الباب

4

الاشتقاق والتكامل العدديان

Numerical Differentation and Integration

مقدمة

يُصنع السقف المموّج بضغط لوح الألمنيوم المستوي ليصبح مموّجًا، مقطعه العرضي على شكل موجة الجيب.

افترض أنك بحاجة إلى صفيحة مموّجة طولها 4 ft، وارتفاع كل موجة منها 1 in من الخط المركزي. وقيمة كل موجة ذات دورة 2π in تقريبًا.

إن مسألة إيجاد طول الصفيحة الأصلية تكمن في إيجاد طول المنحنى $f(x) = \sin x$ من $x = 0$ in إلى $x = 48$ in. ومن حساب التفاضل والتكامل نعرف أن الطول هو

$$L = \int_0^{48} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2}\, dx$$

وبذلك تختزل المسألة إلى إيجاد هذا التكامل.

وعلى الرغم من أن دالّة الجيب هي أحد أكثر الدّوال الرياضية شيوعًا. إلا أن حساب طوله يتضمن تكاملًا ناقصيًا (بيضاوي الشكل) من النوع الثاني الذي لا يمكن إيجاد قيمته بالطرائق العادية. وهناك طرائق قد طُوّرت في هذا الباب لإيجاد حلول تقريبية لمثل هذا النوع من المسائل. ولقد أخذت هذه المسألة في الحسبان في التمرين (25) من استخدام الفصل (4.4) وفي التمرين (12) من الفصل (5.4).

لقد ذكرنا في مقدمة الباب (3) أن أحد أسباب استخدام كثيرات الحدود الجبرية لتقريب أي مجموعة من البيانات هو معرفة دّالة متصلة على فترة مغلقة هي كثيرة حدود قريبة قدر ما نريد من الدّالة عند كل نقطة في الفترة. وبالإضافة إلى ذلك فإنه يمكن إيجاد مشتقات كثيرات الحدود وتكاملاتها بسهولة. فليس غريبًا أن معظم عمليات تقريب التكاملات والمشتقات تستخدم كثيرات الحدود التي تقرّب الدّالة.

1.4 الاشتقاق العددي Numerical Differentiation

مشتقة الدّالة f عند x_0 هي

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

تعد هذه الصيغة طريقة واضحة لتوليد تقريب للمشتقة $f'(x)$ وذلك بحساب

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

لقيم صغيرة للعدد h.

وعلى الرغم من أن هذا الأمر واضح، إلا أنه غير ناجح، بسبب وجود خطأ التدوير الملازم. ولكنها نقطة البداية بالتأكيد. ولكي تجد تقريبا للمشتقة $f'(x_0)$، افترض أولا أن $x_0 \in (a, b)$، حيث $f \in C^2[a, b]$، وأن $x_1 = x_0 + h$ لقيمة ما $h \neq 0$ التي تكون صغيرة على نحو كاف لتضمن أن $x_1 \in [a, b]$.

أنشأ أول كثيرة حدود لاجرانج Lagrange $P_{0,1}(x)$ للدّالة f المحدّد بالقيمتين x_0 و x_1. ويحتوي على حد الخطأ

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{0,1}(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\xi(x)) \\ &= \frac{f(x_0)(x-x_0-h)}{-h} + \frac{f(x_0+h)(x-x_0)}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} f''(\xi(x)) \end{aligned}$$

لبعض قيم $\xi(x)$ في الفترة $[a, b]$. ويعطي الاشتقاق ما يلي

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + D_x\left[\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} f''(\xi(x))\right] \\ &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{2(x-x_0)-h}{2} f''(\xi(x)) \\ &\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} D_x(f''(\xi(x))) \end{aligned}$$

ومن ثم

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

إن إحدى الصعوبات في هذه الصيغة هي عدم حصولنا على أي معلومات عن $D_x f''(\xi(x))$، ومن ثم لا يمكن تقدير خطأ القطع.

على كل حال عندما تكون x هي x_0، فإن معامل $D_x f''(\xi(x))$ يكون صفرًا. وتكتب الصيغة على الصورة المبسّطة الآتية:

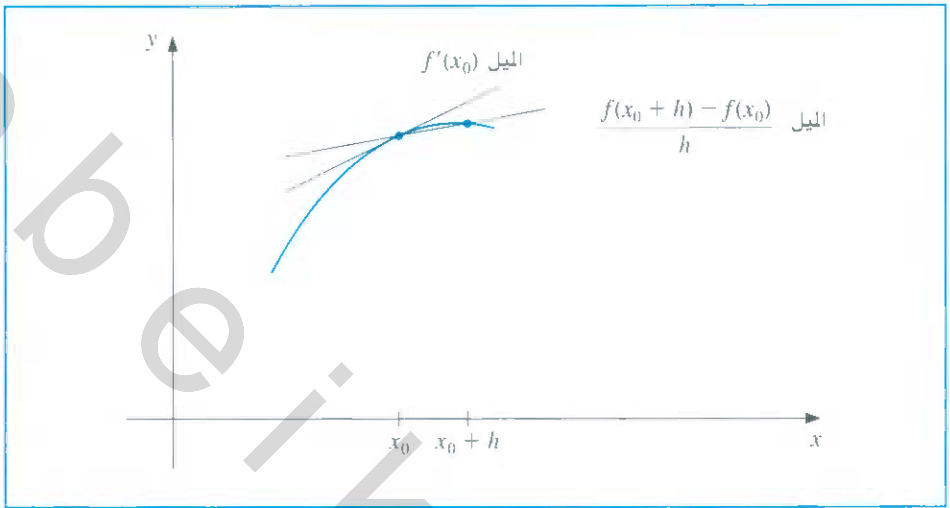
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi) \qquad (1.4)$$

ولقيم h الصغيرة. يمكننا استخدام الفرق الكسري $[f(x_0+h) - f(x_0)]/h$ لتقريب $f'(x_0)$ بخطأ محدود بالقيمة $M|h|/2$. حيث M هو حد على $|f''(x)|$ لكل $x \in [a, b]$. تُعرف هذه الصيغة بصيغة الفرق الأمامي forward-difference formual إذا كانت $h > 0$ (انظر شكل 1.4

استخدم إسحق نيوتن Isaac Newton معادلات الفرق، ودعا إلى شيوعها في الربع الأخير من القرن السابع عشر. ولكن كثيرا من هذه التقنيات قد طوّرها توماس هاريوت Thomas Harriot (1561-1621) وهنري برجس Henry Briggs (1561-1631) لقد تقدم هاريوت تقدما مهمًا في تقنيات البحث. وكان برجس مسؤولا عن قبول اللوغارتمات ليكون لها دور في الحسابات

حيث تعرف بصيغة الفرق الخلفي backward-difference formual إذا كانت $h < 0$.

شكل 1.4



مثال 1 ليكن $f(x) = \ln x$ و $x_0 = 1.8$. نستخدم صيغة الفرق الأمامي

$$\frac{f(1.8+h) - f(1.8)}{h}$$

لإيجاد تقريب للقيمة $f'(1.8)$ بخطأ مقداره

$$\frac{|hf''(\xi)|}{2} = \frac{|h|}{2\xi^2} \le \frac{|h|}{2(1.8)^2} \quad \text{لكل} \quad 1.8 < \xi < 1.8 + h$$

حُسبت النتائج في جدول (1.4) عندما $h = 0.1, 0.01, 0.001$

جدول 1.4

$\frac{\lvert h\rvert}{2(1.8)^2}$	$\frac{f(1.8+h) - f(1.8)}{h}$	$f(1.8+h)$	h
0.0154321	0.5406722	0.64185389	0.1
0.0015432	0.5540180	0.59332685	0.01
0.0001543	0.5554013	0.58834207	0.001

وبما أن $f'(x) = 1/x$ فإن القيمة الصحيحة للمشتقة $f'(1.8)$ هي $0.55\bar{5}$، وإن حدود الخطأ قريبة جدًا من خطأ التقريب الحقيقي. ■

ولكي نجد صيغًا عامة لتقريب المشتقة، نفترض أن $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ هي $(n+1)$ من الأعداد المميزة. عددها. وموجودة في فترة ما I. وأن $f \in C^{n+1}(I)$. ومن المبرهنة 3.3 يكون

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x) + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

لقيمة ما $\xi(x)$ في I. حيث ترمز $L_k(x)$ إلى كثيرة حدود لمعاملات لاجرانج من لرتبة k للدالّة f على $x_0, x_1, \ldots, x_n$. وباشتقاق هذا التعبير نجد أن

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L'_k(x) + D_x\left[\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}\right] f^{(n+1)}(\xi(x)) + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} D_x[f^{(n+1)}(\xi(x))]$$

وقد وُجِدت معضلة في تقدير خطأ القطع مرّة أخرى. إلا إذا كان x أحد الأعداد x_j. وفي هذه الحالة فإن الحد الذي يُضرب فيه $D_x[f^{(n+1)}(\xi(x))]$ هو صفر. وتصبح الصيغة

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L'_k(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} (x_j - x_k) \qquad (2.4)$$

التي تسمى صيغة النقاط التي عددها $(n+1)$ لتقريب $f'(x_j)$. وعموما فإن استخدام نقاط أكثر للتقييم في الصيغة (2.4) يؤدي إلى دقة أعلى على الرغم من أن عدد الحسبات الداليّة وحد خطأ التقريب لا يشجعان على ذلك إلى حد ما.

إن الصيغ الأكثر شيوعا هي تلك التي تستخدم ثلاث نقاط تقييم أو خمس.

نبدأ أولًا باشتقاق صيغ مناسبة ذات ثلاث نقاط. ونأخذ في الحسبان الأخطاء المرتبطة بها.

وحيث إن $L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$ فإن $L'_0(x) = \dfrac{2x - x_1 - x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

وبالطريقة نفسها $L'_1(x) = \dfrac{2x - x_0 - x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$ و $L'_2(x) = \dfrac{2x - x_0 - x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

ولذلك من المبرهنة (2.4) يكون

$$f'(x_j) = f(x_0)\left[\frac{2x_j - x_1 - x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right] + f(x_1)\left[\frac{2x_j - x_0 - x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right] + f(x_2)\left[\frac{2x_j - x_0 - x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right] + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_j) \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{2} (x_j - x_k) \qquad (3.4)$$

كل $j = 0, 1, 2$ حيث يعبر الرمز ξ_j عن اعتماد هذه النقطة على x_j.

إن الصيغ الثلاث من الصيغة (3.4) تصبح مناسبة. وخصوصا إذا كانت المسافات بين الرؤوس متساوية، أي عندما $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ لقيمة ما $h \neq 0$.

سنفترض أن المسافات بين الرؤوس متساوية التباعد فيما سنقدمه حتى نهاية هذا الفصل.

باستخدام الصيغة (3.4)، وبافتراض $x_j = x_0, x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ نجد أن

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2} f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2} f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0)$$

وبالعمل نفسه للقيمة $x_j = x_1$ فإن

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_2)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

وللقيمة $x_j = x_2$ فإن

$$f'(x_2) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_1) + \frac{3}{2}f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2).$$

وبما أن $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ فإنه يمكن التعبير عن هذه الصيغ كالآتي

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_0+h) - \frac{1}{2}f(x_0+2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)$$

$$f'(x_0+h) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0+2h)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

و

$$f'(x_0+2h) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_0+h) + \frac{3}{2}f(x_0+2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

وللتبسيط، نعوّض x_0 بدلاً من x_0+h في وسط الصيغة، لإعطاء حلّ تقريبيّ للمشتقة $f'(x_0)$. وبطريقة مماثلة نعوّض x_0 بدلاً من x_0+2h في الصيغة الأخيرة. إن هذه الطريقة تعطي ثلاث صيغ لتقريب $f'(x_0)$ وهي:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

و

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

وأخيراً لاحظ أن الصيغة الأخيرة من هذه الصيغ يمكن الحصول عليها بتعويض $-h$ بدلاً من h، وعليه فهناك في الحقيقة معادلتان فقط.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0) \tag{4.4}$$

حيث تقع ξ_0 بين x_0 و $x_0 + 2h$

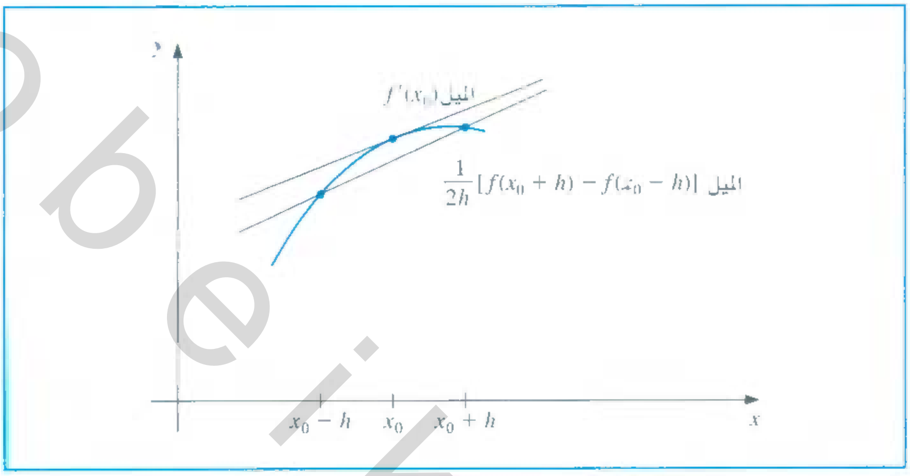
$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1) \tag{5.4}$$

حيث تقع ξ_1 بين $(x_0 - h)$ و $(x_0 + h)$.

على الرغم من أن الأخطاء في كلا المعادلتين (4.4) و (5.4) هي $O(h^2)$ إلا أن الخطأ في الصيغة (5.4) يساوي تقريبا نصف الخطأ في الصيغة (4.4). ويحدث هذا لأن الصيغة (5.4) تستخدم بيانات على جهتي x_0، والصيغة (4.4) تستخدم بيانات على جهة واحدة فقط.

لاحظ أيضًا أن f يحتاج إلى نقطتين فقط في الصيغة (5.4). حيث توجد حاجة إلى ثلاثة حسابات في الصيغة (4.4). ويُظهر شكل (2.4) شرحًا للتقريب الحاصل من الصيغة (5.4).

شكل 2.4



إن التقريب باستخدام الصيغة (4.4) مناسب بالقرب من نهايتي الفترة؛ لأن المعلومات عن f خارج الفترة قد تكون غير متاحة.

إن الطرائق المشروحة في المعادلتين (4.4) و (5.4) تسمى صيغ الثلاث نقاط (على الرغم من أن النقطة الثالثة $f(x_0)$ لا تظهر في الصيغة (5.4)). وبأسلوب مماثل فهناك صيغ الخمس نقاط التي تستخدم قيمة الدالة على نقطتين أخريين. إذ يكون حد الخطأ فيهما $O(h^4)$ وإحدى هذه الصيغ

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi) \quad (6.4)$$

حيث تقع ع بين x_0-2h و x_0+2h. ويعطى اشتقاق هذه الصيغة في الفصل (2.4).
وإن صيغة الخمس نقاط الأخرى مناسبة لتقريبات نقطة الطرف. خصوصًا بشأن استعمال الشريحة التكعيبية التي درست في الفصل (3.4).

هذه الصيغة هي

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)] + \frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi) \quad (7.4)$$

حيث تقع ع بين x_0 و x_0+4h.

يمكن إيجاد التقريبات على نقطة النهاية اليسرى باستخدام هذه الصيغة و $h > 0$. أما التقريبات على نقطة الطرف الأيمن فيمكن إيجادها باستخدام $h < 0$.

مثال 2 يُظهر جدول (2.4) قيمًا للدالّة $f(x) = xe^x$. بما أن المشتقة هي $f'(x) = (x+1)e^x$ فإن $f'(2.0) = 22.167168$. لإيجاد قيمة تقريبية للمقدار $f'(2.0)$؛ فإن استخدام صيغ الثلاث نقط والخمس نقاط يظهر النتائج الآتية.

جدول 2.4

x	$f(x)$
1.8	0.889365
1.9	2.703199
2.0	4.778112
2.1	17.148957
2.2	19.855030

صيغ الثلاث نقاط Three-Point Formulas

باستخدام (4.4) مع $h = 0.1$: $\frac{1}{0.2}[-3f(2.0) + 4f(2.1) - f(2.2)] = 22.032310$

باستخدام (4.4) مع $h = -0.1$: $\frac{1}{-0.2}[-3f(2.0) + 4f(1.9) - f(1.8)] = 22.054525$

باستخدام (5.4) مع $h = 0.1$: $\frac{1}{0.2}[f(2.1) - f(1.9)] = 22.228790$

باستخدام (5.4) مع $h = 0.2$: $\frac{1}{0.4}[f(2.2) - f(1.8)] = 22.414163$

إن الأخطاء في هذه الصيغة هي تقريبا

1.35×10^{-1} و 1.13×10^{-1} و -6.16×10^{-2} و -2.47×10^{-1} على التوالي.

صيغة الخمس نقاط Five-Point Formula

باستخدام الصيغة (6.4) مع $h = 0.1$ (صيغة الخمس نقاط الوحيدة الممكن تطبيقها)

$$\frac{1}{1.2}[f(1.8) - 8f(1.9) + 8f(2.1) - f(2.2)] = 22.166999$$

إن الخطأ في هذه الصيغة يساوي 1.69×10^{-4} تقريبًا.

من الواضح أن صيغة الخمس نقاط أفضل من الأخريات.

لاحظ أيضًا أن الخطأ في الصيغة (5.4) و $h = 0.1$ يساوي تقريبا نصف قيمة الخطأ الناتج عن استخدام الصيغة (4.4) باختيار $h = 0.1$ أو $h = -0.1$. ■

يمكن اشتقاق طرائق صالحة لإيجاد تقريبات للمشتقات العليا للدالة. وذلك باستخدام قيم للدالة عند نقاط مختلفة وموضوعة على شكل جدول.

وعلى كل حال فالاشتقاق مُضن جبريًا. ولذلك سنشرح فقط طريقة ممثلة لهذه العمليات. ابدأ بتمثيل الدالة f بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة حول نقطة x_0، وأوجد التقييم عند $x_0 + h$ و $x_0 - h$. إذن

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)h^4$$

و

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_{-1})h^4$$

حيث $x_0 - h < \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$

إذا جمعنا هذه الصيغ فإن الحدود التي تحوي $f'(x_0)$ و $f'''(x_0)$ يلغي بعضها بعضا ونحصل على

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \frac{1}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]h^4$$

وبحل هذه الصيغة لإيجاد $f''(x_0)$ نحصل على

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})] \qquad (8.4)$$

افترض أن $f^{(4)}$ متصلة عند $[x_0 - h, x_0 + h]$.

بما أن $\frac{1}{2}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]$ تقع بين $f^{(4)}(\xi_1)$ و $f^{(4)}(\xi_{-1})$. فإن مبرهنة القيمة الوسطية تضمن وجود عدد ξ بين ξ_1 و ξ_{-1}، ومن ثم ففي الفترة $(x_0 - h, x_0 + h)$ يكون

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}\left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})\right]$$

إن هذا يسمح لنا بإعادة كتابة الصيغة (8.4) على الصيغة

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi) \qquad (9.4)$$

لقيمة ما ξ حيث $x_0 - h < \xi < x_0 + h$. بما أن $f^{(4)}$ متصلة على الفترة $[x_0-h, x_0+h]$ فإنها محدودة. ومن ثم يكون التقريب $O(h^2)$.

مثال 3 بالعودة إلى البيانات في مثال (2) للدالّة $f(x) = xe^x$ يمكن أن نستخدم الصيغة (9.4) لتقريب $f''(2.0)$. وبما أن $f''(x) = (x+2)e^x$ فإن القيمة الحقيقية هي $f''(2.0) = 29.556224$.

باستخدام الصيغة (9.4) و $h = 0.1$ نحصل على

$$f''(2.0) \approx \tfrac{1}{0.01}[f(1.9) - 2f(2.0) + f(2.1)] = 29.593200$$

باستخدام الصيغة (9.4) و $h = 0.2$ نجد أن

$$f''(2.0) \approx \tfrac{1}{0.04}[f(1.8) - 2f(2.0) + f(2.2)] = 29.704275$$

وتكون الأخطاء -3.70×10^{-2} و -1.48×10^{-1} تقريبا على التوالي. ■

إنه من المهم على نحو خاص أن نهتم بتدوير الخطأ عند تقريب المشتقات. ولشرح هذا الوضع دعنا نتفحص الصيغة (5.4) على نحو أدق.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

افترض أنه عند إيجاد قيمة $f(x_0+h)$ و $f(x_0-h)$ حصلنا على أخطاء التدوير $e(x_0+h)$ و $e(x_0-h)$. عندئذ تكون القيم التي حسبناها $\tilde{f}(x_0+h)$ و $\tilde{f}(x_0-h)$ مرتبطة بالقيم الحقيقية $f(x_0+h)$ و $f(x_0-h)$ في الصيغ الآتية

$$f(x_0+h) = \tilde{f}(x_0+h) + e(x_0+h)$$

و

$$f(x_0-h) = \tilde{f}(x_0-h) + e(x_0-h)$$

إن الخطأ التام في التقريب. أي

$$f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} = \frac{e(x_0+h) - e(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

يحصل جزئيًا بسبب خطأ التقدير. وبسبب جزئي آخر هو خطأ القطع.

إذا افترضنا أن أخطاء التدوير $e(x_0 \pm h)$ محدودة بعدد ما $\varepsilon > 0$. وأن المشتقة الثالثة للدالة f محدودة بعدد ما $M > 0$ فإن

$$\left| f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} \right| \le \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$$

ولتخفيض خطأ القطع $h^2M/6$ يجب تخفيض h. ولكن بتخفيض h فإن خطأ التدوير ε/h يزداد. وفي الحالات العملية فإن من النادر وجود ميزة في اختيار قيمة صغيرة جدًا للعدد h، وذلك لأن خطأ التدوير يسيطر على الحسابات.

مثال 4

افترض القيم في جدول (3.4) التي حسبت لتقريب $f'(0.900)$ حيث $f(x) = \sin x$. إن القيمة الحقيقية هي $\cos 0.900 = 0.62161$. باستخدام الصيغة

$$f'(0.900) \approx \frac{f(0.900+h) - f(0.900-h)}{2h}$$

وباختبار قيم مختلفة للعدد h، نحصل على الإجابات التقريبية في جدول (4.4).

جدول 3.4

x	$\sin x$	x	$\sin x$
0.800	0.71736	0.901	0.78395
0.850	0.75128	0.902	0.78457
0.880	0.77074	0.905	0.78643
0.890	0.77707	0.910	0.78950
0.895	0.78021	0.920	0.79560
0.898	0.78208	0.950	0.81342
0.899	0.78270	1.000	0.84147

جدول 4.4

h	التقدير إلى $f'(0.900)$	الخطأ
0.001	0.62500	0.00339
0.002	0.62250	0.00089
0.005	0.62200	0.00039
0.010	0.62150	−0.00011
0.020	0.62150	−0.00011
0.050	0.62140	−0.00021
0.100	0.62055	−0.00106

إن الاختبار الأمثل للعدد h يظهر أنه يقع بين 0.005 و 0.05. وإذا ما أجرينا بعض التحليلات على حد الخطأ

$$e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$$

فبإمكاننا استخدام حساب التفاضل والتكامل (انظر التمرين 29) للتحقق من أن أصغر قيمة للخطأ e يحدث عندما $h = \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$ حيث

$$M = \max_{x\in[0.800,\,1.00]} |f'''(x)| = \max_{x\in[0.800,\,1.00]} |\cos x| = \cos 0.8 \approx 0.69671$$

وبما أن قيم f معطاة لخمس منازل. فإننا نفترض أن خطأ التدوير محدود بالقيمة $\varepsilon = 0.000005$ ولذلك فالاختيار الأمثل للعدد h يكون تقريبا

$$h = \sqrt[3]{\frac{3(0.000005)}{0.69671}} \approx 0.028$$

الذي هو متلائم مع النتائج في جدول (4.4).

من جانب عملي لا نستطيع حساب قيمة h الفضلى لمستخدمها لإيجاد تقريب للمشتقة، وذلك لعدم وجود أي معرفة لدينا عن المشتقة الثالثة للدالة. ■

ولكن يجب أن نبقى يقظين من أن تقليل حجم الخطوات لا يحسّن دائمًا التقريب الذي نحصل عليه.

لقد ناقشنا فقط مسائل خطأ التدوير الناتجة من استخدام صيغة النقاط الثلاث (5.4). ولكن هناك صعوبات مماثلة تحدث مع جميع صيغ الاشتقاق.

يمكن تتبع السبب حتى نصل إلى مدى الحاجة إلى القسمة على قوى h. وكما وجدنا في الفصل (2.1) (انظر المثال (3) خصوصا) فإن القسمة على أعداد صغيرة تميل إلى المبالغة في خطأ التدوير ويجب تجنب هذه العملية إذا أمكن.

وفي حالة الاشتقاق العددي لا يمكن تجنب المسألة بالكامل. مع أن الطرائق ذات الرتب الأعلى تحد من هذه الصعوبة.

وبالنظر إلى الاشتقاق العددي بوصفه طرائق تقريب نجده غير مستقر، لأن قيم h الصغيرة التي نحتاج إليها لتصغير خطأ القطع تجعل خطأ التدوير يزداد أيضًا.

تذكر أن طرائق الفرق للتقريب يمكن أن تكون غير مستقرة.

إن هذه أول مجموعة من الطرائق غير المستقرة التي تعرضنا لها. ويجب تجنب هذه الطرائق إذا كان ذلك ممكنا. وعلى كل حال فبالإضافة إلى أن هذه الصيغ تستخدم لأغراض حسابية. فإننا نحتاج إليها لتقريب حلول الصيغ التفاضلية العادية والصيغ التفاضلية الجزئية.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 1.4

1. استخدم صيغ الفرق الأمامي والفرق الخلفي لتحديد كل مدخل ناقص في الجداول الآتية:

أ.

$f'(x)$	$f(x)$	x
	0.4794	0.5
	0.5646	0.6
	0.6442	0.7

ب.

$f'(x)$	$f(x)$	x
	0.00000	0.0
	0.74140	0.2
	1.3718	0.4

2. استخدم صيغ الفرق الأمامي والفرق الخلفي لتحديد المدخل المفقود في الجداول الآتية:

أ.

$f'(x)$	$f(x)$	x
	1.9507	-0.3
	2.0421	-0.1
	2.0601	-0.1

ب.

$f'(x)$	$f(x)$	x
	1.0000	1.0
	1.2625	1.2
	1.6595	1.4

3. إن البيانات في التمرين (1) أخذت من الدّوال الآتية. احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (1) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = \sin x$ ب. $f(x) = e^x - 2x^2 + 3x - 1$

4. إن البيانات في التمرين (2) أخذت من الدّوال الآتية. احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (2) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ

أ. $f(x) = 2\cos 2x - x$ ب. $f(x) = x^2 \ln x + 1$

5. استخدم صيغة النقاط الثلاث الأدق لتحديد كل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

$f'(x)$	$f(x)$	x
	9.025013	1.1
	11.02318	1.2
	13.46374	1.3
	16.44465	1.4

ب.

$f'(x)$	$f(x)$	x
	16.94410	8.1
	17.56492	8.3
	18.19056	8.5
	18.82091	8.7

جـ.

$f'(x)$	$f(x)$	x
	-4.827866	2.9
	-4.240058	3.0
	-3.496909	3.1
	-2.596792	3.2

د.

$f'(x)$	$f(x)$	x
	3.6887983	2.0
	3.6905701	2.1
	3.6688192	2.2
	3.6245909	2.3

6. استخدم صيغة النقاط الثلاث الأدق لتحديد كل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

$f'(x)$	$f(x)$	x
	-0.27652	-0.3
	-0.25074	-0.2
	-0.16134	-0.1
	0	0

ب.

