الباب

3

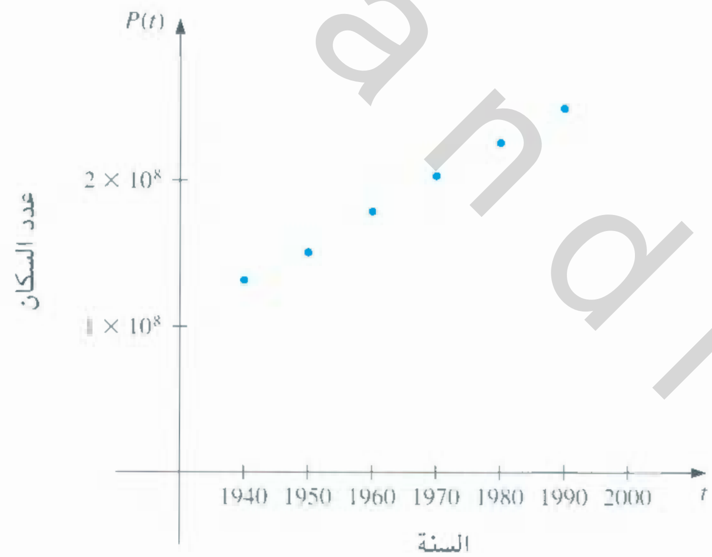
الاستكمال الداخلي وتقريب كثيرات الحدود

Interpolation and Polynomial Approximation

مقدمة

يجري تعداد السكان في الولايات المتحدة كل عشر سنوات. ويبين الجدول الآتي عدد السكان (بالآلاف) ما بين 1940 و 1990.

السنة	1940	1950	1960	1970	1980	1990
عدد السكان بالآلاف	132,165	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633



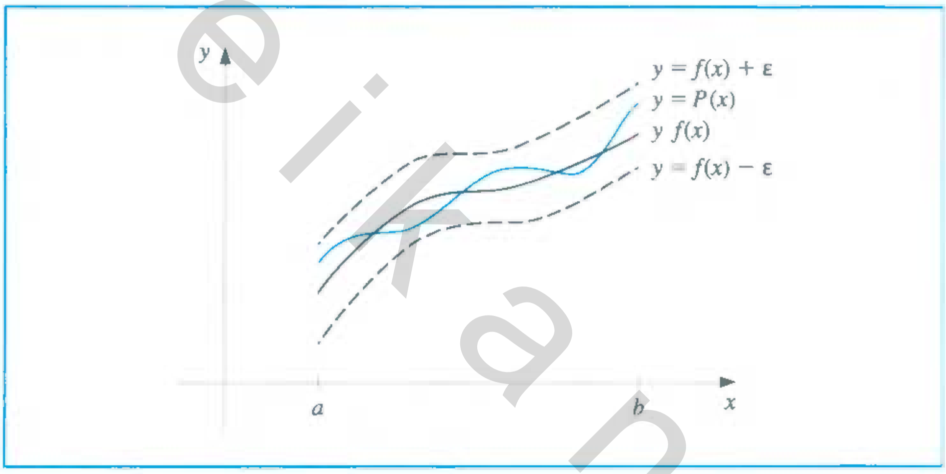
وقد نتساءل عند دراسة هذه البيانات ما إذا كان يمكن استخدامها لإعطاء تقريب مناسب لعدد السكان عام 1965 أو حتى سنة 2010 مثلًا. ويمكن إيجاد تنبؤات من هذا النوع مستخدمين دالّة تتناسب مع البيانات. وتسمى هذه العملية "استكمالًا أو استكمالًا داخليًا – *interpolation*" وهو موضوع هذا الباب. وقد أخذت مسألة تعداد السكان هذه في الحسبان ضمن هذا الباب وفي التمارين: (28) من الفصل (1.3)، و (18) من الفصل (2.3) و (28) من الفصل (4.3).

وأحد صنوف الدّوال المشهورة والتي تخدم هدفنا في هذا الباب، والتي كل من مجالها ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية . هو صنف كثيرات الحدود الجبرية التي تأخذ الصورة:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث تمثّل n عدد صحيح غير سالب و $a_0, \ldots, a_n$ معاملات حقيقية . وأحد أسباب أهميتها كونها تقرب الدّوال المتصلة بانتظام. خذ أي دالّة معرفة ومتصلة على فترة محددة ومغلقة، عندئذ توجد كثيرة حدود تقترب من الدّالة المعطاة وعلى النحو المطلوب. وهذه النتيجة يعبر عنها تحديدًا في المبرهنة الآتية. (انظر شكل 1.3)

شكل 1.3



مبرهنة 1.3 مبرهنة تقريب فيرستراس Weierstrass Approximation Theorem

لتكن f دالّة معرفة ومتصلة على الفترة $[a, b]$. عندئذ، لكل $\varepsilon > 0$، توجد كثيرة حدود $P(x)$ تحقق $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ لكل x في الفترة $[a, b]$. يمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في غالبية المراجع الابتدائية في التحليل الحقيقي. (انظر [Bart, pp. 165–172]) هناك سبب مهم آخر للتعامل مع فئة كثيرات الحدود في تقريب الدّوال هو كون الاشتقاق والتكامل اللامنتي لكثيرة الحدود سهل التحديد. وتكون نفسها كثيرة الحدود أيضا. ولهذه الأسباب، تستخدم كثيرات الحدود لتقريب الدّوال المتصلة غالبًا.

لقد تناولنا كثيرات حدود تايلور في الباب الأول من هذا الكتاب، حيث وصفت كأنها أحد الأركان الجوهرية في إنشاء التحليل العددي، وقد تفترض أن تقدير كثيرة الحدود يزيد في استخدام هذه الدّوال بناءً على ذلك.

إن كثيرات حدود تايلور تتفق وبأكبر اقتراب ممكن مع دالّة ما في نقطة محددة، ولكنها تركز دقتها قريبًا من النقطة. وكثيرة حدود الاستكمال الداخلي الجيد تحتاج إلى إعطاء تقريب دقيق على طول الفترة نسبيًا. وإن كثيرات حدود تايلور لا تقدم ذلك عمومًا. افترض أننا نحسب أول ست كثيرات حدود تايلور حول $x_0 = 0$ لـ $f(x) = e^x$ على سبيل المثال.

كارل فيرستراس
karl weierstrass (1815-1897)
يدعى أحيانا الأب للتحليل الحديث بسبب إصراره على الصرامة في عرض النتائج الرياضية. لقد كان أداتيًا في تطوير اختبارات لتقارب السلسلة وفي تحديد طرائق لتعريف أرقام لامنطقية بدقة. وكان أول من أوضح بأن الدالّة يمكن أن يكون مستمرًا أينما كان، ولكنه لا يمكن أن يكون قابلا للاشتقاق. وهي نتيجة أذهلت بعض معاصريه.

القليل من أعمال ڤيرستراس قد نشرت خلال حياته. ولكن محاضراته وخصوصا حول نظرية الدوال لها تأثير معنوي على جيل من التلامذ بأجمعه

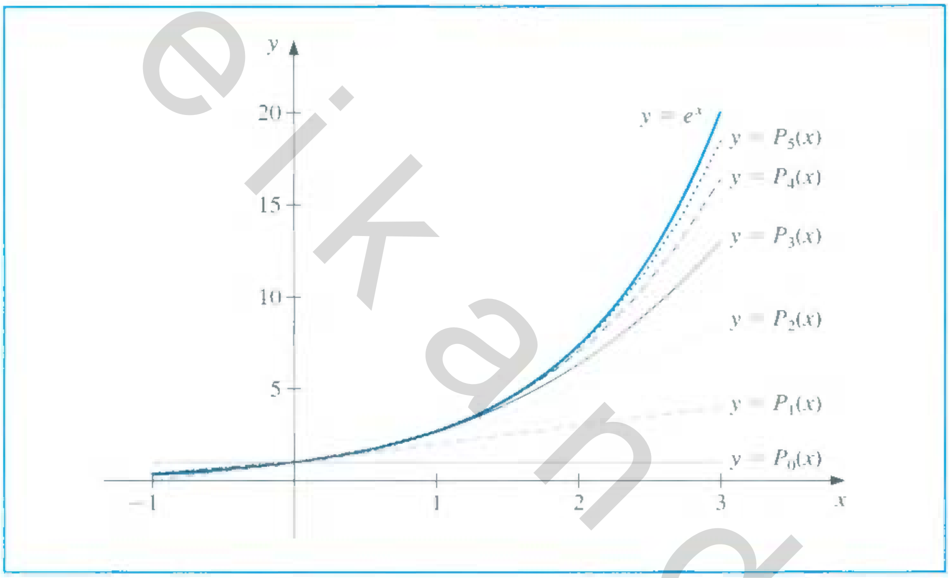
بما أن مشتقات $f(x)$ هي جميعها e^x حين حسابها عند $x_0 = 0$ تعطي القيمة 1. فإن كثيرات حدود تايلور هي:

$$P_0(x) = 1 ,\quad P_1(x) = 1 + x ,\quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} ,\quad P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \quad \text{و} \quad P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

إن رسوم كثيرات الحدود موضحة في شكل (2.3). (لاحظ أنه كلما ابتعدنا عن الصفر يغدو الخطأ أسوأ تدريجيًا حتى مع كثيرات الحدود برتب عالية).

شكل 2.3



ومع الحصول على استكمال داخلي أحسن لـ $f(x) = e^x$ في حالة استخدام كثيرات حدود تايلور برتب عليا. فإن الحال ليس كذلك لكل الدّوال. لنفترض استخدام كثيرات حدود تايلور برتب مختلفة لـ $f(x) = 1/x$ ممتدة حول $x_0 = 1$ لتقريب $f(3) = \frac{1}{3}$. بوصفه مثالاً واضحا على ذلك. وحيث إن

$$f(x) = x^{-1},\quad f'(x) = -x^{-2},\quad f''(x) = (-1)^2 2 \cdot x^{-3}$$

وعموما $$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! x^{-k-1}$$

فإن كثيرات حدود تايلور تكون

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-1)^k$$

ونحصل على القيم في جدول (1.3) التي تشير إلى فشلٍ ذريع في تقريب $f(3) = \frac{1}{3}$ بحدود $P_n(3)$ لقيم متصاعدة لـ n. فعندما نقرب $f(3) = \frac{1}{3}$ بحدود $P_n(3)$ لقيم متصاعدة لـ n. فإن

التقريب يصبح غير دقيق من الجانب التصاعدي. ويلاحظ ذلك من جدول (3.1) أيضًا.

جدول 1.3

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85

وبما أن كثيرات حدود تايلور تتميز بكون المعلومات المستخدمة جميعها في التقريب متمركزة عند نقطة منفردة x_0، فإنه ليس مستبعدًا لكثيرات الحدود هذه أن تعطي تقريبات غير دقيقة كلما ابتعدنا عن x_0. وهذا ما يجعل تقريب كثيرة حدود تايلور مقتصرًا على الحاجة إلى التقريب فقط عند نقاط قريبة لـ x_0. وللأغراض الحسابية المعتادة، فمن الأجدر استخدام طرائق تتضمن معلومات عند نقاط مختلفة، سنعتمدها فيما تبقى من هذا الفصل. إن الاستخدام الرئيس لكثيرات حدود تايلور ليس لأغراض التقريب، وإنما لاشتقاق أساليب عددية، ولتقريب الخطأ.

1.3 الاستكمال الداخلي وكثيرة حدود لاجرانج
Interpolation and the Lagrange Polynomial

لما لم تكن كثيرات حدود تايلور مناسبة للاستكمال الداخلي، فهناك حاجة إلى طرائق بديلة. ونحصل في هذا الفصل على كثيرات حدود للتقريب تحدد بسهولة من خلال توصيف نقاط معينة على السطح وعبر أماكن وجوب مرورها بها.

إن مشكلة تحديد كثيرة حدود من الرتبة واحد تمرّ عبر نقاط مختلفة (x_0, y_0) و (x_1, y_1) هي نفسها عند تقريب الدّالة f، حيث $f(x_0) = y_0$ و $f(x_1) = y_1$ من خلال الاستكمال الداخلي بكثيرة حدود من الرتبة 1، أو الاتفاق مع قيم f عند النقط المعلومة.

بداية نعرّف الدّوال

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{و} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

ومن ثم نعرّف

$$P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

وحيث إن

$$L_0(x_0) = 1, \; L_0(x_1) = 0, \; L_1(x_0) = 0 \quad \text{و} \quad L_1(x_1) = 1$$

يكون لدينا

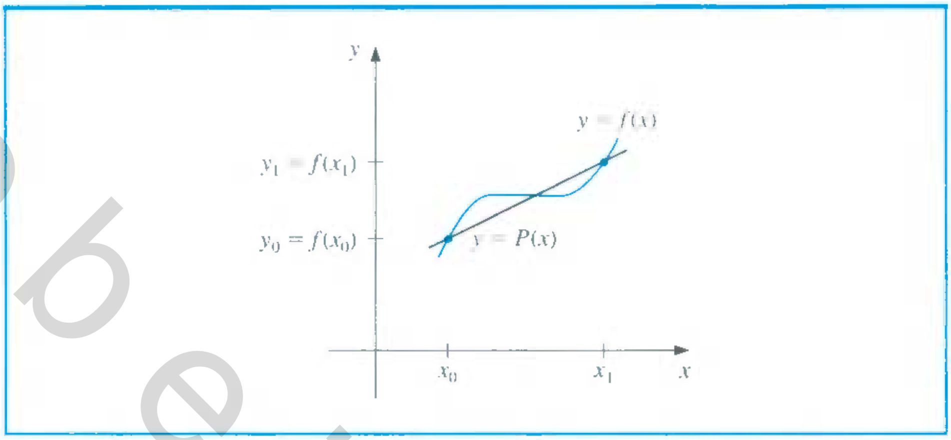
$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

و

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

وبذلك فإن P هي الدّالة الخطية الوحيدة التي تمرّ عبرها (x_0, y_0) و (x_1, y_1). (انظر شكل 3.3).

شكل 3.3

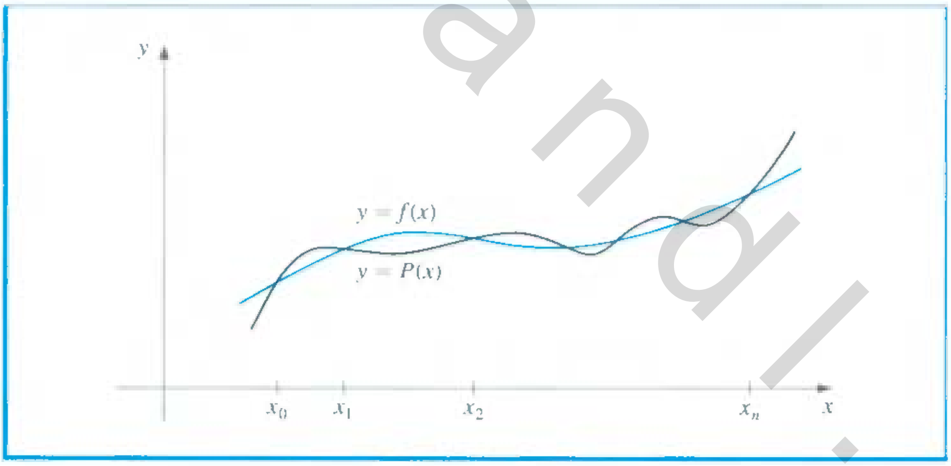


لتعميم مفهوم الاستكمال الداخلي الخطي، ندرس إنشاء كثيرة حدود رتبتها لا تزيد عن n. وتمر بعدد $n + 1$ من النقاط

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

(انظر شكل 4.3).

شكل 4.3



نحتاج في هذه الحالة إلى إنشاء. لكل $k = 0, 1, \ldots, n$، دالّة $L_{n,k}(x)$ مع خاصية كون $L_{n,k}(x_i) = 0$ عندما $i \neq k$ و $L_{n,k}(x_k) = 1$. ولتحقيق $L_{n,k}(x_i) = 0$ لكل $i \neq k$، يتطلب الأمر تضمين بسط $L_{n,k}(x)$ للمقدار

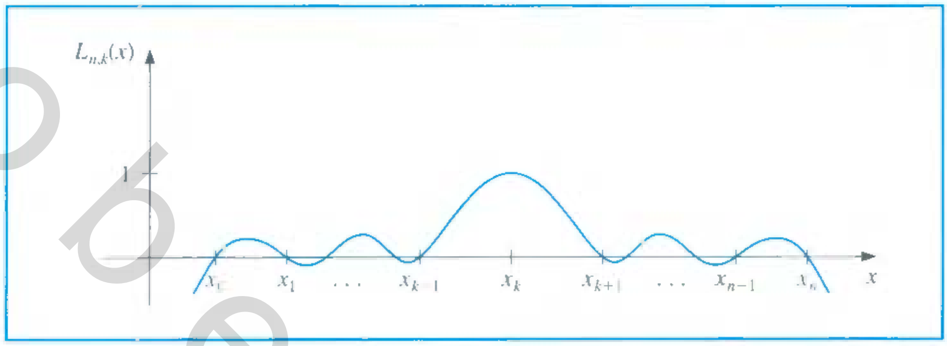
$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

ولتحقيق $L_{n,k}(x_k) = 1$، فإن بسط $L_{n,k}(x)$ يجب أن يساوي هذا المقدار عند $x = x_k$. وعندئذ

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

يوضح شكل (5.3) تخطيطاً لشكل $L_{n,k}$ النموذجي.

