \tfrac{2}{3}t + \tfrac{2}{3}e^{-t} - \tfrac{1}{3}e^{-100t} \quad \text{and} \quad u_2(t) = -\tfrac{1}{3}t - \tfrac{1}{3}e^{-t} + \tfrac{2}{3}e^{-100t}$$

10. أثبت أن طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + h/2, w_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(t_i + h/2, w_i + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, w_i + k_3)$$

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

يمكن كتابتها حين تطبّق على المعادلة التفاضلية $y' = \lambda y$ بالصيغة

$$w_{i+1} = \left(1 + h\lambda + \tfrac{1}{2}(h\lambda)^2 + \tfrac{1}{6}(h\lambda)^3 + \tfrac{1}{24}(h\lambda)^4\right) w_i$$

11. ناقش: الاتساق، الاستقرارية، والتقارب لطريقة شبه المنحرف الضمنية

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left(f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i)\right) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

مع $w_0 = \alpha$ بتطبيقها على المعادلة التفاضلية

$$y' = f(t, y) \quad a \le t \le b \quad y(a) = \alpha$$

12. تعرف طريقة Backward Euler one-step بخطوة واحدة من خلال

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_{i+1}, w_{i+1}) \quad \text{لكل} \quad i = 0, \ldots, N-1$$

أثبت أن $Q(h\lambda) = 1/(1 - h\lambda)$ لطريقة Backward Euler one-step.

13. طبّق طريقة Backward Euler على المعادلة التفاضلية المعطاة في تمرين (1) استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حل لـ w_{i+1}.

14. طبّق طريقة Backward Euler على المعادلة التفاضلية المعطاة في تمرين (2) استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حل لـ w_{i+1}.

15. أ. أثبت أن طريقة شبه المنحرف الضمنية (67.5) هي A-stable.

ب. أثبت أن طريقة Backward Euler في تمرين (12) هي A-stable.

12.5 مسح للطرائق والبرمجيات Survey of Methods and Software

تناولنا في هذا الباب طرائق لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية لمعادلات تفاضلية عادية ولقد بدأنا بمناقشة الأسلوب العددي الأكثر أولوية وهو طريقة Euler. وهذه العملية ليست دقيقة بما يكفي لاستخدامها في التطبيقات. ولكنها توضح السلوك العام للأساليب الأكثر قوة دون الدخول في مصاعب جبرية. لذلك فقد افترضت طرائق Taylor بمنزلة تعميمات لطريقة Euler. ولقد تبين أنها كانت دقيقة، ولكنها بطيئة بسبب الحاجة إلى تحديد اشتقاقات جزئية واسعة للدالة الموصوفة للمعادلة التفاضلية. إن صيغ Runge-Kutta تبسّط طرائق Taylor، حيث لا تزيد الخطأ معنويًّا. وعند هذا الحد فقد كان اهتمامنا بطرائق الخطوة الواحدة أساليب تستخدم البيانات فقط عند النقاط التي حُسبت توًّ. وقد تناولنا الطرائق متعددة الخطوات في الفصل (6.5). حيث افتُرضت طرائق واضحة من نوع Adams-Bashforth وطرائق ضمنية من نوع Adams-Moulton. وتُوِّجت هذه في طرائق المتنبئ-المصحح التي تستخدم طرائق واضحة مثل Adams-Bashforth للتنبؤ بالحل، ومن ثم تطبيق طريقة ضمنية مقابلة لها مثل Adams-Moulton لتصحيح التقريب. أوضح الفصل (8.5) كيفية استخدام هذه الأساليب لحل مسائل القيمة الابتدائية برتب أعلى وأنظمة مسائل القيمة الابتدائية.