$f'(x)$	$f(x)$	x
	-68.3193	7.4
	-71.6982	7.6
	-75.1576	7.8
	-78.6974	8.0

جـ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
-0.3	-0.27652	
-0.2	-0.25074	
-0.1	-0.16134	
0	0	

د.

x	$f(x)$	$f'(x)$
7.4	-68.3193	
7.6	-71.6982	
7.8	-75.1576	
8.0	-78.6974	

7. إن البيانات في التمرين (5) أخذت من الدّوال الآتية. احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (5) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = e^{2x}$ ب. $f(x) = x \ln x$

ج. $f(x) = x \cos x - x^2 \sin x$ د. $f(x) = 2(\ln x)^2 + 3 \sin x$

8. إن البيانات في التمرين (5) أخذت من الدّوال الآتية. احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (5) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = e^{2x} - \cos 2x$ ب. $f(x) = \ln(x+2) - (x+1)^2$

ج. $f(x) = x \sin x + x^2 \cos x$ د. $f(x) = (\cos 3x)^2 - e^{2x}$

9. استخدم الصيغ المعطاة في هذا الفصل لتحديد التقريب بالدقة المكنة لكل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.1	-1.709847	
2.2	-1.373823	
2.3	-1.119214	
2.4	-0.9160143	
2.5	-0.7470223	
2.6	-0.6015966	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
-3.0	9.367879	
-2.8	8.233241	
-2.6	7.180350	
-2.4	6.209329	
-2.2	5.320305	
-2.0	4.513417	

10. استخدم الصيغ المعطاة في هذا الفصل لتحديد التقريب بالدقة المكنة لكل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.05	-1.709847	
1.10	-1.373823	
1.15	-1.119214	
1.20	-0.9160143	
1.25	-0.7470223	
1.30	-0.6015966	

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
-3.0	16.08554	
-2.8	12.64465	
-2.6	9.863738	
-2.4	7.623176	
-2.2	5.825013	
-2.0	4.389056	

11. إن البيانات في تمرين (9) أخذت من الدّوال الآتية. احسب الأخطاء الفعلية في تمرين (9) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = \tan x$ ب. $f(x) = e^{x/3} + x^2$

12. إن البيانات في تمرين (10) أخذت من الدوال الآتية. احسب الأخطاء الفعلية في تمرين (10) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

أ. $f(x) = \tan 2x$ ب. $f(x) = e^{-x} - 1 + x$

13. استخدم البيانات الآتية والمعلومة: المشتقات الخمس الأولى للدالّة f محدودة على الفترة $[1, 5]$ بالقيم 2، 3، 6، 12 و 23 على التوالي. وذلك لتقريب $f'(3)$ بالدقة المكنة. أوجد حدًا للخطأ.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

14. كرِّر تمرين (13) ولكن على فرض أن المشتقة الثالثة للدالّة f على $[1, 5]$ محدودة بالعدد 4.

15. كرِّر تمرين (1) باستخدام حساب التدوير لأربعة أرقام. وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (3).

16. كرّر تمرين (5) باستخدام حساب القطع لأربعة أرقام. وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (7).

17. كرّر تمرين (9) باستخدام حساب التدوير لأربعة أرقام، وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (11).

18. لديك البيانات في جدول الآتي:

1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	x
0.3843735	0.6386093	0.808038	0.9177710	0.9798652	$f(x)$

أ. استخدم الصيغ المناسبة جميعها في هذا الفصل لتقريب $f'(0.4)$ و $f''(0.4)$.

ب. استخدم الصيغ المناسبة جميعها في هذا الفصل لتقريب $f'(0.6)$ و $f''(0.6)$.

19. ليكن $f(x) = \cos \pi x$. استخدم الصيغة (9.4) وقيم $f(x)$ على النقاط $x = 0.25, 0.5$ و 0.75 لتقريب $f''(0.5)$. قارن هذه النتيجة بالقيمة الحقيقية وكذلك بالتقريب الناتج في التمرين (15) من الفصل (3.4). اشرح سبب كون هذه الطريقة على نحو خاص دقيقة في حل هذه المسألة أوجد حدًا للخطأ.

20. ليكن $f(x) = 3xe^x - \cos x$ استخدم البيانات الآتية والصيغة (9.4) لتقريب $f''(1.3)$ باختيار $h = 0.1$ و $h = 0.01$

1.40	1.31	1.30	1.29	1.20	x
15.86187	14.30741	14.04276	13.78176	11.59006	$f(x)$

قارن نتائجك بقيمة $f''(1.3)$.

21. لديك جدول البيانات الآتية:

1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	x
0.3843735	0.6386093	0.8080348	0.9177710	0.9798652	$f(x)$

أ. استخدم الصيغة (4.7) لتقريب $f'(0.2)$.

ب. استخدم الصيغة (4.7) لتقريب $f'(1.0)$.

ج. استخدم الصيغة (4.6) لتقريب $f'(0.6)$.

22. اشتق صيغة خمس نقاط من الرتبة $O(h^4)$ لتقريب $f'(x_0)$ التي تستخدم $f(x_0 - h), f(x_0), f(x_0 + h), f(x_0 + 2h)$ و $f(x_0 + 3h)$

[إضاءة: خذ التعبير $Af(x_0 - h) + Bf(x_0 + h) + Cf(x_0 + 2h) + Df(x_0 + 3h)$. استخدم امتداد كثيرة حدود تايلور الرابعة. واختر قيم A, B, C, D اختيارًا مناسبًا.]

23. استخدم الصيغة التي اشتُقّت في التمرين (22) والبيانات في التمرين (21) لتقريب $f'(0.4)$ و $f'(0.8)$.

24. أ. حلّل أخطاء التدوير كما في المثال (4) للصيغة $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \dfrac{h}{2} f''(\xi_0)$

ب. أوجد أفضل $h > 0$ للدالة في المثال (2).

25. لقد أعطيت في التمرين (10) من الفصل (3.3) بيانات تصف سيارة تسير على طريق مستقيم. لقد طلب ذلك التمرين التنبؤ بمكان السيارة وسرعتها عند $t = 10\text{ s}$. استخدم الأوقات والأمكنة الآتية للتنبؤ بالسرعة عند كل زمن معطى.

13	10	8	5	3	0	الوقت
993	742	623	383	225	0	المسافة

26. يعطي القانون الأول لكيرتشوف (Kirchoff) العلاقة $\mathcal{E}(t) = L\dfrac{di}{dt} + Ri$

وذلك في الدائرة الكهربائية التي فيها جهد مكثّف $\mathcal{E}(t)$، وتوصيل L، ومقاومة في الدائرة R والتيار i.

افترض أننا قسنا التيار لقيم متعددة لـ t وحصلنا على

t	1.00	1.01	1.02	1.03	1.0
i	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

حيث قيست t بالثواني و i بالأمبيرات، وثابت التوصيل $L = 0.98$ هنري والمقاومة تساوي 0.142 أوم. أعط تقريبًا لقيمة الجهد $\varepsilon(t)$ عندما $t = 1.00, 1.01, 1.02, 1.03, 1.04$.

27. يعرف طلاب التفاضل والتكامل جميعهم أنه يمكن تعريف مشتقة أي f عند x، ومن ثم

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اختر دالّتك المفضل f، وقيمة x غير الصفرية، واستخدم الحاسوب أو حساب التفاضل والتكامل. ولّد تقريبات $f'_n(x)$ للمشتقة $f'(x)$ باستخدام الصيغة

$$f'_n(x) = \frac{f(x+10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}}$$

للقيم $n = 1, 2, \ldots, 20$ جميعها، وصف ماذا يحدث.

28. اشتق طريقة لتقريب $f'''(x_0)$ بحيث يكون حد الخطأ من الرتبة h^2، وذلك بفك الدّالة f بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة حول x_0 وإيجاد القيم عند $x_0 \pm h$ و $x_0 \pm 2h$.

29. لديك الدّالة $e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$ حيث M هي للمشتقة الثالثة لدالّة ما. برهن أن $e(h)$ لها قيمة صغرى عند $\sqrt[3]{3\varepsilon/M}$.

2.4 استكمال ريتشاردسون الخارجي Richardson's Extrapolation

لويس فراي ريتشاردسون Lewis Fry Richardson (1881-1953) كان أول شخص طبق الرياضيات على نحو منظم على موضوع التنبؤ الجوي بينما كان يعمل لمكتب الأحوال الجوية في إنجلترا. وبوصفه معارضا خلاقيا للحرب العالمية الأولى فقد كتب على نحو مستفيض عن التدمير الاقتصادي الناشئ عن الحرب، مستخدما نظم المعادلات التفاضلية لإيجاد أنموذج منطقي للتفاعلات بين الدول.
إن طريقة الاستيفاء الخارجي المقترنة باسمه كانت إعادة اكتشاف طريقة تعود جذورها على الأقل إلى عصر كريستيان هاجينس Christian Huygens (1629-1695) وربما إلى عصر أرخميدس Archimedes (287-212 BC).

تستخدم استكمال ريتشاردسون الخارجي لتوليد نتائج عالية الدقة، ولكن باستخدام صيغ ذات رتب منخفضة.

وعلى الرغم من أن اسم الطريقة مرتبط ببحث نشره ريتشاردسون غونت [RG] عام 1927، إلا أن فكرتها قديمة. فهناك مقالة ممتعة حول تاريخ الاستكمال الخارجي، وتطبيقاته موجودة في [Joy].

ويمكننا استخدام الاستكمال الخارجي عندما نعلم أن طريقة التقريب تنتج حد خطأ ذا شكل قابل للتنبؤ. وهي الطريقة التي تعتمد على الوسيط (براميتر) الذي عادة ما تكون الخطوة h.
افترض أن لدينا لكل عدد $h \neq 0$ صيغة $N(h)$ الذي تعطي تقريبًا للقيمة M. وأن خطأ القطع المرتبط بالتقريب له الصيغة

$$M - N(h) = K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$$

لمنظومة من الثوابت المجهولة $K_1, K_2, K_3, \ldots$.

بما أن خطأ القطع $O(h)$ فإننا نتوقع على سبيل المثال أنّ

$$M - N(0.1) \approx 0.1K_1, \quad M - N(0.01) \approx 0.01K_1$$

وعموما $M - N(h) \approx K_1h$ إلا إذا كان هناك تغير كبير في المقدار بين الثوابت $K_1, K_2, K_3, \ldots$.
وإن الغرض من الاستكمال الخارجي هو إيجاد طريقة سهلة لدمج التقريبات غير الصحيحة إلى

حد ما $O(h)$ بطريقة مناسبة للحصول على صيغ ذات خطأ قطع من الرتبة العالية. افترض على سبيل المثال أن بإمكاننا دمج صيغ $N(h)$ للحصول على صيغة تقريب $\hat{N}(h)$ للقمة M بحيث تكون ذات رتبة $O(h^2)$ وعلى الصيغة

$$M - \hat{N}(h) = \hat{K}_2h^2 + \hat{K}_3h^3 + \cdots$$

لمنظومة من الثوابت المجهولة . . . , $\hat{K}_1, \hat{K}_2$

نحصل عندئذ على $M - \hat{N}(0.01) \approx 0.0001\hat{K}_2$, $M - \hat{N}(0.1) \approx 0.01\hat{K}_2$, وهكذا.

إذا كان للثابتين K_1 و $\hat{K}_2$ القيمة نفسها تقريبًا فإن التقريبات $\hat{N}(h)$ تكون أفضل بكثير من التقريبات المقابلة $N(h)$. يستمر الاستكمال الخارجي عن طريق دمج التقريبات $\hat{N}(h)$ بطريقة تنتج صيغ بخطأ قطع من الرتبة $O(h^3)$ وهكذا.

وكي ترى بالتحديد كيف نولّد هذه الصيغ الأعلى رتبة. نفترض أن الصيغة التي تعطي التقريب للقيمة M على الصيغة

$$M = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots \qquad (10.4)$$

وبما أنه يفترض صحة الصيغة لقيم h الموجبة جميعها، فانظر إلى النتيجة عندما عوض الوسيط h بنصف قيمتها. وعندئذ نحصل على الصيغة

$$M = N\left(\frac{h}{2}\right) + K_1\frac{h}{2} + K_2\frac{h^2}{4} + K_3\frac{h^3}{8} + \cdots$$

وبطرح الصيغة (10.4) من مثلي هذه الصيغة نتخلص من الحد الذي يحوي K_1 ونحصل على

$$M = \left[2N\left(\frac{h}{2}\right) - N(h)\right] + K_2\left(\frac{h^2}{2} - h^2\right) + K_3\left(\frac{h^3}{4} - h^3\right) + \cdots$$

ولتسهيل النقاش، نعرّف $N_1(h) \equiv N(h)$

$$N_2(h) = \left[2N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right]$$

وعندئذ نحصل على صيغة ذات رتبة $O(h^2)$ لتقريب M على الصيغة

$$M = N_2(h) - \frac{K_2}{2}h^2 - \frac{3K_3}{4}h^3 - \cdots \qquad (11.4)$$

وإذا عوضنا h بدلًا من $h/2$ في هذه الصيغة فإننا نحصل على

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{K_2}{8}h^2 - \frac{3K_3}{32}h^3 - \cdots \qquad (12.4)$$

يمكننا دمج هذا مع صيغة (11.4) للتخلص من الحد h^2. وبالتحديد فإن طرح الصيغة (11.4) من 4 أمثال الصيغة (12.4) يعطي

$$3M = 4N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h) + \frac{3K_3}{8}h^3 + \cdots$$

وبالقسمة على 3 نحصل على صيغة من الرتبة $O(h^3)$ لتقريب M على الصيغة

$$M = \left[N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2(h/2) - N_2(h)}{3}\right] + \frac{K_3}{8}h^3 + \cdots$$

وبتعريف

$$N_3(h) \equiv N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2(h/2) - N_2(h)}{3}$$

نحصل على الصيغة من الرتبة $O(h^3)$

$$M = N_3(h) + \frac{K_3}{8}h^3 + \cdots$$

تستمر في هذه العملية بإنشاء تقريب من الرتبة $O(h^4)$ على الصيغة

$$N_4(h) = N_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_3(h/2) - N_3(h)}{7}$$

وتقريب من الرتبة $O(h^5)$ على هذه الصيغة

$$N_5(h) = N_4\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_4(h/2) - N_4(h)}{15}$$

وهكذا.

وعمومًا إذا أمكن كتابة M على الصيغة

$$M = N(h) + \sum_{j=1}^{m-1} K_j h^j + O(h^m) \tag{13.4}$$

فمن الممكن إيجاد تقريب من الرتبة $O(h^j)$ لكل $j = 2, 3, \ldots, m$ على الصيغة

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1} \tag{14.4}$$

لقد تولّدت هذه التقريبات في سطور، وبالرتب الظاهرة في المدخلات المعددة في جدول (5.4)، وذلك نتيجة لاستغلال أفضل النتائج للصيغ ذات الرتب العليا.

جدول 5.4

$O(h^4)$	$O(h^3)$	$O(h^2)$	$O(h)$
			$N_1(h) \equiv N(h)$:1
		$N_2(h)$:3	$N_1(\frac{h}{2}) \equiv N(\frac{h}{2})$:2
	$N_3(h)$:6	$N_2(\frac{h}{2})$:5	$N_1(\frac{h}{4}) \equiv N(\frac{h}{4})$:4
$N_4(h)$:10	$N_3(\frac{h}{2})$:9	$N_2(\frac{h}{4})$:8	$N_1(\frac{h}{8}) \equiv N(\frac{h}{8})$:7

يمكن تطبيق الاستكمال الخارجي كلما كان خطأ القطع على الصيغة

$$\sum_{j=1}^{m-1} K_j h^{\alpha_j} + O(h^{\alpha_m})$$

لمنظومة من الثوابت K_j وعندما $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_m$ في المثال الآتي نستخدم $\alpha_j = 2j$.

مثال 1 يمكن التعبير عن صيغة الفرق المركزية المعطاة في الصيغة (5.4) لتقريب $f'(x_0)$ بصيغة خطأ بالصيغة

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) - \cdots$$

وبما أن صيغة الخطأ هذه تحوي قوى h الزوجية فقط. فإن الاستكمال الخارجي يكون أكثر كفاءة مما لُخِّص في بداية النقاش.

في هذه الحالة يكون لدينا التقريب من الرتبة $O(h^2)$

$$f'(x_0) = N_1(h) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) - \cdots \qquad (15.4)$$

حيث

$$N_1(h) \equiv N(h) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)]$$

وإن تعويض $h/2$ بدلاً من h في هذه الصيغة ينتج التقريب

$$f'(x_0) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{24}f'''(x_0) - \frac{h^4}{1920}f^{(5)}(x_0) - \cdots$$

وبطرح الصيغة (15.4) من 4 أمثال هذه الصيغة نتخلص من الحد $O(h^2)$ الذي يحتوي $f'''(x_0)$ ويعطي

$$3f'(x_0) = 4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) + \frac{h^4}{160}f^{(5)}(x_0) + \cdots$$

وبالقسمة على 3 نحصل على صيغة من الرتبة $O(h^4)$ بالصيغة

$$f'(x_0) = N_2(h) + \frac{h^4}{480}f^{(5)}(x_0) + \cdots$$

حيث

$$N_2(h) = \frac{1}{3}\left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_1(h/2) - N_1(h)}{3}$$

وباستمرار هذه العملية يعطى لكل $j = 2, 3, \ldots$ صيغة تقريب من الرتبة $O(h^{2j})$ بالصيغة

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1}$$

لاحظ أن مقام الكسر هو $4^{j-1} - 1$ بدلاً من $2^{j-1} - 1$، لأننا في هذه الحالة نتخلص من قوى h^2 بدلاً من قوى h.

وبما أن $(h/2)^2 = h^2/4$ فإن عوامل الضرب المستخدمة للتخلص من قوى h^2 هي قوى 4 بدلاً من قوى 2.

افترض أن $x_0 = 2.0, h = 0.2$ و $f(x) = xe^x$ فإن

$$N_1(0.2) = N(0.2) = \tfrac{1}{0.4}[f(2.2) - f(1.8)] = 22.414160$$

$$N_1(0.1) = N(0.1) = 22.228786, \quad \text{و} \quad N_1(0.05) = N(0.05) = 22.182564$$

إن جدول الاستكمال الخارجي لهذه البيانات يظهر في جدول (6.4).

إن القيمة الصحيحة للمشتقة $f'(x) = xe^x + e^x$ عند $x_0 = 2.0$ مقربة إلى ست خانات عشرية هي 22.167168، ومن ثم فإن أعداد $N_3(0.2)$ جميعها صحيحة على الرغم من أن أفضل تقريب أصلي $N_1(0.05)$ يحوي منزلة عشرية واحدة دقيقة. ■

ولما حصلنا على كل عمود بعد العمود الأول في جدول (6.4) بطريقة إيجاد أوساط بسيطة، فإنها قد تؤدي إلى تقريبات عالية الرتبة، باستخدام الحد الأدنى من التكلفة الحسابية. وعموماً كلما ازدادت k، ازداد خطأ التدوير في $N_1(h/2^k)$، لأن عدم استقرار الاشتقاق العددي مرتبط بحجم الخطوة $h/2^k$.

جدول 6.4

$N_1(0.2) = 22.414160$		
$N_1(0.1) = 22.228786$	$N_2(0.2) = N_1(0.1) + \dfrac{N_1(0.1) - N_1(0.2)}{3} = 22.166995$	
$N_1(0.05) = 22.182564$	$N_2(0.1) = N_1(0.05) + \dfrac{N_1(0.05) - N_1(0.1)}{3} = 22.167157$	$N_3(0.2) = N_2(0.1) + \dfrac{N_2(0.1) - N_2(0.2)}{15} = 22.167168$

لقد ناقشنا في الفصل (1.4) طريقتي الثلاث نقاط والخمس نقاط لتقريب $f'(x_0)$ عند معرفة قيم متعددة للدالة f. وقد تم اشتقاق طريقة الثلاثة نقاط عن طريق تمييز كثيرة حدود لاجرانج للدالة f. ويمكن الحصول على طرائق الخمس نقاط بطريقة مماثلة. ولكن الاشتقاق مضنٍ. ويمكن استخدام الاستكمال الخارجي لاشتقاق هذه الصيغ بسهولة أكثر.

افترض أننا كتبنا مفكوك الدالة f في كثيرة حدود تايلور الرابعة حول x_0. إذن

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi)(x - x_0)^5$$

لعدد ما ξ بين x و x_0.

إن إيجاد قيمة f عند $x_0 + h$ و $x_0 - h$ يعطي

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi_1)h^5 \tag{16.4}$$

و

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi_2)h^5 \tag{17.4}$$

حيث $x_0 - h < \xi_2 < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$ وبطرح الصيغة (17.4) من الصيغة (16.4) ينتج

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{h^5}{120}[f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)] \tag{18.4}$$

إذا كانت $f^{(5)}$ متصلة على $[x_0 - h, x_0 + h]$. فإن مبرهنة القيمة الوسطية تضمن وجود عدد $\tilde{\xi}$ في $(x_0 - h, x_0 + h)$ بحيث

$$f^{(5)}(\tilde{\xi}) = \tfrac{1}{2}[f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)]$$

ونتيجة لهذا يمكن حل الصيغة (4.18) لإيجاد $f'(x_0)$ والحصول على التقريب من الرتبة $O(h^2)$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(\tilde{\xi}) \tag{19.4}$$

وعلى الرغم من أن التقريب في الصيغة (19.4) هو التقريب نفسه المعطى في صيغ الثلاث نقاط (5.4)، إلا أن نقطة التقييم الآن تحدث في $f^{(5)}$ بدلاً من f'''.

إن الاستكمال الخارجي يستفيد من هذا بوجود $2h$ بدلاً من h في الصيغة (19.4) ليعطي الصيغة الجديدة

$$f'(x_0) = \frac{1}{4h}[f(x_0+2h) - f(x_0-2h)] - \frac{4h^2}{6} f'''(x_0) - \frac{16h^4}{120} f^{(5)}(\hat{\xi}) \qquad (20.4)$$

حيث $\hat{\xi}$ بين $x_0 - 2h$ و $x_0 + 2h$

بضرب الصيغة (19.4) في أربعة وطرح الصيغة (20.4) ينتج

$$3f'(x_0) = \frac{2}{h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{1}{4h}[f(x_0+2h) - f(x_0-2h)] - \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\tilde{\xi}) + \frac{2h^4}{15} f^{(5)}(\hat{\xi})$$

إذا كان $f^{(5)}$ متصلاً على $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$ فإنه يمكن استخدام طريقة بديلة لبرهنة أنه يمكن الاستعاضة عن $f^{(5)}(\hat{\xi})$ و $f^{(5)}(\tilde{\xi})$ بقيمة مشتركة $f^{(5)}(\xi)$. استخدام هذه النتيجة والقسمة على 3 تنتج صيغة الخمس نقاط

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$$

التي هي صيغة الخمس نقاط المعطاة في صيغة (6.4).

وبطريقة مماثلة يمكن اشتقاق الصيغ الأخرى للمشتقة الأولى والمشتقات العليا. وستُناقش بعض هذه الصيغ في التمارين.

وستستخدم طريقة الاستكمال الخارجي على مدى هذا الكتاب. وإن التطبيقات الأكثر شهرة تظهر في تقريب التكاملات في الفصل (5.4)، وتلك التي تعطي الحلول التقريبية لحل الصيغ التفاضلية في الفصل (8.4).

مجموعة التمارين 2.4 EXERCISE SET

1. استخدم عملية الاستكمال الخارجي الموصوفة في المثال (1) لتحديد التقريب $N_3(h)$ للقيمة $f'(x_0)$ لكل من الدوال الآتية وحجم الخطوة:

أ. $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1.0,\ h = 0.4$ ب. $f(x) = x + e^x,\ x_0 = 0.0,\ h = 0.4$

جـ. $f(x) = 2^x \sin x,\ x_0 = 1.05,\ h = 0.4$ د. $f(x) = x^3 \cos x,\ x_0 = 2.3,\ h = 0.4$

2. أضف سطراً آخر إلى جدول الاستكمال في التمرين (1) للحصول على التقريب $N_4(h)$.

3. كرِّر تمرين (1) مستخدماً حساب التدوير لأربعة أرقام.

4. كرِّر تمرين (2) مستخدماً حساب التدوير لأربعة أرقام.

5. البيانات الآتية تعطي تقريبات للتكامل $M = \int_0^\pi \sin x\, dx$

$$N_1(h) = 1.570796, \quad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = 1.896119, \quad N_1\left(\frac{h}{4}\right) = 1.974232, \quad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = 1.993570$$

على فرض أن $M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + K_4h^8 + O(h^{10})$ اكتب جدول استكمال لتحديد $N_4(h)$.

6. يمكن استخدام البيانات الآتية لتقريب التكامل $M = \int_0^{3\pi/2} \cos x \, dx$

$$N_1(h) = 2.356194, \qquad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = -0.4879837$$

$$N_1\left(\frac{h}{4}\right) = -0.8815732, \qquad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = -0.9709157$$

افترض أنه يوجد صيغة من النوع نفسه في التمرين 5. وحدّد $N_4(h)$.

7. أثبت أن تطبيق صيغة الخمس نقط (6.4) على الدّالة $f(x) = xe^x$ على النقطة $x_0 = 2.0$ يعطي $N_2(0.2)$ في جدول (6.4) عندما $h = 0.1$، ويعطي $N_2(0.1)$ عندما $h = 0.05$.

8. من الممكن تمثيل صيغة الفرق إلى الأمام بالصيغة

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(x_0) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) + O(h^3)$$

استخدم الاستكمال لاشتقاق صيغة من رتبة $O(h^3)$ للقيمة $f'(x_0)$.

9. افترض أن $N(h)$ تقريب للمقدار M لكل $h > 0$، وأن

$$M = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$$ لبعض الثوابت $K_1, K_2, K_3, \ldots$

استخدم قيم $N(h), N(h/3)$ و $N(h/9)$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^3)$ للمقدار M.

10. افترض أن $N(h)$ تقريب للمقدار M لكل $h > 0$، وأن

$$M = N(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + \cdots$$ لبعض الثوابت $K_1, K_2, K_3, \ldots$

استخدم قيم $N(h), N(h/3)$ و $N(h/9)$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^6)$ للمقدار M.

11. تعلمنا في حساب التفاضل والتكامل أن $e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$

أ. أوجد تقريبات e المقابلة لاستخدام $h = 0.04, 0.02$ و 0.01

ب. استخدم الاستكمال على التقريبات مفترضًا وجود ثوابت $K_1, K_2, \ldots$ و $e = (1+h)^{1/h} + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^3)$ للقيمة e، حيث $h = 0.04$

ج. هل تعتقد أن الافتراض في (ب) صحيح؟

12. أ. أثبت أن

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{1/h} = e$$

ب. احسب تقريبات للعدد e باستخدام الصيغة

$$N(h) = \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{1/h}$$

والأعداد $h = 0.04, 0.02$ و 0.01

ج. افترض أن $e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$ استخدم الاستكمال الخارجي بدرجة دقة لغاية 16 عددًا على الأقل لتحسب تقريبًا من رتبة $O(h^3)$ للقيمة e مستخدمًا $h = 0.04$ هل تعتقد أن الافتراض صحيح؟

د. أثبت أن $N(-h) = N(h)$.

هـ. استخدم الفقرة (د) لإثبات أن $K_1 = K_3 = K_5 = \cdots = 0$ في الصيغة

$$e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + K_4h^4 + K_5h^5 + \cdots$$

وعليه تختزل الصيغة لتصبح

$$e = N(h) + K_2h^2 + K_4h^4 + K_6h^6 + \cdots$$

و. استخدم نتائج الفقرة (هـ) والاستيفاء لتحسب تقريباً من رتبة $O(h^6)$ للعدد e بستخدام $h = 0.04$

13. افترض أن جدول للاستكمال الآتي قد بُني لتقريب العدد M المعطى في لصيغة

$$M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6$$

		$N_1(h)$
	$N_2(h)$	$N_1\left(\frac{h}{2}\right)$
$N_3(h)$	$N_2\left(\frac{h}{2}\right)$	$N_1\left(\frac{h}{4}\right)$

أ. أثبت أن كثيرة الحدود للاستكمال الداخلي الخطي $P_{0,1}(h)$ المار بالنقطتين $(h^2, N_1(h))$ و $(h^2/4, N_1(h/2))$ يحقق $P_{0,1}(0) = N_2(h)$ وبطريقة مماثلة. أثبت أن $P_{1,2}(0) = N_2(h/2)$.

ب. أثبت أن كثيرة الحدود للاستيفاء الداخلي الخطي $P_{0,2}(h)$ المار بالنقطتين $(h^4, N_2(h))$ و $(h^4/16, N_2(h/2))$ يحقق $P_{0,2}(0) = N_3(h)$.

14. افترض أن $N_1(h)$ صيغة تنتج تقريبات من الرتبة $O(h)$ لتقريب M. وأن

$$M = N_1(h) + K_1h + K_2h^2 + \cdots$$

لمنظومة من الثوابت الموجبة $K_1, K_2, \ldots$ لذلك فإن $N_1(h), N_1(h/2), N_1(h/4), \ldots$ تكون جميعها حدوداً دنيا للمقدار M. ماذا يمكن أن نقول عن التقريبات الاستكمالية $N_2(h), N_3(h), \ldots$؟

15. استخدمت أنصاف محيطات أكبر المضلعات المنتظمة ذات k من الأضلاع التي ترسم داخل دائرة الوحدة. وأنصاف محيطات المضلعات المنتظمة ذات $\{p_k\}$ من الأضلاع لتي ترسم خارج دائرة الوحدة، وتكون مماسة لها من قبل أرخميدس Archimedes لتقريب π نصف محيط دائرة الوحدة. وكان ذلك قبل 200 قبل الميلاد.

يمكن استخدام الهندسة لإثبات أن متتاليات أنصاف المحيطات الداخلية والخارجية (كما هو أعلاه) $\{p_k\}$ و $\{P_k\}$ على التوالي تحقق

$$P_k = k\tan\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad و \quad p_k = k\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

و $p_k < \pi < P_k$ لكل $k \geq 4$.