شكل 5.3



من السهولة توضيح كثيرة حدود الاستكمال الداخلي إذا ما عرفت صيغة $L_{n,k}$. وتدعى كثيرة الحدود هذه "كثيرة حدود لاجرانج النوني الاستكمال الداخلي **nth Lagrange interpolating polynomial**" وتعريفها ضمن المبرهنة الآتية.

مبرهنة 2.3

إذا كانت $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعداداً مختلفة عددها $n+1$. وكانت f دالّة قيمها معطاة عند هذه الأعداد، فإنه يوجد كثيرة حدود وحيدة $P(x)$ لا تزيد رتبتها عن n. وتحقق

$$f(x_k) = P(x_k) \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

وكثيرة الحدود هذه هي

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x) \qquad (1.3)$$

حيث إن لكل $k = 0, 1, \ldots, n$ لدينا

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \qquad (2.3)$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

■

إن صيغة الاستكمال الداخلي المنسوبة إلى جوزيف - لويس لاجرانج Joseph - Louis Lagrange (1736 - 1813) كانت وكأنها معروفة من قبل إسحق نيوتن Isaac Newton نحو 1675. ولكن يبدو أنها قد نشرت أولا من قبل إدوارد وارينج Edward waring (1736 - 1798) في 1779. لاجرانج قد كتب على نحو واسع حول موضوع الاستكمال الداخلي. وكان عمله مثار اهتمام الرياضيين الأخيرين. لقد نشر هذه النتيجة عام 1795

سنكتب $L_{n,k}(x)$ بصيغة $L_k(x)$ للسهولة حينما لا يوجد أي مشكلة بشأن درجته.

مثال 1

باستخدام الأعداد (أو النقاط) $x_0 = 2$ ، $x_1 = 2.5$ ، $x_2 = 4$ فإن إيجاد كثيرة حدود الاستكمال الداخلي الثاني لـ $f(x) = 1/x$ يتطلب منا تحديد معاملات كثيرات الحدود. $L_0(x)$ ، $L_1(x)$ ، $L_2(x)$. وهي وفق الصيغة المتداخلة

$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = (x-6.5)x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{(x-4.5)x+5}{3}$$

وحيث إن

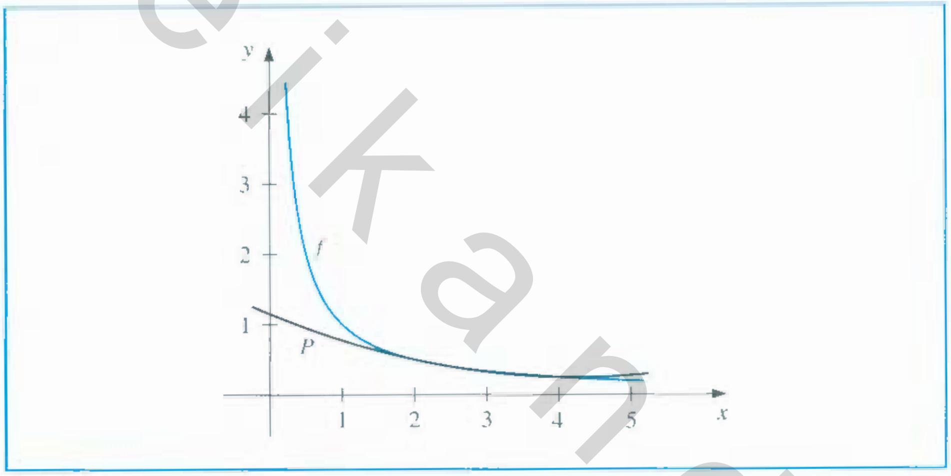
$f(x_0) = f(2) = 0.5$ ، $f(x_1) = f(2.5) = 0.4$ و $f(x_2) = f(4) = 0.25$

يكون لدينا

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k) L_k(x) \\ &= 0.5((x - 6.5)x + 10) + 0.4\frac{(-4x + 24)x - 32}{3} + 0.25\frac{(x - 4.5)x + 5}{3} \\ &= (0.05x - 0.425)x + 1.15 \end{aligned}$$

والتقريب إلى $f(3) = \frac{1}{3}$ (انظر شكل 6.3) سيكون $f(3) \approx P(3) = 0.325$.

شكل 6.3



قارن هذا بجدول (1.3) في حال عدم إمكانية استخدام كثيرة حدود تايلور، ممتدة حول $x_0 = 1$، لتقريب معقول لـ $f(3) = \frac{1}{3}$. ■

يمكننا استخدام CAS لإنشاء كثيرة حدود استكمال داخلي. على سبيل المثال نستخدم في Maple

```
>interp(X,Y,x);
```

حيث يمثل X النقطة $[x_0, \ldots, x_n]$، ويمثل Y النقطة $[f(x_0), \ldots, f(x_n)]$، و x_0 هو المتغير المستخدم. في هذا المثال يمكننا توليد كثيرة حدود استكمال داخلي

$P(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$ مع الأمر

```
>P:=interp([2,2.5,4],[0.5,0.4,0.25],x);
```

ولحساب $P(3)$ بوصفه تقديرًا لـ $f(3) = \frac{1}{3}$، أدخل

```
>subs(x=3,P);
```

الذي يعطي 0.325.

الخطوة الآتية هي حساب الحد المتبقي أو حد الخطأ الداخل في تقريب دالّة من خلال كثيرة حدود استكمال داخلي. لقد أجري ذلك في المبرهنة الآتية.

مبرهنة 3.3

افترض أن $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعداد مختلفة في الفترة $[a, b]$. وأن $f \in C^{n+1}[a, b]$. عندئذ لكل x ينتمي للفترة $[a, b]$. يوجد عدد $\xi(x)$ (عادة ما يكون غير معلوم) في الفترة (a, b) يحقق

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{3.3}$$

حيث إن $P(x)$ كثيرة حدود استكمال داخلي معطاة في الصيغة (1.3). ■

إن حد الخطأ لكثيرة حدود لاجرانج يمكن وصفها بطرائق أخرى. ولكن هذه الصيغة هي الأكثر فائدة والتي تتفق إلى حد كبير مع صيغة خطأ كثيرة حدود تايلور القياسية.

البرهان لاحظ أولًا أنه إذا كان $x = x_k$ لأي $k = 0, 1, \ldots, n$ فإن $f(x_k) = P(x_k)$ وإن اختيار $\xi(x_k)$ عشوائيًا ضمن (a, b) سينتج الصيغة (3.3). وإذا كان $x_k \neq x$، لكل $k = 0, 1, \ldots, n$ فعرّف الدّالة g لـ t ضمن $[a, b]$ من خلال

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\frac{(t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)} \\ &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \end{aligned}$$

ولأن $f \in C^{n+1}[a, b]$ و $P \in C^{\infty}[a, b]$، فإن $g \in C^{n+1}[a, b]$. ومع $t = x_k$ يكون لدينا

$$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - [f(x) - P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(x_k - x_i)}{(x - x_i)} = 0 - [f(x) - P(x)]\cdot 0 = 0$$

وأكثر من ذلك

$$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(x - x_i)}{(x - x_i)} = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] = 0$$

وأخيرًا $g \in C^{n+1}[a, b]$، و g صفر عند $n + 2$ من الأعداد المختلفة $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$. ومن خلال مبرهنة رول المعممة. يوجد عدد ξ ضمن (a, b) حيث $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. وبذلك

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - P(x)]\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}\right]_{t=\xi}. \tag{3.4}$$

إن الاشتقاق من الرتبة $(n+1)$، $P^{(n+1)}(x)$، هو صفر بامتياز؛ لكون $P(x)$ دالّة من الرتبة n غالبًا. وأن $\prod_{i=0}^{n}[(t - x_i)/(x - x_i)]$ كثيرة حدود من الرتبة $(n+1)$ أيضًا. لذا

$$\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \left[\frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}\right]t^{n+1} + (\text{رتبة منخفضة في } t)$$

و $\dfrac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\prod_{i=0}^{n}\dfrac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \dfrac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$ تصبح الصيغة (4.3) الآن

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - [f(x) - P(x)]\frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

وبحل $f(x)$ يكون لدينا

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

■ ■ ■

تعدّ صيغة الخطأ المقدمة في مبرهنة (3.3) من النتائج النظرية المهمة، وذلك للاستخدامات الواسعة لكثيرات حدود لاجرانج في استنباط طرائق تفاضل وتكامل عددي. وتستخلص حدود الخطأ لهذه الأساليب من صيغة لاجرانج للخطأ.

لاحظ أن صيغة الخطأ لكثيرة حدود لاجرانج متشابهة إلى حدّ كبير مع مثيلتها لكثيرة حدود تايلور. ويجمع الحد النوني nth لكثيرة حدود تايلور حول x_0 المعلومات المتوفرة كلها عند x_0 وله حد خطأ من الصيغة

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

وتستخدم كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة n معلومات عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ وبدلاً من $(x - x_0)^{n+1}$، فإن صيغة الخطأ تستخدم ضرب $n + 1$ من الحدود $(x - x_0), (x - x_1), \ldots, (x - x_n)$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

يقتصر الاستخدام الخاص لصيغة الخطأ هذه على تلك الدّوال التي لمشتقاتها حدود معلومة.

مثال 2

لنفترض أننا بصدد إنشاء جدول للدّالة $f(x) = e^x$ لـ x ضمن $[0, 1]$. نفترض أن عدد الخانات العشرية التي تعطى لكل إدخال هو $d \geq 8$، وأن الفرق بين قيمتين متجاورتين لـ x- (طول الخطوة) هو h. فماذا يجب أن يكون h في الاستكمال الخطي (ونعني كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة 1) ليعطي خطأً مطلقاً بحد أعلى 10^{-6}؟

لتكن $x_0, x_1, \ldots$ الأعداد التي تقيّم f عندها، و x ضمن $[0, 1]$. افترض j يحقّق $x_j \leq x \leq x_{j+1}$.

تؤدي الصيغة (3.3) إلى كون الخطأ في الاستكمال الخطي هو

$$|f(x) - P(x)| = \left|\frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - x_j)(x - x_{j+1})\right| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{2}|(x - x_j)||(x - x_{j+1})|$$

وحيث إن طول الخطوة هو h فإن $x_j = jh$، $x_{j+1} = (j+1)h$ و

$$|f(x) - P(x)| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{2!}|(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

وبذلك

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2}\max_{\xi\in[0,1]} e^{\xi} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

$$\leq \frac{1}{2}e \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

وبافتراض أن $g(x) = (x - jh)(x - (j+1)h)$ لـ $jh \le x \le (j+1)h$، وباستخدام مبرهنة القيمة المتطرفة (انظر تمرين 32) سنجد أن

$$\max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)| = \max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |g(x)| = \left| g\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)h\right)\right| = \frac{h^2}{4}$$

وبناءً على ذلك فإن الخطأ في الاستكمال الخطي محدد وفقاً لـ

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{eh^2}{8}$$

ويكون مرضيًا لـ h التي تختار لتحقق

$$\frac{eh^2}{8} \le 10^{-6} \quad \text{وهذا يعني أن} \quad h < 1.72 \times 10^{-3}$$

ولوجوب كون $n = (1-0)/h$ عددًا صحيحًا، فهناك اختيار منطقي واحد لطول الخطوة هو $h = 0.001$. ■

ويوضح المثال الآتي استكمالا داخليًا لحالة ما بحيث لا يمكن فيها استخدام جزء الخطأ من الصيغة (3.3).

مثال 3

يتضمن جدول (2.3) قيم الدّالة عند نقاط مختلفة. وستقارن التقريبات لـ $f(1.5)$ الناتجة من كثيرات حدود لاجرانج المختلفة. وحيث إن 1.5 تقع ما بين 1.3 و 1.6 فإن أنسب كثيرة حدود خطية تستخدم $x_0 = 1.3$ و $x_1 = 1.6$. وقيمة كثيرة حدود الاستكمال الداخلي عند 1.5 هي

$$P_1(1.5) = \frac{(1.5-1.6)}{(1.3-1.6)}f(1.3) + \frac{(1.5-1.3)}{(1.6-1.3)}f(1.6)$$
$$= \frac{(1.5-1.6)}{(1.3-1.6)}(0.6200860) + \frac{(1.5-1.3)}{(1.6-1.3)}(0.4554022) = 0.5102968$$

جدول 2.3

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

ويمكن قبول استخدام اثنتين من كثيرات الحدود من الرتبة 2 إحداهما باستخدام $x_0 = 1.3$، $x_1 = 1.6$، $x_2 = 1.9$ التي تعطي

$$P_2(1.5) = \frac{(1.5-1.6)(1.5-1.9)}{(1.3-1.6)(1.3-1.9)}(0.6200860) + \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.9)}{(1.6-1.3)(1.6-1.9)}(0.4554022)$$
$$+ \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.6)}{(1.9-1.3)(1.9-1.6)}(0.2818186) = 0.5112857$$

والأخرى باستخدام $x_0 = 1.0, x_1 = 1.3, x_2 = 1.6$ وتعطي $\hat{P}_2(1.5) = 0.5124715$.

ويوجد خياران مقبولان لكثيرة الحدود في حالة الرتبة الثالثة أيضًا، إحداهما باستخدام $x_0 = 1.3, x_1 = 1.6, x_2 = 1.9, x_3 = 2.2$ وتعطي $P_3(1.5) = 0.5118302$. ونحصل على الآخر من خلال استخدام $x_0 = 1.0, x_1 = 1.3, x_2 = 1.6, x_3 = 1.9$ وتعطي $\hat{P}_3(1.5) = 0.5118127$.

وتستخدم كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة الرابعة مدخلات الجدول جميعها. مع

$$x_1 = 1.3, x_2 = 1.6, x_3 = 1.9, x_4 = 2.2$$

فإن التقريب هو $P_4(1.5) = 0.5118200$. وحيث إن $P_3(1.5), \hat{P}_3(1.5), P_4(1.5)$ تتفق جميعها ضمن 2×10^{-5} من الوحدات، فإننا نتوقع هذه الرتبة من دقة هذه التقريبات. ونتوقع أن يكون $P_4(1.5)$ أكثر التقريبات دقة أيضا، لكونه يستخدم أغلب البيانات الموجودة.

والدّالة التي نحن بصدد تقريبها هي دالّة بيسيل من النوع الأول من الرتبة صفر، وقيمتها عند 1.5 معلومة وهي 0.5118277. لذا فإن الصورة الدقيقة للتقريبات هي كما يلي

$$|P_1(1.5) - f(1.5)| \approx 1.53 \times 10^{-3}$$
$$|P_2(1.5) - f(1.5)| \approx 5.42 \times 10^{-4}$$
$$|\hat{P}_2(1.5) - f(1.5)| \approx 6.44 \times 10^{-4}$$
$$|P_3(1.5) - f(1.5)| \approx 2.5 \times 10^{-6}$$
$$|\hat{P}_3(1.5) - f(1.5)| \approx 1.50 \times 10^{-5}$$
$$|P_4(1.5) - f(1.5)| \approx 7.7 \times 10^{-6}$$

وعلى الرغم من أن $P_3(1.5)$ هو التقريب الأدق إلا أنه لم تكن لدينا معلومات عن القيمة الحقيقية لـ $f(1.5)$، مما يجعلنا نقبل $P_4(1.5)$ على أنه أحسن تقريب، لكونه يتضمن أغلب البيانات حول الدّالة. إن حد خطأ لاجرانج المشتق ضمن المبرهنة (3.3) لا يمكن تطبيقه هنا، لعدم توفر معلومات عن المشتقة الرابعة لـ f. ولسوء الحظ، هذه هي الحالة عمومًا. ■

تكمن صعوبة استكمال لاجرانج الداخلي في صعوبة تطبيق حد الخطأ، وأخيرًا فإن رتبة كثيرة الحدود المطلوبة لدقة محددة لا تكون معروفة عمومًا حتى تُحدّد الحسابات. والإجراء المتبع هو أن نحسب النتائج المستخلصة من مختلف كثيرات الحدود حتى ظهور توافق مقبول، وقد أجري في المثال السابق أيضًا. وعلى أي حال فإن العمل المنجز في حساب التقريب من خلال كثيرة الحدود الثانية لا يقلل العمل المطلوب لحساب التقريب الثالث، وإن إيجاد التقريب الرابع ليس أسهل عندما يكون الثالث معلومًا، وهكذا. والآن سنشتق كثيرات حدود التقريب بأسلوب يستخدم الحسابات السابقة لمزايا أكبر.

تعريف 4.3 ليكن f دالّة معرّفة على $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$، وافترض أن $m_1, m_2, \ldots, m_k$ عبارة عن k من الأعداد الصحيحة المختلفة حيث $0 \le m_i \le n$ لكل i. سنرمز لكثيرة حدود لاجرانج التي تساوي $f(x)$ عند k من القيم $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}$ بالرمز $P_{m_1, m_2, \ldots, m_k}(x)$. ■

مثال 4 إذا كان $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 6$ و $f(x) = e^x$ فإن $P_{1,2,4}(x)$ كثيرة الحدود التي تتوافق مع $f(x)$ عند $x_1 = 2, x_2 = 3, x_4 = 6$. أي أن

$$P_{1,2,4}(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)}e^2 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)}e^3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}e^6$$ ■

توضح النتيجة الآتية طريقة لتوليد تقريبات كثيرة حدود لاجرانج توليدًا متكررًا.