وتستند الطرائق الأدق والمتبناة إلى أساليب بخطوة واحدة وبعدة خطوات وغير معقدة نسبيًّا. وقد لاحظنا في الفصل (5.5) خصوصًا أن طريقة Runge-Kutta-Fehlberg هي عملية بخطوة واحدة تتحرى اختيار مباعدة شبكية لإبقاء خطأ التقريب المحلي تحت السيطرة. إن طريقة المتنبئ- المصحح بسعة خطوات متغيرة التي عرضت في الفصل (7.5) تستند إلى طريقة Adams-Bashforth من الرتبة الرابعة وطريقة Adams-Moulton من الرتبة الثالثة. وهي أيضًا تغير من سعة الخطوة لإبقاء الخطأ المحلي ضمن حد السماح المحدد. وإن طريقة الاستكمال الخارجي التي نوقشت في الفصل (8.5) تستند إلى تعديل طريقة النقطة الوسطية، وتشمل استكمالًا خارجيًّا للإبقاء على الدقة المطلوبة للتقريب. وتتناول المادة الأخيرة في الفصل الصعوبة

الملازمة لتقريب حل المعادلة الشديدة. أو المعادلة التفاضلية التي يتضمن حلها الصحيح جزءًا بصيغة $e^{-\lambda t}$، حيث إن λ ثابت موجب. ويجب الحذر عند التعامل مع مسائل من هذا النوع، أو أن تطغى النتائج على خطأ التدوير.

إن طرائق من نوع Runge-Kutta-Fehlberg تكون وافية عمومًا لمسائل غير شديدة، وتتطلب دقة وسيطية. وعمليات الاستكمال الخارجي تعتمد على مسائل غير شديدة، وتتطلب دقة عالية. وتستخدم توسعات طريقة شبه المنحرف الضمنية لطرائق متغيرة الرتبة ومتغيرة سعة الخطوة من نوع Adams الضمنية لمسائل القيمة الابتدائية الشديدة.

وتتضمن مكتبة IMSL اثنين من البرامج الفرعية لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية. وكل واحد منها يحل نظاما من m من المعادلات من الرتبة الأولى في m من المتغيرات. والمعادلات ذات صيغة

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_m) \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

حيث إن $u_i(t_0)$ معطاة عند كل i. ويستند البرنامج الفرعي سعة الخطوة المتغيرة IVPRK إلى طرائق Runge-Kutta-Verner من الرتبتين 5 و 6 الموضحتين في التمرين (4) من الفصل (5.5). ويُستخدم برنامج فرعي من نوع Adams في المعادلات الشديدة يعود إلى C. William Gear ومعطى من خلال IVPAG. هذه الطريقة تستخدم طرائق ضمنية متعددة الخطوات من رتبة حتى 12 وصيغ تفاضلية تراجعية من رتبة حتى 5.

وتحتوي مكتبة NAG عمليات من نوع Runge-Kutta تسمى D02BGF ،D02BHF ،D02PCF، D02PDF. D02BGF و D02BHF تستند إلى صيغة Merson لطريقة Runge-Kutta. وطريقة Adams متغيرة الرتبة ومتغيرة سعة الخطوة متضمنة في العملية D02CJF. وطرائق الفرق المتراجع متغيرة الرتبة ومتغيرة سعة الخطوة لنظام شديد متضمنة في العملية D02EJF. وتتضمن برامج فرعية أخرى نفس الطرائق، ولكن بإعادات حتى تقترب مكونة الحل لقيمة معطاة أو حتى يكون دالة الحل صفرًا. إن مكتبة netlib تتضمن برامج فرعية متعددة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية في الحزمة ODE الموجودة عند الموقع http://www.netlib.org. والبرنامج الفرعي dverk.f يستند إلى طرائق Runge-Kutta-Verner من الرتبتين 5 و 6. والبرنامج الفرعي rkf45.f يستند إلى طرائق Runge-Kutta-Fehlberg من الرتبتين 4 و 5. وكما وُضّح في الفصل (5.5)، ولمسائل القيمة الابتدائية لمعادلة تفاضلية شديدة اعتيادية. يمكن استخدام البرنامج الفرعي epsode.f المستند إلى صيغة التفاضل التراجعي المتغيرة المعامل. وهناك العديد من الكتب مختصة في الحل العددي لمسائل القيمة الابتدائية، يتقدمها اثنان ككتابي Henrici [He1] و Gear [Ge1]. وتتناول كتب أخرى هذا الحقل مثل Botha، Pinder [BP]، Ortega، Poole [OP]، Golub و Ortega [GO] ،Shampine [Sh]، Dor- mand [Do]. وهناك أيضًا كتابان لـ Hairer, Nörsett و Warner يوفران نقاشًا مستفيضًا حول مسائل [HNW1] عديمة الشدة و [HNW2] الشديدة، وكتاب لـ Burrage [Bur] يوضح طرائق التوازي والتتابع.