أ. أثبت أن $p_4 = 2\sqrt{2}$ و $P_4 = 4$

ب. أثبت أنه عند $k \geq 4$ فإن المتتاليات تحقق العلاقات الرجعية

$$P_{2k} = \frac{2p_kP_k}{p_k + P_k} \quad و \quad p_{2k} = \sqrt{p_kP_{2k}}$$

ج. قرّب π ضمن 10^{-4} بحساب p_k و P_k حتى يكون $P_k - p_k < 10^{-4}$.

د. استخدم متتالية تايلور لإثبت أن

$$\pi = p_k + \frac{\pi^3}{3!}\left(\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{\pi^5}{5!}\left(\frac{1}{k}\right)^4 + \cdots$$

و

$$\pi = P_k - \frac{\pi^3}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{2\pi^5}{15}\left(\frac{1}{k}\right)^4 - \cdots$$

هـ. استخدم لاستكمال الخارجي $h = 1/k$.

3.4 مبادئ التكامل العددي Elements of Numerical Integration

غالبًا ما نحتاج إلى إيجاد قيمة التكامل المحدود لدالّة ليس لها دالّة أصلية صريحة أو أن دالّته الصريحة يصعب الحصول عليها. إن الطريقة الرئيسة في تقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ تسمى الطريقة العددية numerical quadrature وتستخدم الجمع

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

لتقريب $\int_a^b f(x)\,dx$.

إن الطرائق العددية في هذا الفصل ترتكز على كثيرات الحدود للاستكمال التي بحث فيها في الفصل الثالث.

نختار أولًا مجموعة من النقاط المتميزة $\{x_0, \ldots, x_n\}$ من الفترة $[a, b]$. ثم تكامل كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

وتكامل خطأ القطع على $[a, b]$ لنحصل على

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx + \int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx$$

حيث $\xi(x)$ في $[a, b]$ لكل x

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

إن صيغة التكامل العددي quadrature تكون

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

ويكون الخطأ معطى بالصيغة

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx$$

وقبل شرح الحالة العامة لصيغ التكامل العددي، دعنا نبحث في الصيغ التي نحصل عليها باستخدام كثيرات حدود لاجرانج الأولى والثانية ونقاط متساوية التباعد.

إن هذا يعطي قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal rule وقاعدة سمبسون Simpson's rule اللتين تُقدّمان في مقررات التفاضل والتكامل. ولاشتقاق قاعدة شبه المنحرف لتقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ افترض $x_0 = a$، $x_1 = b$، $h = b - a$ واستخدم كثيرة حدود لاجرانج الخطية

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

عندئذ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right]dx \qquad (21.4)$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

وبما أن $(x-x_0)(x-x_1)$ لا تتغير إشارتها في الفترة $[x_0, x_1]$ فإنه يمكن تطبيق مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة للتكامل على حد التكامل لتعطي لقيمة ما ξ ضمن (x_0, x_1)

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)\,dx = f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$
$$= f''(\xi)\left[\frac{x^3}{3}-\frac{(x_1+x_0)}{2}x^2+x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1}$$
$$= -\frac{h^3}{6}f''(\xi)$$

ومن ثم فإن الصيغة (21.4) تعطي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}f(x_1)\right]_{x_0}^{x_1}-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$
$$= \frac{(x_1-x_0)}{2}[f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^3}{12}f''(\xi).$$

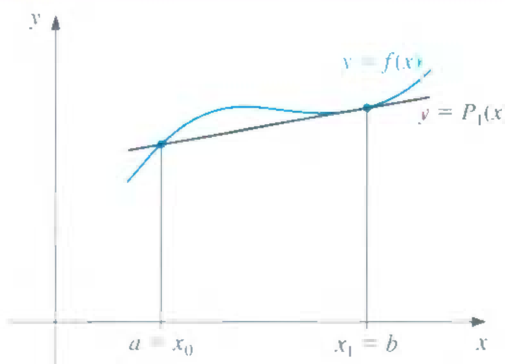
وبما أن $h = x_1 - x_0$ فلدينا القاعدة الآتية.

عند استخدام مصطلح شبه المنحرف، فإننا نقصد أي شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان على الأقل. إن المصطلح الأوروبي لهذا شكل هو "trapezium" ولزيادة الأمر تعقيدا، فإن الكلمة الأوروبية "trapezoid" تشير إلى أي شكل رباعي ليس فيه أي ضلعين متساويين. والكلمة الأمريكية المقابلة لهذا شكل هي "trapezium".

قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

وتسمى هذه بقاعدة شبه المنحرف، لأن f عندما تكون دالة قيمتها موجبة فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يكون مقرّبًا بمساحة شبه المنحرف. (كما يظهر في شكل 3.4).

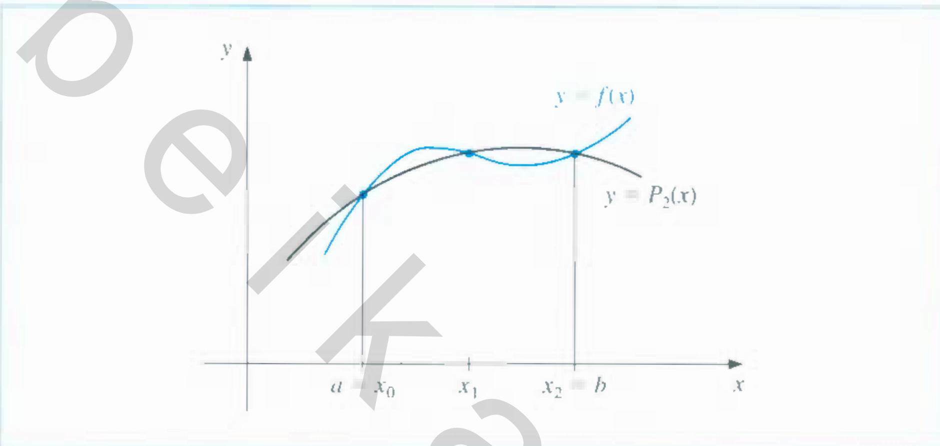


شكل 3.4

وبما أن حد الخطأ في قاعدة شبه المنحرف تحتوي على f''، فإن القاعدة تعطي النتائج الدقيقة عندما تطبق على أي دالّة مشتقتها الثانية مطابقة للصفر. أي لأي كثيرة حدود من الرتبة 1 أو أقل.

إن قاعدة سمبسون تنتج من تكامل كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة الثانية على الفترة $[a, b]$ باستخدام $x_0 = a, x_2 = b$ و $x_1 = a + h$ حيث $h = (b - a)/2$ (انظر شكل 4.4)

شكل 4.4



ولذلك فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6} f^{(3)}(\xi(x))\,dx$$

وعلى كل حال فإن اشتقاق قاعدة سمبسون بهذه الطريقة يعطي فقط خطأً من رتبة $O(h^4)$ محتويًا $f^{(3)}$.

وبمحاولة حل المسألة بطريقة أخرى، يمكننا اشتقاق حد ذي رتبة أعلى تحتوي $f^{(4)}$. ولشرح هذه الصيغة البديلة، نفترض f مفكوكًا بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة حول x_1. عندئذ كل x في $[x_0, x_2]$ يوجد العدد $\xi(x)$ في (x_0, x_2) بحيث

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x - x_1)^4$$

و

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \left[f(x_1)(x - x_0) + \frac{f'(x_1)}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x - x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4\,dx \qquad (22.4)$$

وبما أن $(x-x_1)^4$ لا يكون سالبًا أبدًا في $[x_0, x_2]$، فإن مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة تعطي

$$\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120}(x-x_1)^5\Big]_{x_0}^{x_2}$$

لعدد ما ξ_1 في (x_0, x_2)

على كل حال، $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ ولذلك فإن

$$(x_2-x_1)^2-(x_0-x_1)^2 = (x_2-x_1)^4-(x_0-x_1)^4 = 0$$

حيث

$$(x_2-x_1)^3-(x_0-x_1)^3 = 2h^3 \quad \text{و} \quad (x_2-x_1)^5-(x_0-x_1)^5 = 2h^5$$

وعليه يمكن كتابة الصيغة (22.4) على الصيغة

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5$$

وإذا عوّضنا عن $f''(x_1)$ بالقيمة التقريبية المعطاة في الصيغة (9.4) في الفصل 1.4 نجد أن

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}\left\{\frac{1}{h^2}[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2)\right\} + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{12}\left[\frac{1}{3}f^{(4)}(\xi_2) - \frac{1}{5}f^{(4)}(\xi_1)\right]$$

من الممكن استخدام طرائق بديلة (انظر التمرين 24) لبرهنة أن القيمتين ξ_1 و ξ_2 في هذا التعبير يمكن الاستعاضة عنهما بقيمة مشتركة ξ في (x_0, x_2). إن هذا يعطي قاعدة سمبسون.

قاعدة سمبسون **Simpson's Rule**

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

وبما أن حد الخطأ فيه المشتقة الرابعة للدالّة f، فإن قاعدة سمبسون تعطي نتائج صحيحة لكل كثيرة حدود من الرتبة الثالثة أو أقل.

توماس سمبسون
Thomas Simpson
1710–1761 عالم رياضيات قد تعلّمها بنفسه، وكان يعمل نسّاجا لكسب رزقه. كان اهتمامه الأساس بمبرهنة الاحتمال. إلا أنه في عام 1750 نشر كتابا في التفاضل والتكامل في مجلدين اسمه
The Doctrine and Application of Fluxions.

مثال 1

قاعدة شبه المنحرف للدالّة f على الفترة $[0, 2]$ هي

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx f(0) + f(2)$$

وقاعدة سمبسون للدالّة f على الفترة $[0, 2]$ هي

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

يظهر ملخص النتائج مقربًا إلى ثلاث خانات لبعض الدّوال الابتدائية في جدول (7.4).
لاحظ أن قاعدة سمبسون هي الأفضل في كل حالة. ■

جدول 7.4

$f(x)$	x^2	x^4	$1/(x+1)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$	e^x
القيمة الصحيحة	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
شبه المنحرف	4.000	16.000	1.333	3.326	0.909	8.389
سمبسون	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421

إن الاشتقاق العادي لصيغ الخطأ يبنى على كثيرات الحدود التي تنتج نتائج صحيحة لتطبيق هذه الصيغ عليها. ويستخدم التعريف الآتي لتسهيل شرح هذا الاشتقاق.

تعريف 1.4

تعرف درجة الدقة لصيغة عددية على أنها أكبر عدد صحيح موجب n بحيث تكون جميع قيم الصيغة غير مقرّبة عند x^k لكل $k = 0, 1, 2 \ldots, n$. ■

إن التحسن في الدقة لقاعدة سمبسون على قاعدة شبه المنحرف يفسَّر عفويًا بحقيقة أن قاعدة سمبسون تحتوي على التقييم عند نقطة متوسطة تؤدي إلى توازن أفضل للتقريب

ويبين تعريف (1.4) أن قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون لهما درجات دقة واحدة وثلاثة على التوالي.

إن كلًا من التكامل والجمع عملية خطية. أي أن

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

و

$$\sum_{i=0}^{n} (\alpha f(x_i) + \beta g(x_i)) = \alpha \sum_{i=0}^{n} f(x_i) + \beta \sum_{i=0}^{n} g(x_i)$$

إن المصطلح مفتوحة ومغلقة لطرائق إيجاد التكامل تعني أن الطرق المفتوحة تستخدم لتقييم النقاط في الفترة المفتوحة (a, b) عند إيجاد تقريب للتكامل $\int f(x)\,dx$. أما الطرائق المغلقة فهي تستخدم لتقييم نقطتي النهاية في الفترة المغلقة $[a, b]$

لكل زوج من الدّوال القابلة للتكامل f و g وأي زوج من الثوابت α ، β.

وهذا يتضمن (انظر التمرين 25) أن رتبة الدقة لأي صيغة تكامل هي n إذا وفقط إذا كان الخطأ $E(P(x)) = 0$ لكثيرات الحدود $P(x)$ جميعها من الرتبة $k = 0, 1, 2 \ldots, n$، ولكن $E(P(x)) \neq 0$ لكثيرات حدود ما من الرتبة $n + 1$.

إن قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون هي أمثلة لعائلة من الطرائق تعرف بصيغ نيوتن – كوتس Newton – Cotes formulas.

هناك نوعان من صيغ نيوتن – كوتس: مفتوحة ومغلقة.

إن صيغة نيوتن – كوتس المغلقة ذات $(n + 1)$ نقطة تستخدم $x_i = x_0 + ih$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$. (انظر شكل 5.4).

تسمى هذه الصيغة مغلقة، لأن نقطتي الحدود للفترة المغلقة $[a, b]$ متضمنة في نقاط التقييم.

تأخذ هذه الصيغة الصورة

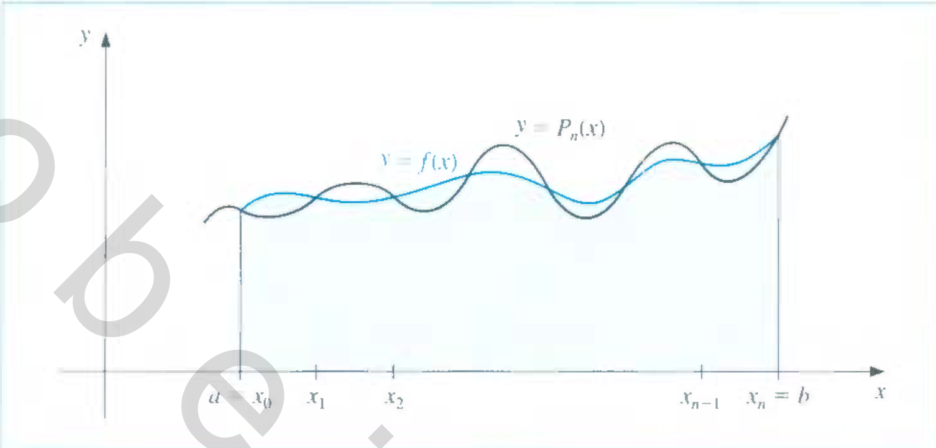
$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

حيث

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\, dx$$

وتصف المبرهنة الآتية تفاصيل تحليل الخطأ المرتبط بصيغ نيوتن – كوتس.

انظر برهان هذه المبرهنة [IK, p. 313].



شكل 5 4

مبرهنة 2 4 افترض أن $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ هي صيغة نيوتن – كوتس ذات $(n + 1)$ نقطة حيث $x_0 = a, x_n = b$ و $h = (b - a)/n$. عندئذ، يوجد عدد $\xi \in (a, b)$ يحقق

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\, dt$$

إذا كان n عددًا زوجيًّا و $f \in C^{n+2}[a, b]$. أما إذا كان n عددًا فرديًّا و $f \in C^{n+1}[a, b]$ فإن

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\, dt$$

■

لاحظ أنه عندما يكون n عددًا صحيحًا زوجيًّا. فإن رتبة الدقة $n + 1$ على الرغم من أن كثيرة الحدود للاستيفاء الداخلي interpolation هي من رتبة n على الأكثر.

عندما يكون n عددًا فرديًّا فإن رتبة الدقة هي فقط n.

بعض صيغ نيوتن – كوتس المغلقة الشائعة closed Newton–Cotes formulas. حدود الخطأ لها هي كما يلي:

$n = 1$: قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal rule

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \qquad (23.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_1$.

$n = 2$: قاعدة سمبسون Simpson's rule

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \qquad (24.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_2$.

$n = 3$: قاعدة الثلاثة أثمان لسمبسون Simpson's Three-Eighths rule

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi) \qquad (25.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_3$.

:$n = 4$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi) \qquad (26.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_4$.

إن صيغ نيوتن – كوتس المفتوحة *open Newton–Cotes formulas* تستخدم لتقييم النقاط $x_i = x_0 + ih$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$ حيث $h = (b-a)/(n+2)$ و $x_0 = a + h$.

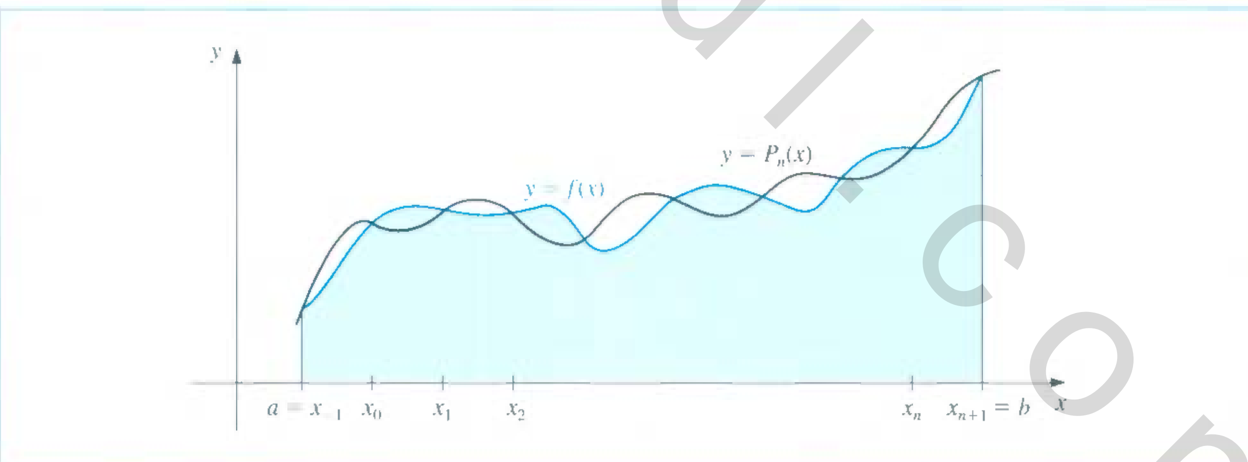
إن هذا يعطي $x_n = b - h$، ولذلك نعدد نقاط النهاية بوضع $x_{-1} = a$ و $x_{n+1} = b$ (كما يظهر في شكل 6.4).

إن الصيغ المفتوحة تحوي النقاط المستخدمة جميعها في التقريب في الفترة المفتوحة (a, b). تصبح الصيغ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

حيث $a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$ أيضاً.

شكل 6.4



المبرهنة الآتية مماثلة للمبرهنة (2.4)، وبرهانها موجود في [IK, p. 314].

مبرهنة 3.4 افترض أن $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ هي صيغة نيوتن – كوتس المفتوحة ذات $(n+1)$ نقطة حيث $x_{-1} = a,\ x_{n+1} = b$ و $h = (b-a)/(n+2)$. عندئذ، يوجد عدد $\xi \in (a, b)$ بحيث

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} t^2 (t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

إذا كان n زوجيًا و $f \in C^{n+2}[a,b]$، وأما إذا كان n فرديًا و $f \in C^{n+1}[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} t(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$ ■

بعض صيغ نيوتن – كوتس المفتوحة مع حد الخطأ هي

$n = 0$: قاعدة النقطة الوسيطية **Midpoint rule**

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2h f(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi) \quad \text{حيث} \quad x_{-1} < \xi < x_1 \tag{27.4}$$

$n = 1$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{3h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \quad \text{حيث} \quad x_{-1} < \xi < x_2 \tag{28.4}$$

$n = 2$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi) \tag{29.4}$$

حيث $x_{-1} < \xi < x_3$.

$n = 3$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{5h}{24}[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95}{144} h^5 f^{(4)}(\xi) \tag{30.4}$$

حيث $x_{-1} < \xi < x_4$.

مثال 2 إن استخدام صيغ نيوتن – كوتس المفتوحة والمغلقة المدرجة في الصيغ (26.4)–(23.4) و(30.4)–(27.4) لإيجاد تقريب للتكامل $\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx = 1 - \sqrt{2}/2 \approx 0.29289322$ يعطي النتائج المدوّنة في جدول (8.4). ■

جدول 8.4

n	0	1	2	3	4
المعادلات المغلقة		0.27768018	0.29293264	0.29291070	0.29289318
الخطأ		0.01521303	0.00003942	0.00001748	0.00000004
المعادلات المفتوحة	0.30055887	0.29798754	0.29285866	0.29286923	
الخطأ	0.00766565	0.00509432	0.00003456	0.00002399	

EXERCISE SET مجموعة التمارين 3.4

1. أوجد تقريبًا للتكاملات الآتية باستخدام قاعدة شبه المنحرف:

أ. $\int_{0.5}^{1} x^4\,dx$ ب. $\int_{0}^{0.5} \frac{2}{x-4}\,dx$ جـ. $\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x\,dx$ د. $\int_{0}^{1} x^2 e^{-x}\,dx$

هـ. $\int_{1}^{1.6} \frac{2x}{x^2-4}\,dx$ و. $\int_{0}^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\,dx$ ز. $\int_{0}^{\pi/4} x \sin x\,dx$ حـ. $\int_{0}^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x\,dx$

2. أوجد تقريبًا للتكاملات الآتية باستخدام قاعدة شبه المنحرف

أ. $\int_{-0.25}^{0.25} (\cos x)^2\,dx$ ب. $\int_{-0.5}^{0} x \ln(x+1)\,dx$

جـ. $\int_{0.75}^{1.3} \left((\sin x)^2 - 2x \sin x + 1\right)\,dx$ د. $\int_{e}^{e+1} \frac{1}{x \ln x}\,dx$

3. أوجد حدًّا للخطأ في التمرين (1) باستخدام صيغة الخطأ. وقارن ذلك بالخطأ الفعلي.
4. أوجد حدًّا للخطأ في التمرين (2) باستخدام صيغة الخطأ. وقارن ذلك بالخطأ الفعلي.
5. أعد حل التمرين (1) باستخدام قاعدة سمبسون.
6. أعد حل التمرين (2) باستخدام قاعدة سمبسون.
7. أعد حل التمرين (3) باستخدام قاعدة سمبسون ونتائج التمرين (5).
8. أعد حل التمرين (4) باستخدام قاعدة سمبسون ونتائج التمرين (6).
9. أعد حل التمرين (1) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية.
10. أعد حل التمرين (2) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية.
11. أعد حل التمرين (3) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية ونتائج التمرين (9).
12. أعد حل التمرين (4) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطية ونتائج التمرين (10).
13. إن تطبيق قاعدة شبه المنحرف لإيجاد $\int_0^2 f(x)\,dx$ يعطي القيمة 4. أما قاعدة سمبسون فتعطي القيمة 2. فما قيمة $f(1)$؟
14. إن تطبيق قاعدة شبه المنحرف لإيجاد $\int_0^2 f(x)\,dx$ يعطي القيمة 5. وقاعدة النقطة الوسيطية تعطي القيمة 4. فما القيمة التي تعطيها قاعدة سمبسون؟
15. أوجد رتبة الدقة التي تعطيها قاعدة التكامل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

16. افترض أن $x_0 = a,\ x_1 = a + h$ ، $h = (b-a)/3$ و $x_2 = b$ أوجد رتبة الدقة التي تعطيها قاعدة التكامل

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{9}{4} h f(x_1) + \frac{3}{4} h f(x_2)$$

17. إن قاعدة التكامل $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$ تعطي نتائج صحيحة لكثيرات جميعها الحدود من الرتبة الثانية أو أقل. حدّد قيم c_0, c_1, c_2.
18. إن قاعدة التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx = c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2 f(2)$ تعطي نتائج صحيحة لكثيرات الحدود جميعها من الرتبة الثانية أو أقل. حدّد قيم c_0, c_1, c_2.
19. أوجد الثوابت c_0, c_1, x_1 بحيث تعطي صيغة التكامل $\int_0^1 f(x)\,dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$ أعلى رتبة ممكنة من الدقة.
20. أوجد الثوابت x_0, x_1, c_1 بحيث تعطي صيغة التكامل $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} f(x_0) + c_1 f(x_1)$ أعلى رتبة ممكنة من الدقة.

21. أوجد قيمًا تقريبية للتكاملات الآتية باستخدام الصيغ (23.4) حتى (30.4).
هل درجات الدقة في التقريبات متلائمة مع صيغ الخطأ؟
أي الفقرتين (د) و (هـ) يعطي التقريب الأفضل؟

أ. $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x}\,dx$ ب. $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2\,dx$ جـ. $\int_{1.1}^{1.5} e^x\,dx$

د. $\int_1^{10} \frac{1}{x}\,dx$ هـ. $\int_1^{5.5} \frac{1}{x}\,dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x}\,dx$ و. $\int_0^1 x^{1/3}\,dx$

22. لديك قيم الدالة f على القيم الآتية:

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

أوجد التقريب للتكامل $\int_{1.8}^{2.6} f(x)\,dx$ باستخدام جميع صيغ التكامل المناسبة التي درست في هذا الفصل.

23. افترض أن في بيانات التمرين (22) أخطاء تدوير كما في جدول الآتي

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
الخطأ في $f(x)$	2×10^{-6}	-2×10^{-6}	-0.9×10^{-6}	-0.9×10^{-6}	2×10^{-6}

احسب الأخطاء الناتجة من التدوير عند حل التمرين (22).

24. اشتق قاعدة سمبسون مع حد الخطأ باستخدام

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi)$$

أوجد a_0, a_1, a_2 من حقيقة أن قاعدة سمبسون تكون صحيحة للدالة $f(x) = x^n$ عندما $n = 1, 2, 3$.
ثم أوجد k بتطبيق صيغة التكامل على $f(x) = x^4$.

25. برهن العبارة الواردة بعد تعريف (1.4). أي برهن أن صيغة التكامل لها رتبة دقة إذا وفقط إذا كان حد الخطأ $E(P(x)) = 0$ كثيرات الحدود $P(x)$ جميعها من الرتبة $k = 0, 1, \ldots, n$ ولكن $E(P(x)) \neq 0$ لبعض كثيرات الحدود $P(x)$ من الرتبة $n + 1$.

26. اشتق قاعدة الثلاثة أثمان لسمبسون، الصيغة (25.4)، مع حد الخطأ باستخدام المبرهنة (2.4).

27. اشتق الصيغة (28.4) مع حد الخطأ باستخدام المبرهنة (3.4).

4.4 التكامل العددي المركب Composite Numerical Integration

غالبا ما يكون التقريب المتقطع ذا فاعلية. تذكر أن هذا قد استخدم في استيفاء بيزيية Bézier

إن صيغ نيوتن–كوتس عمومًا تصلح للاستخدام على فترات تكامل كبيرة. هناك حاجة إلى صيغ ذات رتبة عالية، لكن يصعب في هذه الصيغ إيجاد قيمها. بالإضافة إلى ذلك فإن صيغ نيوتن– كوتس مبنية على كثيرات حدود استكمالية مستخدمة نقاطا متساوية الأبعد، وذلك بسبب طبيعة ذبذبة كثيرات الحدود عالية الدرجة. وسنناقش في هذا الفصل المنحنى المتقطع (*piecewise*) للتكامل العددي باستخدام صيغ نيوتن–كوتس ذات الرتب المتدنية.

إن هذه هي الطرائق الأكثر استخدامًا.

افترض إيجاد تقريب للتكامل $\int_0^4 e^x\,dx$. إن قاعدة سمبسون على فرض $h = 2$ تعطي

$$\int_0^4 e^x\,dx \approx \frac{2}{3}(e^0 + 4e^2 + e^4) = 56.76958$$

وبما أن الجواب الدقيق في هذه الحالة هو $e^4 - e^0 = 53.59815$ ، فإن الخطأ يساوي -3.17143 وهو أكثر كثيرًا مما نقبله عادة.

ولتطبيق تقنية متقطعة لهذه المسألة، قسّم $[0, 4]$ بين $[0, 2]$ و $[2, 4]$ واستخدم قاعدة سمبسون مرتين باستخدام $h = 1$.

إن هذا يعطيك

$$\int_0^4 e^x\,dx = \int_0^2 e^x\,dx + \int_2^4 e^x\,dx \approx \frac{1}{3}(e^0 + 4e + e^2) + \frac{1}{3}(e^2 + 4e^3 + e^4)$$
$$= \frac{1}{3}(e^0 + 4e + 2e^2 + 4e^3 + e^4)$$
$$= 53.86385$$

لقد تقلّص الخطأ إلى -0.26570 وهذه النتائج تدفعنا إلى تقسيم الفترتين $[0, 2]$ و $[2, 4]$ واستخدام قاعدة سمبسون بالقيمة $h = \frac{1}{2}$ فنحصل على

$$\int_0^4 e^x\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^2 e^x\,dx + \int_2^3 e^x\,dx + \int_3^4 e^x\,dx$$
$$\approx \frac{1}{6}(e_0 + 4e^{1/2} + e) + \frac{1}{6}(e + 4e^{3/2} + e^2)$$
$$+ \frac{1}{6}(e^2 + 4e^{5/2} + e^3) + \frac{1}{6}(e^3 + 4e^{7/2} + e^4)$$
$$= \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{1/2} + 2e + 4e^{3/2} + 2e^2 + 4e^{5/2} + 2e^3 + 4e^{7/2} + e^4)$$
$$= 53.61622$$

ويقدر الخطأ لهذا التقريب بالقيمة -0.01807.