مبرهنة 5.3 لتكن الدّالة f معرفة عند $x_0, x_1, \ldots, x_k$، و x_j و x_i عددين مختلفين في هذه المجموعة. عندئذ

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

تصف كثيرة حدود لاجرانج من النوع k التي تستكمل f داخليًا عند $k+1$ من النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_k$. ■

البرهان من أجل تسهيل الترميزات، ليكن $Q \equiv P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$ و $\hat{Q} \equiv P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}$.
وحيث إن $Q(x)$ و $\hat{Q}(x)$ كثيرتا حدود من الرتبة $k-1$ أو أقل، فإن رتبة $P(x)$ هي k على الأكثر. وإذا كان $0 \le r \le k$ و $r \ne i, j$ فإن $Q(x_r) = \hat{Q}(x_r) = f(x_r)$.
لذا

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)\hat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_r) = f(x_r)$$

وأكثر من ذلك، حيث إن $\hat{Q}(x_i) = f(x_i)$ يكون لدينا

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\hat{Q}(x_i) - (x_i - x_i)Q(x_i)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i) = f(x_i)$$

وبالمثل حيث إن $Q(x_j) = f(x_j)$ يكون لدينا $P(x_j) = f(x_j)$. ولكن بحسب التعريف: هي كثيرة الحدود الوحيدة من الرتبة k على الأكثر مع f عند $x_0, x_1, \ldots, x_k$. وبذلك $P \equiv P_{0,1,\ldots,k}$.
■ ■ ■

تفيد المبرهنة (5.3) بأن كثيرات حدود الاستكمال الداخلي يمكن توليدها تكراريًّ. ويمكن توليدها على سبيل المثال وفق الأسلوب الظاهر في جدول (3.3)، حيث يستكمل كل صف قبل بدء بالصفوف الآتية:

جدول 3.3

x_0	$P_0 = Q_{0,0}$				
x_1	$P_1 = Q_{1,0}$	$P_{0,1} = Q_{1,1}$			
x_2	$P_2 = Q_{2,0}$	$P_{1,2} = Q_{2,1}$	$P_{0,1,2} = Q_{2,2}$		
x_3	$P_3 = Q_{3,0}$	$P_{2,3} = Q_{3,1}$	$P_{1,2,3} = Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$	
x_4	$P_4 = Q_{4,0}$	$P_{3,4} = Q_{4,1}$	$P_{2,3,4} = Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4}$

نيفيل E. N. neville
أعطى هذا التعديل لصيغة لاجرانج ضمن ورقة [N] نشرت عام 1932.

تدعى هذه العملية "طريقة نيفيل Neville's method". والصيغة P المستخدمة في الجدول (3.3) مشوشة، بسبب عدد المرافقات subscripts لتمثيل المضمون. لاحظ أنه بينما يبنى الصف، نحتاج إلى مرافقين فقط. والتقدم في الجدول نحو الأسفل يقابله استخدام النقاط المتتالية لـ x_i بصعود أكبر مع i، والتقدم في الجدول نحو اليمين يقابله زيادة رتبة كثيرة حدود الاستكمال الداخلي. وعند ظهور النقاط على نحو متتابع في الاتجاهين كليهما، فإننا نحتاج إلى توصيف نقطة بداية وعدد النقاط الإضافية المستخدمة في عمل التقريب فقط.

ولتجنب تعدد المرافقات في الترميز، ليكن $Q_{i,j}(x)$ لـ $0 \le j \le i$ تعبيرًا لكثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة j عند $(j+1)$ من الأعداد $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i$، أي أن

$$Q_{i,j} = P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1,i}$$

وباستخدام هذا الترميز لطريقة نيفيل نحصل على صف ترميزات Q في جدول (3.3).

مثال 5 استخرجت قيم كثيرات حدود الاستكمال الداخلي عند $x = 1.5$ في المثال (3) باستخدام بيانات أول عمودين من جدول (4.3)، قرّبنا $f(1.5)$ في هذا المثال باستخدام نتائج المبرهنة (5.3). فإذا كان $x_0 = 1.0, x_1 = 1.3, x_2 = 1.6, x_3 = 1.9, x_4 = 2.2$
فإن $Q_{0,0} = f(1.0), Q_{1,0} = f(1.3), Q_{2,0} = f(1.6), Q_{3,0} = f(1.9), Q_{4,0} = f(2.2)$
هذه هي كثيرات الحدود الخمسة من الرتبة صفر (الثوابت) التي تقرب $f(1.5)$.

وبحساب تقريب الرتبة الأولى $Q_{1,1}(1.5)$ نحصل على

$$Q_{1,1}(1.5) = \frac{(x - x_0)\,Q_{1,0} - (x - x_1)\,Q_{0,0}}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{(1.5 - 1.0)\,Q_{1,0} - (1.5 - 1.3)\,Q_{0,0}}{1.3 - 1.0}$$

$$= \frac{0.5(0.6200860) - 0.2(0.7651977)}{0.3} = 0.5233449$$

وبالمثل

$$Q_{2,1}(1.5) = \frac{(1.5 - 1.3)(0.4554022) - (1.5 - 1.6)(0.6200860)}{1.6 - 1.3} = 0.5102968$$

$Q_{4,1}(1.5) = 0.5104270$ و $Q_{3,1}(1.5) = 0.5132634$

وأفضل تقريب خطي نتوقعه هو $Q_{2,1}$، لكون 1.5 تقع ما بين $x_1 = 1.3$ و $x_2 = 1.6$.

وبالأسلوب نفسه ، فإن التقريبات باستخدام كثيرات حدود برتب أعلى هي

$$Q_{2,2}(1.5) = \frac{(1.5 - 1.0)(0.5102968) - (1.5 - 1.6)(0.5233449)}{1.6 - 1.0} = 0.5124715$$

$Q_{4,2}(1.5) = 0.5137361$ و $Q_{3,2}(1.5) = 0.5112857$

التقريبات برتب أعلى تنتج بالأسلوب نفسه ومبينة في جدول (4.3). ■

جدول 4.3

1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715		
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857	0.5118127	
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361	0.5118302	0.5118200

فإذا كان آخر تقريب ليس بالدقة المطلوبة ، يمكن اختيار نقطة أخرى x_5 ، وإضافة صف آخر للجدول وهو

$$x_5 \quad Q_{5,0} \quad Q_{5,1} \quad Q_{5,2} \quad Q_{5,3} \quad Q_{5,4} \quad Q_{5,5}$$

وبذلك فإن $Q_{4,4}$، $Q_{5,4}$، $Q_{5,5}$ يمكن مقارنتها لتحديد دقة أكثر.

الدّالة في المثال (5) هي دالّة بيسيل من النوع الأول لكل من الرتبة صفر. وقيمتها عند 2.5 هي -0.0483838 وهذا صف جديد من التقريبات لـ $f(1.5)$ وهو

2.5	−0.0483838	0.4807699	0.5301984	0.5119070	0.5118430	0.5118277

والقيمة الأخيرة الجديدة 0.5118277 لحد المرتبة العشرية السابعة صحيحة.

جدول 5.3

i	x_i	$\ln x_i$
0	2.0	0.69[illegible]1
1	2.2	0.78[illegible]5
2	2.3	0.83[illegible]9

مثال 6

يتضمن جدول (5.3) قيمًا دقيقةً لحد الخانات المبينة :

سنستخدم طريقة نيفيل لتقريب $f(x) = \ln x$. وباستكمال الجدول نحصل على مدخلات جدول (6.3).

جدول 6.3

i	x_i	$x - x_i$	Q_{i0}	Q_{i1}	Q_{i2}
0	2.0	0.1	0.6931		
1	2.2	-0.1	0.7885	0.7410	
2	2.3	-0.2	0.8329	0.7441	0.7420

وعندئذ $P_2(2.1) = Q_{22} = 0.7420$. وحيث إن $f(2.1) = \ln 2.1 = 0.7419$ لأربع خانات عشرية ، فإن الخطأ المطلق هو

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = |0.7419 - 0.7420| = 10^{-4}$$

على أي حال $f'(x) = 1/x,\ f''(x) = -1/x^2$ و $f'''(x) = 2/x^3$، فإن صيغة خطأ لاجرانج (3.3) تعطي حد الخطأ

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = \left|\frac{f'''(\xi(2.1))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{3(\xi(2.1))^3}(0.1)(-0.1)(-0.2)\right| \le \frac{0.002}{3(2)^3} = 8.\bar{3} \times 10^{-5}$$

لاحظ أن الخطأ الحقيقي 10^{-4} يتعدى حد الخطأ $8.\bar{3} \times 10^{-5}$. وهذا التناقض ناتج من حسابات الأعداد المحددة. لقد استخدمنا تقريبات الأعداد الأربعة، وإن صيغة خطأ لاجرانج (3.3) تفترض حساب الأعداد اللانهائية. وهذا قد دفع أخطاءنا الحقيقية إلى تجاوز تقدير الخطأ النظري. ■

تنشئ الخوارزمية (1.3) المدخلات في طريقة نيفيل على شكل صفوف.

ALGORITHM
الخوارزمية
1.3

نيفيل للاستكمال الداخلي المكرّر Neville's Iterated Interpolation

لحساب كثيرة حدود الاستكمال الداخلي $P(x)$ على $n+1$ من الأعداد المختلفة $x_0, \ldots, x_n$ عند العدد x للدّالة f،

المدخلات: أرقام $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$، قيم $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ بمثابة العمود الأول $Q_{0,0}, Q_{1,0}, \ldots, Q_{n,0}$ of Q

المخرجات: الجدول Q مع $P(x) = Q_{n,n}$

الخطوة	المضمون
1	لـ $i = 1, 2, \ldots, n$ $j = 1, 2, \ldots, i$ دع $Q_{i,j} = \dfrac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$
2	المخرجات (Q) توقف.

■

يمكن تعديل الخوارزمية لتسمح بإضافة نقاط استكمال داخلي جديدة. فعلى سبيل المثال المتباينة

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon$$

يمكن استخدامها بوصفها معيار توقف. حيث ε عبارة عن حد السماح المحدد للخطأ. فإذا كانت المتباينة صحيحة فإن $Q_{i,i}$ تكون تقريبًا معقولاً لـ $f(x)$. أما إذا كانت غير صحيحة فتضاف نقطة استكمال داخلي جديدة x_{i+1}.

مجموعة التمارين 1.3 EXERCISE SET

1. ليكن $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 0.9$ لكل الدّوال $f(x)$ أدناه. أنشئ كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة واحد على الأكثر. واثنين على الأكثر لتقريب $f(0.45)$. أوجد الخطأ المطلق:

أ. $f(x) = \cos x$ ب. $f(x) = \sqrt{1+x}$

ج. $f(x) = \ln(x+1)$ د. $f(x) = \tan x$

2. ليكن $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.6$، لكل الدّوال $f(x)$ أدناه، أنشئ كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة واحد على الأكثر. واثنين على الأكثر. لتقريب $f(1.4)$. أوجد الخطأ المطلق:

أ. $f(x) = \sin \pi x$ ب. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

ج. $f(x) = \log_{10}(3x-1)$ د. $f(x) = e^{2x} - x$

3. استخدم المبرهنة (3.3) لإيجاد حد الخطأ للتقريبات في التمرين (1).
4. استخدم المبرهنة (3.3) لإيجاد حد الخطأ للتقريبات في التمرين (2).
5. استخدم كثيرات حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي المناسبة لكل من الدرجات: واحدة. اثنتين وثلاثة لتقريب كل مما يأتي:

أ. $f(8.4)$ إذا كان $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$

ب. $f(-\frac{1}{3})$ إذا كان $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$.

ج. $f(0.25)$ إذا كان $f(0.1) = 0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$، $f(0.4) = 0.24842440$

د. $f(0.9)$ إذا كان $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

6. استخدم كثيرات حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي المناسبة لكل من الدرجات: واحدة، اثنتين وثلاثة لتقريب كل مما يأتي:

أ. $f(0.43)$ إذا كان $f(0) = 1$, $f(0.25) = 1.64872$, $f(0.5) = 2.71828$, $f(0.75) = 4.48169$

ب. $f(0)$ إذا كان $f(-0.5) = 1.93750$, $f(-0.25) = 1.33203$, $f(0.25) = 0.800781$, $f(0.5) = 0.687500$

ج. $f(0.18)$ إذا كان $f(0.1) = -0.29004986$, $f(0.2) = -0.56079734$, $f(0.3) = -0.81401972$, $f(0.4) = -1.0526302$

د. $f(0.25)$ إذا كان $f(-1) = 0.86199480$, $f(-0.5) = 0.95802009$, $f(0) = 1.0986123$, $f(0.5) = 1.2943767$

7. استخدم طريقة نيفيل لإيجاد التقريبات في التمرين (5).
8. استخدم طريقة نيفيل لإيجاد التقريبات في التمرين (6).
9. أُنتجت البيانات في التمرين (5) باستخدام الدّوال الآتية. استخدم صيغة الخطأ لإيجاد حد للخطأ، وقارن الحد بالخطأ الحقيقي للحالات $n = 1$ و $n = 2$:

أ. $f(x) = x \ln x$ ب. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$

ج. $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$ د. $f(x) = \sin(e^x - 2)$

10. أُنتجت البيانات في التمرين (6) باستخدام الدّوال الآتية. استخدم صيغة الخطأ لإيجاد حد للخطأ، وقارن الحد بالخطأ الحقيقي للحالتين $n = 1$ و $n = 2$:

أ. $f(x) = e^{2x}$ ب. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

ج. $f(x) = x^2 \cos x - 3x$ د. $f(x) = \ln(e^x + 2)$

11. استخدم طريقة نيفيل لتقريب $\sqrt{3}$ مع الدّوال والقيم الآتية:

أ. $f(x) = 3^x$ والقيم $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$.

ب. $f(x) = \sqrt{x}$ والقيم $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 5$.

ج. قارن بين دقة التقدير في الفقرتين (أ) و (ب).

12. لتكن $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ و $P_2(x)$ كثيرة حدود الاستكمال الداخلي على $x_0 = 0, x_1, x_2 = 1$. أوجد أكبر قيمة لـ x_1 ضمن $(0, 1)$ التي تدع $f(0.5) - P_2(0.5) = -0.25$.

13. لتكن $P_3(x)$ كثيرة حدود الاستكمال الداخلي للبيانات $(0, 0), (0.5, y), (1, 3), (2, 2)$. أوجد y إذا كان معامل x^3 في $P_3(x)$ هو 6.

14. استخدم كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي من الرتبة ثلاثة أو أقل، واعتمد قطع الحساب عند العدد الرباعي لتقريب $\cos 0.750$ مستخدمًا القيم الآتية، وأوجد حد خطأ للتقريب:

$\cos 0.698 = 0.7661 \quad \cos 0.733 = 0.7432 \quad \cos 0.768 = 0.7193 \quad \cos 0.803 = 0.6946$

القيمة الحقيقية لـ$\cos 0.750$ هي 0.7317 (إلى أقرب أربع خانات عشرية). وضِّح التناقض ما بين الخطأ الحقيقي وحد الخطأ.

15. استخدم القيم الآتية والتقريب لأربع خانات لإنشاء تقريب كثيرة حدود لاجرانج الثالثة لـ $f(1.09)$. الدّالة قيد التقريب هي $f(x) = \log_{10}(\tan x)$. استخدم هذه المعلومة لإيجاد حد الخطأ في التقريب:

$f(1.00) = 0.1924 \quad f(1.05) = 0.2414 \quad f(1.10) = 0.2933 \quad f(1.15) = 0.3492$

16. كرِّر التمرين (15) مستخدمًا Maple مع مجموعة الأعداد لـ 10.

17. تستخدم طريقة نيفيل لتقريب $f(0.5)$ معتمدة على الجدول الآتي. وحدِّد $P_2 = f(0.7)$:

$x_0 = 0$	$P_0 = 0$		
$x_1 = 0.4$	$P_1 = 2.8$	$P_{0,1} = 3.5$	
$x_2 = 0.7$	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2} = \frac{27}{7}$

18. تستخدم طريقة نيفيل لتقريب $f(0.4)$ معتمدة على الجدول الآتي، وحدِّد $P_2 = f(0.5)$:

$x_0 = 0$	$P_0 = 1$			
$x_1 = 0.25$	$P_1 = 2$	$P_{01} = 2.6$		
$x_2 = 0.5$	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$	
$x_3 = 0.75$	$P_3 = 8$	$P_{2,3} = 2.4$	$P_{1,2,3} = 2.96$	$P_{0,1,2,3} = 3.016$

19. أنشئ كثيرات حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي للدّوال الآتية، وأوجد حدًّا للخطأ المطلق في الفترة $[x_0, x_n]$:

أ. $f(x) = e^{2x} \cos 3x, \quad x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.6, n = 2$

ب. $f(x) = \sin(\ln x), \quad x_0 = 2.0, x_1 = 2.4, x_2 = 2.6, n = 2$

ج. $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1, x_1 = 1.1, x_2 = 1.3, x_3 = 1.4, n = 3$

د. $f(x) = \cos x + \sin x, \quad x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 1.0, n = 3$

20. ليكن $f(x) = e^x$ لكل $0 \le x \le 2$

أ. قرِّب $f(0.25)$ مستخدمًا استكمالًا داخليًا خطيًّا مع $x_0 = 0$ و $x_1 = 0.5$.

ب. قرّب $f(0.75)$ مستخدمًا استكمالًا داخليًا خطيًا مع $x_0 = 0.5$ و $x_1 = 1$.