ولتعميم هذه الطريقة، سنختار عددًا صحيحًا زوجيًا. قسّم الفترة $[a, b]$ إلى n من الفترات الجزئية. وطبّق قاعدة سمبسون على كل فترتين جزئيتين متتاليتين. (انظر شكل 7.4)

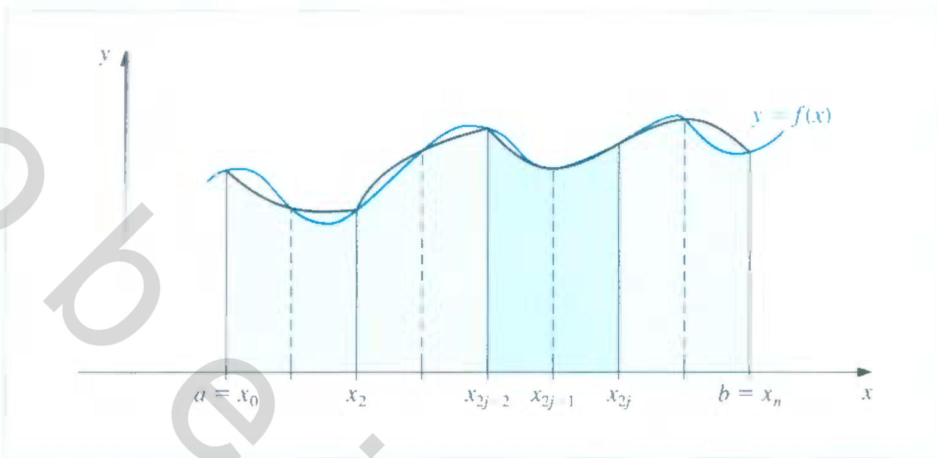
خذ $h = (b - a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ فنحصل على

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)\,dx$$
$$= \sum_{j=1}^{n/2} \left\{ \frac{h}{3}[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_j) \right\}$$

لبعض ξ_j حيث $x_{2j-2} < \xi_j < x_{2j}$ شريطة أن $f \in C^4[a, b]$.

باستخدام حقيقة أنه لكل $j = 1, 2, \ldots, (n/2) - 1$. يكون $f(x_{2j})$ ظاهرًا في الحد المقابل للفترة $[x_{2j-2}, x_{2j}]$ وكذلك في الحدّ المقابل للفترة $[x_{2j}, x_{2j+2}]$.

شكل 7.4



فيمكننا تقليص هذا المجموع إلى

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right] - \frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)$$

ويكون الخطأ المرتبط بهذا التقريب

$$E(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)$$

حيث $x_{2j-2} < \xi_j < x_{2j}$ لكل $j = 1, 2, \ldots, n/2$.

إذا كان $f \in C^4[a, b]$ فإن مبرهنة القيمة القصوى تتضمن أن $f^{(4)}$ يتخذ قيمته العظمى وقيمته الصغرى في الفترة $[a, b]$.

بما أن

$$\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le f^{(4)}(\xi_j) \le \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

فسنحصل على

$$\frac{n}{2}\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) \le \frac{n}{2}\max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

و

$$\min_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x) \le \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) \le \max_{x\in[a,b]} f^{(4)}(x)$$

ومن مبرهنة القيمة الوسطية فإنه يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث

$$f^{(4)}(\mu) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)$$

وهكذا فإن

$$E(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) = -\frac{h^5}{180} n f^{(4)}(\mu)$$

أو بما أن $h = (b-a)/n$ فإن

$$E(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$$

إن هذه المشاهدات تؤدي إلى النتيجة الآتية:

مبرهنة 4.4

ليكن $f \in C^4[a, b]$، n عدد زوجي، $h = (b-a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ فإنه يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث إن قاعدة سمبسون المركبة يمكن كتابتها مع حد الخطأ فيها إلى n من الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$$

■

تستخدم الخوارزمية (1.4) قاعدة سمبسون المركبة على n من الفترات الجزئية. وإن هذه الخوارزمية هي الأكثر استخداماً، لكونها خوارزمية عرض عام للتكامل.

قاعدة سمبسون المركبة Compsite Simpson's Rule

ALGORITHM
الخوارزمية
1.4

لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)\,dx$

المدخلات: نقطتا النهاية b، a، n عدد صحيح موجب زوجي.

المخرجات: تقريب XI إلى I.

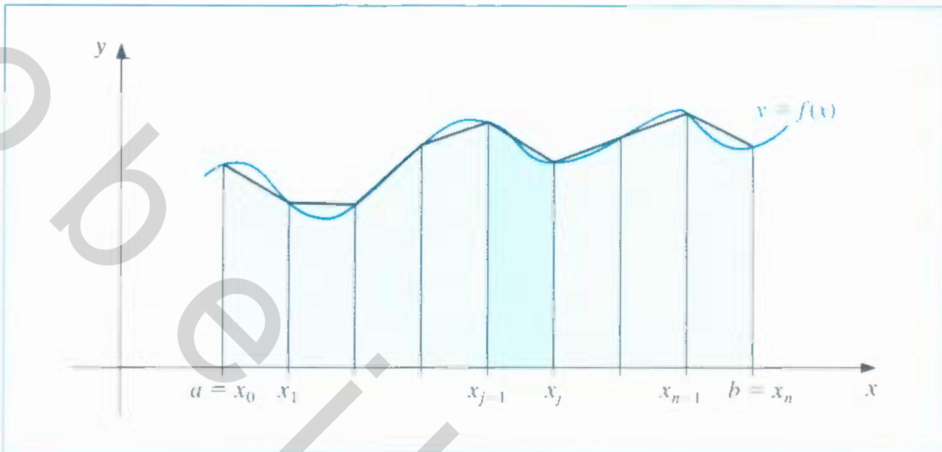
الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/n$.
2	ضع $XI0 = f(a) + f(b)$ $XI1 = 0$ (مجموع الدالة $f(x_{2i}-1)$) $XI2 = 0$ (مجموع الدالة $f(x_{2i})$)
3	كرر الخطوتين 4 و 5 لكل $i = 1, \ldots, n-1$.
4	ضع $X = a + ih$.
5	إذا كان i عددا زوجيًا فضع $XI2 = XI2 + f(X)$ وإلا فضع $XI1 = XI1 + f(X)$.
6	ضع $XI = h(XI0 + 2 \cdot XI2 + 4 \cdot XI1)/3$.
7	المخرجات (XI) توقف.

■

يمكن تطبيق طريقة التجزئة لأي من صيغ نيوتن– كوتس.

إن تعميمات قاعدة شبه المنحرف (انظر شكل 8.4) وقاعدة النقطة الوسيطية أعطيت دون برهان.

شكل 8.4



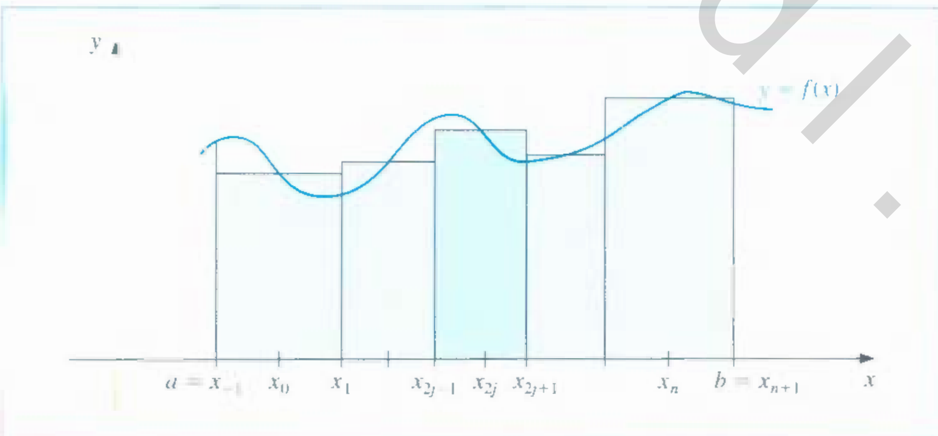
بما أن قاعدة شبه المنحرف تتطلب فترة واحدة لكل تطبيق. فإن العدد الصحيح n يمكن أن يكون فرديًا أو زوجيًا.

مبرهنة 5.4 ليكن $f \in C^2[a, b]$، $h = (b-a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$. عندئذ يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث إن قاعدة شبه المنحرف المركبة يمكن كتابتها مع حد الخطأ لكل من n الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)$$ ■

أما قاعدة النقطة الوسيطية المركبة فإن n يجب أن يكون أيضا زوجيًا. (انظر شكل 9.4)

شكل 9.4



مبرهنة 6.4 ليكن $f \in C^2[a, b]$، n عددًا زوجيًا، $h = (b-a)/(n+2)$ و $x_j = a + (j+1)h$ لكل $j = -1, 0, \ldots, n+1$. عندئذ يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث يمكن كتابة قاعدة النقطة الوسيطية

المركبة مع حد الخطأ فيها لكل $(n+2)$ من الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{b-a}{6}h^2 f''(\mu)$$

■

مثال 1 ليكن المطلوب تقريب $\int_0^\pi \sin x\,dx$ بخطأ مطلق أقل من 0.00002 باستخدام قاعدة سمبسون المركبة. إن قاعدة سمبسون المركبة تعطي لعدد ما $\mu \in (a,b)$ الصيغة الآتية:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{h}{3}\left[2\sum_{j=1}^{(n/2)-1}\sin x_{2j} + 4\sum_{j=1}^{n/2}\sin x_{2j-1}\right] - \frac{\pi h^4}{180}\sin\mu$$

وبما أن الخطأ المطلق يجب أن يكون أقل من 0.00002 فعلينا أن نستخدم المتراجحة الآتية لتحديد n و h:

$$\left|\frac{\pi h^4}{180}\sin\mu\right| \le \frac{\pi h^4}{180} = \frac{\pi^5}{180n^4} < 0.00002$$

وباستكمال هذه الحسابات نحصل على $n \ge 18$. إذا كان $n = 20$ فإن الناتج هو $h = \pi/20$ وتعطينا الصيغة

$$\int_0^\pi \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{60}\left[2\sum_{j=1}^{9}\sin\left(\frac{j\pi}{10}\right) + 4\sum_{j=1}^{10}\sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{20}\right)\right] = 2.000006$$

وللتأكد من رتبة الدقة هذه، فإن استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة تستلزم أن

$$\left|\frac{\pi h^2}{12}\sin\mu\right| \le \frac{\pi h^2}{12} = \frac{\pi^3}{12n^2} < 0.00002$$

أو أن $n \ge 360$. وبما أن هذا يتطلب حسابات أكثر كثيرًا من تلك التي نحتاج إليها لقاعدة سمبسون المركبة، فإننا لا نريد استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة لهذه المسألة.

وبهدف المقارنة، فإن قاعدة شبه المنحرف المركبة باستخدام $n = 20$ و $h = \pi/20$ تعطي

$$\int_0^\pi \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{40}\left[2\sum_{j=1}^{19}\sin\left(\frac{j\pi}{20}\right) + \sin 0 + \sin\pi\right] = \frac{\pi}{40}\left[2\sum_{j=1}^{19}\sin\left(\frac{j\pi}{20}\right)\right]$$
$$= 1.9958860$$

إن الجواب الصحيح هو 2، ولذلك فإن قاعدة سمبسون تعطينا جوابًا ضمن الخطأ، أما قاعدة شبه المنحرف باستخدام $n = 20$ فمن الواضح أنها لا تعطينا هذا الجواب. ■

إن معظم برامج CAS تتضمن قاعدة سمبسون المركبة وقاعدة شبه المنحرف المركبة.

أما في Maple فعليك أولًا الدخول إلى المكتبة حيث تكون معرفة بالأمر

```
>with(student)
```

أما طلبات طرائق الحل فهي trapezoid(f,x=a..b,n) و simpson(f,x=a..b,n)

أما مثالنا

```
>f:=sin(x)
```

$$f := \sin(x)$$

```
>trapezoid(f,x=0..Pi,20)
```

$$\frac{1}{20}\pi\left(\sum_{i=1}^{19}\sin\left(\frac{1}{20}i\pi\right)\right)$$

```
>evalf(%)
```

$$1.995885974$$

```
>evalf(simpson(f,x=0..Pi,20))
```

$$2.000006785$$

فإن قاعدة النقطة الوسيطية موجودة كذلك في مكتبة Maple ويمكن الوصول إليها بالأمر

```
>evalf(middlesum(f, x=0...Pi,10))
```

التي تعطي التقريب 2.008248408

ولإيضاح رموز Maple لطريقة النقطة الوسيطية نعرّف $f(x), a, b, n, h$ بالأوامر

```
>f:=x->sin(x)
>a:=0; b:=Pi; n=18; h:=(b-a)/(n+2)
```

ونحتاج أيضا إلى متغيّر لحساب الجمع الدوّار الذي نضع له القيمة الابتدائية 0.

```
>Tot:=0
```

وفي Maple تعرّف الحلقة المحكمة بالعد كما يلي:

```
for loop control variable from initial-value to terminal value do
    statement;
    statement;
    :
    statement;
od;
```

نضع متغير تحكم الحلقة j، الذي يبدأ من 0 وينتهي في $n/2 = 9$ بخطوات متساوية مقدارها 1.

كل قيمة $j = 0, 1, \ldots, 9$ تستكمل الحلقة. ويُنجز كل حساب داخل الحلقة حتى نصل إلى كلمة od. أما الكلمات المستخدمة المخزونة فهي from ,for ,do ,to ,od. انتبه إلى عدم استخدام (;) بعد كلمة do

```
> for j from 0 to n/2 do
> xj:=a+(2*j+1)*h;
> Tot:=evalf(Tot+f(xj))
>od
```

إن هذا ينتج سلسلة من النتائج تنتهي بالمجموع

$$Tot = \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) = \sum_{j=0}^{9} f(x_{2j}) = 6.392453222$$

ثم نضرب في العدد $2h$ لإنهاء طريقة النقطة الوسيطية المركبة

```
>Tot:=evalf(2*h*Tot)
```

$$Tot := 2.008248408$$

هناك خاصية مهمة تشترك بها طرائق التكامل المركبة جميعها ألا وهي الاستقرار المتعلق بخطأ التدوير. ولشرح ذلك، افترض أننا طبقنا قاعدة سمبسون المركبة باستخدام n من الفترات الجزئية لتكامل دالة ما f على $[a, b]$. وجدنا الحد الأعلى لخطأ التدوير. افترض أنه قُرّب $f(x_i)$ بالمقدار $\tilde{f}(x_i)$، وأن

$$f(x_i) = \tilde{f}(x_i) + e_i \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

حيث تعبر e_i عن خطأ التدوير المصاحب لاستخدام $\tilde{f}(x_i)$ بصفته تقريبًا للمقدار $f(x_i)$. وعندئذ فإن الخطأ التراكمي $e(h)$ باستخدام قاعدة سمبسون المركبة يساوي

$$e(h) = \left| \frac{h}{3} \left[e_0 + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} e_{2j} + 4 \sum_{j=1}^{n/2} e_{2j-1} + e_n \right] \right|$$

$$\leq \frac{h}{3} \left[|e_0| + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} |e_{2j}| + 4 \sum_{j=1}^{n/2} |e_{2j-1}| + |e_n| \right]$$

إذا كانت أخطاء التدوير محدودة تجانسيًا بالقيمة ε ينتج

$$e(h) \leq \frac{h}{3} \left[\varepsilon + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right)\varepsilon + 4\left(\frac{n}{2}\right)\varepsilon + \varepsilon \right] = \frac{h}{3} 3n\varepsilon = nh\varepsilon$$

ولكن $nh = b - a$ ولذلك $e(h) \leq (b - a)\varepsilon$ وهو حدّ مستقل عن h (و n).

إن هذا يعني أنه على الرغم من حاجاتنا إلى تقسيم فترة إلى أجزاء عديدة لضمان الدقة، فإن الحساب الزائد اللازم لا يزيد خطأ التدوير.

وهذا يعني أن الطريقة مستقرة عندما تقترب h من الصفر.

تذكر أن هذا ليس صحيحًا في عمليات الاشتقاق العددي التي بحث فيها في بداية هذا الفصل.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 4.4

1. استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة بقيم n المشار إليها لإيجاد تقريب لكل من التكاملات الآتية:

أ. $\int_1^2 x \ln x \, dx, \quad n = 4$

ب. $\int_{-2}^{2} x^3 e^x \, dx, \quad n = 4$

جـ. $\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx, \quad n = 6$

د. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx, \quad n = 6$

هـ. $\int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx, \quad n = 8$

و. $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx, \quad n = 8$

ز. $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx, \quad n=8$ ي. $\int_0^{3\pi/8} \tan x\,dx, \quad n=8$

2. استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة بقيم n المشار إليها لإيجاد تقريب لكل من التكاملات الآتية:

أ. $\int_{-0.5}^{0.5} \cos^2 x\,dx, \quad n=4$ ب. $\int_{-0.5}^{0.5} x\ln(x+1)\,dx, \quad n=6$

جـ. $\int_{.75}^{1.75} (\sin^2 x - 2x\sin x + 1)\,dx, \quad n=8$ د. $\int_{e}^{e+2} \frac{1}{x\ln x}\,dx, \quad n=8$

3. استخدم قاعدة سمبسون المركبة لتقريب التكاملات في التمرين (1).
4. استخدم قاعدة سمبسون المركبة لتقريب التكاملات في التمرين (2).
5. استخدم قاعدة النقطة الوسيطية بفترات جزئية، عددها $n+2$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (1).
6. استخدم قاعدة النقطة الوسيطية بفترات جزئية، عددها $(n+2)$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (2).
7. أوجد تقريبًا للتكامل $\int_0^2 x^2\ln(x^2+1)\,dx$ مستخدمًا $h=0.25$.
استخدم أ. قاعدة شبه المنحرف المركبة.
ب. قاعدة سمبسون المركبة.
جـ. قاعدة النقطة الوسيطية المركبة.
8. قرّب التكامل $\int_0^2 x^2e^{-x^2}\,dx$ مستخدمًا $h=0.25$
استخدم أ. قاعدة شبه المنحرف المركبة.
ب. قاعدة سمبسون المركبة.
جـ. قاعدة النقطة الوسيطية المركبة.
9. ليكن $f(1)=2$، $f(0.5)=2.5$، $f(0)=1$ و $f(0.25)=f(0.75)=\alpha$. أوجد α إذا كانت قاعدة شبه المنحرف المركبة باستخدام $n=4$ تعطي القيمة 1.75 للتكامل $\int_0^1 f(x)\,dx$.
10. تعطي قاعدة النقطة الوسيطية القيمة 12 ؛ لكونها تقريبًا للتكامل $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$. وتعطي قاعدة النقطة الوسيطية المركبة باستخدام $n=2$ القيمة 5. وتعطي قاعدة سمبسون المركبة القيمة 6 استخدم الحقائق $f(-1)=f(1)$ و $f(-0.5)=f(0.5)-1$ لإيجاد قيم $f(-1)$، $f(-0.5)$، $f(0)$، $f(0.5)$ و $f(1)$.
11. أوجد قيم n و h اللازمة لتقريب $\int_0^2 e^{2x}\sin 3x\,dx$ ضمن 10^{-4}.
استخدم أ. قاعدة شبه المنحرف المركبة.
ب. قاعدة سمبسون المركبة.
جـ. قاعدة النقطة الوسيطية المركبة.
12. كرّر تمرين (11) للتكامل $\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$.
13. أوجد قيم n و h اللازمة لتقريب $\int_0^2 \frac{1}{x+4}\,dx$ ضمن 10^{-5}. واحسب قيمة التقريب
استخدم أ. قاعدة شبه المنحرف المركبة.
ب. قاعدة سمبسون المركبة.
جـ. قاعدة النقطة الوسيطية المركبة.
14. كرر التمرين 13 للتكامل $\int_1^2 x\ln x\,dx$.
15. ليكن f معرفاً بما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+1, & 0\le x\le 0.1,\\ 1.001+0.03(x-0.1)+0.3(x-0.1)^2+2(x-0.1)^3, & 0.1\le x\le 0.2\\ 1.009+0.15(x-0.2)+0.9(x-0.2)^2+2(x-0.2)^3, & 0.2\le x\le 0.3 \end{cases}$$

أ. ادرس الاتصال لمشتقات f.

ب. استخدم قاعدة شبه المنحرف لتقريب $\int_0^{0.3} f(x)\,dx$ مستخدمًا $n = 6$، وقدّر الخطأ باستخدام حدّ الخطأ.

ج.استخدم قاعدة سمبسون المركبة مستخدمًا $n = 6$ لتقريب $\int_0^{0.3} f(x)\,dx$. هل النتائج أدقُّ مما هي في (ب)؟

16. أثبت أن الخطأ $E(f)$ لقاعدة سمبسون المركبة يمكن تقريبه بالمقدار

$$-\frac{h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)]$$

[إضاءة: $\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)(2h)$ هي مجموع ريمان للتكامل $\int_a^b f^{(4)}(x)\,dx$]

17. أ. اشتق تقديرًا للخطأ $E(f)$ في قاعدة شبه المنحرف المركبة مستخدمًا الطريقة في التمرين (16).

ب.كرّر الفقرة (أ) لقاعدة النقطة الوسيطية المركبة.

18. استخدم تقدير الخطأ في التمرينين (16) و (17) لتقدير الأخطاء في التمرين (12).

19. استخدم تقدير الخطأ في التمرينين (16) و (17) لتقدير الأخطاء في التمرين (14).

20. يُبرهَن في حساب التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات، وفي مقررات الإحصاء أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2}\,dx = 1$$

لأي قيمة موجبة σ.

إن الدّالة $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2}$ تسمى دالة الكثافة الاحتمالية الطبيعية ذات المعدل $\mu = 0$ والانحراف المعياري σ.

إن احتمال وقوع أي قيمة مختارة عشوائيًّا خاضعة لهذا التوزيع في الفترة $[a, b]$ هو $\int_a^b f(x)\,dx$.

أعط التقريب ضمن 10^{-5} لاحتمال أن أي قيمة مختارة عشوائيًّا وخاضعة لهذا التوزيع ستقع في كل فترة مما يلي:

أ. $[-\sigma, \sigma]$ ب. $[-2\sigma, 2\sigma]$ جـ. $[-3\sigma, 3\sigma]$

21. أوجد ضمن 10^{-6} طول منحنى القطع الناقص الذي معادلته $4x^2 + 9y^2 = 36$.

22. تقطع سيارة طريق السباق في 84 ثانية، وتحدّد سرعة السيارة في كل فترة مدتها 6 ثوانٍ باستخدام مسدس رادار، ويعطى مع بداية السباق بالقدم/ ثانية كما في جدول الآتي

الوقت	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
السرعة	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

ما طول طريق السباق؟

23. جسيم كتلته m يتحرك في سائل، ويخضع لمقاومة لزوجة R التي هي دالة في السرعة v تعطى العلاقة بين المقاومة R والسرعة v، والزمن t بالصيغة الآتية:

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}\,du$$

افترض أن $R(v) = -v\sqrt{v}$ لسائل ما، حيث وحدة R نيوتن والسرعة متر/ الثانية.

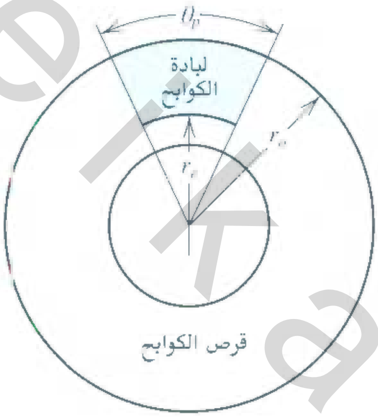
إذا كان $m = 10$ kg، $v(0) = 10$ m/s، فأوجد تقريبًا للزمن اللازم للجسيم ليتباطأ وتصل سرعته إلى $v = 5$ m/s.

24. لتوليد محاكاة خصائص قرص الكوابح (انظر شكل الآتي)، احتاج سيكرست وهورنبك D.A. Secrist and R.W. Hornbeck [SH] لإيجاد تقريب عددي لقيمة «الحرارة الداخلية معدلة بحسب المساحة» T، إلى لبادة الكابح المعطاة بالصيغة

$$T = \frac{\int_{r_e}^{r_0} T(r) r \theta_p \, dr}{\int_{r_e}^{r_0} r \theta_p \, dr}$$

حيث تمثل r_e نصف القطر التي تبدأ عندها ملامسة لبادة القرص، وتمثل r_0 نصف القطر الخارجي للبادة القرص، أما θ_p فتمثل قياس الزاوية المقابلة لقطاع لبادة الكابح و$T(r)$ رتبة الحرارة على كل نقطة من اللبادة التي تحسب عدديًا من تحليل صيغة الحرارة (انظر الفصل 2.12)

افترض $r_0 = 0.478$ ft، $r_e = 0.308$ ft، $\theta_p = 0.7051$ رادين، ودرجات الحرارة كما في الجدول الآتي حيث حسبت على نقاط متعددة على القرص. أوجد تقريبًا لقيمة T.



r (ft)	$T(r)$(°F)
0.308	640
0.325	794
0.342	885
0.359	943
0.376	1034
0.393	1064
0.410	1114
0.427	1152
0.444	1204
0.461	1222
0.478	1239

25. أوجد تقريبًا ضمن 10^{-4} لقيمة التكامل الآتي الذي نوقش في بداية الفصل الأول

$$\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2} \, dx$$

26. يمكن حل الصيغة الآتية لإيجاد x

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt = 0.45$$

باستخدام طريقة نيوتن مع

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt - 0.45$$

و

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

ولتقييم f عند التقريب p_k نحتاج إلى صيغة تربيعية لتقريب

$$\int_0^{p_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, dt$$

أ. أوجد حلًّا دقيقًا لـ $f(x) = 0$ لغاية 10^{-5} مستخدمًا طريقة نيوتن مع $p_0 = 0.5$ وقاعدة سمبسون المركبة.

ب. أعد الفقرة (أ) مستخدمًا قاعدة شبه المنحرف المركبة بدلًا من قاعدة سمبسون المركبة.

5.4 تكامل رومبرج Romberg Integration

قدّم ويرنر رومبرج (1909-2003) هذه الطريقة عام 1955 لتحسين دقة قاعدة شبه المنحرف عن طريق حذف الحدود التالية في التوسع التقاربي.

يستخدم تكامل رومبرج قاعدة شبه المنحرفِ المركبة لإيجاد تقريبات ابتدائية، ثم يطبق عملية استكمال ريتشاردسون لتحسين التقريبات. تذكر من الفصل (2.4) أن استكمال ريتشاردسون يمكن تطبيقه على أي عملية تقريب على الصيغة

$$M - N(h) = K_1h + K_2h^2 + \cdots + K_nh^n$$

حيث $K_1, K_2, \ldots, K_n$ ثوابت و $N(h)$ هو تقريب للقيمة غير المعلومة M. إن خطأ القطع في هذه الصيغة محدود بالقيمة K_1h عندما تكون h صغيرة. ولذلك فإن هذه الصيغة تعطي تقريبات من نوع $O(h)$. يستخدم استكمال ريتشاردسون تقنية تعديل لتعطي صيغ ذات خطأ قطع من رتب أعلى.

لقد رأينا في الفصل (2.4) كيفية استخدام ذلك للحصول على تقريبات المشتقة.

سنستخدم في هذا الفصل طريقة الاستكمال الخارجي لتقريب التكاملات المحدودة.

للبدء بشرح طريقة تكامل رومبرج، تذكر أن طريقة شبه المنحرف لتقريب تكامل دالة ما f على الفترة $[a, b]$ باستخدام m فترة جزئية هي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j)\right] - \frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\mu)$$

حيث $a < \mu < b, h = (b-a)/m$ و $x_j = a + jh$ لكل من $j = 0, 1, \ldots, m$.

ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا. وإن أول خطوة في عملية رومبرج هي التوصل إلى تقريبات قاعدة شبه المنحرف بأخذ $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4, \ldots$ و $m_n = 2^{n-1}$.

إن حجم الخطوة h_k المقابلة لـ m_k هي $h_k = (b-a)/m_k = (b-a)/2^{k-1}$. باستخدام هذه الرموز تصبح قاعدة شبه المنحرف

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h_k}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\left(\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k)\right)\right] - \frac{(b-a)}{12}h_k^2 f''(\mu_k) \tag{31.4}$$

حيث لكل k يكون μ_k عددًا ما في (a, b).

فإذا استخدمنا الرمز $R_{k,1}$ ليعبّر عن جزء الصيغة (31.4) المستخدم للتقريب بقاعدة شبه المنحرف فإن

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)]$$

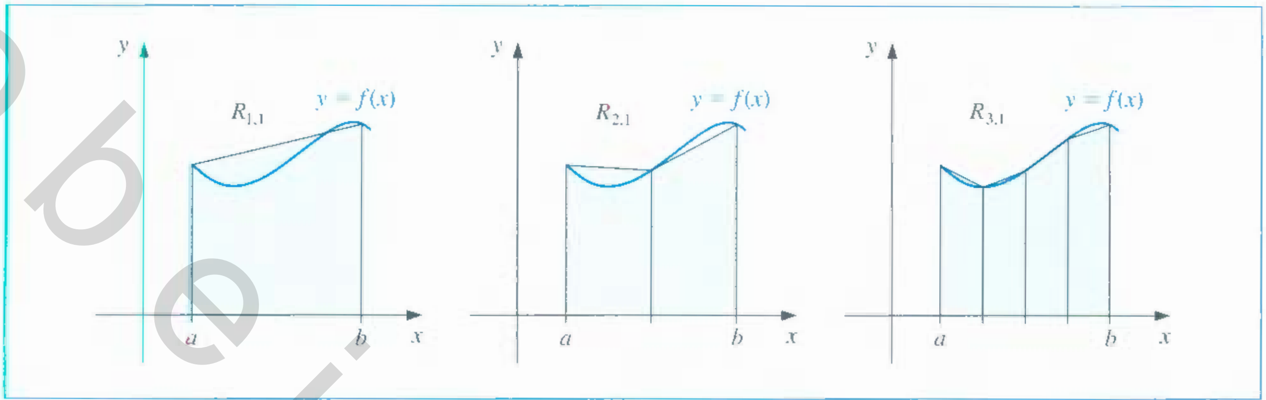
$$R_{2,1} = \frac{h_2}{2}[f(a) + f(b) + 2f(a + h_2)]$$

$$= \frac{(b-a)}{4}\left[f(a) + f(b) + 2f\left(a + \frac{(b-a)}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[R_{1,1} + h_1 f(a + h_2)]$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\{R_{2,1} + h_2[f(a + h_3) + f(a + 3h_3)]\}$$

شكل 10.4



وعمومًا (انظر شكل 10.4) يكون

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + (2i-1)h_k\right)\right] \qquad (32.4)$$

لكل $k = 2, 3, \ldots, n$ (انظر التمرينين 14، 15).

مثال 1 إن استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة لتنفيذ الخطوة الأولى من طريقة تكامل رومبرج لتقريب $\int_0^\pi \sin x\, dx$ بأخذ $n = 6$ يؤدي إلى:

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}[\sin 0 + \sin \pi] = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + \pi \sin\frac{\pi}{2}\right] = 1.57079633$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 1.89611890$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}\left[R_{3,1} + \frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{7\pi}{8}\right)\right] = 1.97423160$$

$$R_{5,1} = 1.99357034$$

و $$R_{6,1} = 1.99839336$$ ■

وبما أن القيمة الصحيحة للتكامل في المثال (1) هي 2، فإن التقارب بطيء. سنستخدم استكمال ريتشاردسون الخارجي لتسريع التقارب.

يمكن برهنة –ولو أن ذلك ليس بسهولة– (انظر [RR, pp. 136–138]) أنه إذا كان $f \in C^\infty[a, b]$ فإنه يمكن كتابة قاعدة شبه المنحرف المركبة ذات حد خطأ بديل على الصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx - R_{k,1} = \sum_{i=1}^{\infty} K_i h_k^{2i} = K_1 h_k^2 + \sum_{i=2}^{\infty} K_i h_k^{2i} \qquad (33.4)$$

حيث كل K_i مستقلة عن h_k ومعتمدة على $f^{(2i-1)}(a)$ و $f^{(2i-1)}(b)$.

ومن قاعدة شبه المنحرف على هذه الصيغة، يمكننا حذف الحد المحتوي على h_k^2 بدمج هذه الصيغة مع تلك المقابلة لها، وبوضع $h_{k+1} = h_k/2$ بدلاً من h_k لنحصل على

$$\int_a^b f(x)\,dx - R_{k+1,1} = \sum_{i=1}^{\infty} K_i h_{k+1}^{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i h_k^{2i}}{2^{2i}} = \frac{K_1 h_k^2}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i h_k^{2i}}{4^i} \qquad (34.4)$$

وبطرح الصيغة (33.4) من 4 أمثال الصيغة (34.4) وبالتبسيط نحصل على الصيغة بدرجة $O(h_k^4)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx - \left[R_{k+1,1} + \frac{R_{k+1,1} - R_{k,1}}{3}\right] = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i}{3}\left(\frac{h_k^{2i}}{4^{i-1}} - h_k^{2i}\right)$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i}{3}\left(\frac{1-4^{i-1}}{4^{i-1}}\right) h_k^{2i}$$

ثم يمكن تطبيق الاستكمال الخارجي على هذه الصيغة للحصول على نتيجة من الرتبة $O(h_k^6)$ وهكذا. ولتبسيط الرموز نعرّف

$$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3}$$

لكل $k = 2, 3, \ldots, n$ ونطبق استكمال ريتشاردسون الخارجي لهذه القيم.
وبالاستمرار في هذه الرموز. ولكل $k = 2, 3, 4, \ldots, n$ و $j = 2, \ldots, k$ نحصل على صيغة تقريب من الرتبة $O(h_k^{2j})$ معرّفة على الصورة

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \qquad (35.4)$$

تظهر النتائج التي نتجت من هذه الصيغ في جدول (9.4).

جدول 9.4

$R_{1,1}$					
$R_{2,1}$	$R_{2,2}$				
$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	$\cdots$	$R_{n,n}$

إن طريقة رومبرج تحظى بميزة إضافية مرغوب فيها ألا وهي إمكانية حساب صف جديد كامل في جدول عن طريق تطبيق قاعدة شبه المنحرف مرة إضافية واحدة فقط. وبعد ذلك تستخدم لإيجاد بقية مدخلات الصف.

إن الطريقة المستخدمة لإنشاء جدول من هذا النوع تحسب المدخلات صفًا صفًا أي على الترتيب $R_{1,1}$، $R_{2,1}$، $R_{2,2}$، $R_{3,1}$، $R_{3,2}$، $R_{3,3}$، الخ.

تصف الخوارزمية (2.4) هذه الطريقة.

ALGORITHM
الخوارزمية
2.4

رومبرج Romberg

لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)\,dx$، اختر عددًا صحيحًا $n > 0$.

المدخلات: نقاط النهاية a و b و n عدد صحيح.

المخرجات: مصفوفة R (احسب R وفق الصفوف. يُحفَظ آخر صفين فقط).

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = b - a;$ $R_{1,1} = h/2(f(a) + f(b))$
2	المخرجات $(R_{1,1})$.
3	عند $i = 2, \ldots, n$. طبّق الخطوات 4 – 8.
4	ضع $R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a + (k - 0.5)h)\right]$ (تقريب من طريقة شبه المنحرف).
5	عند $j = 2, \ldots, i$ ضع $R_{2,j} = R_{2,j-1} + \dfrac{R_{2,j-1} - R_{1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$ (استيفاء خارجي).
6	المخرجات ($R_{2,j}$ عند $j = 1, 2, \ldots, i$).
7	ضع $h = h/2$.
8	عند $j = 1, 2, \ldots, i$ ضع $R_{1,j} = R_{2,j}$ (تحديث الصف الأول من R).
9	توقف.

مثال 2

في المثال (1)، حسبت القيم $R_{1,1}$ حتى $R_{6,1}$ لإيجاد التقريب للتكامل $\int_0^\pi \sin x\,dx$. نشاهد مع الخوارزمية (2.4) جدول رومبرج في جدول (10.4).

وعلى الرغم من وجود 21 من المدخلات في هذا الجدول. إلا أن الستة في العمود الأول فقط تتطلب إيجاد قيم دالّة؛ لأن هذه القيم فقط هي التي تنتج باستخدام قاعدة شبه الـحرف المركبة. ونجد المدخلات الأخرى باستخدام طريقة المعدل.

لاحظ أن القيم الناتجة جميعها بالاستكمال الخارجي عدا الأولى (في الصف الأول للعمود الثاني) هي أدق من أحسن تقريب ناتج من قاعدة شبه المنحرف المركبة (في الصف الأخير للعمود الأول).

جدول 4 10

0					
1.57079633	2.09439511				
1.89611890	2.00455976	1.99857073			
1.97423160	2.00026917	1.99998313	2.00000555		
1.99357034	2.00001659	1.99999975	2.00000001	1.99999999	
1.99839336	2.00000103	2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000000

تتطلب الخوارزمية (2.4) عددًا صحيحًا n يُحدّد مسبقًا، وذلك لتحديد عدد الصفوف التي يجب توليدها. ويمكننا أيضًا تحديد الخطأ المقبول للتقريب، ومن ثم توليد n ضمن حد أعلى، إلى أن تقع المدخلات القطرية المتتالية $R_{n,n}$ و $R_{n-1,n-1}$ ضمن حد الخطأ المقبول.

إن صفة cautious "حذِر" المستخدمة في طريقة عددية ما تظهر أن فحصا يستخدم لتحديد ما إذا كانت فرضيات الاتصال من المحتمل أن تكون صحيحة

ولكي نضمن عدم تساوي أي قيمتين متتاليتين في صف واحد دون تطابقهما مع قيمة التكامل الجاري تقريبها، فقد جرت العادة بتوليد تقريبات حتى لا يكون $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}|$ فقط ضمن حد الخطأ المقبول. بل ينطبق ذلك أيضًا على $|R_{n-2,n-2} - R_{n-1,n-1}|$.

وعلى الرغم من أن هذا ليس احتياطًا عاليًا. إلا أنه يضمن أن مجموعتين من التقريب تولدتا بطريقتين مختلفتين قد تطابقتا ضمن حد الخطأ المقبول قبل قبول $R_{n,n}$ بوصفها قيمة صحيحة بدرجة كافية. إن تطبيق تكامل رومبرج على f المعرّف على $[a, b]$ يعتمد على افتراض أن لقاعدة شبه المنحرف المركبة حد خطأ يمكن التعبير عنه بصيغة الصيغة (4.33)، بمعنى وجوب توليد $f \in C^{2k+2}[a, b]$ للصف رتبة k. خوارزمية الغرض العام باستخدام تكامل رومبرج تتضمن تدقيقا عند كل خطوة لضمان تحقق هذا الافتراض. هذه الطرائق معروفة باسم *cautious Romberg algorithms* وهي موضحة في [Joh]. وهذا المصدر يوضح أيضا طرائق لاستخدام أسلوب رومبرج بصفتها عملية متبناة. مثلما الحال مع قاعدة سمبسون التي سنتناولها في الفصل (6.4).

EXERCISE SET مجموعة التمارين 5.4

1. استخدم تكامل رومبرج لحساب $R_{3,3}$ للتكاملات الآتية:

أ. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x\, dx$ ب. $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$ جـ. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\, dx$

د. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x\, dx$ هـ. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x\, dx$ و. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2-4}\, dx$

ز. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$ ح. $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2\, dx$

2. استخدم تكامل رومبرج لحساب $R_{3,3}$ للتكاملات الآتية:

أ. $\int_{-1}^{1} (\cos x)^2\, dx$ ب. $\int_{-0.75}^{0.75} x \ln(x+1)\, dx$

جـ. $\int_1^4 ((\sin x)^2 - 2x \sin x + 1)\, dx$ د. $\int_e^{2e} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

3. احسب $R_{4,4}$ للتكاملات في التمرين (1).

4. احسب $R_{4,4}$ للتكاملات في التمرين (2).

5. استخدم تكامل رومبرج لتقريب التكاملات في التمرين (1) ضمن 10^{-6}. احسب جدول رومبرج حتى يصبح $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$ أو $n = 10$ قارن نتائجك بالقيم الصحيحة للتكاملات.

6. استخدم تكامل رومبرج لتقريب التكاملات في التمرين (2) ضمن 10^{-6}. احسب جدول رومبرج حتى يصبح $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$ أو $n = 10$. قارن نتائجك بالقيم الصحيحة للتكاملات.

7. استخدم البيانات الآتية لتقريب $\int_1^5 f(x)\, dx$ لأكبر دقة ممكنة:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

8. استخدم تكامل رومبرج لتقريب

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\, dx$$

إذا كان $R_{11} = 0.250$ و $R_{22} = 0.2315$ أوجد R_{21}.

9. استخدم تكامل رومبرج لتقريب $\int_2^3 f(x)\,dx$.
إذا كان $R_{31} = 0.43687$، $f(3) = 0.36788$، $f(2) = 0.51342$ و $R_{33} = 0.43662$ فجد $f(2.5)$.

10. يعطي تكامل رومبرج لتقريب $\int_0^1 f(x)\,dx$ ما يلي: $R_{11} = 4$ و $R_{22} = 5$. أوجد $f(\frac{1}{2})$.

11. يعطي تكامل رومبرج لتقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ ما يلي $R_{22} = \frac{16}{3}$، $R_{11} = 8$ و $R_{33} = \frac{208}{45}$ أوجد R_{31}.

12. استخدم تكامل رومبرج لحساب التقريبات الآتية لتكامل $\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2}\,dx$

[ملحوظة: إن نتائج هذا التمرين مهمة جدًّا إذا ما استخدمت طريقة حساب ما بين سبع وتسع منازل].

أ. احسب $R_{1,1}$، $R_{2,1}$، $R_{3,1}$، $R_{4,1}$ و $R_{5,1}$، واستخدم هذه التقريبات للتنبؤ بقيمة التكامل.

ب. احسب $R_{2,2}$، $R_{3,3}$، $R_{4,4}$ و $R_{5,5}$ وعدّل تنبؤك.

جـ. احسب $R_{6,1}$، $R_{6,2}$، $R_{6,3}$، $R_{6,4}$ و $R_{6,6}$ وعدّل تنبؤك.

د. احسب $R_{7,7}$، $R_{8,8}$، $R_{9,9}$ و $R_{10,10}$ وأعطِ التنبؤ النهائي.

هـ. وضّح لماذا يسبب هذا التكامل صعوبة لدى استخدام تكامل رومبرج، واشرح كيف يمكن إعادة صياغته لتحديد تقريب دقيق بسهولة.

13. برهن أن التقريب الناتج من $R_{k,2}$ هو التقريب نفسه الذي نحصل عليه باستخدام قاعدة سمبسون المركبة التي شرحت في المبرهنة (4.4) بأخذ $h = h_k$.

14. برهن ما يلي لأي k:

$$\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f\left(a + \frac{i}{2}h_{k-1}\right) = \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right) + \sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + ih_{k-1}).$$

15. استخدم نتيجة تمرين 14 للتحقق من صيغة (32.4)؛ أي برهن ما يلي جميعها k:

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right)\right]$$

16. في التمرين 24 من الفصل (1.1). ظهر تكامل متسلسلة ماكلورين لتقريب $\operatorname{erf}(1)$. حيث $\operatorname{erf}(x)$ دالة الخطأ في التوزيع الطبيعي المعرفة في الصيغة $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.
قرّب $\operatorname{erf}(1)$ ضمن 10^{-7}.

6.4 طرائق التكامل التكيفية Adaptive Quadrature Methods

إن الصيغ المركبة تتطلب استخدام نقاط تجزيئية متساوية المسافات. وهذا ليس مناسبًا عند تكامل دالة على فترة تحتوي على منطقتين: يكون على إحداهما تغير دالي كبير. وعلى الأخرى تغير دالي صغير. وفي حالة اشتراط أن يكون خطأ التقريب موزعًا بالتجانس. فإن المسافة بين نقاط التجزئة يجب أن تكون أصغر على مناطق التغير الكبير منها على مناطق التغير الصغير. إن الطريقة الفاعلة لهذا النوع من المسائل يجب أن تنبئ عن كمية التغيير الدالي وتكيّف حجم الخطوة (المسافة في التجزئة) للمتطلبات المتغيرة.

تسمى هذه الطرائق طرائق التكامل التكيفية.

إن الطرائق العددية التكيفية مرغوب فيها خصوصًا لإدخالها في الحقائب التخصصية الناعمة، وذلك ليس لكونها فاعلة فقط. بل لأنها أيضًا تعطي تقريبات ضمن حد الخطأ المحدّد والمسموح بــه. ســنبحث في هذا الفصل طريقــة تكامل تكيّفية ونرى كيف يمكن اســتخدامها. ليس فقط

لتقليـل خطـأ التدوير، ولكن للتنبؤ أيضًا بتقدير الخطأ فـي التقريب الذي لا يعتمد على معرفة المشتقات العليا للدالة.

إن الطريقـة التـي نبحث فيها تعتمد على قاعدة سمبسـون المركبة. ولكن هـذه الطريقة يمكن تكييفها بسهولة لاستخدامها طرائق مركبة أخرى.

افترض أننا نريد تقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ ضمن خطأ محدد مسموح $\varepsilon > 0$.

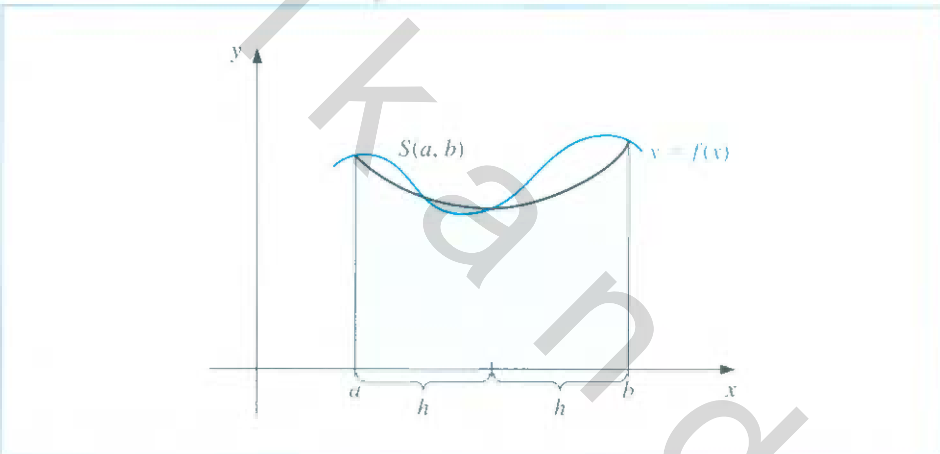
الخطوة الأولى في العملية هي تطبيق قاعدة سمبسون بحجم خطوة $h = (b-a)/2$ (انظر شكل 11.4) تنتج الصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \qquad (36.4)$$

للقيمة μ في الفترة (a, b).

وحيث نعبر عن التقريب بقاعدة سمبسون على $[a, b]$ بالرمز

$$S(a,b) = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + f(b)]$$



شكل 11.4

فإن الخطوة التالية لإيجاد تقريب للدقة لا يتطلب $f^{(4)}(\mu)$. ولعمل هذا، نطبق قاعدة سمبسون المركبة بأخذ $n = 4$. وحجم الخطوة $(b-a)/4 = h/2$، وهذا يعطي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(a+\frac{h}{2}\right) + 2f(a+h) + 4f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + f(b)\right] - \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\tilde{\mu}) \qquad (37.4)$$

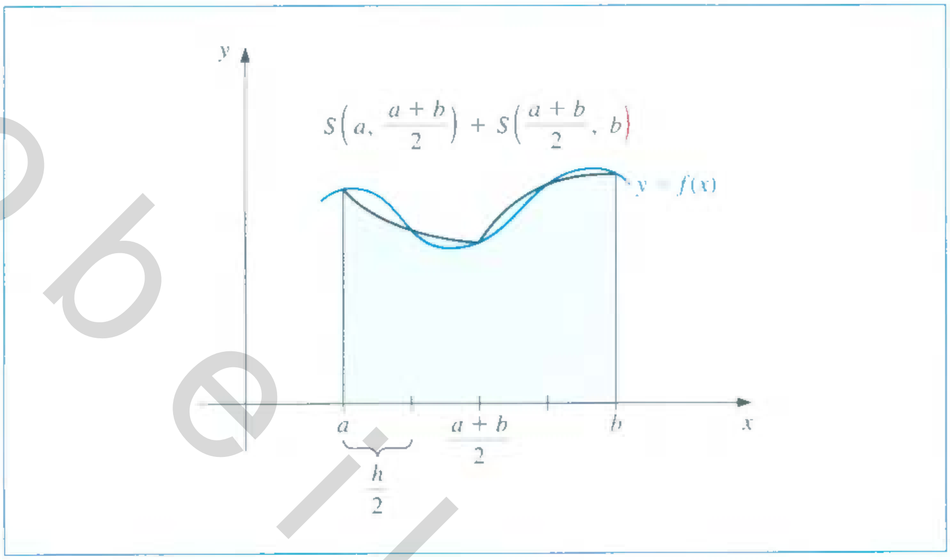
لقيمة ما $\tilde{\mu}$ في الفترة (a, b).

ولتبسيط الرموز، ضع

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(a+\frac{h}{2}\right) + f(a+h)\right]$$

و

$$S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) = \frac{h}{6}\left[f(a+h) + 4f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + f(b)\right]$$



شكل 12.4

عندئذ يمكن كتابة الصيغة (37.4) (انظر شكل 12.4) على الصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\tilde{\mu}) \qquad (38.4)$$

يشتق تقدير الخطأ بافتراض أن $\tilde{\mu} \approx \mu$ أو على نحو أدق بوضع $f^{(4)}(\tilde{\mu}) \approx f^{(4)}(\mu)$. وإن نجاح الطريقة يعتمد على دقة هذا الافتراض. وإذا كان ذلك دقيقاً فإن مساواة التكاملين في (36.4) و(38.4) يعطي

$$S\left(a, \frac{a-b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\tilde{\mu}) \approx S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu)$$

ومن ثم

$$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \approx \frac{16}{15}\left[S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right]$$

إن استخدام هذا التقدير في الصيغة (38.4) ينتج تقدير الخطأ

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right|$$
$$\approx \frac{1}{15}\left|S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right|$$

وهذه النتيجة تعني أن $S(a, (a+b)/2) + S((a+b)/2, b)$ يعطي تقريبًا لتكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ أفضل بنحو 15 مرّة، مما يتفق مع القيمة المعلومة $S(a, b)$.

وهكذا إذا كان

$$\left|S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right| < 15\varepsilon \qquad (39.4)$$

فإننا نتوقع الحصول على

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right| < \varepsilon \qquad (40.4)$$

ومن المفترض أن يكون

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$$

تقريبًا دقيقًا على نحو كافٍ للتكامل $\int_a^b f(x)\,dx$.

مثال 1 لفحص دقة خطأ التقدير في المعادلتين (39.4) و (40.4) افترض تطبيقه على التكامل $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1$. في هذه الحالة

$$S\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi/4}{3}\left[\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{12}(2\sqrt{2}+1) = 1.002279878$$

و

$$S\left(0, \frac{\pi}{4}\right) + S\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi/8}{3}\left[\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 1.000134585$$

ومن ثم

$$\left|S\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - S\left(0, \frac{\pi}{4}\right) - S\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\right| = |1.002279878 - 1.000134585| = 0.002145293$$

إن تقدير الخطأ الحاصل من استخدام

$S(a, (a+b)) + S((a+b), b)$ لتقريب التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ يكون بالنتيجة

$$\frac{1}{15}\left|S\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - S\left(0, \frac{\pi}{4}\right) - S\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\right| = 0.000143020$$

الذي يقرّب الخطأ الفعلي جيدا

$$\left|\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx - 1.000134585\right| = 0.000134585$$

وعلى الرغم من أن $D_x^4 \sin x = \sin x$ يغير تغيرا كبيرا في الفترة $(0, \pi/2)$. ■

فإنه عندما تختلف التقريبات في الصيغة (39.4) بأكثر من 15ε، نطبّق قاعدة سمبسون فرديًّا على الفترات الجزئية $[(a+b)/2, b]$ و $[a, (a+b)/2]$. بعد ذلك نستخدم عملية تقدير الخطأ في تحديد ما إذا كان التقريب للتكامل على كل فترة جزئية ضمن الخطأ المسموح $\varepsilon/2$ أو لا. فإذا كان الأمر كذلك فإننا نجمع التقريبين لنحصل على تقريب للتكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ ضمن الخطأ المسموح ε.

إذا لم يكن التقريب على إحدى الفقرتين الجزئيتين ضمن الخطأ المسموح $\varepsilon/2$، فعندئذ نقسم تلك الفترة الجزئية إلى فترتين. ويُعاد تطبيق القاعدة على تلك الفترتين لتحديد ما إذا كان التقريب على كل فترة جزئية ضمن $\varepsilon/4$ أو لا. تستمر عملية التصنيف هذه حتى يكون كل جزء ضمن الخطأ المحدد المسموح به.

استخدم هامش أمان عند استحالة التحقق من افتراضات الدقة

وعلى الرغم من أنه بالإمكان إنشاء مسائل لا يمكن الحصول فيها على الخطأ المسموح، إلا أن الطريقة عادة ما تكون ناجحة؛ لأن كل تجزئة تزيد عادة من دقة التقريب بعامل 16، حيث يكون المطلوب زيادة عامل الدقة باثنين فقط.

تعطي الخوارزمية (3.4) تفاصيل عملية التكامل التكيفية لقاعدة سمبسون. على الرغم من ظهور بعض الصعوبات التقنية التي تتطلب تخلف التنفيذ قليلًا عمّا شرح سابقًا. فعلى سبيل المثال في الخطوة الأولى، اختير الخطأ المسموح ليكون 10ε بدلًا من العدد 15ε في المتراجحة (39.4) لقد اختير هذا الحد اختيارًا محافظًا للتعويض عن الخطأ في الافتراض $f^{(4)}(\mu) \approx f^{(4)}(\tilde{\mu})$. وفي المسائل التي يكون فيها $f^{(4)}$ ذا تغير واسع، فعليك أن تخفض هذا الحد على نحو أكبر.

إن الطريقة المذكورة في الخوارزمية تقرب أولًا التكامل على الفترة الجزئية في أقصى يسار التجزئة. ويتطلب هذا طريقة فاعلة في حفظ القيم الدالّية المحسوبة على نقاط التجزئة في النصف الأيمن للفترات الجزئية واسترجاع تلك القيم.

تحتوي الخطوات 3، 4 و 5 على عملية تخزين مع مؤشر يسمح بتتبع البيانات المطلوبة لحساب التقريب على الفترة الجزئية المجاورة مباشرة على يمين الفترة الجزئية التي تولد التقريب عليها. إن تنفيذ الطريقة يكون أسهل على حاسوب يستخدم لغة برمجة استرجاعية (recursive).

ALGORITHM

الخوارزمية

3.4

التكامل التكيفي Adaptive Quadrature

عملية التكاملية التكيفية لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)\,dx$ ضمن حد خطأ مسموح به.

المدخلات: نقاط النهاية a و b. حد الخطأ المسموح TOL. حدّد N بعدد المستويات.

المخرجات: التقريب APP أو تقرير أن N قد تم تخطيها.

الخطوة	المضمون
1	ضع $APP = 0$ $i = 1;$ $TOL_i = 10\,TOL$ $a_i = a;$ $h_i = (b - a)/2$ $FA_i = f(a);$ $FC_i = f(a + h_i)$ $FB_i = f(b);$ $S_i = h_i(FA_i + 4FC_i + FB_i)/3$ (تقريب من طريقة سمبسون لكامل الفترة) $L_i = 1$
2	عند $i > 0$ طبّق الخطوات 3 – 5.
3	ضع $FD = f(a_i - h_i/2)$ $FE = f(a_i + 3h_i/2)$ $S1 = h_i(FA_i + 4FD + FC_i)/6$ (تقريب من طريقة سمبسون لنصف أجزاء الفترة) $S2 = h_i(FC_i + 4FE + FB_i)/6$ $v_1 = a_i$ (خزن المعلومات في هذا المستوى) $v_2 = FA_i$ $v_3 = FC_i$ $v_4 = FB_i$ $v_5 = h_i$ $v_6 = TOL_i$ $v_7 = S_i$ $v_8 = L_i$

4	ضع $i = i - 1$ (احذف المستوى.)
5	إذا كان $\vert S1 + S2 - v_7\vert < v_6$ فضع $APP = APP + (S1 + S2)$ وغير ذلك، إذا كان $(v_8 \geq N)$ فإن المخرجات ('LEVEL EXCEEDED') (العملية فشلت). توقف. غير ذلك (أضف مستوى واحدا). ضع $i = i + 1$ (البيانات لنصف الفترة اليمنى) $a_i = v_1 + v_5$ $FA_i = v_3$ $FC_i = FE$ $FB_i = v_4$ $h_i = v_5/2$ $TOL_i = v_6/2$ $S_i = S2$ $L_i = v_8 + 1$ ضع $i = i + 1$ (البيانات لنصف الفترة اليسرى) $a_i = v_1$ $FA_i = v_2$ $FC_i = FD$ $FB_i = v_3$ $h_i = h_{i-1}$ $TOL_i = TOL_{i-1}$ $S_i = S1$ $L_i = L_{i-1}$
6	المخرجات (APP) (APP تقرب I بحدود TOL). توقف.