ج. قرّب $f(0.25)$ و $f(0.75)$ مستخدمًا ثاني كثيرة حدود استكمال داخلي مع $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$.

د. أي التقريبات أحسن؟ ولماذا؟

21. افترض أنك بحاجة إلى إنشاء جداول من أربع خانات عشرية لدالّة اللوغارتميّة ذات الأساس 10 من $x = 1$ لـ $x = 10$، بحيث يكون الاستكمال الداخلي الخطي فيها دقيقًا لحد 10^{-6}. ضع حدًا لحجم الخطوة في هذا الجدول. ما خيارات حجم الخطوة لضمان وجود $x = 10$ في الجدول؟

22. افترض $x_j = j$ ، $j = 0, 1, 2, 3$. ومن المعلوم أن $P_{0,1}(x) = x + 1$ ، $P_{1,2}(x) = 3x - 1$ و $P_{1,2,3}(1.5) = 4$ فأوجد $P_{0,1,2,3}(1.5)$.

23. افترض $x_j = j$ ، $j = 0, 1, 2, 3$ ومن المعلوم أن $P_{0,1}(x) = 2x + 1, P_{0,2}(x) = x + 1, P_{1,2,3}(2.5) = 3$ فأوجد $P_{0,1,2,3}(2.5)$.

24. تُطبّق خوارزمية نيفيل لتقريب $f(0)$ مستخدمة $f(-2), f(-1), f(1), f(2)$. افترض أن $f(-1)$ زيدت بمقدار 2، وأن $f(1)$ أنقصت بمقدار 3. حدّد الخطأ في الحسابات الأصلية لكثيرة حدود استكمال داخلي لتقريب $f(0)$.

25. أنشئ متتالية لقيم استكمال داخلي y_n لـ $f(1 + \sqrt{10})$، حيث $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ $-5 \le x \le 5$ ووفق الآتي:

لكل $n = 1, 2, \ldots, 10$، ليكن $h = 10/n$ و $y_n = P_n(1 + \sqrt{10})$، حيث إن $P_n(x)$ كثيرة حدود الاستكمال الداخلي لـ $f(x)$ عند النقاط $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ وأن $x_j^{(n)} = -5 + jh$ ، $j = 0, 1, 2, \ldots, n$

هل تبدو المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة إلى $f(1 + \sqrt{10})$؟

معكوس استكمال داخلي Inverse Interpolation افترض $f \in C^1[a, b]$، $f'(x) \neq 0$ on $[a, b]$، وأن لـ f صفرًا واحدًا p ضمن $[a, b]$. لتكن $x_0, \ldots, x_n$ عبارة عن أعداد مختلفة ضمن $[a, b]$ مع $f(x_k) = y_k$ لكل $k = 0, 1, \ldots, n$. لتقريب p، تُنشأ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة n على النقاط $y_0, \ldots, y_n$ لـ f^{-1}. وحيث إن $y_k = f(x_k)$ و $0 = f(p)$ يكون لدينا $f^{-1}(y_k) = x_k$ و $p = f^{-1}(0)$. يسمى الاستكمال الداخلي المكرّر لتقريب $f^{-1}(0)$ (معكوس الاستكمال الداخلي المكرّر).

26. استخدم معكوس استكمال داخلي معاد لإيجاد التقريب لحل $x - e^{-x} = 0$ مع البيانات الآتية:

x	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

27. أنشئ خوارزمية يمكن استخدامها في معكوس استكمال داخلي.

28. أ. تضمنت مقدمة هذا الباب جدول التعداد السكاني للولايات المتحدة للفترة من 1940 إلى 1990.

استخدم كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي لتقريب حجم السكان في الأعوام 1930، 1965 و 2010.

ب. كان عدد السكان عام 1930 123,203,000 تقريبًا. ما دقة نتيجتك في العامين 1965 و 2010 بحسب ما ترى؟

29. يعتقد أن الكميات العالية من حمض التنتلك في أوراق أشجار البلوط البالغة تعيق نمو يرقات عثة الشتاء (*Operophtera bromata L., Geometridae*) التي تؤذي هذه الأشجار كثيرًا في سنوات معينة. ويبين الجدول الآتي معدل وزن عينتين من هذه اليرقات خلال الأيام 28 الأولى بعد ولادتها.

أخذت العينة الأولى من يرقات تربّت على أوراق بلوط طريّة (حديثة). ب. حيث ربّت العينة الثانية على أوراق بالغة (عتيقة) من نفس الشجرة.

أ. استخدم استكمال لاجرانج الداخلي لتقريب منحنى معدل الوزن لكل عينة.

ب. أوجد أعلى معدل وزن مقرب لكل عينة من خلال تحديد كثيرة حدود الاستكمال الداخلي الأعلى.

اليوم	0	6	10	13	17	20	28
معدل وزن العينة (1) بالملجم	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
معدل وزن العينة (2) بالملجم	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

30. في التمرين (24) من الفصل (1.1) تطوّرت سلسلة ماكلورين لتقريب $\operatorname{erf}(x)$ التي هي عبارة عن دالة خطأ التوزيع الطبيعي والمعرّفة على النحو الآتي:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

أ. استخدم سلسلة ماكلورين لإنشاء جدول لـ $\operatorname{erf}(x)$ يكون دقيقًا لغاية 10^{-4} بالنسبة إلى $\operatorname{erf}(x_i)$ حيث إن $x_i = 0.2i,\ i = 0, 1, \ldots, 5$.

ب. استخدم كلًّا من الاستكمال الداخلي الخطي والتربيعي لإيجاد تقريب لـ $\operatorname{erf}(\frac{1}{3})$. أي منهما يبدو أكثر جدوى؟

31. برهن صحة المبرهنة (14.1) باتباع أسلوب برهنة المبرهنة (3.3).

إرشاد: ليكن
$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \cdot \frac{(t - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}}$$

حيث تمثّل $P(x)$ كثيرة حدود تايلور النونية (nth)، استخدم المبرهنة (12.1).

32. برهن أن $\max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |g(x)| = h^2/4$ حيث إن $g(x) = (x - jh)(x - (j+1)h)$.

33. إن كثيرة حدود برنستاين من الدرجة n لـ $f \in C[0, 1]$ هي
$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k}$$

حيث إن $\binom{n}{k}$ تمثل $n!/k!(n-k)!$. يمكن استخدام كثيرات الحدود هذه لتقديم برهان مبرهنة ڤيرستراس للتقريب (1.3) (انظر [Bart]) لكون $\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x)$ لكل $x \in [0, 1]$.

أ. أوجد $B_3(x)$ للدّوال

1. $f(x) = x$ 2. $f(x) = 1$

ب. أثبت أنه لكل $k \le n$ فإن
$$\binom{n-1}{k-1} = \left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}$$

ج. استخدم الفقرة (ب) وحقيقة كون (من 2 الفقرة أ)
$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \quad \text{لكل } n$$
لإثبات أنه لـ $f(x) = x^2$ يكون
$$B_n(x) = \left(\frac{n-1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x$$

د. استخدم الفقرة (ج) لتقدير قيمة n الضرورية لصحة $|B_n(x) - x^2| \le 10^{-6}$ لكل قيم x ضمن $[0, 1]$.

2.3 الفروقات المنقسمة Divided Differences

استخدم الاستكمال الداخلي المكرّر في الفصل السابق لتوليد تقريبات كثيرة حدود بنجاح ومن الرتبة عالية عند نقطة محددة. وتستخدم طرائق الفرق المنقسم المطروحة ضمن هذا الفصل وبنجاح لكثيرات توليد الحدود نفسها. وستكون معالجتنا لطرائق الفرق المنقسم مختصرة؛ لأن النتائج في هذا الفصل لن يكون لها استخدام واسع ضمن المادة اللاحقة. ومعظم المصادر القديمة في التحليل العددي فيها معالجات واسعة لطرائق الفرق المنقسم. وإذا ما تطلب الأمر توسعًا في المعالجة، فإن كتاب هلدبراند [Hild] يعدّ مصدرًا جيدًا حصريًا.

افترض أن $P_n(x)$ كثيرة حدود لاجرانج النونية والمتوافقة مع الدّالة f عند الأعداد المميزة $x_0, x_1, \ldots, x_n$. إن تمثيلات جبرية بديلة تكون مفيدة في حالات معينة. على الرغم من وحدانية كثيرة الحدود هذه، تستخدم فروقات f المنقسمة بالنسبة إلى $x_0, x_1, \ldots, x_n$ للتعبير عن $P_n(x)$ بالصيغة

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \qquad (5.3)$$

لثوابت مناسبة $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

ولتحديد أول هذه الثوابت a_0، لاحظ أنه إذا كتب $P_n(x)$ بصيغة (5.3) فإن حساب $P_n(x)$ عند a_0 يترك فقط الحد الثابت a_0. أي أن

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

وكما في مجالات عديدة كان إسحق نيوتن رائدًا في صيغ الفرق فقد طور صيغًا للاستكمال الداخلي في بدايات 1675 مستخدمًا رمزه Δ في جداول الفروق. لقد اعتمد حلولًا عامة لصيغ الفرق بحيث إن أمثلته الواضحة التي أعطاها ويضمنها صيغ لاجرانج. كانت أحيانًا تعرف بأسماء أخرى

وبالمثل، عند حساب $P(x)$ عند x_1، فالحدود اللاصفرية الوحيدة في حساب $P_n(x_1)$ هي حدود الثوابت والحدود الخطية

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1)$$

وبذلك

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (6.3)$$

ونقدم الآن تعبير الفرق المنقسم الذي يشبه تعبير أيتكن Δ^2 المستخدم في الفصل (5.2). ويُرمز إلى الفرق المنقسم الصفري zeroth divided difference للدّالة f بالنسبة إلى x_i بالرمز $f[x_i]$، وهو عبارة عن قيمة f عند x_i.

$$f[x_i] = f(x_i) \qquad (7.3)$$

وبقية الفروقات المنقسمة تعرّف استقرائيًا. فالفرق المنقسم الأول لـ f بالنسبة إلى x_i و x_{i+1} يُرمز إليه بـ $f[x_i, x_{i+1}]$ ويعرّف بالصيغة

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \qquad (8.3)$$

والفرق المنقسم الثاني $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ يعرّف بالصيغة

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{x+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

وبنفس الطريقة. بعد أن تحدد أول $(k-1)$ من الفروقات المنقسمة

$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k-1}]$ و $f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$

فإن الفرق المنقسم من الرتبة k نسبة إلى $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}$ يُعطى بالصيغة

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \tag{9.3}$$

وتنتهي العملية مع فرق منقسم واحد من الرتبة n وهو

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

ومع هذه الصيغة. يمكن تكرار صياغة الصيغة (6.3) على الصورة $a_1 = f[x_0, x_1]$. وتوجد كثيرة حدود استكمال داخلي في الصيغة (5.3)

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

ووفق المتوقع من حساب a_0 و a_1. فإن الثوابت المطلوبة هي

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$$

جدول 7.3

x	$f(x)$	الفروق المنقسمة الأولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \dfrac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

لكل n ، ... ، $k = 0, 1$. وبذلك يمكن إعادة كتابة $P_n(x)$ بالصيغة (انظر [Hild, pp. 43–47])

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1}) \qquad (10.3)$$

وقيمة $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ مستقلة عن ترتيب الأعداد $x_0, x_1, \ldots, x_k$، وتتضح في التمرين (21) أيضًا.

إن توليد الفروقات المنقسمة مبين في جدول (7.3). ويمكن تحديد اثنين من الفروقات المنقسمة الرابعة، وفرق منقسم خامس من هذه البيانات أيضًا.

إن صيغة المخرجات في الخوارزمية (2.3) يمكن تحويرها لإنتاج الفروقات المنقسمة كلها. وقد نُفِّذ ذلك في المثال (1) أيضًا.

ALGORITHM

الخوارزمية 2.3

الفرق المنقسم لنيوتن Newton's Divided-Difference

لإيجاد معامل الفرق المنقسم لكثيرة حدود استكمال داخلي $P(x)$ على $(n + 1)$ من الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ للدّالة f.

المدخلات: أرقام $x_0, x_1, \ldots, x_n$. قيم $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ مثل $F_{0,0}, F_{1,0}, \ldots, F_{n,0}$

المخرجات: الأعداد $F_{0,0}, F_{1,1}, \ldots, F_{n,n}$ حيث

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 1, 2, \ldots, n$ وعند $j = 1, 2, \ldots, i$ ضع $F_{i,j} = \dfrac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$
2	المخرجات $(F_{0,0}, F_{1,1}, \ldots, F_{n,n})$: $(F_{i,i}$ is $f[x_0, x_1, \ldots, x_i])$ توقف.

■

مثال 1

استخدمت كثيرات حدود استكمال داخلي متنوعة لتقريب $f(1.5)$ في المثال (3) من الفصل (1.3)، باستخدام البيانات في الأعمدة الثلاثة الأولى من جدول (8.3). وتتضمن البيانات المتبقية الأخرى من جدول (8.3) فروقات منقسمة حسبت باستخدام الخوارزمية (2.3).

جدول 8.3

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \ldots, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			−0.4837057			
1	1.3	0.6200860		−0.1087339		
			−0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
			−0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			−0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

إن معامل كثيرة حدود استكمال داخلي ضمن القطر في الجدول. وكثيرة الحدود هي

$$P_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-1.0) - 0.1087339(x-1.0)(x-1.3)$$
$$+ 0.0658784(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)$$
$$+ 0.0018251(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)$$

لاحظ أن القيمة $P_4(1.5) = 0.5118200$ تتفق والنتيجة في الفصل (1.3) من المثال (3)، ويجب أن يكون لهما كثيرة الحدود نفسها أيضًا.

إن مبرهنة القيمة الوسطى تطبق في الصيغة (8.3) عندما $i = 0$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

لتشير إلى أنه عند وجود f'، فإن $f[x_0, x_1] = f'(\xi)$ لعدد ما ξ ما بين x_0 و x_1. تعمل المبرهنة الآتية على تعميم هذه النتيجة.

مبرهنة 6.3 لتكن $f \in C^n[a, b]$، ولتكن $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعدادًا مختلفة تنتمي للفترة $[a, b]$. عندئذ يوجد عدد ξ حيث $\xi \in (a, b)$ (عادة غير معلوم) بحيث يكون

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad ■$$

البرهان ليكن $g(x) = f(x) - P_n(x)$

وحيث إن $f(x_i) = P_n(x_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$، فإن الدالة g لها أصفار مختلفة في $[a, b]$. وتشير مبرهنة رول المعممة Generalized Rolle's Theorem إلى وجود عدد ξ في (a, b) مع $g^{(n)}(\xi) = 0$، ومن ثَمَّ

$$0 = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) \text{ و } P_n^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi)$$

ولكون $P_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n، ومعاملها الأمامي $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$، فإن

$$P_n^{(n)}(x) = n!\,f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

لكل قيم x. ونتيجة لذلك

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad ■■■$$

يمكن وضع صيغة نيوتن للفرق المنقسم بصيغة مبسطة عندما تكون $x_0, x_1, \ldots, x_n$ مرتبة على التوالي بمسافات متساوية. في هذه الحالة نقدم الصيغة $h = x_{i+1} - x_i$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n-1$ وندع $x = x_0 + sh$. لذا يمكن كتابة الفرق $x - x_i$ بصيغة $x - x_i = (s - i)h$ وأخيرا فالصيغة (10.3) تصبح

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \cdots$$
$$+ s(s-1)\cdots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$
$$= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

وباستخدام صيغة ذات الحدين

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

نستطيع كتابة الصيغة عن $P_n(x)$ على نحو مدمج وعلى الصورة الآتية:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_i, \ldots, x_k] \qquad (11.3)$$

إن صيغة نيوتن للفرق الأمامي Newton forward-difference formula تُنشأ باعتماد تعبير الفرق الأمامي Δ الذي تناولناه في طريقة أيتكن Δ^2. ومع هذه الصيغة

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h}\right] = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

وعموما

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{1}{k! h^k}\Delta^k f(x_0)$$

وحيث إن $f[x_0] = f(x_0)$، فالصيغة (11.3) لها الصيغة الآتية:

صيغة نيوتن للفرق الأمامي Newton Forward-Difference Formula

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \qquad (12.3)$$

فإذا أُعيد ترتيب نقاط الاستكمال الداخلي من الأخير إلى الأول بالشكل $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$ فإنه يمكننا كتابة صيغة الاستكمال الداخلي على النحو الآتي:

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots$$
$$+ f[x_n, \ldots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)$$

وبالإضافة إلى ذلك، إذا كانت النقاط متساوية البعد فيما بينها مع $x = x_n + sh$ و $x = x_i + (s + n - i)h$، فإن

$$P_n(x) = P_n(x_n + sh)$$
$$= f[x_n] + shf[x_n, x_{n-1}] + s(s+1)h^2 f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \cdots$$
$$+ s(s+1)\cdots(s+n-1)h^n f[x_n, \ldots, x_0].$$

وهذا يستخدم لاشتقاق صيغة تطبيقية أكثر شيوعًا ومعروفة بـ (صيغة نيوتن للفرق المتراجع) "Newton backward-difference formula". ولشرح هذه الصيغة، نحتاج إلى التعريف الآتي:

تعريف 7.3

إذا كان لدينا المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ فنرمز للفرق المتراجع بالرمز ∇p_n (يقرأ $nabla\ p_n$)، حيث

$$\nabla p_n = p_n - p_{n-1} \quad \text{لكل } n \geq 1$$

وتعرّف القوى العليا إرجاعيًا كالآتي:

$$\nabla^k p_n = \nabla(\nabla^{k-1} p_n) \quad \text{لكل} \quad k \geq 2$$

يؤدي تعريف (7.3) إلى

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h}\nabla f(x_n), \qquad f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2}\nabla^2 f(x_n)$$

وعمومًا

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!h^k}\nabla^k f(x_n)$$

وأخيرًا

$$P_n(x) = f[x_n] + s\nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f(x_n) + \cdots + \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n)$$

وإذا وسّعنا صيغة ذات الحدين لتشمل قيم s الحقيقية جميعها بجعل

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)\cdots(-s-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{s(s+1)\cdots(s+k-1)}{k!}$$

فإن

$$P_n(x) = f[x_n] + (-1)^1\binom{-s}{1}\nabla f(x_n) + (-1)^2\binom{-s}{2}\nabla^2 f(x_n) + \cdots + (-1)^n\binom{-s}{n}\nabla^n f(x_n)$$

تعطي النتيجة الآتية:

صيغة نيوتن للفرق المتراجع　　Newton Backward-Difference Formula

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{-s}{k}\nabla^k f(x_n) \tag{13.3}$$

مثال 2 يقابل جدول (9.3) للفرق المنقسم البيانات في مثال (1):

جدول 9.3

		الفروق المنقسمة الأولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة	الفروق المنقسمة الرابعة
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		−0.5489460		0.0658784	
1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
		−0.5786120		0.0680685	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	0.1103623				

تستخدم كثيرة حدود استكمال داخلي واحد فقط من الرتبة 4 في أكثر نقاط البيانات الخمس هذه. لكننا سننظم نقاط البيانات لإيجاد أفضل تقريبات استكمال داخلي برتب 1 و 2 و 3. وهذا سوف يعطينا تقريبا دقيقًا من الرتبة الرابعة لقيمة x المعلومة.