■

مثال 2

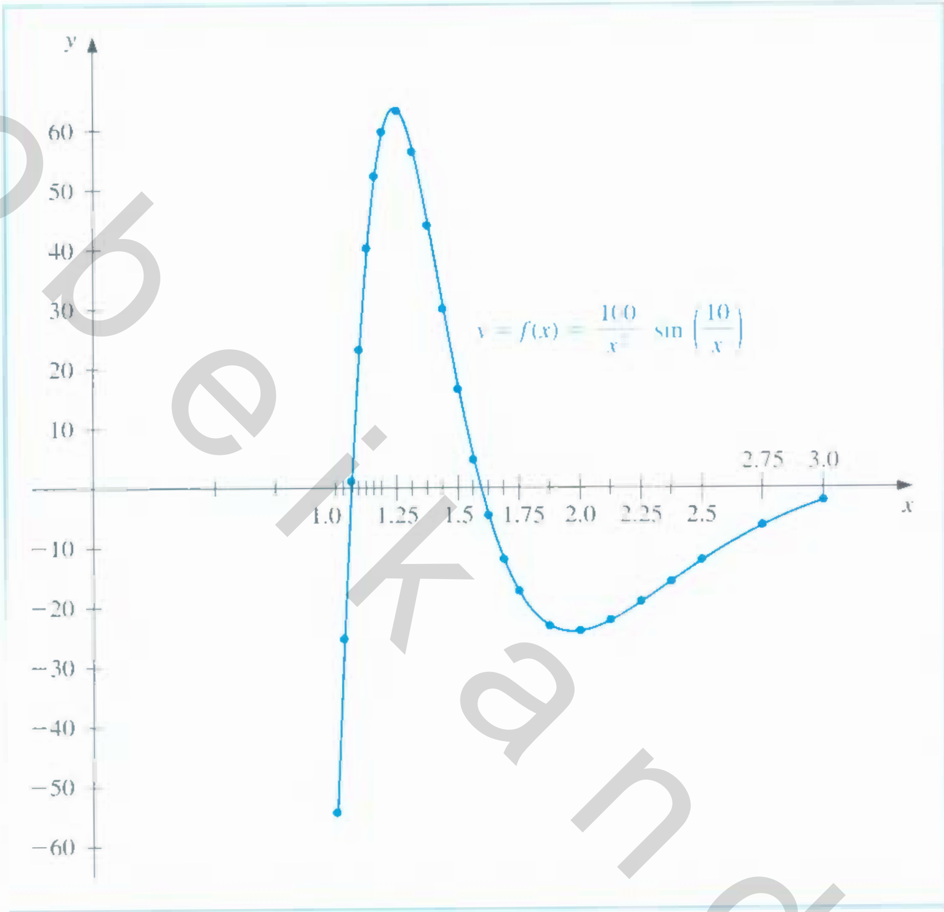
شكل (13.4) يعرض رسم منحنى الدّالة $f(x) = (100/x^2)\sin(10/x)$ لقيم x في الفترة $[1, 3]$. باستخدام خوارزمية التكامل التكيفية (3.4) ضمن حد الخطأ المسموح 10^{-4} لإيجاد تقريب للتكامل $\int_1^3 f(x)\,dx$ تعطي -1.426014 ، وهي نتيجة دقيقة بحد 1.1×10^{-5}.

لقد تطلب التقريب استخدام قاعدة سمبسون بأخذ $n = 4$ على 23 فترة جزئية عرضت نقاط النهاية لها على المحور الأفقي في شكل (13.4). إن عدد التقييمات الدالّية المطلوبة لهذا التقريب يساوي 93.

إن أكبر قيمة للعدد h المطلوبة لكي تنتج قاعدة سمبسون المركبة إجابة ضمن دقة 10^{-4} هي $h = \frac{1}{88}$. إن هذا التطبيق يتطلب 177 تقييمًا داليًا، أي ما يعادل ضعف العدد المطلوب تقريبًا في عملية التكامل التكيفية.

■

شكل 13.4



EXERCISE SET

مجموعة التمارين 6.4

1. احسب تقريبات قاعدة سمبسون $S(a,b)$، $S(a,(a+b)/2)$ و $S((a+b)/2,b)$ للتكاملات الآتية، وتحقق من التقدير المعطى في صيغة التقريب:

أ. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$ ب. $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$ جـ. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4} \, dx$ د. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x \, dx$

هـ. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$ و. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2-4} \, dx$ ز. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \, dx$ حـ. $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2 \, dx$

2. استخدم طريقة التكامل التكيفية لإيجاد تقريبات ضمن 10^{-3} للتكاملات في تمرين (1). لا تستخدم برنامجًا حاسوبيًا لتوليد هذه النتائج.

3. استخدم طريقة التكامل التكيفية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $\int_1^3 e^{2x} \sin 3x \, dx$ ب. $\int_1^3 e^{3x} \sin 2x \, dx$

ج. $\int_0^5 (2x\cos(2x) - (x-2)^2) \, dx$ د. $\int_0^5 (4x\cos(2x) - (x-2)^2) \, dx$

4. استخدم طريقة التكامل التكيفية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)\, dx$ ب. $\int_1^2 (x + \sin 4x)\, dx$

جـ. $\int_{-1}^{1} x \sin 4x\, dx$ د. $\int_0^{\pi/2} (6\cos 4x + 4\sin 6x) e^x\, dx$

5. استخدم سمبسون المركبة باستخدام $n = 4, 6, 8, \ldots$ إلى أن تتفق التقريبات المتتالية للتكاملات الآتية ضمن 10^{-6}. حدّد عدد الرؤوس (نقاط التقسيم) المطلوبة.
استخدم خوارزمية التكامل التكيفية لتقريب التكامل 10^{-6}. واحسب عدد الرؤوس. هل أدت عملية التكامل التكيفية إلى أي تحسين؟

أ. $\int_0^{\pi} x \cos x^2\, dx$ ب. $\int_0^{\pi} x \sin x^2\, dx$

جـ. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$ د. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$

6. ارسم منحنيات $\sin(1/x)$ و $\cos(1/x)$ على $[0.1, 2]$.
استخدم طريقة التكامل التكيفية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $\int_{0.1}^{2} \cos \frac{1}{x}\, dx$ ب. $\int_{0.1}^{2} \sin \frac{1}{x}\, dx$

7. تصف الصيغة التفاضلية $mu''(t) + ku(t) = F_0 \cos \omega t$ نظام الزنبرك والكتلة. حيث m الكتلة k ثابت الزنبرك دون تخميد (damping). ويصف الحد $F_0 \cos \omega t$ قوة خارجية دورية تطبق على النظام.
إن حل هذه الصيغة عندما يبدأ النظام في حالة سكون $(u'(0) = u(0) = 0)$ هو

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad \text{حيث} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \neq \omega$$

ارسم منحنى u عندما $m = 1, k = 9, F_0 = 1, \omega = 2$ و $t \in [0, 2\pi]$.
أوجد التقريب للتكامل $\int_0^{2\pi} u(t)\, dt$ ضمن 10^{-4}.

8. إذا أضيف الحد $cu'(t)$ إلى الطرف الأيسر من صيغة الحركة في التمرين (7)، فإن الصيغة التفاضلية الناتجة تصف نظام الزنبرك والكتلة الذي خضع لتخميد بثابت تخميد $c \neq 0$.
إن حل هذه الصيغة عندما يبدأ النظام في حالة سكون هو

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0}{c^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} (c\omega \sin \omega t + m(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t)$$

حيث

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m} \quad \text{و} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m}$$

أ. ليكن $m = 1$، $k = 9$، $F_0 = 1$، $c = 10$ و $\omega = 2$ فأوجد c_1 و c_2 ليكون $u(0) = u'(0) = 0$.

ب. ارسم المنحنى $u(t)$ لكل $t \in [0, 2\pi]$ وقرّب $\int_0^{2\pi} u(t)\, dt$ ضمن 10^{-4}.

9. ليكن $T(a, b)$ و $T(a, (a + b/2)) + T((a + b/2), b)$ التطبيق المنفرد والتطبيق الثنائي لقاعدة شبه المنحرف للتكامل $\int_a^b f(x)\, dx$.

اشتق العلاقة بين

$$\left| T(a,b) - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|$$

و

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|$$

10. إن دراسة الحيود الضوئي على فتحة مستطيلة يحتوي على تكاملات فرنل (Fresnel integrals).

$$s(t) = \int_0^t \sin\frac{\pi}{2}w^2\,dw \quad \text{و} \quad c(t) = \int_0^t \cos\frac{\pi}{2}w^2\,dw$$

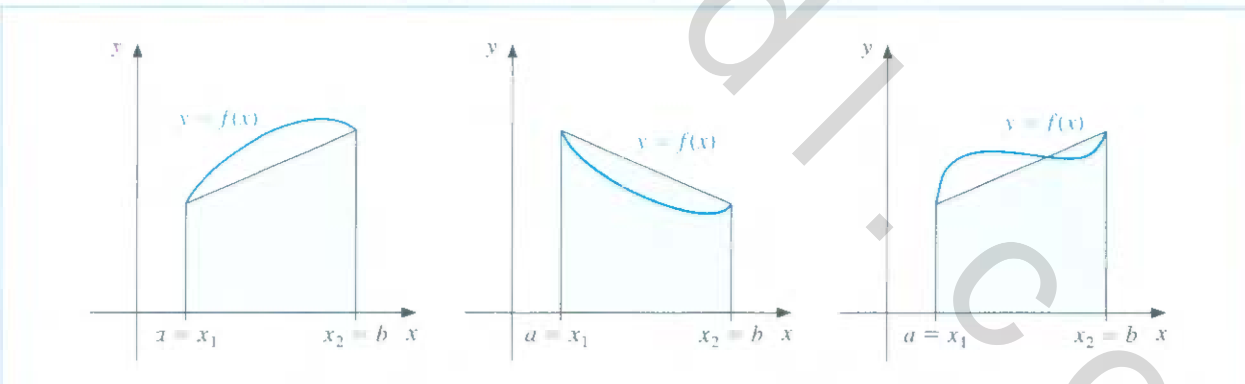
أنشئ جدولًا لقيم $c(t)$ و $s(t)$ التي تكون دقيقة ضمن 10^{-4} للقيم $t = 0.1, 0.2, \ldots, 1.0$.

7.4 طرائق جاوس للتكامل Gaussian Quadrature

لقد اشتُقّت صيغ نيوتن – كوتس في الفصل (3.4) عن طريق تكامل كثيرات حدود الاستكمال الداخلي. وبما أن حد الخطأ في كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي من الرتبة n يحتوي على المشتقة ذات العدد $(n+1)$ للدالّة الجاري تقريبها، فإن صيغة نيوتن – كوتس لتقريب تكامل أي كثيرة حدود ذات رتبة أقل من n أو تساويها صحيحة تمامًا.

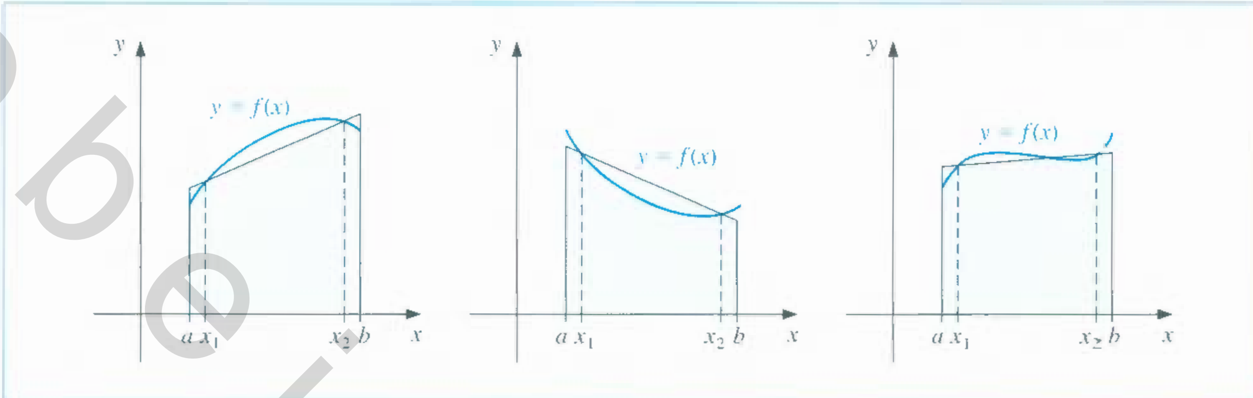
إن صيغ نيوتن – كوتس جميعها تستخدم قيمًا للدالّة على نقاط متساوية البعد. إن هذا التحديد ملائم عندما تُدمج هذه الصيغ لتكوين القواعد المركبة التي شرحت في الفصل (4.4) ولكن من الممكن أن تقلل من رتبة التقريب على نحو ملحوظ. فعلى سبيل المثال، لاحظ قاعدة شبه المنحرف عند تطبيقها لإيجاد تكاملات الدّوال الموضحة في شكل (14.4).

شكل 14.4



إن قاعدة شبه المنحرف تقرّب تكامل الدّالة عن طريق تكامل الدّالة الخطي الذي يصل نقطتي النهاية لمنحنى الدالّة. وليس بالضرورة أن يكون هذا أفضل خط لتقريب التكامل؛ إذ من المحتمل أن تعطي الخطوط الموضحة في شكل (15.4) تقريبات أفضل بكثير في معظم الأحيان.

شكل 15.4



شرح جاوس Gauss طريقته في التكامل العددي في بحث قدمه إلى جمعية غوتنغن في عام 1814 (Göttinge Society). لقد وضع الرؤوس ومعاملات التقييمات الذاتية بوصفها معلمات في معادلة الجمع، ووجد أفضل الأماكن لوضع الرؤوس. ولقد أعطى جولدستاين وصفًا ممتعًا لتطوير الطريقة Goldstine [Golds], pp. 224–232.

إن طريقة جاوس للتكامل تختار نقاط التقييم بطريقة تعظيمية بدلاً من طريقة تساوي الأبعاد. تُختار الرؤوس $x_1, x_2, \dots, x_n$ في الفترة $[a, b]$، والمعاملات $c_1, c_2, \dots, c_n$ بحيث تجعل الخطأ المتوقع في التقريب أصغر ما يمكن.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

ولقياس هذه الدقة، افترض أن أفضل اختيار لهذه القيم يعطي القيمة الصحيحة لأكبر مجموعة من كثيرات الحدود، أي أنه الاختيار الذي يعطي الرتبة الأعلى من الدقة.
إن المعاملات $c_1, c_2, \dots, c_n$ في صيغة التقريب حرّة (يمكن اختيارها كيفما اتفق)، والرؤوس $x_1, x_2, \dots, x_n$ عليها تحديد واحد ألا وهو وجوب وقوعها في الفترة $[a, b]$، وهي فترة التكامل.
إن هذا يعطينا $2n$ من المتغيرات التي يجب اختيارها.
إذا ما افترضت معاملات كثيرة الحدود على أنها معلمات، فإن مجموعة كثيرات الحدود التي أعلى قيمة لرتبتها $2n - 1$ تحتوي على $2n$ من الوسيطات.
إذن فمن المنطق أن تكون هذه أكبر مجموعة من كثيرات الحدود التي صيغتها صحيحة بالضبط. وباختيار القيم والثوابت اختيارًا مناسبًا فإن الضبط على هذه المجموعة يكون ممكنًا.
ولشرح طريقة اختيار المتغيرات المناسبة، سنوضح كيف نختار المعاملات والنقاط في حالة $n = 2$ وفترة التكامل $[-1, 1]$، ثم سنناقش الوضع العام لاختيار النقاط والمتغيرات كيفما اتفق، ونبرهن كيفية تطوير الطريقة عند التكامل على أي فترة.
افترض أننا نرغب في تحديد x_1، x_2 و c_1، c_2 بحيث تعطي صيغة التكامل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

القيمة الصحيحة، حيث $f(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $2(2) - 1 = 3$ أو أقل من 3، أي عندما $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ لمجموعة من الثوابت a_0، a_1، a_2 و a_3.

بما أن

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2x^2 + a_3x^3)\,dx = a_0\int 1\,dx + a_1\int x\,dx + a_2\int x^2\,dx + a_3\int x^3\,dx$$

فإن هذا يكافئ برهنة أن الصيغة تعطي نتائج صحيحة عندما $f(x)$ يكون $1, x, x^2, x^3$ بحيث

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \quad ، \quad c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$$

$$c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3 = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \quad و \quad c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

باستخدام بعض العمليات الجبرية فإن لنظام الصيغ هذا الحل الوحيد

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad و \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ، \quad c_2 = 1 \quad ، \quad c_1 = 1$$

الذي يعطي صيغة التقريب

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad (41.4)$$

كثيرات الحدود الوحودية monic يكون فيها المعامل الأول 1

إن رتبة دقة هذه الصيغة هي 3، أي أنها تعطي النتيجة الصحيحة لكل كثيرة حدود من الرتبة 3 أو أقل.

ويمكن استخدام هذه الطريقة لتحديد النقاط والمعاملات لصيغ تعطي نتائج صحيحة لكثيرات حدود من رتبة أعلى. ولكن هناك طريقة بديلة تحصل عليها بسهولة أكثر.

سندرس في الفصل (2.8) والفصل (3.8) تجمعات متعددة من كثيرات الحدود المتعمدة. وهي دوال لها الخاصية: أي تكامل محدود لحاصل ضرب أي اثنين منها يساوي 0. إن المجموعة ذات العلاقة بمسألتنا هي مجموعة كثيرات حدود ليجندر Legender Polynomials. وهي المجموعة $\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots\}$ التي تحقق الخواص الآتية:

1. لكل n تكون $P_n(x)$ كثيرة حدود وحدانية ذات رتبة n.
2. $\int_{-1}^{1} P(x)P_n(x)\,dx = 0$ لأي كثيرة حدود $P(x)$ ذات رتبة أقل من n.

أدريان - ماري ليجندر (1752-1833) عـرّف هـذه المجموعة مـن كثيرات الحدود عام 1785 وكان له منازعـات مع جاوس خصوصا أن جاوس في بداية اكتشـافه قد فشل في نشر الكثير من نتائجه الأصلية

لديك قليل من كثيرات حدود ليجندر وهي:

$$P_2(x) = x^2 - \tfrac{1}{3} \quad ، \quad P_1(x) = x \quad ، \quad P_0(x) = 1$$

$$P_4(x) = x^4 - \tfrac{6}{7}x^2 + \tfrac{3}{35} \quad و \quad P_3(x) = x^3 - \tfrac{3}{5}x$$

إن جذور كثيرات الحدود هذه متميّزة بعضها من بعض. وتقع في الفترة $(-1, 1)$ ومتماثلة بالنسبة إلى المركز. والأهم من ذلك كله هو الاختيار الصحيح لتحديد المتغيرات التي تحل مسألتنا.

النقاط $x_1, x_2, \ldots, x_n$ المطلوبة لإنتاج صيغة تقريب تكامل. التي تعطي نتائج صحيحة لأي كثيرة حدود ذات رتبة أقل من $2n$ هي جذور كثيرة حدود ليجندر من الرتبة n

يُبرهَن ذلك من خلال النتيجة الآتية

مبرهنة 7.4

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ جذور كثيرة حدود ليجندر $P_n(x)$ من الرتبة n. وأنه لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ نعرّف c_i بالصيغة

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx$$

إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود ذات درجة أصغر من $2n$ فإن

$$\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$$

■

البرهان لنأخذ أولاً الحالة التي فيها $P(x)$ كثيرة حدود ذات رتبة أقل من n. أعد كتابة $P(x)$ على صيغة كثيرة حدود ليجندر من الرتبة $(n-1)$ بِرؤوس على جذور كثيرة حدود ليجندر $P_n(x)$ من الرتبة n. إن هذا التمثيل لكثيرة حدود $P(x)$ صحيح بالضبط. لأن حد الخطأ يحتوي على مشتقة P من الرتبة n، وأن مشتقة P من الرتبة n تساوي صفرًا. إذن

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} P(x_i)$$

و

$$\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} P(x_i) \right] dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx \right] P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$$

تحقق النتيجة لكثيرات الحدود ذات الرتبة الأقل من n.

إذا قسمنا كثيرة الحدود $P(x)$ من الرتبة n على الأقل ولكن أقل من $2n$ على كثيرة حدود ليجندر $P_n(x)$، نحصل على كثيرات حدود ذات رتبة أقل من n.

$$P(x) = Q(x)\, P_n(x) + R(x)$$

لاحظ أنه بما أن x_i جذر لـ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإننا نحصل على

$$P(x_i) = Q(x_i)\, P_n(x_i) + R(x_i) = Q(x_i) \cdot 0 + R(x_i) = R(x_i)$$

والآن ندخل القوة الوحيدة لكثيرات حدود ليجندر.

أولاً: رتبة كثيرة الحدود $Q(x)$ أقل من n، ولذلك تكون (خاصية ليجندر الثانية)

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\, P_n(x)\, dx = 0$$

وبما أن $R(x)$ كثيرة حدود ذات رتبة أقل من n، فإن المناقشة الأولى تعطي

$$\int_{-1}^{1} R(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i R(x_i)$$

بوضع هذه الحقائق معًا يتحقق أن الصيغة صحيحة تمامًا لكثيرة الحدود $P(x)$

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{1}[Q(x)P_n(x)+R(x)]\,dx = \int_{-1}^{1} R(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i R(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$$

■ ■ ■

يمكن توليد الثوابت c_i التي نحتاج إليها لقاعدة التكامل من الصيغة في المبرهنة (7.4)، ولكن كلا من هذه الثوابت وجذور كثيرات حدود ليجندر قد تم جدولتها على نحو واسع.

يعرض جدول (11.4) هذه القيم لكل من $n = 2, 3, 4, 5$.

القيم الأخرى موجودة في [StS].

جدول 11.4

n	الجذور $r_{n,i}$	المعاملات $c_{n,i}$
2	0.5773502692	1.0000000000
	−0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	−0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	−0.3399810436	0.6521451549
	−0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888889
	−0.5384693101	0.4786286705
	−0.9061798459	0.2369268850

مثال 1

قرّب $\int_{-1}^{1} e^x \cos x\,dx$ باستخدام صيغة تكامل جاوس بأخذ $n = 3$.

من جدول (11.4) نحصل على

$$\int_{-1}^{1} e^x \cos x\,dx \approx 0.\bar{5}e^{0.774596692}\cos 0.774596692$$

$$+\,0.\bar{8}\cos 0 + 0.\bar{5}e^{-0.774596692}\cos(-0.774596692)$$

$$= 1.9333904$$

يمكن إيجاد القيمة الحقيقية باستخدام التكامل بالأجزاء لتكون 1.9334214، وبذلك يكون الخطأ المطلق أقل من 3.2×10^{-5}.

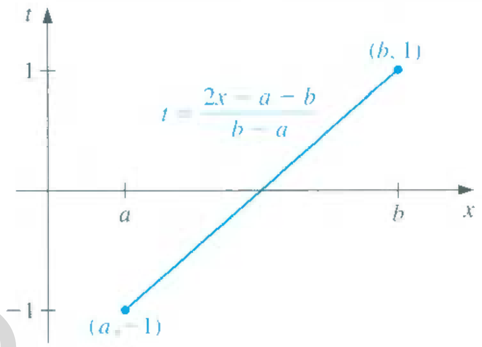
إن التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ على أي فترة $[a, b]$ يمكن تحويله إلى تكامل على الفترة $[-1, 1]$ باستخدام تحويل المتغيرات. (انظر شكل 16.4)

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}[(b-a)t + a + b]$$

يسمح هذا بتطبيق صيغة تكامل جاوس على أي فترة $[a, b]$؛ لأن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t + (b+a)}{2}\right)\frac{(b-a)}{2}\,dt \qquad (42.4)$$

شكل 16.4



مثال 2

لديك مسألة لإيجاد تقريبات للتكامل $\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx$.

يعطي جدول (12.4) القيم لصيغ نيوتن – كوتس المعطاة في الفصل (3.4). إن القيمة الصحيحة للتكامل إلى أقرب سبع خانات عشرية هي 0.1093643.

جدول 12.4

n	0	1	2	3	4
المعادلات المغلقة		0.1183197	0.1093104	0.1093404	0.1093643
المعادلات المفتوحة	0.1048057	0.1063473	0.1094116	0.1093971	

إن تطبيق عملية جاوس على هذه المسألة يتطلب أولاً تحويل التكامل إلى مسألة فيها فترة التكامل $[-1, 1]$.

باستخدام الصيغة (42.4) نجد أن

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{(-(t+5)^2/16)}\,dt$$

إن القيم في جدول (11.4) تعطي تقريبات تكامل جاوس لهذه المسألة

$n = 2$:

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{4}[e^{-(5+0.5773502692)^2/16} + e^{-(5-0.5773502692)^2/16}] = 0.1094003$$

$n = 3$:

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{4}[(0.5555555556)e^{-(5+0.7745966692)^2/16} + (0.8888888889)e^{-(5)^2/16}$$
$$+ (0.5555555556)e^{-(5-0.7745966692)^2/16}]$$
$$= 0.1093642$$

وللمقارنة الإضافية، نعرض القيم التي حصلنا عليها باستخدام عملية رومبرج بأخذ $n = 4$ في جدول (13.4). ■

جدول 13.4

			0.1183197
		0.1093104	0.1115627
	0.1093643	0.1093610	0.1099114
0.1093643	0.1093643	0.1093641	0.1095009

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 7.4

1. أوجد تقريب التكاملات الآتية باستخدام طريقة جاوس و $n = 2$، ثم قارن نتائجك بالقيم الصحيحة للتكاملات:

أ. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$ ب. $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$ جـ. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4} \, dx$ د. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x \, dx$

هـ. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$ و. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2 - 4} \, dx$ ز. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$ حـ. $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2 \, dx$

2. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 3$.
3. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 4$.
4. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 5$.
5. حدِّد الثوابت a ، b ، c و d التي تعطي صيغة التكامل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$

التي رتبة الدقة فيها 3.

6. حدِّد الثوابت a ، b ، c و d التي تعطي صيغة التكامل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = af(-1) + bf(0) + cf(1) + df'(-1) + ef'(1)$$

التي رتبة الدقة فيها 4.

7. تحقق من القيم في جدول (11.4) المقابلة للقيم $n = 2, 3$، بإيجاد الجذور لكثيرات حدود ليجندر المناسبة. استخدم الصيغ المذكورة قبل هذا جدول لإيجاد المعاملات المرتبطة بهذه القيم.
8. برهن أنه لا يمكن في الصيغة $Q(P) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ أن تكون رتبة دقتها أكثر من $2n - 1$ مهما كان اختيار $c_1, \ldots, c_n$ و $x_1, \ldots, x_n$.

[إضاءة: أنشئ كثيرة حدود ذات جذر مضاعف على كل x_i].

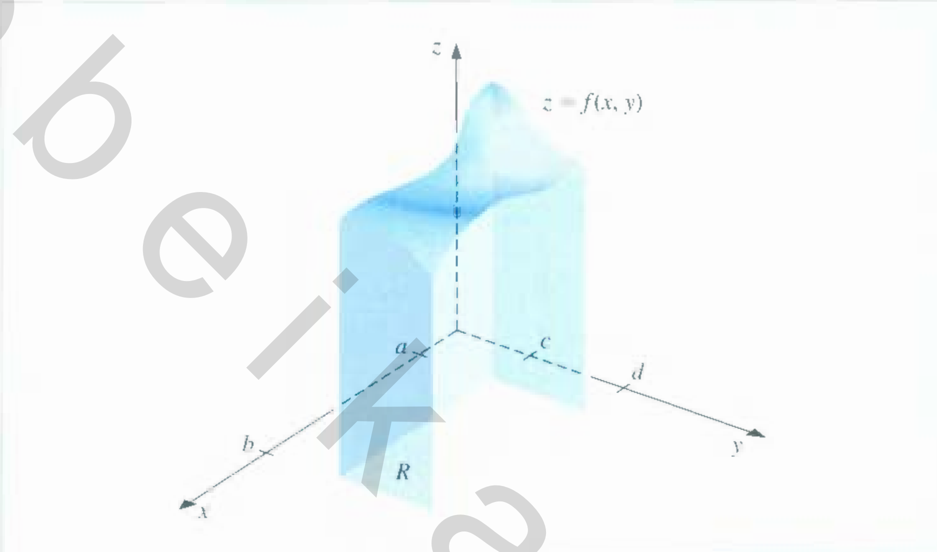
8.4 التكاملات المتعددة — Multiple Integrals

يمكن تطوير الطرائق التي قدمت في البنود السابقة مباشرة لاستخدامها في إيجاد تقريب للتكاملات المتعددة. خذ التكامل الثنائي

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

حيث $R = \{(x, y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$، منطقة مستطيلة في المستوى، وحيث a، b، c و d ثوابت. (انظر شكل 17.4)

شكل 17.4



سنستخدم قاعدة سمبسون المركبة لشرح طريقة التقريب على الرغم من أنه يمكن استخدام أي صيغة مركبة بدلًا منها.

لتطبيق قاعدة سمبسون المركبة، نقسم المنطقة R عن طريق تجزئة $[a, b]$ و $[c, d]$ إلى عدد زوجي من الفترات الجزئية. ولتبسيط الرموز، نختار أعدادًا صحيحة زوجية m و n ونجزئ $[a, b]$ و $[c, d]$ باستخدام نقاط الشبكة المتساوية الأبعاد فيما بينها وهي $x_0, x_1, \ldots, x_n$ و $y_0, y_1, \ldots, y_m$ على التوالي. تحدد هذه التقسيمات الجزئية حجمي الخطوتين $k = (d - c)/m$ و $h = (b - a)/n$.

وبكتابة التكامل الثنائي على شكل تكامل متتالٍ

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

نستخدم أولًا قاعدة سمبسون المركبة لتقريب

$$\int_c^d f(x, y)\, dy$$

مفترضين أن x عدد ثابت.

ضع $y_j = c + jk$ لكل $j = 0, 1, \ldots, m$. إذن

$$\int_c^d f(x, y)\, dy = \frac{k}{3}\left[f(x, y_0) + 2\sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x, y_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m/2} f(x, y_{2j-1}) + f(x, y_m) \right]$$
$$- \frac{(d - c)k^4}{180} \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}$$

لعدد ما μ في (c, d). وبذلك

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \frac{k}{3}\left[\int_a^b f(x, y_0)\,dx + 2\sum_{j=1}^{(m/2)-1} \int_a^b f(x, y_{2j})\,dx + 4\sum_{j=1}^{m/2} \int_a^b f(x, y_{2j-1})\,dx + \int_a^b f(x, y_m)\,dx\right] - \frac{(d-c)k^4}{180}\int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}\,dx.$$

والآن تطبق قاعدة سمبسون المركبة على التكاملات في هذه الصيغة. افترض $x_i = a + ih$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$.

عندئذ لكل $j = 0, 1, \ldots, m$ نحصل على

$$\int_a^b f(x, y_j)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0, y_j) + 2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_j) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_j) + f(x_n, y_j)\right] - \frac{(b-a)h^4}{180}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_j, y_j),$$

لعدد ما ξ_j في (a, b) التقريب الناتج له الصيغة

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx \approx \frac{hk}{9}\Bigg\{&\left[f(x_0, y_0) + 2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_0) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_0) + f(x_n, y_0)\right]\\
&+ 2\left[\sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x_0, y_{2j}) + 2\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_{2j}) + \sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x_n, y_{2j})\right]\\
&+ 4\left[\sum_{j=1}^{m/2} f(x_0, y_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{m/2}\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_{2j-1}) + 4\sum_{j=1}^{m/2}\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{m/2} f(x_n, y_{2j-1})\right]\\
&+ \left[f(x_0, y_m) + 2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_m) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_m) + f(x_n, y_m)\right]\Bigg\}
\end{aligned}$$

ويعطي حد الخطأ E على الصيغة

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540}\left[\frac{\partial^4 f(\xi_0, y_0)}{\partial x^4} + 2\sum_{j=1}^{(m/2)-1}\frac{\partial^4 f(\xi_{2j}, y_{2j})}{\partial x^4} + 4\sum_{j=1}^{m/2}\frac{\partial^4 f(\xi_{2j-1}, y_{2j-1})}{\partial x^4}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^4 f(\xi_m, y_m)}{\partial x^4}\right] - \frac{(d-c)k^4}{180}\int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}\,dx$$

إذا كان $\partial^4 f/\partial x^4$ متصلاً، يمكن تطبيق مبرهنة القيمة الوسطية على نحو متكرر لبرهنة أنه يمكن الاستعاضة عن تقييم المشتقات الجزئية بالنسبة إلى x بقيمة مشتركة. وأن

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540}\left[3m\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu})\right] - \frac{(d-c)k^4}{180}\int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}\,dx$$

لنقطة ما $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ في R.

وأيضًا إذا كان $\partial^4 f/\partial y^4$ متصلًا فإن مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة للتكاملات تعطي

$$\int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}\,dx = (b-a)\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu})$$

لنقطة ما $(\hat{\eta}, \hat{\mu})$ في R.

بما أن $m = (d-c)/k$ فإن حد الخطأ له الصيغة

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540}\left[3m\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu})\right] - \frac{(d-c)(b-a)}{180}k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu})$$

أو

$$E = -\frac{(d-c)(b-a)}{180}\left[h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu}) + k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu})\right]$$

للنقطتين $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ و $(\hat{\eta}, \hat{\mu})$ في R.

مثال 1 إن تطبيق قاعدة سمبسون المركبة لتقريب التكامل

$$\int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5} \ln(x + 2y)\,dy\,dx$$

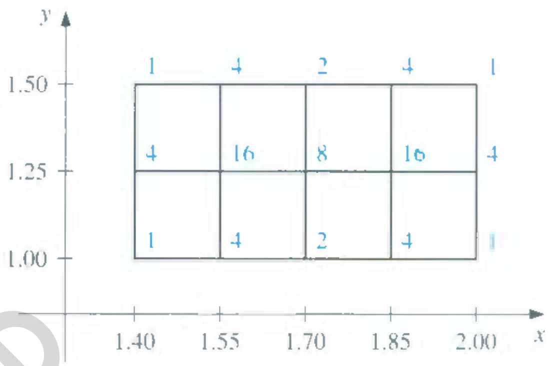
بأخذ $n = 4$ و $m = 2$ يستخدم حجوم الخطوة $k = 0.25$ و $h = 0.15$. في شكل (18.4) تظهر منطقة التكامل R مع نقاط النقاط (x_i, y_j). حيث $i = 0, 1, 2, 3, 4$ و $j = 0, 1, 2$. وتظهر أيضا المعاملات $w_{i,j}$ للدالة $f(x_i, y_i) = \ln(x_i + 2y_i)$ في حاصل الجمع الذي يعطي تقريب قاعدة سمبسون المركبة للتكامل.

التقريب هو

$$\int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5} \ln(x + 2y)\,dy\,dx \approx \frac{(0.15)(0.25)}{9}\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{2} w_{i,j}\ln(x_i + 2y_j)$$

$$= 0.4295524387$$

شكل 18.4



بما أن

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y) = \frac{-6}{(x+2y)^4} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x, y) = \frac{-96}{(x+2y)^4}$$

والقيم العظمى للقيم المطلقة لهذه المشتقات الجزئية تتحقق على R عندما $x = 1.4$ و $y = 1.0$ فإن الخطأ يكون محدودا بـ

$$|E| \leq \frac{(0.5)(0.6)}{180}\left[(0.15)^4 \max_{(x,y) \text{ in } R} \frac{6}{(x+2y)^4} + (0.25)^4 \max_{(x,y) \text{ in } R} \frac{96}{(x+2y)^4}\right]$$
$$\leq 4.72 \times 10^{-6}$$

إن القيمة الفعلية للتكامل إلى أقرب عشر خانات عشرية هي

$$\int_{1.4}^{2.0}\int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y)\,dy\,dx = 0.4295545265$$

ولذلك فإن التقريب دقيق ضمن 2.1×10^{-6}. ■

يمكن استخدام الطرائق نفسها لتقريب التكامل الثلاثي والتكاملات الأعلى للدوال في أكثر من ثلاثة متغيرات. وإن العدد التام للتقييمات الدالّية المطلوبة للتقريب هو حاصل ضرب أعداد التقييمات الدالّية المطلوبة عندما تطبّق الطريقة على كل متغير.

ولتخفيض عدد التقييمات الدالّية، يمكن استخدام طرائق أكثر فاعلية من صيغ نيوتن – كوتس. ومن هذه الطرائق: صيغة جاوس للتكامل، تكامل رومبرج، أو صيغ التكامل التكيفية. يبين المثال الآتي استخدام طريقة جاوس للتكامل الذي عايناه في المثال (1).

مثال 2 لديك التكامل الثنائي الذي ذكر في المثال (1).

قبل استخدام طريقة جاوس للتكامل لإيجاد تقريب لهذا التكامل نجري تحويلا لمنطقة التكامل

$$R = \{(x, y) \mid 1.4 \leq x \leq 2.0,\ 1.0 \leq y \leq 1.5\}$$

إلى

$$\hat{R} = \{ (u, v) \mid -1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1 \}$$

والتحويلات الخطية التي تنجز هذا التحويل هي

$$u = \frac{1}{2.0 - 1.4}(2x - 1.4 - 2.0) \quad \text{و} \quad v = \frac{1}{1.5 - 1.0}(2y - 1.0 - 1.5),$$

أو على نحو مكافئ $x = 0.3u + 1.7$ و $y = 0.25v + 1.25$.

يمكن باستخدام هذا التحويل للمتغيرات الذي يعطي تكاملاً أن نطبق عليه قاعدة جاوس

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x + 2y)\, dy\, dx = 0.075 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \ln(0.3u + 0.5v + 4.2)\, dv\, du$$

إن صيغة جاوس للتكامل باستخدام $n = 3$ في كلٍّ من u و v تتطلب منا استخدام النقاط $u_0 = v_0 = r_{3,1} = -0.7745966692$ و $u_1 = v_1 = r_{3,2} = 0$ و $u_2 = v_2 = r_{3,3} = 0.7745966692$ والأوزان المرتبطة بهذا هي $c_{3,2} = 0.\overline{8}$ و $c_{3,1} = c_{3,3} = 0.\overline{5}$ (هذه القيم موجودة في جدول 11.4) وبذلك

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x + 2y)\, dy\, dx \approx 0.075 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{3,i} c_{3,j} \ln(0.3r_{3,i} + 0.5r_{3,j} + 4.2)$$
$$= 0.4295545313$$

على الرغم من أن هذه النتيجة تتطلب (9) تقييمات دالية فقط مقارنة بـ 15 في قاعدة سمبسون المركبة المستخدمة في المثال (1)، إلا أن النتيجة دقيقة ضمن 4.8×10^{-9} مقارنة بالدقة 2.1×10^{-6} في المثال (1). ■

إن طرائق التقريبات للتكاملات الثنائية ليست مقصورة على التكاملات ذات مناطق التكامل المستطيلة. يمكن تطوير الطرائق التي شرحت سابقاً لتستخدم في تقريب التكاملات الثنائية على الصيغ

$$\int_{a}^{b} \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{43.4}$$

أو

$$\int_{c}^{d} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{44.4}$$

في الحقيقة، يمكننا أيضًا تقريب التكاملات على المناطق من غير هذا النوع عن طريق تجزئات مناسبة للمنطقة. (انظر تمرين 10)

لوصف الطريقة المستخدمة في تقريب التكامل من النوع

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

سنستخدم قاعدة سمبسون الرئيسة للتكامل بالنسبة إلى كلا المتغيرين.

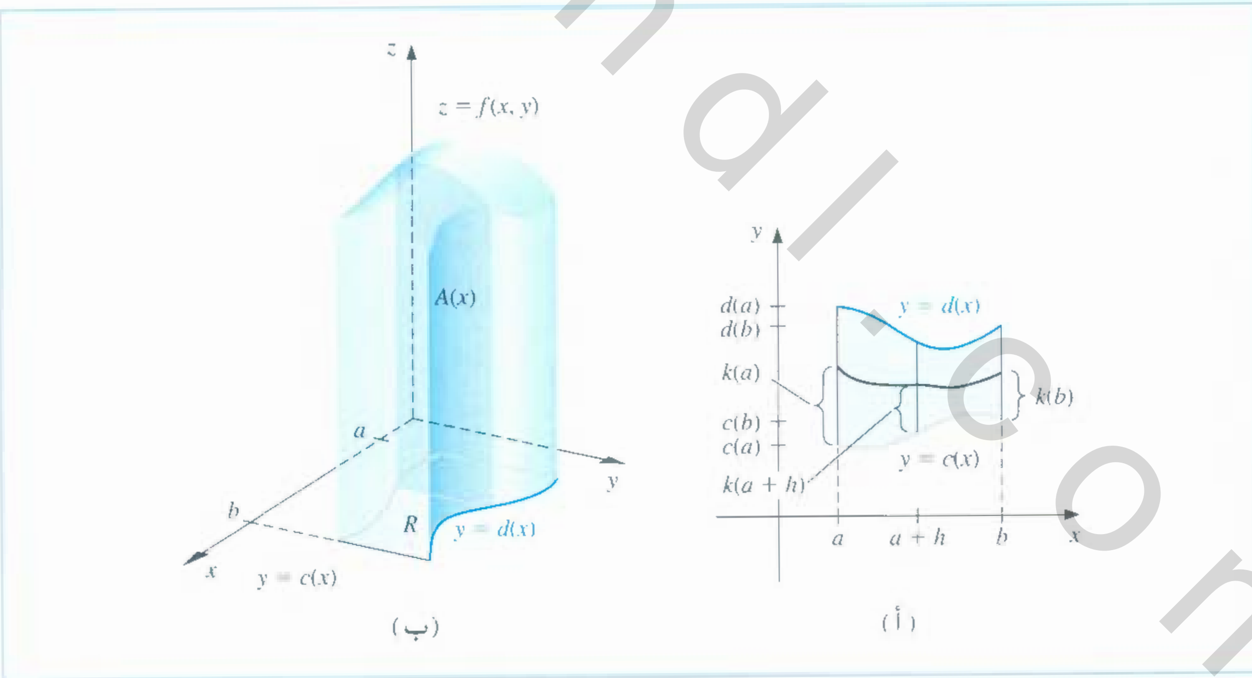
حجم الخطوة للمتغير x هو $h = (b - a)/2$، ولكن حجم الخطوة بالنسبة إلى المتغير y يتغير مع تغير x، (انظر شكل 19.4) ويكتب على الصيغة

$$k(x) = \frac{d(x) - c(x)}{2}$$

ومن ثم

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx &\approx \int_a^b \frac{k(x)}{3}[f(x, c(x)) + 4f(x, c(x) + k(x)) + f(x, d(x))]\, dx \\
&\approx \frac{h}{3}\left\{\frac{k(a)}{3}[f(a, c(a)) + 4f(a, c(a) + k(a)) + f(a, d(a))]\right. \\
&\quad + \frac{4k(a + h)}{3}[f(a + h, c(a + h)) + 4f(a + h, c(a + h) \\
&\quad + k(a + h)) + f(a + h, d(a + h))] \\
&\quad \left. + \frac{k(b)}{3}[f(b, c(b)) + 4f(b, c(b) + k(b)) + f(b, d(b))]\right\}
\end{aligned}$$

شكل 19.4



تطبق الخوارزمية (4.4) قاعدة سمبسون المركبة على تكامل على صيغة الصيغة (43.4). وبالطبع يمكن معالجة التكاملات على صيغة الصيغة (44.4) بطريقة مماثلة.

ALGORITHM
الخوارزمية
4.4

تكامل سمبسون الثنائي Simpson's Double Integral

لكي نقرّب التكامل
$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

المدخلات: نقطتا النهاية a و b: أعداد صحيحة موجبة زوجية m, n.

المخرجات: التقريب J للتكامل I.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b-a)/n$ $J_1 = 0$ (حدود النهاية) $J_2 = 0$ (الحدود الزوجية) $J_3 = 0$ (الحدود الفردية)
2	لكل $i = 0, 1, \ldots, n$، طبّق الخطوات 3 – 8.
3	ضع $x = a + ih$ (بطريقة سمبسون المركبة للمتغير x) $HX = (d(x) - c(x))/m$ $K_1 = f(x, c(x)) + f(x, d(x))$ (حدود النهاية). $K_2 = 0$ (الحدود الزوجية) $K_3 = 0$ (الحدود الفردية)
4	لكل $j = 1, 2, \ldots, m-1$، طبّق الخطوتين 5 و 6.
5	ضع $y = c(x) + jHX$ $Q = f(x, y)$
6	إذا كان j موجبًا فضع $K_2 = K_2 + Q$ وإلا فضع $K_3 = K_3 + Q$
7	ضع $L = (K_1 + 2K_2 + 4K_3)HX/3$ $\left(L \approx \int_{c(x_i)}^{d(x_i)} f(x_i, y)\, dy \right.$ بطريقة سمبسون المركبة $\left.\right)$
8	إذا كان $i = 0$ أو $i = n$ فضع $J_1 = J_1 + L$ غير ذلك إذا كان i زوجيًا ضع $J_2 = J_2 + L$ غير ذلك ضع $J_3 = J_3 + L$
9	ضع $J = h(J_1 + 2J_2 + 4J_3)/3$
10	المخرجات (J) توقف.

إن تطبيق صيغة تكامل جاوس للتكامل الثنائي
$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

ملحوظة: إن تخفيض عدد عمليات الحساب يجعل تطبيق عملية تكامل جاوس ذا جدوى على نحو عام بدلا مـن تطبيق إحدى طرائق سمبسـون عند تقريب التكاملات الثنائية.

يتطلب أولاً . لكل x في الفترة $[a, b]$. تحويل المتغير y في الفترة $[c(x), d(x)]$ إلى المتغير t في الفترة $[-1, 1]$. إن هذا التحويل الخطي يعطي

$$dy = \frac{d(x) - c(x)}{2}\, dt \quad و \quad f(x, y) = f\left(x, \frac{(d(x) - c(x))t + d(x) + c(x)}{2}\right)$$

بعدئذ لكل x في الفترة $[a, b]$، نطبق طريقة جاوس للتكامل على التكامل الناتج

$$\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy = \int_{-1}^{1} f\left(x, \frac{(d(x) - c(x))t + d(x) + c(x)}{2}\right) dt$$

لينتج

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx \approx \int_a^b \frac{d(x) - c(x)}{2} \sum_{j=1}^{n} c_{n,j} f\left(x, \frac{(d(x) - c(x))\, r_{n,j} + d(x) + c(x)}{2}\right) dx$$

حيث كما في السابق. تأتي الجذور $r_{n,j}$ والمعاملات $c_{n,j}$ من جدول (11.4).

والآن تحوّلت $[a, b]$ إلى $[-1, 1]$، ويمكن تطبيق طريقة جاوس للتكامل لإيجاد تقريب للتكامل على الجانب الأيمن في الصيغة.

تعطى التفاصيل في الخوارزمية (4.5).

ALGORITHM
الخوارزمية
5.4

تكامل جاوس الثنائي Gaussian Double Integral

لتقريب التكامل

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

المدخلات: نقطتا النهاية a, b؛ أعداد صحيحة موجبة m, n.

(الجذور $r_{i,j}$ والمعاملات $c_{i,j}$ بحاجة إلى تعيين للعدد $i = \max\{m, n\}$ ولـ $1 \le j \le i$ جميعًا)

المخرجات: التقريب J للتكامل I.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h_1 = (b - a)/2$ $h_2 = (b + a)/2$ $J = 0$
2	لكل $i = 1, 2, \ldots, m$، طبق الخطوات 3 – 5.
3	ضع $JX = 0$ $x = h_1 r_{m,i} + h_2$ $d_1 = d(x)$ $c_1 = c(x)$ $k_1 = (d_1 - c_1)/2$ $k_2 = (d_1 + c_1)/2$

4	لكل $j = 1, 2, \dots, n$ ضع $y = k_1 r_{n,j} + k_2$ $Q = f(x, y)$ $JX = JX + c_{n,j} Q$
5	ضع $J = J + c_{m,i} k_1 JX$.
6	ضع $J = h_1 J$.
7	المخرجات (J). توقف.

■

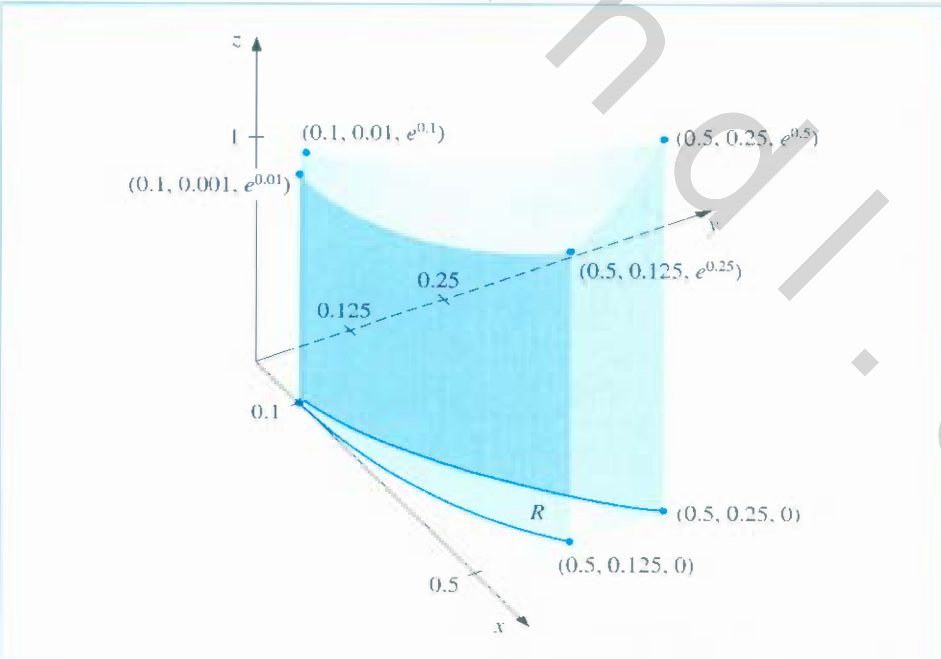
مثال 3

يقرّب حجم الجسم في شكل (20.4) باستخدام خوارزمية تكامل سمبسون الثنائي بأخذ $n = m = 10$ على التكامل

$$\int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} e^{y/x} \, dy \, dx$$

إن هذا يتطلب 121 تقييمًا للدالّة $f(x, y) = e^{y/x}$ وينتج 0.0333054 وهو ما يقرّب حجم المجسم في شكل (20.4) إلى 7 خانات عشرية تقريبًا. إن تطبيق خوارزمية جاوس للتكامل باستخدام $n = m = 5$ يتطلب 25 تقييمًا داليًّا فقط ويعطي التقريب 0.03330556611. وهو دقيق لإحدى عشرة منزلة عشرية. ■

شكل 20.4



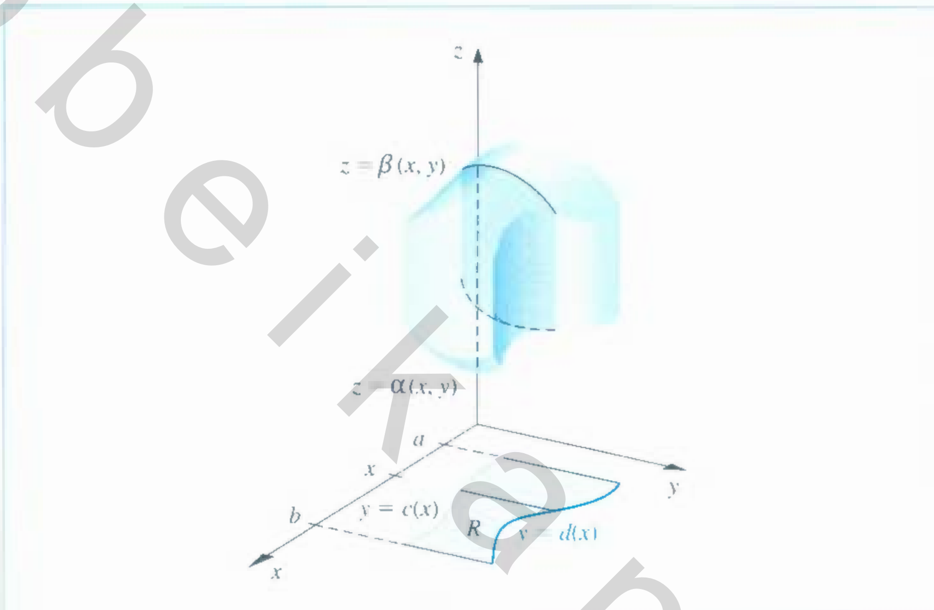
إن تخفيـض الحسـابات يجعـل تطبيق طريقة جاوس للتكامل عموما أفضل من استخدام طريقة سمبسون للتكامل عندما نود تقريب التكامل الثنائي.

يمكن تقريب التكاملات الثلاثية على الصيغة

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

بطريقة مماثلة. (انظر شكل 21.4).

شكل 21.4



وبسبب عدد الحسابات المطلوبة فإن الاختيار يقع على طريقة جاوس للتكامل. تنفذ الخوارزمية (6.4) هذه العملية.

ALGORITHM
الخوارزمية
6.4

تكامل جاوس الثلاثي Gausian Triple Integral

لإيجاد تقريب للتكامل

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

المدخلات: نقطتا النهاية a و b أعداد صحيحة موجبة m، n، و p.

(الجذور $r_{i,j}$ والمعاملات $c_{i,j}$ يجب أن تكون متاحة للعدد $i=\max\{n,m,p\}$ ولكل $1 \le j \le i$.

المخرجات: التقريب J للتكامل I.)

الخطوة	المضمون
1	ضع $h_1=(b-a)/2$ $h_2=(b+a)/2$ $J=0$

2	لكل $i = 1, 2, \ldots, m$، طبق الخطوات 3 - 8.
3	ضع $JX = 0$ $x = h_1 r_{m,i} + h_2$ $d_1 = d(x)$ $c_1 = c(x)$ $k_1 = (d_1 - c_1)/2$ $k_2 = (d_1 + c_1)/2$
4	لكل $j = 1, 2, \ldots, n$، طبق الخطوات 5 -7.
5	ضع $JY = 0$ $y = k_1 r_{n,j} + k_2$ $\beta_1 = \beta(x, y)$ $\alpha_1 = \alpha(x, y)$ $l_1 = (\beta_1 - \alpha_1)/2$ $l_2 = (\beta_1 + \alpha_1)/2$
6	لكل $k = 1, 2, \ldots, p$، ضع $z = l_1 r_{p,k} + l_2$ $Q = f(x, y, z)$ $JY = JY + c_{p,k} Q$
7	ضع $JX = JX + c_{n,j} l_1 JY$
8	ضع $J = J + c_{m,i} k_1 JX$
9	ضع $J = h_1 J$
10	المخرجات (J) توقف.

■

يتطلب المثال الآتي تقييم أربعة تكاملات ثلاثية.

مثال 4

يقع مركز كتلة المجسم D ذي دالة كثافة σ على النقطة

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right)$$

حيث

$$M_{yz} = \iiint_D x\sigma(x, y, z)\, dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y\sigma(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_D z\sigma(x, y, z)\, dV$$

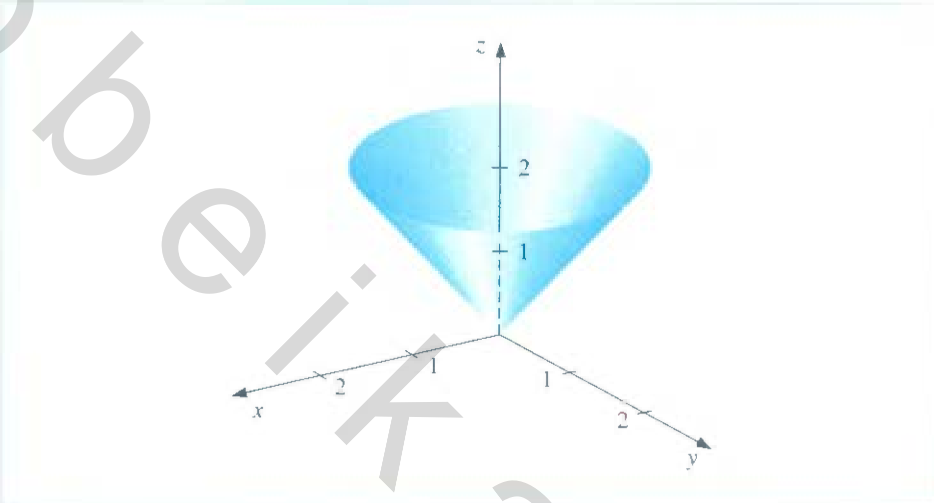
هي العزوم حول المستويات الإحداثية، والكتلة هي

$$M = \iiint_D \sigma(x, y, z)\, dV$$

في شكل (22.4) يظهر مجسم محدود بالسطح العلوي للمخروط $z^2 = x^2 + y^2$ والمستوى $z = 2$

افترض أن كثافة المجسم ممثَّلة بالدّالة $\sigma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

شكل 22.4



إن تطبيق خوارزمية تكامل جاوس الثلاثي (6.4) باستخدام $n = m = p = 5$ يتطلب 125 تقييمًا داليًا لكل تكامل ويعطي التقريبات الآتية

$$M = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$$

$$= 4 \int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx \approx 8.37504476$$

$$M_{yz} = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} x\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx \approx -5.55111512 \times 10^{-17}$$

$$M_{xz} = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} y\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx \approx -8.01513675 \times 10^{-17}$$

$$M_{xy} = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx \approx 13.40038156$$

إن هذا يعني أن الموقع التقريبي لموقع الكتلة هو

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1.60003701)$$

يمكن إيجاد قيم هذه التكاملات مباشرة وبسهولة. وإذا ما أجريت ذلك تجد أن مركز الكتلة يقع بالضبط على $(0, 0, 1.6)$. ■

مجموعة التمارين 8.4 EXERCISE SET

1. استخدم الخوارزمية (4.4) بأخذ $n = m = 4$ لتقريب التكاملات الثنائية الآتية، وقارن النتائج بالإجابات الصحيحة:

أ. $\int_{2.1}^{2.5}\int_{1.2}^{1.4} xy^2\,dy\,dx$ ب. $\int_{0}^{0.5}\int_{0}^{0.5} e^{y-x}\,dy\,dx$

جـ. $\int_{2}^{2.2}\int_{x}^{2x} (x^2+y^3)\,dy\,dx$ د. $\int_{1}^{1.5}\int_{0}^{x} (x^2+\sqrt{y})\,dy\,dx$

2. أوجد أصغر قيمة للأعداد $n = m$ بحيث يمكن استخدام الخوارزمية (4.4) لإيجاد تقريب للتكاملات في تمرين (1) ضمن 10^{-6} من القيمة الفعلية.