فإذا تطلب الأمر تقريبًا إلى $f(1.1)$ فإن الاختيار المعقول للنقاط هو

$$x_0 = 1.0,\ x_1 = 1.3,\ x_2 = 1.6,\ x_3 = 1.9,\ x_4 = 2.2$$

لأن هذا الاختيار يعمل في اتجاه الاستخدام المبكر لنقاط البيانات الأقرب إلى $x = 1.1$. ويعمل في اتجاه استخدام الفرق المنقسم الرابع أيضًا. وهذا يؤدي إلى أن $h = 0.3$ و $s = \frac{1}{3}$، ومن ثم فإن صيغة نيوتن للفرق المنقسم المتراجع تستخدم مع الفروقات المنقسمة التي لها سيطرة قوية في جدول (9.3).

$$\begin{aligned}
P_4(1.1) = P_4(1.0 + \tfrac{1}{3}(0.3)) &= 0.7651977 + \tfrac{1}{3}(0.3)(-0.4837057)\\
&+ \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{2}{3}\right)(0.3)^2(-0.1087339)\\
&+ \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{2}{3}\right)\left(-\tfrac{5}{3}\right)(0.3)^3(0.0658784)\\
&+ \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{2}{3}\right)\left(-\tfrac{5}{3}\right)\left(-\tfrac{8}{3}\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.7196460
\end{aligned}$$

ولتقريب قيمة عندما تكون x قريبة من نهاية القيمة الجدولية، $x = 2.0$ على سبيل المثال، فإننا نرغب مرة أخرى في الاستخدام المبكر لنقاط البيانات الأقرب إلى x. ويتطلب هذا استخدام صيغة نيوتن للفرق المنقسم المتراجع مع $s = -\frac{2}{3}$، وتكون الفروقات المنقسمة في جدول (9.3) الموضوع تحتها خط هي

$$\begin{aligned}
P_4(2.0) = P_4\left(2.2 - \tfrac{2}{3}(0.3)\right) &= 0.1103623 - \tfrac{2}{3}(0.3)(-0.5715210)\\
&- \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)(0.3)^2(0.0118183) - \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)(0.3)^3(0.0680685)\\
&- \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.2238754
\end{aligned}$$

ليست صيغ التقدم والتراجع مناسبة لتقريب $f(x)$ عندما تكون x قرب مركز الجدول، لأن استخدام أي من طريقتي التقدم أو التراجع في حالة وجود الفرق بأعلى مرتبة سوف يحول دون اقتراب x_0 من x. وهذه أعداد من صيغ الفرق المنقسم متوافرة لهذه الحالة، وكل واحدة منها لها ظروف يكون استخدامها أكثر إيجابية، وتُعرف هذه الطرائق بـ "صيغ الفرق المركزي" "centered-difference formula". سنستعرض هنا صيغة فرق مركزي واحدة هي "طريقة سترلنك Stirling's method"، ونوجّه القارئ مرة أخرى إلى [Hild] إذا أراد تغطية المادة تماما.

نشر جيمس سترلنك James Stirling (1770- 1692) هذا إلى جانب صيغ عديدة أخرى في Methodus Differentialis عام 1730 وتضمن عمله هذا تقنيات لتسريع تقارب سلاسل مختلفة

نستخدم x_0 بالقرب من النقطة المراد تقريبها بالنسبة إلى صيغ الفرق المركزي. ونعنون النقاط مباشرة أقل من x_0 لتكون $x_1, x_2, \ldots$، وتلك التي تكون مباشرة أكبر من x_0 لتكون $\ldots, x_{-1}, x_{-2}$. ووفقًا لهذا الأسلوب، فإن صيغة سترلنك تكون

$$\begin{aligned}
P_n(x) = P_{2m+1}(x) &= f[x_0] + \frac{sh}{2}\left(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]\right) + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] \qquad (14.3)\\
&+ \frac{s(s^2-1)h^3}{2} f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]) + \cdots\\
&+ s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_{-m}, \ldots, x_m]\\
&+ \frac{s(s^2-1)\cdots(s^2-m^2)h^{2m+1}}{2}\left(f[x_{-m-1}, \ldots, x_m] + f[x_{-m}, \ldots, x_{m+1}]\right)
\end{aligned}$$

نستخدم الصيغة نفسها إذا كان $n = 2m + 1$ عددًا فرديًا. وإذا كان $n = 2m$ عددًا زوجيًا ولكننا نحذف السطر الأخير. والمدخلات المستخدمة لهذه الصيغة مخطوط تحتها في جدول (10.3).

جدول 10.3

x	$f(x)$	الفروق المنقسمة الأولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة	الفروق المنقسمة الرابعة
x_{-2}	$f[x_{-2}]$				
		$f[x_{-2}, x_{-1}]$			
x_{-1}	$f[x_{-1}]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0]$		
		$\underline{f[x_{-1}, x_0]}$		$\underline{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1]}$	
x_0	$\underline{f[x_0]}$		$\underline{f[x_{-1}, x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}$
		$\underline{f[x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$				

مثال 3

افترض وجود جدول للبيانات المعطاة في الأمثلة السابقة. لاستخدام صيغة سترلنك لتقريب $f(1.5)$ مع $x_0 = 1.6$، نستخدم المدخلات المخطوط تحتها في جدول الفروق (11.3).

جدول 11.3

x	$f(x)$	الفروق المنقسمة الأولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة	الفروق المنقسمة الرابعة
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		<u>−0.5489460</u>		<u>0.0658784</u>	
1.6	<u>0.4554022</u>		<u>−0.0494433</u>		<u>0.0018251</u>
		<u>−0.5786120</u>		<u>0.0680685</u>	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	0.1103623				

والصيغة باستخدام $h = 0.3, x_0 = 1.6, s = -\frac{1}{3}$ تصبح

$$
\begin{aligned}
f(1.5) &\approx P_4\left(1.6 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)(0.3)\right) \\
&= 0.4554022 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{0.3}{2}\right)\left((-0.5489460) + (-0.5786120)\right) \\
&\quad + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 (0.3)^2(-0.0494433) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^3(0.0658784 + 0.0680685) \\
&\quad + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.5118200
\end{aligned}
$$

■

EXERCISE SET مجموعة التمارين 2.3

1. استخدم الصيغة (10.3) أو الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1 للبيانات الآتية. أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(8.4)$ إذا كان $f(8.1) = 16.94410,\ f(8.3) = 17.56492,\ f(8.6) = 18.50515,\ f(8.7) = 18.82091$

ب. $f(0.9)$ إذا كان $f(0.6) = -0.17694460,\ f(0.7) = 0.01375227,\ f(0.8) = 0.22363362,\ f(1.0) = 0.65809197$

2. استخدم الصيغة (17.3) أو الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1 للبيانات الآتية. أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(0.43)$ إذا كان $f(0) = 1,\ f(0.25) = 1.64872,\ f(0.5) = 2.71828,\ f(0.75) = 4.48169$

ب. $f(0)$ إذا كان $f(-0.5) = 1.93750,\ f(-0.25) = 1.33203,\ f(0.25) = 0.800781,\ f(0.5) = 0.687500$

3. استخدم صيغة نيوتن للفرق الأمامي لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3، 2، 1 للبيانات الآتية. أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(-\frac{1}{3})$ إذا كان $f(-0.75) = -0.07181250,\ f(-0.5) = -0.02475000,\ f(-0.25) = 0.33493750,\ f(0) = 1.10100000$

ب. $f(0.25)$ إذا كان $f(0.1) = -0.62049958,\ f(0.2) = -0.28398668,\ f(0.3) = 0.00660095,\ f(0.4) = 0.24842440$

4. استخدم صيغة نيوتن للفرق الأمامي لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1 للبيانات الآتية. أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(0.43)$ إذا كان $f(0) = 1,\ f(0.25) = 1.64872,\ f(0.5) = 2.71828,\ f(0.75) = 4.48169$

ب. $f(0.18)$ إذا كان $f(0.1) = -0.29004986,\ f(0.2) = -0.56079734,\ f(0.3) = -0.81401972,\ f(0.4) = -1.0526302$

5. استخدم صيغة نيوتن للفرق الأمامي لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1 للبيانات الآتية. أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(-\frac{1}{3})$ إذا كان $f(-0.75) = -0.07181250,\ f(-0.5) = -0.02475000,\ f(-0.25) = 0.33493750,\ f(0) = 1.10100000$

ب. $f(0.25)$ إذا كان $f(0.1) = -0.62049958,\ f(0.2) = -0.28398668,\ f(0.3) = 0.00660095,\ f(0.4) = 0.24842440$

6. استخدم صيغة نيوتن للفرق التراجع لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1 للبيانات الآتية. أجرِ تقريب القيم المحددة مستخدمًا كل واحدة من كثيرات الحدود:

أ. $f(0.43)$ إذا كان $f(0) = 1,\ f(0.25) = 1.64872,\ f(0.5) = 2.71828,\ f(0.75) = 4.48169$

ب. $f(0.25)$ إذا كان $f(-1) = 0.86199480,\ f(-0.5) = 0.95802009,\ f(0) = 1.0986123,\ f(0.5) = 1.2943767$

7. أ. استخدم الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 للنقاط غير المتساوية التباعد والمعطاة في الجدول الآتي:

x	$f(x)$
−0.1	5.30000
0.0	2.00000
0.2	3.19000
0.3	1.00000

ب. أضف $f(0.35) = 0.97260$ إلى الجدول. وأنشئ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة 4.

8. أ. استخدم الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 4 للنقط غير المتساوية التباعد والمعطاة في الجدول الآتي:

$f(x)$	x
-6.00000	0.0
-5.89483	0.1
-5.65014	0.3
-5.17788	0.6
-4.28172	1.0

ب. أضف $f(1.1) = -3.99583$ إلى الجدول. وأنشئ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة 5.

9. أ. قرّب $f(0.05)$ مستخدما البيانات الآتية وصيغة نيوتن للفرق المنقسم الأمامي.

0.8	0.6	0.4	0.2	0.0	x
2.22554	1.82212	1.49182	1.22140	1.00000	$f(x)$

ب. استخدم صيغة نيوتن للفرق المنقسم المتراجع لتقريب $f(0.65)$.

ج. استخدم صيغة سترلنك لتقريب $f(0.43)$.

10. أثبت أن كثيرة الحدود التي تستكمل داخليًا هذه البيانات تكون من الرتبة 3.

3	2	1	0	-1	-2	x
-4	13	16	11	4	1	$f(x)$

11. أ. أثبت أن كثيرتي الحدود التكعيبيتين

$$P(x) = 3 - 2(x+1) + 0(x+1)(x) + (x+1)(x)(x-1)$$

و

$$Q(x) = -1 + 4(x+2) - 3(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)(x)$$

كليهما تستكمل داخليًا البيانات الآتية:

2	1	0	-1	-2	x
3	-1	1	3	-1	$f(x)$

ب. لماذا لا تكون الفقرة (أ) مخالفة لخاصيّة وحدانية كثيرات حدود الاستكمال الداخلي؟

12. تحقّق كثيرة الحدود $P(x)$ من الرتبة الرابعة ما يأتي: $\Delta^4 P(0) = 24,\ \Delta^3 P(0) = 6,\ \Delta^2 P(0) = 0$ حيث $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$. احسب $\Delta^2 P(10)$.

13. البيانات الآتية معطاة لكثيرة حدود $P(x)$ مجهولة الرتبة

2	1	0	x
4	-1	2	$P(x)$

14. حدّد معامل x^2 في $P(x)$ إذا كانت الفروقات الأمامية جميعها من الرتبة الثالثة تساوي 1. البيانات الآتية معطاة لكثيرة حدود $P(x)$ مجهولة الرتبة

3	1	2	0	x
18	9	15	4	$P(x)$

حدّد معامل x^3 في $P(x)$ إذا كانت الفروقات الأمامية جميعها من الرتبة الثالثة تساوي 1.

15. صيغة نيوتن للفرق الأمامي مستخدمة لتقريب $f(0.3)$ مع البيانات الآتية:

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$f(x)$	15.0	21.0	30.0	51.0

لنفترض أننا اكتشفنا إنقاص $f(0.4)$ بمقدار 10 وزيادة $f(0.6)$ بمقدار 5. بأي مقدار سيتغير تقريب $f(0.3)$ ؟

16. تعطي صيغة نيوتن للفرق المنقسم كثيرة حدود استكمال داخلي بالنسبة إلى الدّالة f

$$P_3(x) = 1 + 4x + 4x(x - 0.25) + \frac{16}{3}x(x - 0.25)(x - 0.5)$$

على النقاط $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75$. أوجد $f(0.75)$.

17. الفروقات المنقسمة الارتجاعية بالنسبة إلى الدّالة f معطاة أدناه.

$x_0 = 0.0$	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1]$	
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$
		$f[x_1, x_2] = 10$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$		

حدّد المدخلات المفقودة في الجدول.

18. أ. تضمنت مقدمة هذا الباب جدولًا يضمّ عدد سكان الولايات المتحدة للأعوام 1940 حتى 1990. استخدم فروقات منقسمة مناسبة لتقريب عدد السكان في السنوات 1930 و 1965 و 2010.

ب. كان عدد السكان عام 1930 كالتالي 123,203,000 تقريبًا. فما دقة أرقام السنوات 1965 و 2010 في رأيك؟

19. ليكن

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

استخدم $P_n(x_2)$ لإثبات أن $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$.

20. أثبت أن $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$ لبعض $\xi(x)$.

إرشاد: من الصيغة (3.3)

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

مفترضين كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة $n + 1$ على $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$ ، يكون لدينا

$$f(x) = P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x](x - x_0)\cdots(x - x_n).]$$

21. ليكن $i_0, i_1, \ldots, i_n$ إعادة ترتيب للأعداد الصحيحة $0, 1, \ldots, n$. أثبت أن

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

إرشاد: افترض أن المعاملات الأمامية لكثيرة حدود لاجرانج من الرتبة n على البيانات $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$.

3.3 استكمال هرمايت الداخلي Hermite Interpolation

الكلمة اللاتينية Osculum تعني "الثغر الصغير" أو "قبلة" عند تطبيقها على منحنى. وتشير إلى تماسات فقط ولها نفس الشكل استيفاء هرمايت الداخلي له هذه الخاصية. لأن مطابقة منحنى معلوم ومشتقته تدفع بمنحنى الاستيفاء الداخلي لتقبيل المنحنى المعلوم.

كثيرات حدود التذبذب Osculating polynomials تعمم كثيرات حدود تايلور وكثيرات حدود لاجرانج كلها. لنفترض أن لدينا $n+1$ من الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ في $[a, b]$ مع أعداد صحيحة غير سالبة $m_0, m_1, \ldots, m_n$ و $m = \max\{m_0, m_1, \ldots, m_n\}$. كثيرة حدود التذبذب التي تقرب الدالة $f \in C^m[a, b]$ عند x_i ولكل $i = 0, \ldots, n$ هي كثيرة حدود بأقل رتبة مع خاصية كونها تتفق مع الدالة f واشتقاقاتها كلها من الرتبة تساوي أو أقل من m_i عند x_i. ورتبة كثيرة حدود التذبذب هذه تكون على الأكثر

$$M = \sum_{i=0}^{n} m_i + n$$

وإن عدد الشروط المطلوب تحققها هو $\sum_{i=0}^{n} m_i + (n+1)$، وكثيرة حدود من الرتبة M لها $M + 1$ من المعاملات التي يمكن استخدامها لتحقق هذه الشروط.