3. استخدم الخوارزمية (4.4) مستخدمًا $n = m = 6$ (iii) $n = 8, m = 4$, (ii) $n = 4, m = 8$, (i) لإيجاد تقريب للتكاملات الثنائية الآتية، وقارن الإجابات بالإجابات الصحيحة:

أ. $\int_{0}^{\pi/4}\int_{\sin x}^{\cos x} (2y\sin x+\cos^2 x)\,dy\,dx$ ب. $\int_{1}^{e}\int_{1}^{x} \ln xy\,dy\,dx$

جـ. $\int_{0}^{1}\int_{x}^{2x} (x^2+y^3)\,dy\,dx$ د. $\int_{0}^{1}\int_{x}^{2x} (y^2+x^3)\,dy\,dx$

هـ. $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{x} \cos x\,dy\,dx$ و. $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{x} \cos y\,dy\,dx$

ز. $\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\,dx$ ح. $\int_{-\pi}^{3\pi/2}\int_{0}^{2\pi} (y\sin x+x\cos y)\,dy\,dx$

4. أوجد أصغر قيمة للأعداد $n = m$ بحيث يمكن استخدام الخوارزمية (4.4) لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (3) ضمن 10^{-6} من القيمة الفعلية.

5. استخدم الخوارزمية (5.4) بأخذ $n = m = 2$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (1)، وقارن نتائجك بتلك التي حصلت عليها في التمرين (1).

6. أوجد أصغر قيمة للأعداد $n = m$ بحيث يمكن استخدام الخوارزمية (5.4) لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (1) ضمن 10^{-6}. لا تستمر في أكثر من $n = m = 5$. قارن عدد التقييمات الدالّية اللازمة بالعدد في التمرين (2).

7. استخدم الخوارزمية (5.4) مستخدمًا

$(i)\, n = m = 3,\ (ii)\, n = 3, m = 4,\ (iii)\, n = 4, m = 3,\ (iv)\ n = m = 4$

لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين 3.

8. استخدم الخوارزمية (5.4) بأخذ $n = m = 5$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (3). قارن عدد التقييمات الافتراضية اللازمة بالعدد اللازم في التمرين (4).

9. استخدم الخوارزمية (4.4) بأخذ $n = m = 14$ والخوارزمية (5.4) بأخذ $n = m = 4$ لتقريب التكامل

$$\iint_R e^{-(x+y)}\,dA$$

للمنطقة R في المستوى والمحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$.

10. استخدم الخوارزمية (4.4) لإيجاد تقريب للتكامل

$$\iint_R \sqrt{xy+y^2}\,dA$$

حيث R هي المنطقة في المستوى المحدد بالخطوط $3y - x = 2$، $x + y = 6$ و $3x - y = 2$.
أولاً، اقسم R إلى منطقتين R_1 و R_2 بحيث يمكن تطبيق الخوارزمية (4.4) على كل منهما.
استخدم $n = m = 6$ على كلتا المنطقتين R_1 و R_2.

11. lamina اللامنة المستوية هي صفيحة رقيقة كتلتها موزَّعة على نحو متصل. إذا كان σ الدالة التي تصف كثافة لامنة مع شكل منطقة R من المستوى xy، فإن مركز الكتلة تلك اللامنة هو $(\bar{x}, \bar{y})$ حيث

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\sigma(x, y)\, dA}{\iint_R \sigma(x, y)\, dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y\sigma(x, y)\, dA}{\iint_R \sigma(x, y)\, dA}$$

استخدم الخوارزمية (4.4) بأخذ $n = m = 14$ لإيجاد مركز الكتلة للامنة المعرفة بالمنطقة $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$ ذات دالة كثافة $\sigma(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ قارن التقريب بالنتيجة الصحيحة.

12. كرر التمرين (11) باستخدام الخوارزمية (5.4) و $n = m = 5$.

13. مساحة السطح المعرّف بالدالة $z = f(x, y)$ لكل (x, y) في R هي

$$\iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA$$

استخدم الخوارزمية (4.4) و $n = m = 8$ لإيجاد تقريب لمساحة السطح لنصف الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \ge 0$ التي تقع فوق المنطقة في المستوى المعرف من خلال

$$R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

14. كرّر تمرين (13) باستخدام الخوارزمية (5.4) و $n = m = 4$.

15. استخدم الخوارزمية (6.4) بأخذ $n = m = p = 2$ لتقريب كل من التكاملات الثلاثية الآتية وقارن إجاباتك بالإجابات الصحيحة:

أ. $\int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} e^{x+y+z}\, dz\, dy\, dx$ ب. $\int_0^1 \int_x^1 \int_0^y y^2 z\, dz\, dy\, dx$

جـ. $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_{x-y}^{x+y} y\, dz\, dy\, dx$ د. $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_{x-y}^{x+y} z\, dz\, dy\, dx$

هـ. $\int_0^\pi \int_0^x \int_0^{xy} \frac{1}{y} \sin\frac{z}{y}\, dz\, dy\, dx$ و. $\int_0^1 \int_0^1 \int_{-xy}^{xy} e^{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx$

16. كرّر تمرين (15) باستخدام $n = m = p = 3$.

17. كرّر تمرين (15) باستخدام $n = m = p = 4$ و $n = m = p = 5$.

18. استخدم الخوارزمية (6.4) بأخذ $n = m = p = 4$ لتقريب

$$\iiint_S xy \sin(yz)\, dV$$

حيث تمثل S مجسمًا محدودًا بالمستويات الإحداثية والمستويات $x = \pi, y = \pi/2, z = \pi/3$. قارن هذا التقريب بالإجابة الصحيحة.

19. استخدم الخوارزمية (6.4) بأخذ $n = m = p = 5$ لتقريب

$$\iiint_S \sqrt{xyz}\, dV$$

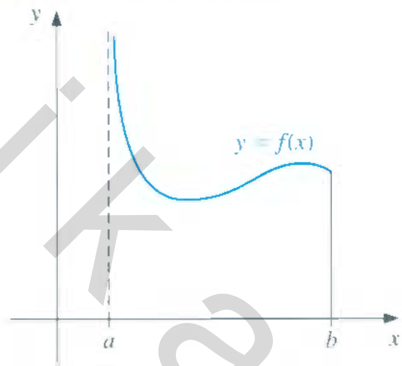
حيث S هي المنطقة في الثمن الأول المحدود بالأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$، والكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ والمستوى $x + y + z = 8$. كم تقنية دالية لازمة لهذا التقريب؟

9.4 التكاملات المعتلة Improper Integrals

تظهر التكاملات المعتلة عندما نعمم مفهوم التكامل. إما إلى فترة تكامل تكون عليها الدّالة غير محدودة. وإما إلى فترة يكون أحد طرفيها أو كلاهما لانهائيًا. وفي أي من هاتين الحالتين فإنه يجب تعديل طرائق تقريب التكامل العادية.

سنقوم أولًا بمعاينة الحالة التي تكون فيها الدّالة المتكاملة غير محدودة على نقطة النهاية الصغرى لفترة التكامل. (كما يظهر في شكل 23.4).

شكل 23.4



في هذه الحالة نقول: إن f له نقطة شذوذ Singularity point على نقطة النهاية a. سنبرهن أن التكاملات المعتلة الأخرى يمكن تحويلها إلى مسائل من هذا النوع.

يبين حساب التفاضل والتكامل أن التكامل المعتل بنقطة شاذة على نقطة النهاية اليسرى

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$$

يتقارب إذا وفقط إذا كان $0 < p < 1$، وفي هذه الحالة نعرّف

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx = \left.\frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\right|_a^b = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$$

إذا كانت f دالة يمكن كتابتها على الصيغة

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^p}$$

حيث $0 < p < 1$ و g متصل على $[a, b]$، فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود.

سنقرّب هذا التكامل باستخدام قاعدة سمبسون المركبة. شريطة أن $g \in C^5[a, b]$.

نستطيع في تلك الحالة إنشاء كثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة $P_4(x)$ إلى g حول a

$$P_4(x) = g(c) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{g^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4$$

ونكتب

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx + \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx \qquad (45.4)$$

وبما أن $P(x)$ كثيرة حدود، فإنه يمكننا أن نحدد بالضبط قيمة

$$\int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx = \sum_{k=0}^{4}\int_a^b \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-p}\,dx = \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(a)}{k!(k+1-p)}(b-a)^{k+1-p} \qquad (46.4)$$

إن هذا هو الجزء المسيطر في التقريب، وخصوصًا عندما تتفق كثيرة حدود تايلور $P_4(x)$ مع $g(x)$ على نحو كبير على كل الفترة $[a, b]$.

ولتقريب تكامل f، يجب أن نضيف هذه القيمة لتقريب التكامل

$$\int_a^b \frac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p}\,dx$$

ولتحديد هذا، نعرّف أولا

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-P_4(x)}{(x-a)^p} & a < x \le b \text{ إذا كان} \\ 0 & x = a \text{ إذا كان} \end{cases}$$

بما أن $0 < p < 1$ و $P_4^{(k)}(a)$ يتفق مع $g^{(k)}(a)$ لكل $k = 0, 1, 2, 3, 4$. نحصل على $G \in C^4[a, b]$.
هذا يعني إمكانية تطبيق قاعدة سمبسون المركبة لتقريب تكامل G على $[a, b]$. إن جمع هذا التقريب إلى القيمة في الصيغة (46.4) يعطي التقريب للتكامل المعتل للدالة f على $[a, b]$، ضمن دقة التقريب بقاعدة سمبسون المركبة.

مثال 1 سنستخدم قاعدة سمبسون المركبة بأخذ $h = 0.25$ لتقريب قيمة التكامل المعتل

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$$

بما أن كثيرة حدود تايلور الرابعة للدالّة e^x حول $x = 0$ هو

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

فإن جزءًا من التقريب للتكامل $\int_0^1 (e^x/\sqrt{x})\,dx$ يكون

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}}\,dx &= \int_0^1 \left(x^{-1/2} + x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{6}x^{5/2} + \frac{1}{24}x^{7/2}\right)dx \\ &= \lim_{M\to 0^+}\left[2x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{5}x^{5/2} + \frac{1}{21}x^{7/2} + \frac{1}{108}x^{9/2}\right]_M^1 \\ &= 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \frac{1}{108} \approx 2.9235450\end{aligned}$$

ولإيجاد الجزء الآخر لتقريب التكامل $\int_0^1 (e^x/\sqrt{x})\,dx$ نحتاج إلى تقريب $\int_0^1 G(x)\,dx$، حيث

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(e^x - P_4(x)\right) & 0 < x \le 1 \text{ إذا كان } \\ 0 & x = 0 \text{ إذا كان } \end{cases}$$

جدول 14.4

x	$G(x)$
0.00	0
0.25	0.0000170
0.50	0.0004013
0.75	0.0026026
1.00	0.0099485

ويعرض جدول (14.4) القيم اللازمة لتطبيق قاعدة سمبسون المركبة لهذا التقريب.

إن استخدام هذه البيانات وقاعدة سمبسون المركبة يعطي

$$\int_0^1 G(x)\,dx \approx \frac{0.25}{3}[0 + 4(0.0000170) + 2(0.0004013) + 4(0.0026026) + 0.0099485]$$
$$= 0.0017691$$

ولذلك ينتج

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx \approx 2.9235450 + 0.0017691 = 2.9253141$$

إن هذه النتيجة دقيقة ضمن دقة قاعدة سمبسون المركبة في التقريب للدالّة G.

بما أن $|G^{(4)}(x)| < 1$ على $[0, 1]$. فإن الخطأ يكون محدودًا بالعدد

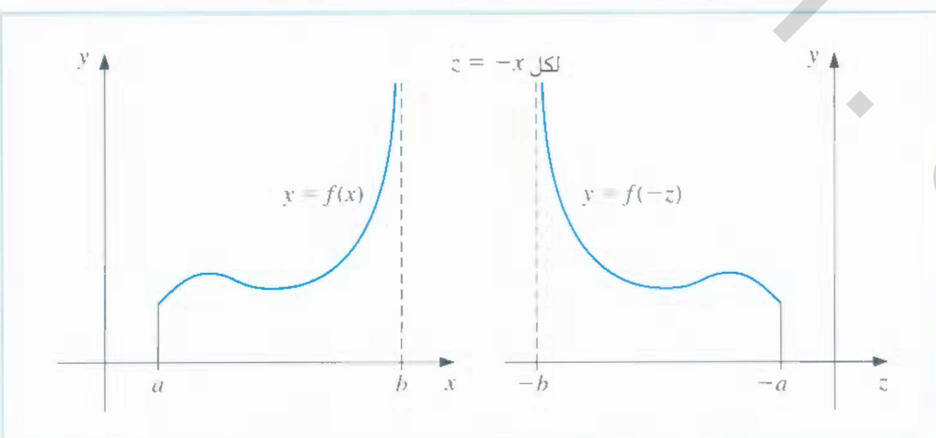
$$\frac{1-0}{180}(0.25)^4 = 0.0000217 \qquad \blacksquare$$

لتقريب التكامل المعتل بنقطة شاذة على نقطة النهاية اليمنى؛ نطبق الطريقة التي استخدمناها سابقًا، ولكن نتوسع بدلالة نقطة النهاية اليمنى b بدلًا من نقطة النهاية اليسرى a. وبدلًا من ذلك نستخدم التعويض $z = -x,\ dz = -\,dx$ لتغيير التكامل المعتل على الصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-z)\,dz \tag{47.4}$$

الذي له نقطة شاذة على نقطة النهاية اليسرى. (انظر شكل 24.4)

شكل 24.4



يعامل شكل المعتل الذي له نقطة شاذة على C بحيث تُعدّ $a < c < b$ مجموعة تكاملين معتين ذات نقاط شاذة على نقاط النهاية، لأن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ويحتوي النوع الآخر من التكاملات المعتلة على نهايات تكامل لانهائية. يكون لتكامل الأسس من هذا النوع على الصيغة

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

للعدد $p > 1$. ويمكن تحويل هذا إلى تكامل بنقطة شاذة يسرى على 0 باستخدام التعويض التكاملي

$$t = x^{-1}, \quad dt = -\,x^{-2}\,dx$$

لذلك

$$dx = -\,x^2\,dt = -\,t^{-2}\,dt$$

ومن ثم

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \int_{1/a}^0 -\frac{t^p}{t^2}\,dt = \int_0^{1/a} \frac{1}{t^{2-p}}\,dt$$

وبطريقة مماثلة، فإن تحويل المتغير $t = x^{-1}$ يغير التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)\,dx$ إلى تكامل ذي نقطة شاذة على النهاية اليسرى هي الصفر

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_0^{1/a} t^{-2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt \tag{48.4}$$

والآن يمكن تقريب هذا التكامل باستخدام صيغة تكامل من النوع الذي نوقش سابقاً.

مثال 2 لتقريب قيمة التكامل المعتل

$$I = \int_1^\infty x^{-3/2} \sin \frac{1}{x}\,dx$$

نستخدم تحويل المتغير $t = x^{-1}$.

بما أن $dt = -\,x^{-2}\,dx$ فسنحصل على $dx = -\,x^2\,dt = -\,\frac{1}{t^2}\,dt$

و

$$I = \int_{x=1}^{x=\infty} x^{-3/2} \sin \frac{1}{x}\,dx = \int_{t=1}^{t=0} \left(\frac{1}{t}\right)^{-3/2} \sin t \left(-\frac{1}{t^2}\,dt\right) = \int_0^1 t^{-1/2} \sin t\,dt$$

إن كثيرة حدود تايلور الرابعة $P_4(t)$ للدالّة $\sin t$ حول 0 هو $P_4(t) = t - \frac{1}{6}t^3$ ولذلك

$$G(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}} & \text{إذا كان } 0 < t \le 1 \\ 0 & \text{إذا كان } t = 0 \end{cases}$$

يكون في $C^4[0, 1]$

$$I = \int_0^1 t^{1/2} - \frac{1}{6}t^{5/2}\,dt + \int_0^1 \frac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}}\,dt$$
$$= \left[\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{1}{21}t^{7/2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}}\,dt$$
$$= 0.61904761 + \int_0^1 \frac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}}\,dt$$

باستخدام قاعدة سمبسون المركبة و $n = 16$ للتكامل الباقي تكون النتيجة 0.0014890097.

إن هذا يعطي التقريب النهائي للتكامل وهو

$$I = 0.0014890097 + 0.61904761 = 0.62053661$$

وهو دقيق ضمن 4.0×10^{-8}. ■

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 9.4

1. استخدم قاعدة سمبسون المركبة وقيم n المعطاة لتجد تقريب التكاملات المعتلة الآتية:

أ. $\int_0^1 x^{-1/4}\sin x\,dx,\quad n = 4$ ب. $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx,\quad n = 6$

جـ. $\int_1^2 \frac{\ln x}{(x-1)^{1/5}}\,dx,\quad n = 8$ د. $\int_0^1 \frac{\cos 2x}{x^{1/3}}\,dx,\quad n = 6$

2. استخدم قاعدة سمبسون المركبة وقيم n المعطاة لتجد تقريب التكاملات المعتلة الآتية:

أ. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx,\quad n = 6$ ب. $\int_0^2 \frac{xe^x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx,\quad n = 8$

3. استخدم التحويل $t = x^{-1}$، ثم قاعدة سمبسون المركبة وقيم n المعطاة. لتقرب التكاملات المعتلة الآتية:

أ. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+9}\,dx,\quad n = 4$ ب. $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx,\quad n = 4$

جـ. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^3}\,dx,\quad n = 6$ د. $\int_1^\infty x^{-4}\sin x\,dx,\quad n = 6$

4. التكامل المعتل $\int_0^\infty f(x)\,dx$ لا يمكن تحويله إلى تكامل بنهايات محدودة عن طريق التعويض $t = 1/x$، لأن النهاية «صفر» تصبح لانهائية. يمكن حل الإشكال بأن نكتب أولاً $\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx$ طبّق هذه الطريقة لتقرب التكاملات المعتلة الآتية ضمن 10^{-6}:

أ. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$ ب. $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$

5. افترض أن جسمًا كتلته m يتحرك إلى أعلى عموديًا ومبتدئًا من على سطح الأرض. فإذا ما أهملت أي مقاومة عدا الجاذبية فإن سرعة الهروب v تعطى بالصيغة

$$v^2 = 2gR\int_1^\infty z^{-2}\,dz \quad \text{حيث} \quad z = \frac{x}{R}$$

R نصف قطر الأرض ويساوي 3960 ميلًا. و $g = 0.00609\ \text{mi/s}^2$ هي قوة الجاذبية على سطح الأرض. قرّب سرعة الهروب v.

6. كثيرات حدود لاغور Laguerre Polynomials $\{L_0(x), L_1(x)\dots\}$ تكوّن مجموعة متعامدة على $[0, \infty)$ وتحقق

$$\int_0^\infty e^{-x} L_i(x) L_j(x)\, dx = 0$$

لكل $i \neq j$ (انظر فصل 2.8). كثيرة الحدود $L_n(x)$ لها n صفر $x_1, x_2, \dots, x_n$ في $[0, \infty)$. ليكن

$$c_{n,i} = \int_0^\infty e^{-x} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx$$

برهن أن صيغة التكامل

$$\int_0^\infty f(x) e^{-x}\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} f(x_i)$$

ذات رتبة دقة $2n - 1$. (إضاءة: اتبع الخطوات في برهان المبرهنة 7.4).

7. كثيرات حدود لاغور $L_0(x) = 1,\ L_1(x) = 1 - x,\ L_2(x) = x^2 - 4x + 2$ و $L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$.

اشتُقَت في تمرين (11) من الفصل (2.8).

وكما بُرهِن في التمرين (6)، فإن كثيرات الحدود هذه مفيدة في تقريب تكاملات على الصيغة

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx = 0$$

أ. اشتق صيغة التكامل باستخدام $n = 2$ وأصفار $L_2(x)$.

ب. اشتق صيغة التكامل باستخدام $n = 3$ وأصفار $L_3(x)$.

8. استخدم صيغ التكامل التي اشتقت في التمرين (7) لإيجاد تقريب للتكامل

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x}\, dx$$

9. استخدم صيغ التكامل التي اشتقت في تمرين (7) لإيجاد تقريب للتكامل

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

10.4 مسح الطرائق والبرامج Survey of Methods and Software

علينا أن نجتهد لاشتقاق طريقة لحل نوع واحد من التكاملات المعتلة. ولكن بمجرد توصلنا إلى حل فإن الطرائق الأخرى ستتبع بكل يسر

لقد بحثنا في هذا الباب تقريب تكاملات الدّوال في متغير واحد أو متغيرين و ثلاثة وتقريب مشتقات دالّة في متغير واحد حقيقي. ولقد دُرست قاعدة النقطة الوسيطية، قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون لتقديم الطرائق وتحليل الخطأ في طرائق التكامل.

قاعدة سمبسون المركبة سهلة الاستخدام وتعطي تقريبا دقيقًا. إلا إذا كانت الدالة تردد في فترة جزئية لفترة التكامل. إن طريقة التكامل التكيفية ممكنة الاستخدام إذا كان هناك شك في السلوك الترددي للدالّة. ولجعل عدد الرؤوس أصغر ما يمكن مع المحافظة على الدقة، جربنا صيغة جاوس للتكامل. وقد قدّم تكامل رومبرج للاستفادة من مزية سهولة تطبق قاعدة شبه المنحرف والاستكمال الخارجي.

معظم البرامج (Software) لتكامل دالة في متغير حقيقي واحد مبنية على الطريقة التكيفية أو على صيغ جاوس عالية الدقة. إن تكامل رومبرج الحذر يعد طريقة تكيّفية تحتوي على فحص، للتأكد من أن الدّالة المتكاملة ذات سلوك ناعم على الفترات الجزئية لفترة التكامل. فقد استخدمت هذه الطريقة بنجاح في مكتبات البرامج. وعمومًا تقرّب التكاملات المتعددة بتعميم طرائق تكيّفية جيدة إلى أبعاد أعلى. ويوصى باستخدام صيغ تكامل جاوسية لتخفيض عدد التقييمات الدالية. إن أهم الروتين (البرامج النمطية) في مكتبات IMSL و NAG مبني على QUADPACK وهو A Subroutine Package for Automatic Integration برمجية للتكامل التلقائي كتبه R.Piessens و C.W.Uberhuber و E. de Doncker-Kapenga و D.K.Kahaner ونشرته Springer-Verlag عام 1983 [PDUK] والبرامج متاحة للعامة على الموقع http://www.netlib.org

إن مكتبة IMSL تحتوي الدّالة QDAG وهي عملية تكامل تكيّفية مبنية على قاعدة (21-Point Ganssian-Kronorde) باستخدام قاعدة (10-Point Ganssian rule) لتقدير الخطأ. إن قاعدة جاوس تستخدم العشر نقاط $x_1, \ldots, x_{10}$ والأوزان $w_1, \ldots, w_{10}$ لتعطي الصيغة تكامل $\sum_{i=1}^{10} w_i f(x_i)$ لتقريب التكامل $\int_a^b f(x)\, dx$. ثم تستخدم النقاط الإضافية $x_{11}, \ldots, x_{21}$ والأوزان الجديدة $v_1, \ldots, v_{21}$ في صيغة كرونرد (Kronrod) $\sum_{i=1}^{21} v_i f(x_i)$ تقارن نتائج المعادلتين لإزالة الخطأ.

إن ميزة استخدام $x_1, \ldots, x_{10}$ في كل صيغة هي الحاجة إلى تقييم f على 21 نقطة فقط. لو تستخدم قواعد جاوس ذات العشر نقاط و21 نقطة مستقلة لظهرت الحاجة إلى استخدام 31 تقييمًا داليًا. تسمح هذه العملية بوجود نقاط شاذة على نقاط النهاية للدالّة الكاملة.

أما برامج IMSL الأخرى فهي QDAGS التي تسمح بوجود نقاط شاذة على نقاط النهاية، QDAGPC التي تسمح بوجود نقاط شاذة محددة من المستخدم، QDAGI التي تسمح بدورها بوجود فترات تكامل لانهائية و QDNG وهي عملية غير تكيّفية للدوال الممهّدة. البرنامج TWODQ يستخدم قواعد جاوس-كرونرد لتكامل دالة في متغيرين. ويوجد أيضًا برنامج QAND لاستخدام صيغة جاوس للتكامل في تكامل الدّوال ذات n من المتغيرات على n من الفترات على الصيغة $[a_i, b_i]$.

إن NAG Library تحوي البرنامج D01AJF لحساب تكامل f على الفترة $[a, b]$ باستخدام طريقة تكيّفية مبنية على طريقة جاوس للتكامل باستخدام قواعد Gauss 10-Point و KrOnrod 21-Points. أما البرنامج D01AHF فيستخدم لتقريب $\int_a^b f(x)\, dx$ باستخدام عائلة من نوع صيغ جاوس مبنية على رؤوس عددها 1، 3، 5، 7، 15، 31، 63، 127، 255. إن هذه القواعد المتداخلة وذات الدقة العالية من إنشاء بترسون [Pat] تستخدم بطريقة تكيّفية. إن البرنامج D01DGF خاص للتكاملات المتعددة، ويقرّب التكامل إذا أعطيت بيانات نقطيّة (قيمًا) بدلًا من صيغة الدالّة. إن NAG يحتوي على كثير من البرامج الأخرى لتقريب التكاملات.

إن الأمر الداليّ في مابل Maple

```
>int(f,x=a..b);
```

يحسب التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\, dx$.

إن الطريقة العددية تستخدم برامج لمعاملة النقاط الشاذة. ثم تستخدم صيغة كيفشو-كيرتس للتكامل Clenshaw Curtis والموصوفة في [CC]. وإذا فشل هذا بسبب وجود نقاط شاذة في الفترة أو بالقرب منها، تطبق صيغة تكيّفية أسيّة مضاعفة double exponential quadrature يمكن استخدام صيغة نيوتن- كوتس التكيفية عن طريق تحديد الخيار NCrule في الأمر الداخلي في Maple.

```
>int(f,x=a..b,digits,_NCrule);
```

تحاول الطريقة التوصل إلى خط نسبي مسموح مقداره $0.5\times 10^{(1-\text{Digits})}$. حيث Digits هو متغير في Maple في الحساب العددي. إن قيمة Digits المخزونة في البرنامج هي 10. ولكن يمكن تغييرها إلى أي عدد صحيح موجب n عن طريق الأمر ;Digits:=n.

إن الأمر QUAD في MATLAB يقرّب التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\,dx$ باستخدام قاعدة سمبسون التكيفية.

والأمر QUAD8 يقرّب التكامل المحدود باستخدام قاعدة نيوتن- كوتس التكيفة ذات الثماني واجهات (eight-panel Newton-Cotes rule).

وعلى الرغم من أن الاشتقاق العددي غير مستقر. إلا أن هناك حاجة إلى تقريب المشتقة لتستخدم في الصيغ التفاضلية.

إن مكتبة NAG تحتوي على برامج فرعية D04AAF للاشتقاق العددي لدالّة بمتغير واحد. مع إمكانية الاشتقاق للمشتقة 14.

إن الدّالة DERIN في IMSL تستخدم تغييرًا تكيّفيًا في حجم الخطوة في الفروق المحدودة لتقريب المشتقة الأولى والثانية والثالثة للدالّة f عند النقطة x ضمن حد خطأ مسموح به.

تحتوي IMSL أيضا برمجية فرعية QDDER لحساب المشتقات لدالّة معرّفة على مجموعة من النقاط باستخدام الاستيفاء الداخلي التربيعي.

كلتا البرمجيتين تسمحان باشتقاق الشريحة Spline الاستكمالي التكعيبية المبنية مالبرامج الفرعية المذكورة في (4.3). كما تسمح بتكامله.

للمزيد عن التكامل العددي، ننصح بالكتب للمؤلفين Engles [E] و Davis and Rabinowitz [DR].

ولمعلومات إضافية عن طريقة جاوس، انظر Stroud and Secrest [StS]

يوجد كتب عن التكامل المتعدد، منها كتاب Stroud [Stro]

والكتاب الحديث لمؤلفيه Sloan and Joe [SJ].