تعريف 8.3

كان شارلس هرمايت Charles Hermite (1822-1901) قد عمل اكتشافات في جوانب عديدة وخصوصا التحليل المركب ونظرية الأعداد وكان معروفا ببرهانه عام 1873 أن e عبارة عن عدد غير معرف وفي عام 1882 استخدم لندمان Lindemann برهانا مماثلا لإثبات كون π هي عدد غير معرف أيضا والذي أوضح أن "تربيع الدائرة" غير ممكن مع أدوات إقليدس القياسية

لتكن $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعدادًا مختلفة عددها $n+1$ تنتمي إلى الفترة $[a, b]$. وإن m_i عدد صحيح غير سالب يقابل x_i، و $i = 0, 1, \ldots, n$. افترض أن $f \in C^m[a, b]$، بحيث $m = \max_{0 \le i \le n} m_i$.

إن كثيرة حدود التذبذب التي تقرّب f هي كثيرة حدود $P(x)$ بأقل رتبة مع كون

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k} \quad \text{ولكل } i = 0, 1, \ldots, n \text{ و } k = 0, 1, \ldots, m_i \quad ■$$

لاحظ أنه عندما $n = 0$، فإن كثيرة حدود التذبذب التي تقرّب f هي كثيرة حدود تايلور من الرتبة m_0 لـ f عند x_0. وحينما $m_i = 0$ لكل i، فإن كثيرة حدود التذبذب هي كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة n التي تستكمل f داخليًا على $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

وتعطي الحالة عندما $m_i = 1$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$ كثيرات حدود هرمايت. وتتفق كثيرات الحدود هذه مع الدالة f عند $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ولدالة محددة f. بالإضافة إلى ذلك، بما أن مشتقاتها الأولى تتفق ومثيلاتها في الدالة f، فإن لهما شكل الدالة نفسه $(x_i, f(x_i))$ في واقع توافق خطوط التماس لكثيرة الحدود وللدالة. ستقتصر دراستنا لكثيرات حدود التماس على هذه الحالة. ونفترض أولاً أن مبرهنة ما توضح صيغة كثيرات حدود هرمايت بالتحديد.

مبرهنة 9.3

قد أعطى هرمايت Hermite توضيحا لكثيرة حدود التذبذب ضمن رسالة إلى كارل بورشاردت Carl W. Borchardt عام 1878 حيث اعتاد إرسال نتائجه إليه. وكان توضيحه هذا ذا قيمة تطبيقية لاستخدام تقنيات التكامل المركب لحل مسألة القيمة الحقيقية. انظر الصفحة ff303 من [Golds]

إذا كانت $f \in C^1[a, b]$ و $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ فإن كثيرة الحدود الوحيدة وبأقل رتبة المتفقة مع f و f' عند $x_0, \ldots, x_n$ هي كثيرة حدود هرمايت من الرتبة $2n+1$ على الأكثر

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$$

حيث إن $H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)]L^2_{n,j}(x)$ و $\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L^2_{n,j}(x)$.

وتمثل $L_{n,j}(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n لمعامل لاجرانج من الرتبة j والمعرّفة في الصيغة (2.3). بالإضافة إلى ذلك. إذا كان $f \in C^{2n+2}[a, b]$ فإن

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x-x_0)^2 \ldots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi(x))$$

لبعض $\xi(x)$ (مجهولة عمومًا) في الفترة (a, b). ■

البرهان تذكّر أولاً أن

$$L_{n,j}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } i \neq j \\ 1 & \text{إذا كان } i = j \end{cases}$$

ولذلك عندما $i \neq j$ فإن

$$\hat{H}_{n,j}(x_i) = 0 \quad \text{و} \quad H_{n,j}(x_i) = 0$$

حيث

$$\hat{H}_{n,i}(x_i) = (x_i - x_i) \cdot 1^2 = 0 \quad \text{و} \quad H_{n,i}(x_i) = [1 - 2(x_i - x_i)L'_{n,i}(x_i)] \cdot 1 = 1$$

نتيجة لذلك

$$H_{2n+1}(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} f(x_j) \cdot 0 + f(x_i) \cdot 1 + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \cdot 0 = f(x_i)$$

لذا H_{2n+1} يتفق مع f عند $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

ولإثبات توافق H'_{2n+1} مع f' عند الرؤوس، لاحظ أولاً أن $L_{n,j}(x)$ هو عامل $H'_{n,j}(x)$. لذا $H'_{n,j}(x_i) = 0$ عندما $i \neq j$. بالإضافة إلى ذلك. عندما $i = j$ و $L_{n,i}(x_i) = 1$ يكون لدينا

$$\begin{aligned} H'_{n,i}(x_i) &= -2L'_{n,i}(x_i) \cdot L^2_{n,i}(x_i) + [1 - 2(x_i - x_i)L'_{n,i}(x_i)]2L_{n,i}(x_i)L'_{n,i}(x_i) \\ &= -2L'_{n,i}(x_i) + 2L'_{n,i}(x_i) = 0 \end{aligned}$$

عندئذ $H'_{n,j}(x_i) = 0$ لكل i و j.

وأخيرًا

$$\begin{aligned} \hat{H}'_{n,j}(x_i) &= L^2_{n,j}(x_i) + (x_i - x_j)2L_{n,j}(x_i)L'_{n,j}(x_i) \\ &= L_{n,j}(x_i)[L_{n,j}(x_i) + 2(x_i - x_j)L'_{n,j}(x_i)] \end{aligned}$$

لذا $\hat{H}'_{n,i}(x_i) = 1$ و $\hat{H}'_{n,j}(x_i) = 0$ إذا كان $j \neq i$ وبتجميع هذه الحقائق يكون لدينا

$$H'_{2n+1}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot 0 + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} f'(x_j) \cdot + f'(x_i) \cdot 1 = f'(x_i)$$

وأخيرًا يتوافق H_{2n+1} مع f و H'_{2n+1} مع f' عند $x_0, x_1, \ldots, x_n$. لقد طلب برهنة وحدانية كثيرة

الحدود هذه وصيغة الخطأ في التمرين (11). ■ ■ ■

مثال 1 استخدمت كثيرة حدود هرمايت المتوافقة مع البيانات الموجودة في جدول (12.3) لإيجاد تقريب إلى $f(1.5)$.

جدول 12.3

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.6200860	−0.5220232
1	1.6	0.4554022	−0.5698959
2	1.9	0.2818186	−0.5811571

نحسب أولاً كثيرات حدود لاجرانج ومشتقاتها. وهذا يعطي

$$L_{2,0}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9},\qquad L'_{2,0}(x)=\frac{100}{9}x-\frac{175}{9}$$

$$L_{2,1}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{-100}{9}x^2+\frac{320}{9}x-\frac{247}{9},\qquad L'_{2,1}(x)=\frac{-200}{9}x+\frac{320}{9}$$

و

$$L_{2,2}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{50}{9}x^2-\frac{145}{9}x+\frac{104}{9},\qquad L'_{2,2}(x)=\frac{100}{9}x-\frac{145}{9}$$

إن كثيرات حدود $H_{2,j}(x)$ و $\hat{H}_{2,j}(x)$ هي

$$H_{2,0}(x)=[1-2(x-1.3)(-5)]\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$=(10x-12)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$H_{2,1}(x)=1\cdot\left(\frac{-100}{9}x^2+\frac{320}{9}x-\frac{247}{9}\right)^2$$

$$H_{2,2}(x)=10(2-x)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{145}{9}x+\frac{104}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,0}(x)=(x-1.3)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,1}(x)=(x-1.6)\left(\frac{-100}{9}x^2+\frac{320}{9}x-\frac{247}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,2}(x)=(x-1.9)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{145}{9}x+\frac{104}{9}\right)^2$$

وأخيراً

$$H_5(x)=0.6200860H_{2,0}(x)+0.4554022H_{2,1}(x)+0.2818186H_{2,2}(x)$$
$$-0.5220232\hat{H}_{2,0}(x)-0.5698959\hat{H}_{2,1}(x)-0.5811571\hat{H}_{2,2}(x)$$

$$H_5(1.5) = 0.6200860\left(\frac{4}{27}\right) + 0.4554022\left(\frac{64}{81}\right) + 0.2818186\left(\frac{5}{81}\right)$$
$$- 0.5220232\left(\frac{4}{405}\right) - 0.5698959\left(\frac{-32}{405}\right) - 0.5811571\left(\frac{-2}{405}\right)$$
$$= 0.5118277$$

نتيجة دقيقة لكل مدى. ■

ومع أن المبرهنة (9.3) تهيئ توضيحا كاملًا لكثيرات حدود هرمايت. فمن الواضح في المثال (1) أن الحاجة إلى تحديد كثيرات حدود لاجرانج وحسابها واشتقاقاتها تجعل العملية مملة حتى مع قيم n الصغيرة. إن الطريقة البديلة لتوليد تقريبات هرمايت تنشأ على صيغة نيوتن للفرق المنقسم للاستكمال الداخلي عدد (10.3) لكثيرة حدود لاجرانج عند $x_0, x_1, \ldots, x_n$ هي

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

والربط ما بين الفرق المنقسم من الرتبة n واشتقاق f هو كما في المبرهنة (6.3) من الفصل (2.3).

افترض أن الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ معطاة مع قيم f و f' عند هذه الأعداد معًا. عرّف متتالية جديدة $z_0, z_1, \ldots, z_{2n+1}$ بالصيغة $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$ وأنشئ جدول الفرق المنقسم بصيغة جدول (7.3). حيث يستخدم $z_0, z_1, \ldots, z_{2n+1}$.

وحيث إن $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ لكل i، فإننا لا نستطيع تعريف $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ بصيغة الفرق المنقسم. فلو افترضنا بالاستناد إلى المبرهنة (6.3) أن التعويض المقبول في هذه الحالة هو $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(z_{2i}) = f'(x_i)$. يمكننا استخدام المدخلات

$$f'(x_0), f'(x_1), \ldots, f'(x_n)$$

بدلًا من الفروقات المنقسمة الأولى غير المعرّفة

$$f[z_0, z_1], f[z_2, z_3], \ldots, f[z_{2n}, z_{2n+1}]$$

تنتج بقية الفروقات المنقسمة كالمعتاد. وتوظف الفروقات المنقسمة المناسبة في صيغة نيوتن للفرق المنقسم لاستكمال داخلي. ويبين جدول (13.3) المدخلات المستخدمة في أول ثلاثة أعمدة للفرق المنقسم عند تحديد كثيرة حدود هرمايت $H_5(x)$ لـ x_0, x_1, x_2. تنتج المدخلات الباقية بنفس الأسلوب وعلى نحو جدول (7.3). وكثيرة حدود هرمايت هي

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0)(x - z_1)\cdots(x - z_{k-1})$$

ويمكن إيجاد برهان ذلك في [Po, p. 56] .

جدول 13.3

z	$f(z)$	الفروق المنقسمة الأولى	الفروق المنقسمة الثانية
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

مثال 2 تستخدم مدخلات جدول (14.3) بيانات المثال (1)، وإن المدخلات التي تحتها خط هي البيانات المعطاة. وقد نتج الباقي باستخدام صيغة الفرق المنقسم المعيارية (9.3):

$$\begin{aligned} H_5(1.5) = {} & 0.6200860 + (1.5 - 1.3)(-0.5220232) + (1.5 - 1.3)^2(-0.0897427) \\ & + (1.5 - 1.3)^2(1.5 - 1.6)(0.0663657) \\ & + (1.5 - 1.3)^2(1.5 - 1.6)^2(0.0026663) \\ & + (1.5 - 1.3)^2(1.5 - 1.6)^2(1.5 - 1.9)(-0.0027738) \\ = {} & 0.5118277. \end{aligned}$$

جدول 14.3

1.3	0.6200860					
		−0.5220232				
1.3	0.6200860		−0.0897427			
		−0.5489460		0.0663657		
1.6	0.4554022		−0.0698330		0.0026663	
		−0.5698959		0.0679655		−0.0027738
1.6	0.4554022		−0.0290537		0.0010020	
		−0.5786120		0.0685667		
1.9	0.2818186		−0.0084837			
		−0.5811571				
1.9	0.2818186					

■

ويمكن توسيع الأسلوب المستخدم في الخوارزمية (3.3) ليستخدم في تحديد كثيرات حدود تماس أخرى. ونجد مناقشة مختصرة حول تلك العملية في [Po, pp. 53–57].

ALGORITHM

الخوارزمية 3.3

استكمال هرمايت الداخلي Hermite Interpolation

لإيجاد معامل كثيرة حدود هرمايت للاستكمال الداخلي $H(x)$ على $(n+1)$ من الأعداد المختلفة $x_0, \ldots, x$ للدَّالة f:

المدخلات: أرقام $x_0, x_1, \ldots, x_n$. قيم $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ و $f'(x_0), \ldots, f'(x_n)$

المخرجات: الأعداد $Q_{0,0}, Q_{1,1}, \ldots, Q_{2n+1,2n+1}$ حيث

$$\begin{aligned} H(x) = {} & Q_{0,0} + Q_{1,1}(x-x_0) + Q_{2,2}(x-x_0)^2 + Q_{3,3}(x-x_0)^2(x-x_1) \\ & + Q_{4,4}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 + \cdots \\ & + Q_{2n+1,2n+1}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \cdots (x-x_{n-1})^2(x-x_n) \end{aligned}$$

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 0, 1, \ldots, n$ نفّذ الخطوتين 2 و 3.
2	ضع $z_{2i} = x_i$ $z_{2i+1} = x_i$ $Q_{2i,0} = f(x_i)$ $Q_{2i+1,0} = f(x_i)$ $Q_{2i+1,1} = f'(x_i)$
3	إذا كان $i \neq 0$ فضع $Q_{2i,1} = \dfrac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}$
4	لقيم $i = 2, 3, \ldots, 2n+1$ ولقيم $j = 2, 3, \ldots, i$ ضع $Q_{i,j} = \dfrac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}$
5	المخرجات $(Q_{0,0}, Q_{1,1}, \ldots, Q_{2n+1,2n+1})$ توقف.

■

EXERCISE SET مجموعة التمارين 3.3

1. استخدم مبرهنة (9.3) أو الخوارزمية (3.3) لإنشاء كثيرة حدود التقريب للبيانات الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.3	17.56492	3.116256
8.6	18.50515	3.151762

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.8	0.22363362	2.1691753
1.0	0.65809197	2.0466965

ج.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−0.5	−0.0247500	0.7510000
−0.25	0.3349375	2.1890000
0	1.1010000	4.0020000

د.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.1	−0.62049958	3.58502082
0.2	−0.28398668	3.14033271
0.3	0.00660095	2.66668043
0.4	0.24842440	2.16529366

2. استخدم مبرهنة (9.3) أو الخوارزمية (3.3) لإنشاء كثيرة حدود التقريب للبيانات الآتية:

أ.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	1.00000	2.00000
0.5	2.71828	5.43656

ب.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−0.25	1.33203	0.437500
0.25	0.800781	−0.625000

ج.

$f'(x)$	$f(x)$	x
-2.8019975	-0.29004996	0.1
-2.6159201	-0.56079734	0.2
-2.4533949	-0.81401972	0.3

د.

$f'(x)$	$f(x)$	x
0.155[illegible]6240	0.8619[illegible]480	-1
0.232[illegible]9654	0.[illegible]580[illegible]009	-0.5
0.33[illegible]3333	1.0986[illegible]23	0
0.451[illegible]6776	1.294[illegible]767	0.5

3. البيانات في التمرين (1) باستخدام الدّوال الآتية. استخدم كثيرة الحدو. المنشأة في المثال (1) لقيمة x المعطاة لتقريب $f(x)$، واحسب الخطأ المطلق:

أ. $f(x) = x \ln x$ وتقريب $f(8.4)$

ب. $f(x) = \sin(e^x - 2)$ وتقريب $f(0.9)$

ج. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$ وتقريب $f\left(-\frac{1}{3}\right)$

د. $f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x - 1$ وتقريب $f(0.25)$

4. أنتجت البيانات في التمرين (2) باستخدام الدّوال الآتية. استخدم كثيرة الحدود المنشأة في المثال (1) لقيمة x المعطاة لتقريب $f(x)$، واحسب الخطأ المطلق:

أ. $f(x) = e^{2x}$ وتقريب $f(0.43)$

ب. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ وتقريب $f(0)$

ج. $f(x) = x^2 \cos x - 3x$ وتقريب $f(0.18)$

د. $f(x) = \ln(e^x + 2)$ وتقريب $f(0.25)$

5. أ. استخدم القيم الآتية وتدويرًا حسابيًا لأربع خانات من أجل إنشاء كثيرة حدود هرمايت للاستكمال الداخلي لتقريب sin 0.34.

$D_x \sin x = \cos x$	$\sin x$	x
0.95534	0.29552	0.30
0.94924	0.31457	0.32
0.93937	0.34290	0.35

ب. حدّد حدًا لخطأ التقريب في (أ)، وقارنه بالخطأ الحقيقي.

ج. أضف $\sin 0.33 = 0.32404$ و $\cos 0.33 = 0.94604$ إلى البيانات، وكرّر الحسابات.

6. ليكن $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$

أ. استخدم كثيرة حدود هرمايت للاستكمال الداخلي من رتبة لا تزيد على 3 لتقريب $f(1.03)$ مستخدمًا $x_0 = 1$ و $x_1 = 1.05$. قارن الخطأ الحقيقي بحدّ الخطأ.

ب. استخدم كثيرة حدود هرمايت للاستكمال الداخلي من رتبة لا تزيد على 5 لتقريب $f(1.03)$ مستخدمًا $x_0 = 1,\ x_1 = 1.05$ و $x_2 = 1.07$. قارن الخطأ الحقيقي بحد الخطأ.

7. استخدم صيغة الخطأ و Maple لإيجاد حد للأخطاء عند تقريبات $f(x)$ في الرأسين (أ) و(ج) من التمرين (3).

8. استخدم صيغة الخطأ و Maple لإيجاد حد للأخطاء عند تقريبات $f(x)$ في الفقرتين (أ) و(ج) من التمرين (4).

9. يتضمن الجدول الآتي بيانات للدّالة $f(x) = e^{0.1x^2}$. اعمل التقريب $f(1.25)$ باستخدام $H_5(1.25)$ و$H_3(1.25)$ حيث يستخدم H_5 النقاط $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ ويستخدم H_3 القاطنين $\bar{x}_0 = 1$ و$\bar{x}_1 = 1.5$. أوجد حدود خطأ هذه التقريبات.

$f'(x) = 0.2xe^{0.1x^2}$	$f(x) = e^{0.1x^2}$	x
0.2210341836	1.105170918	$x_0 = \bar{x}_0 = 1$
0.3756968148	1.252322716	$\bar{x}_1 = 1.5$
0.5967298792	1.491824698	$x_1 = 2$
1.475761867	2.459603111	$x_2 = 3$

10. تتحرك سيارة على طريق مستقيم، وتسجل بياناتها عند نقاط كثيرة. وتظهر هذه البيانات في الجدول الآتي، حيث يمثل الزمن (Time) بالثانية، والمسافة (Distance) بالقدم، والسرعة (Speed) بالقدم لكل ثانية.

الوقت	0	3	5	8	13
المسافة	0	225	383	623	993
السرعة	75	77	80	74	72

أ. استخدم كثيرة حدود هرمايت لتخمين موقع السيارة وسرعتها عند الثانية العاشرة $t = 10\,s$.
ب. استخدم مشتقة كثيرة حدود هرمايت لتحديد ما إذا كان من الممكن للسيارة أن تتجاوز سرعة 55 mi/h على الطريق. وإذا كان ذلك فما هي المرة الأولى التي تتجاوز فيها السيارة هذه السرعة؟
ج. ما السرعة القصوى المتوقعة لهذه السيارة؟

11. أ. أثبت أن $H_{2n+1}(x)$ كثيرة الحدود الوحيدة بأقل رتبة تتوافق مع f و f' عند $x_0, \ldots, x_n$.
[إرشاد: افترض $P(x)$ كثيرة حدود أخرى، وافترض $D = H_{2n+1} - P$ و D' عند $x_0, x_1, \ldots, x_n$.]
ب. اشتق حد الخطأ في المبرهنة (9.3). [إرشاد: استخدم طريقة لاجرانج نفسها لاشتقاق الخطأ] وتعرّف المبرهنة (3.3)

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{(t - x_0)^2 \cdots (t - x_n)^2}{(x - x_0)^2 \cdots (x - x_n)^2}[f(x) - H_{2n+1}(x)]$$

مع استخدام حقيقة كون $g'(t)$ لها $(2n + 2)$ من الأصفار المختلفة ضمن $[a, b]$.

12. ليكن $z_0 = x_0, z_1 = x_0, z_2 = x_1, z_3 = x_1$. ومن جدول الفرق المنقسم الآتي

$$\begin{array}{llllll}
z_0 = x_0 & f[z_0] = f(x_0) & & & & \\
 & & f[z_0, z_1] = f'(x_0) & & & \\
z_1 = x_0 & f[z_1] = f(x_0) & & f[z_0, z_1, z_2] & & \\
 & & f[z_1, z_2] & & f[z_0, z_1, z_2, z_3] & \\
z_2 = x_1 & f[z_2] = f(x_1) & & f[z_1, z_2, z_3] & & \\
 & & f[z_2, z_3] = f'(x_1) & & & \\
z_3 = x_1 & f[z_3] = f(x_1) & & & &
\end{array}$$

أثبت أن كثيرة حدود هرمايت التكعيبية $H_3(x)$ يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$f[z_0] + f[z_0, z_1](x - x_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - x_0)^2 + f[z_0, z_1, z_2, z_3](x - x_0)^2(x - x_1)$$

4.3 استكمال الشريحة التكعيبية[1] Cubic Spline Interpolation

ركّزت البنود السابقة على تقريب دوالّ عشوائية ضمن فترات مغلقة مستخدمة كثيرات الحدود. ولأن طبيعة كثيرات الحدود ذات الرتبة العليا متذبذبة، ولأن هذا التذبذب ضمن جزء من الفترة يمكنه تحفيز تذبذبات كبيرة ضمن كامل المدى، فذلك يحد من استخدامها. وسوف نرى مثالاً جيدًا لذلك في شكل (13.3) في نهاية هذا الفصل. ويعمل المنهج البديل على تقسيم الفترة إلى فترات جزئية، وإنشاء كثيرة حدود مختلفة عند كل فترة جزئية (عموما). ويسمى التقريب بدوالّ من هذا النوع (التقريب بكثيرة حدود متقطعة)

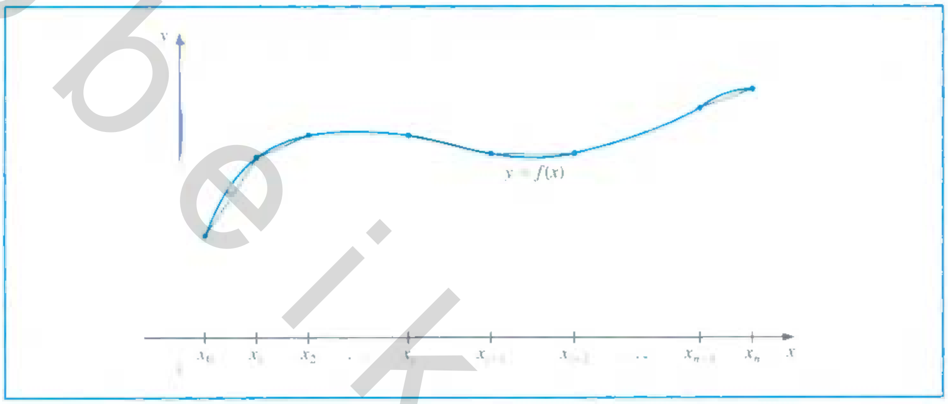
(1) إن براهين المبرهنات في هذا الفصل تعتمد النتائج في الباب 6

piecewise-polynomial approximation. وأبسط تقريب بكثيرة حدود متقطعة هو استكمال داخلي خطي متقطع، الذي يتضمن ربط مجموعة من نقاط البيانات

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$$

من خلال سلسلة من الخطوط المستقيمة كما في شكل (7.3).

شكل 7.3



يكمن الجانب السلبي للتقريب بدالّة خطية في عدم وجود التفاضل على الأرجح عند أطراف الفترات الجزئية الذي يعني أن دالّة الاستكمال الداخلي ليست ملساء (ناعمة) في المفهوم الهندسي. وهذه النعومة مطلوبة وفقًا للشروط الفيزيائية. وأخيرًا فإنه يجب في دالّة التقريب أن تكون قابلة للتفاضل على نحو متصل. والإجراء البديل هو استخدام كثيرة حدود متقطعة من نوع هرمايت. على سبيل المثال، إذا كانت قيم f و f' معروفة لكل من النقاط $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ فإن كثيرة حدود هرمايت التكعيبية يمكن استخدامها على كل واحدة من المجموعات الجزئية $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ لإيجاد دالّة ذات مشتقة متصلة على الفترة $[x_0, x_n]$. ولتحديد كثيرة حدود هرمايت تكعيبية مناسبة على فترة معلومة، فإنها مجرد عملية حساب $H_3(x)$ لتلك الفترة ببساطة. ولأن كثيرات حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي التي نحتاج إليها لغرض تحديد H_3 هي من الرتبة الأولى. فإن من السهل تحقيق ذلك. على أي حال لكي نستخدم كثيرات حدود هرمايت المتقطعة للاستكمال الداخلي العام، نحتاج إلى معرفة مشتقة الدالّة التي نعمل على تقريبها، وغير متوفّر غالبًا.

يتناول بقية هذا الفصل التقريب مستخدمًا كثيرات حدود متقطعة لا تحتاج إلى معلومات اشتقاقية، إلا ربما عند أطراف الفترة التي تقرّب إليها.

وأبسط أنواع الدالّة لكثيرة حدود متقطعة وقابلة للتفاضل على كامل الفترة $[x_0, x_n]$ هي الدالّة الناتجة عن توفيق كثيرة حدود تكعيبية واحدة ما بين كل زوج متتال من الرؤوس. وهذا ينفذ من خلال إنشاء تكعيبي واحد على $[x_0, x_1]$ متوافق مع الدالّة عند x_0 و x_1، وتكعيبي آخر على $[x_1, x_2]$ متوافق مع الدالّة عند x_0 و x_1 وهكذا. وحيث إن لكثيرة الحدود التكعيبية العامة ثلاثة ثوابت عشوائية (الحد الثابت، معامل x، ومعامل x^2)، وهناك حاجة إلى شرطين فقط لتوفيق البيانات على نقطتي

لقد طوّر إسحق يعقوب شونبرغ (1903-1990) Isaac Jacob Schoenberg عمله حول الأخاديد خلال الحرب العالمية الثانية في أثناء مغادرته جامعة بنسلفانيا للعمل في مختبر البحوث البالستية العسكري في أبردين/مريلاند و تضمن عمله الأساسي عمليات عددية لحل المعادلات التفاضلية. إن التطبيق الأوسع للأخاديد في مجالات مواءمة البيانات والتصميم الهندسي عن طريق الحاسوب قد أصبح واضحا مع الانتشار الواسع للحاسبات خلال الفترة (1960s).

إن أصل كلمة أخدود spline هو نفسه splint كان في الأصل عبارة عن شريط خشبي يمكن استخدامه لربط لوحين وبعد ذلك استخدمت الكلمة للإشارة إلى شريط مرن وطويل من المعدن على نحو عام. ويمكن استخدامه لرسم منحنيات متصلة ومنتظمة عن طريق جعل الشريط يمر عبر نقاط محددة واقعة على خط المنحنى

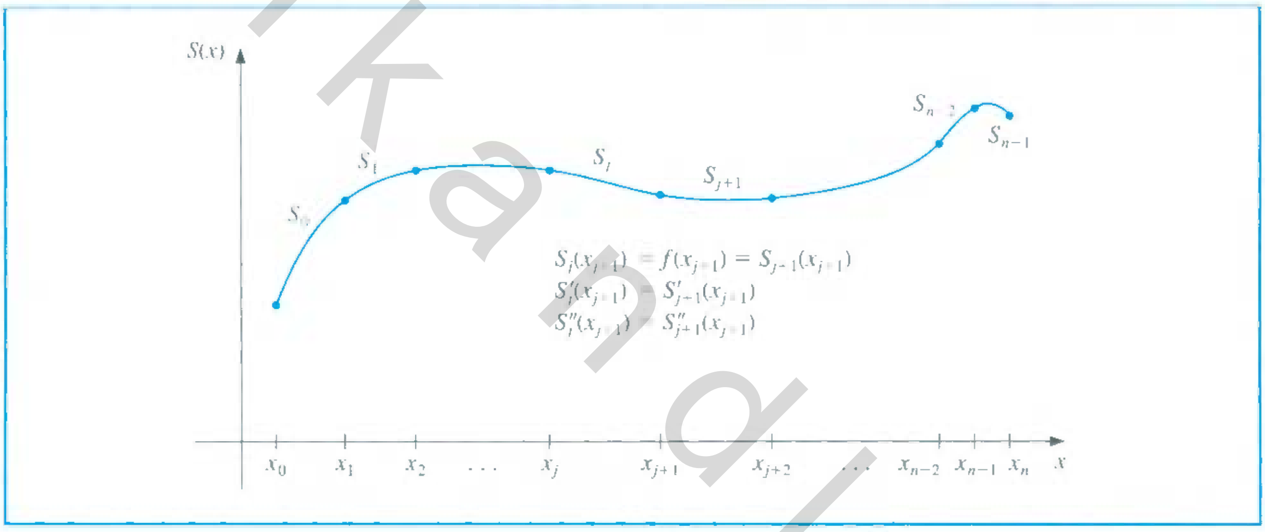
الطرفين لكل فترة جزئية، فثمة مرونة تسمح باختيار التكعيبي على أن يكون للاستكمال الداخلي مشتقة متصلة على $[x_0, x_n]$.

وثمة صعوبة تبرز عند الحاجة إلى توصيف شروط حول مشتقة الاستكمال الداخلي على نقطتي الطرفين x_0 و x_n.

ولا يوجد عدد مناسب من الثوابت لضمان كون الشروط ستتحقّق. (انظر تمرين 26).

يستخدم التقريب الشائع لكثيرة الحدود المتقطعة كثيرات حدود تكعيبية ما بين كل زوج متتال من النقاط ويُسمّى "استكمال الشريحة التكعيبية Cubic Spline Interpolation". وتتضمن كثيرة الحدود التكعيبية العامة 4 ثوابت، ومن ثم توجد مرونة كافية في عملية الشريحة التكعيبية؛ لضمان كون الاستكمال الداخلي ليس قابلًا للاشتقاق على نحو متصل على الفترة فقط. وإنما له مشتقة متصلة ثانية أيضًا. إن عملية إنشاء الشريحة التكعيبية لا تفترض توافقًا ما بين مشتقة الاستكمال الداخلي وتلك المعدّة للدّالة قيد التقريب، حتى عند الرؤوس. (انظر شكل 8.3).

شكل 8.3



تعريف 10.3

لتكن الدّالة f معرفة على $[a, b]$، وعند النقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. عندئذ يكون الاستكمال الداخلي للشريحة التكعيبية S للدّالة f هو دالّة تحقّق الشروط الآتية:

أ. $S(x)$ كثيرة حدود تكعيبية، ويكتب $S_j(x)$ على الفترة $[x_j, x_{j+1}]$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n-1$

ب. $S_j(x_j) = f(x_j)$ و $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n-1$

ج. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n-2$

د. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n-2$

هـ. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n-2$

و. تتحقّق إحدى المجموعات الآتية من شروط الحدود:

1. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (حدود طبيعية أو حرّة).
2. $S'(x_0) = f'(x_0)$ و $S'(x_n) = f'(x_n)$ (حدود متشابكة).

الشريحة الحرّة ليست لها شروط مفروضة بشأن الاتجاه عند أطرافها. من ثم يأخذ المنحنى شكل الخط المستقيم بعد مروره عبر نقاط الاستكمال الداخلي وبالقرب من أطرافها. الشرائح الحرّة هي الشكل الطبيعي المفترض من قبل الشريط المرن إذا مرّ عبر نقاط استكمال داخلي محددة ودون قيود إضافية

وعلى الرغم من أن الشرائح التكعيبية معرّفة بشروط حدودية أخرى، فإن الشروط المبينة في (و) أعلاه تعدّ كافية لتحقيق أغراضنا. وعندما تظهر الشروط الحدودية الحرّة تُدعى الشريحة بالشريحة الطبيعية natural spline. وإن رسمه البياني يقارب شكل قضيب طويل ومرن يدفع عبر نقاط البيانات $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$

وعمومًا تؤدي شروط الحدود المتشابكة إلى تقريب أدق؛ لأنها تتضمن معلومات أكثر حول الدالة. ولكي يتحقق مثل هذا النوع من الشرط الحدودي، فمن الضروري معرفة إما قيم الاشتقاق عند الأطراف، وإما تقريب دقيق لكثيرات الحدود التكعيبية

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

ولكون $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$؛ فإن الشرط (ج) يمكن تطبيقه للحصول على

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3$$

لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 2$.

ونظرًا لاستخدام الحدود $x_{j+1} - x_j$ استخدامًا متكررًا في هذا التطوير، يكون من المناسب تقديم تعبير أبسط

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

تشابك الشريحة يشير إلى تثبيت نهايتي الشريط المرن لجعله يأخذ اتجاها محددا عند كل طرف هذا ضروري ومثل على ذلك حالة وجوب تطابق دالّتي شريحتين عند أطرافهما، حيث يحدث ذلك رياضيًا من خلال تحديد قيم المشتقة للمنحنى عند أطراف الشريحة

لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. وإذا ما عرّفنا $a_n = f(x_n)$ أيضًا فإن الصيغة

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \qquad (15.3)$$

تتحقّق لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

وبالأسلوب نفسه عرّف $b_n = S'(x_n)$ ولاحظ أن

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

تعطي $S_j'(x_j) = b_j$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. وبتطبيق الشرط (د) نحصل على

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \qquad (16.3)$$

لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

نحصل على علاقة أخرى ما بين معامل S_j من خلال تعريف $c_n = S''(x_n)/2$ وتطبيق الشرط (ج). وأخيرًا لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$، نجد أن

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \qquad (17.3)$$

وعند حل d_j في الصيغة (17.3) وتعويض هذه القيمة في المعادلتين (15.3) و(16.3) نحصل على الصيغة الجديدة الآتية لكل $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \qquad (18.3)$$

و

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \qquad (19.3)$$

تتضمن العلاقة الأخيرة إيجاد المعامل من خلال حل الصيغة المناسبة بصيغة الصيغة (18.3)، ولـ b_j أولًا،

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \qquad (20.3)$$

ويكون حل b_{j-1} بتخفيض الدليل بعد ذلك، وهذا يعطي

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j)$$

وبتعويض هذه القيم في الصيغة (19.3) مع حصول تخفيض واحد للدليل، نحصل على نظام خطي من الصيغ

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \qquad (21.3)$$

لكل $j = 1, 2, \ldots, n-1$. يتضمن هذا النظام القيم المجهولة $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ فقط، لأن قيم $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ و $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ معلومة من خلال المباعدة ما بين النقاط $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ وقيم f عند النقاط على التوالي.

لاحظ أنه حالما تحدّد قيم $\{c_j\}_{j=0}^{n}$، يصبح من السهل إيجاد ما تبقّى من الثوابت $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ من الصيغة (20.3) و $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ من الصيغة (17.3)، ومن ثم إنشاء كثيرات حدود تكعيبية $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$. والسؤال الرئيس الذي يبرز عند الربط بهذا الإنشاء هو: هل يمكن إيجاد قيم $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ باستخدام نظام الصيغ المبينة في (21.3)؟ وإذا كان كذلك فهل تكون هذه القيم وحيدة؟ تشير النظريات الآتية إلى أن الحالة هي نفسها عندما نفترض أيًا من شروط الحدود المبينة في (و) من التعريف. وتتطلب براهين هذه النظريات مواد من الجبر الخطي سنناقشها في الفصل 6.

مبرهنة 11.3 إذا كانت f معرفة عند $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ فإن لها استكمالًا داخليًا لشريحة طبيعية وحيدة S عند النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$، بمعنى أن استكمالًا داخليًا للشريحة يحقّق الشروط الحدودية $S''(a) = 0$ و $S''(b) = 0$. ■

البرهان تشير الشروط الحدودية في هذه الحالة إلى أن $c_n = S''(x_n)/2 = 0$ وأن

$$0 = S''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0)$$

وبذلك فإن $c_0 = 0$. المكرّرتان $c_0 = 0$ و $c_n = 0$ مع الصيغ في (21.3) تعطي معًا نظامًا خطيًا يتضح من خلال $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، حيث إن A هي المصفوفة $(n+1) \times (n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

وكل من $\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}$ عبارة عن المتجهات

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

يغلب على المصفوفة A سمة القطرية، لذلك فإنها تفي بفرضيات المبرهنة (19.6) من الفصل 6. وعندئذ فإن للنظام الخطي حلًا وحيدًا لـ $c_0, c_1, \dots, c_n$.

ويمكن إيجاد حل مسألة الشريحة التكعيبية مع الشروط الحدودية $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ من خلال تطبيق الخوارزمية (4.3).

الشريحة التكعيبية الطبيعية Natural Cubic Spline

ALGORITHM
الخوارزمية
4.3

لإنشاء الاستكمال الداخلي للشريحة التكعيبية S الخاص بالدّالة f، معرفًا عند الأعداد $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ ولتحقّق $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$:

المدخلات: $n; x_0, x_1, \dots, x_n; a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \dots, a_n = f(x_n)$

المخرجات: a_j, b_j, c_j, d_j لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$

إرشاد:
$S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$ لكل $x_j \le x \le x_{j+1}$

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 0, 1, \dots, n-1$ ضع $h_i = x_{i+1} - x_i$
2	عند $i = 1, 2, \dots, n-1$ ضع $\alpha_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$
3	ضع $l_0 = 1$ (تنفذ الخطوات 3، 4، 5 وجزء من الخطوة 6 نظامًا خطيًا ثلاثي القطر باستخدام طريقة موضحة في الخوارزمية (7.6).) $\mu_0 = 0$ $z_0 = 0$
4	عند $i = 1, 2, \dots, n-1$ ضع $l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1}$ $\mu_i = h_i / l_i$ $z_i = (\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1}) / l_i$

5	ضع $l_n = 1$ $z_n = 0$ $c_n = 0$
6	عند $j = n-1, n-2, \dots, 0$ ضع $c_j = z_j - \mu_j c_{j+1}$ $b_j = (a_{j+1} - a_j)/h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j)/3$ $d_j = (c_{j+1} - c_j)/(3h_j)$
7	المخرجات (a_j, b_j, c_j, d_j إلى $j = 0, 1, \dots, n-1$) توقف.

■

مثال 1 أعطينا في بداية الباب الثالث بعض كثيرات حدود تايلور لتقريب الدّالة الأسيّة $f(x) = e^x$. وهنا سنستخدم شريحة طبيعية ونقاط البيانات $(0, 1), (1, e), (2, e^2), (3, e^3)$ لغرض

أ. تكوين دالّة تقريب $S(x)$

ب. مقارنة تكاملات f و S على الفترة $[0, 3]$.

(أ) لدينا $n = 3, h_0 = h_1 = h_2 = 1, a_0 = 0, a_1 = e, a_2 = e^2, a_3 = e^3$. لذا فالمصفوفة والمتجهات $\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}$ مبينة أدناه في المبرهنة (11.3).

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(e^2 - 2e + 1) \\ 3(e^3 - 2e^2 + e) \\ 0 \end{bmatrix}$$

وصيغة مصفوفة المتّجه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مكافئة لنظام الصيغ

$$c_0 = 0$$

$$c_0 + 4c_1 + c_2 = 3(e^2 - 2e + 1)$$

$$c_1 + 4c_2 + c_3 = 3(e^3 - 2e^2 + e)$$

$$c_3 = 0$$

ذات الحل $c_0 = c_3 = 0$

$$c_2 = \tfrac{1}{5}(4e^3 - 9e^2 + 6e - 1) = 5.83006675 \quad \text{و} \quad c_1 = \tfrac{1}{5}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 0.756852643$$

وحل بقية الثوابت يعطينا

$$b_0 = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = (e - 1) - \frac{1}{15}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 1.465997614$$

$$b_1 = \frac{1}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1)$$

$$= (e^2 - e) - \frac{1}{15}(2e^3 + 3e^2 - 12e + 7) = 2.222850257$$

$$b_2 = \frac{1}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2)$$

$$= (e^3 - e^2) - \frac{1}{15}(8e^3 - 18e^2 + 12e - 2) = 8.809769651$$

$$d_0 = \frac{1}{3h_0}(c_1 - c_0) = \frac{1}{15}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 0.252284214$$

$$d_1 = \frac{1}{3h_1}(c_2 - c_1) = \frac{1}{3}(e^3 - 3e^2 + 3e - 1) = 1.691071368$$

$$d_2 = \frac{1}{3h_2}(c_3 - c_1) = \frac{1}{15}(-4e^3 + 9e^2 - 6e + 1) = -1.943355583$$

المبينة في جدول (15.3).

جدول 15.3

d_j	c_j	b_j	a_j	x_j	j
0.252284214	0	1.465997614	1	0	0
1.691071368	0.756852643	2.222850257	2.718281828	1	1
−1.943355583	5.83006675	8.809769651	7.389056099	2	2
			20.08553692	3	3

ويعطي استخدام قيم تقريبية للثوابت الشريحة التكعيبية الطبيعية من خلال الصيغة

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 1.46600x + 0.25228x^3 & \text{إذا كان } 0 \le x < 1 \\ 2.71828 + 2.22285(x-1) + 0.75685(x-1)^2 + 1.69107(x-1)^3 & \text{إذا كان } 1 \le x < 2 \\ 7.38906 + 8.80977(x-2) + 5.83007(x-2)^2 - 1.94336(x-2)^3 & \text{إذا كان } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

مجزأة الشريحة وتوافقها مع $f(x) = e^x$ المبيَّن في شكل (9.3).

(ب) لتقريب تكامل f على $[0, 3]$ ذي القيمة

$$\int_0^3 e^x\,dx = e^3 - 1 = 20.08553692 - 1 = 19.08553692$$

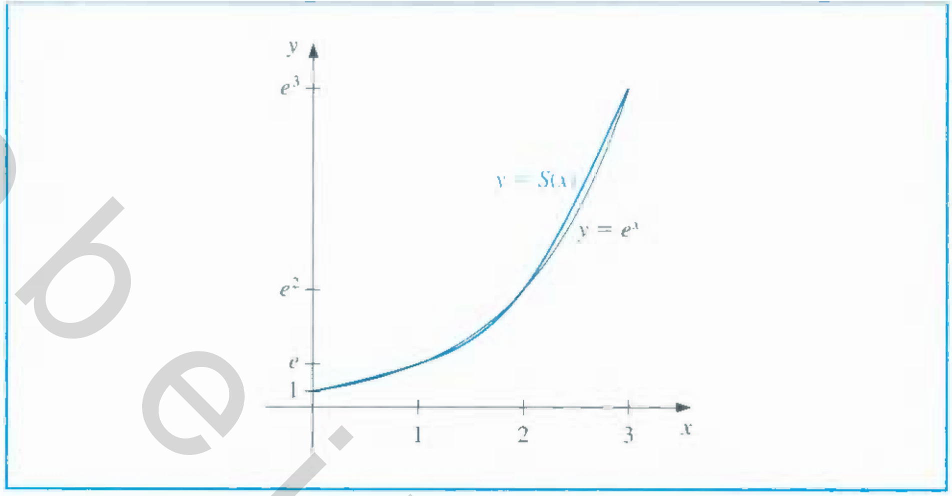
نجمّع الشريحة تجزيئيًا لتعطي

$$\int_0^3 S(x) = \int_0^1 1 + 1.46600x + 0.25228x^3\,dx$$

$$+ \int_1^2 2.71828 + 2.22285(x-1) + 0.75685(x-1)^2 + 1.69107(x-1)^3\,dx$$

$$+ \int_2^3 7.38906 + 8.80977(x-2) + 5.83007(x-2)^2 - 1.94336(x-2)^3\,dx$$

شكل 9.3



وبتكامل القيم ذات القوى المتشابهة وتجميعها نحصل على

$$\int_0^3 S(x) = x + 1.46600\frac{x^2}{2} + 0.25228\frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

$$+2.71828(x-1) + 2.22285\frac{(x-1)^2}{2} + 0.75685\frac{(x-1)^3}{3} + 1.69107\frac{(x-1)^4}{4}\Big|_1^2$$

$$+7.38906(x-2) + 8.80977\frac{(x-2)^2}{2} + 5.83007\frac{(x-2)^3}{3} - 1.94336\frac{(x-2)^4}{4}\Big|_2^3$$

$$= (1 + 2.71828 + 7.38906) + \frac{1}{2}(1.46600 + 2.22285 + 8.80977)$$

$$+ \frac{1}{3}(0.75685 + 5.83007) + \frac{1}{4}(0.25228 + 1.69107 - 1.94336)$$

$$= 19.55228750$$

وبسبب التباعد المتساوي ما بين النقاط في هذا المثال. فالتقريب التكاملي هو

$$\int_0^3 S(x)\,dx = (a_0 + a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2) + \frac{1}{3}(c_0 + c_1 + c_2) + \frac{1}{4}(d_0 + d_1 + d_2)$$ ■

وفي حالة الشروط الحدودية المتشابكة لدينا نتيجة مشابهة لبرهنة الشروط الحدودية الطبيعية الموضحة في البرهنة (11.3).

مبرهنة 12.3 إذا كانت f معرّفة عند $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ وقابلة للاشتقاق عند a و b، فإن لـ f استكمالًا داخليًا متشابكًا وحيدًا للشريحة S عند النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$، بمعنى أن استكمالًا داخليًا للشريحة يحقق الشروط الحدودية $f'(a) = S'(a)$ و $S'(b) = f'(b)$. ■

البرهان بما أن $f'(a) = S'(a) = S'(x_0) = b_0$ تعطي الصيغة (3.20) مع $j = 0$

$$f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

وبناءً على ذلك

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

وبالمثل

$$f'(b) = b_n = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n)$$

لذا فالصيغة (20.3) مع $j = n - 1$ تعطي

$$\begin{aligned} f'(b) &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n) \\ &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{3}(c_{n-1} + 2c_n) \end{aligned}$$

و

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

تحدد الصيغة (21.3) والصيغ معًا

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

و

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

يغلب على المصفوفة A سمة القطرية. ولذلك فإنها تفي بفرضيات المبرهنة (19.6). من ثمّ فإن للنظام الخطي حلًّا واحدًا لـ $c_0, c_1, \ldots, c_n$. ■ ■ ■

يمكن إيجاد حل مسألة الشريحة التكعيبية مع الشروط الحدودية $S'(x_0) = f'(x_0)$ و $S'(x_n) = f'(x_n)$ من خلال تطبيق الخوارزمية (5.3).

ALGORITHM

الخوارزمية

5.3

الشريحة التكعيبية المتشابكة Clamped Cubic Spline

لإنشاء الاستكمال الداخلي للشريحة التكعيبية S الخاص بالدّالة f، معرفًا عند الأعداد $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ ولتحقّق $S'(x_0) = f'(x_0)$ و $S'(x_n) = f'(x_n)$؛

المدخلات: $n; x_0, x_1, \ldots, x_n; a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \ldots, a_n = f(x_n)$.

المخرجات: a_j, b_j, c_j, d_j لكل $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

إرشاد:

$S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$ لكل $x_j \le x \le x_{j+1}$

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ضع $h_i = x_{i+1} - x_i$
2	ضع $\alpha_0 = 3(a_1 - a_0)/h_0 - 3FPO$ $\alpha_n = 3FPN - 3(a_n - a_{n-1})/h_{n-1}$
3	عند $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ضع $\alpha_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$
4	ضع $l_0 = 2h_0$ (تنفذ الخطوات 6.5.4 وجزء من الخطوة ٧ نظاما خطيًا ثلاثي القطر باستخدام طريقة موضحة في الخوارزمية (7.6).) $\mu_0 = 0.5$ $z_0 = \alpha_0/l_0$
5	عند $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ضع $l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1}$ $\mu_i = h_i/l_i$ $z_i = (\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1})/l_i$
6	ضع $l_n = h_{n-1}(2 - \mu_{n-1})$ $z_n = (\alpha_n - h_{n-1}z_{n-1})/l_n$ $c_n = z_n$
7	عند $j = n-1, n-2, \ldots, 0$ ضع $c_j = z_j - \mu_j c_{j+1}$ $b_j = (a_{j+1} - a_j)/h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j)/3$ $d_j = (c_{j+1} - c_j)/(3h_j)$
8	المخرجات (a_j, b_j, c_j, d_j لـ $j = 0, 1, \ldots, n-1$) توقف.

■

مثال 2 استخدمنا في المثال (1) شريحة طبيعية ونقاط البيانات $(0, 1), (1, e), (2, e^2), (3, e^3)$ تكوين دالّة تقريب $S(x)$ إلى $f(x) = e^x$، ومن ثم استخدمناه لتقريب $\int_0^3 e^x\,dx$. سوف نقارن في هذا المثال بين أ. الشريحة المتشابكة لهذه الدّالة على $[0, 3]$ وب. تقريب التكامل المعطى من خلال تكامل الشريحة المتشابكة.

أ. مرة أخرى لدينا $n = 3, h_0 = h_1 = h_2 = 1, a_0 = 0, a_1 = e, a_2 = e^2, a_3 = e^3$. ولدينا $f'(x) = e^x$ أيضًا. وأخيرًا $f'(0) = 1$ و $f'(3) = e^3$. وعندئذ فإن المصفوفة A والمتجهات $\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}$ مبينة أدناه في المبرهنة (12.3):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3(e-2) \\ 3(e^2 - 2e + 1) \\ 3(e^3 - 2e^2 + e) \\ 3e^2 \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

وصيغة مصفوفة المتّجه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مكافئة لنظام الصيغ

$$2c_0 + c_1 = 3(e - 2)$$

$$c_0 + 4c_1 + c_2 = 3(e^2 - 2e + 1)$$

$$c_1 + 4c_2 + c_3 = 3(e^3 - 2e^2 + e)$$

$$c_2 + 2c_3 = 3e^2$$

وبحل هذا النظام لـ c_0, c_1, c_2, c_3 آنيًا نحصل على

$$c_0 = \tfrac{1}{15}(2e^3 - 12e^2 + 42e - 59)$$

$$c_1 = \tfrac{1}{15}(-4e^3 + 24e^2 - 65e + 28)$$

$$c_2 = \tfrac{1}{15}(14e^3 - 39e^2 + 24e - 8)$$

$$c_3 = \tfrac{1}{15}(-7e^3 + 42e^2 - 12e + 4)$$

وبحل بقية الثوابت بالأسلوب نفسه في المثال (1) نحصل على

$$b_0 = 1.00000000, \quad b_1 = 2.70446053, \quad b_2 = 0.34932619,$$

و

$$d_0 = 0.26789687, \quad d_1 = 0.71223817, \quad d_2 = 1.95636455.$$

ونشاهد النتائج الكاملة في جدول (16.3).

جدول 16.3

j	x_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	0	1	1	0.45038496	0.26789687
1	1	2.718281828	2.70446053	1.25407557	0.71223817
2	2	7.389056099	7.34932619	3.39079008	1.95636455
3	3	20.08553692			

وباستخدام قيم تقريبية للثوابت نحصل على الشريحة التكعيبية المتشابكة الموصحة من خلال الصيغة المجزأة

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x + 0.45038x^2 + 0.26790x^3 & \text{إذا كان } 0 \le x < 1 \\ 2.71828 + 2.70446(x-1) + 1.25408(x-1)^2 + 0.71224(x-1)^3 & \text{إذا كان } 1 \le x < 2 \\ 7.38906 + 7.34933(x-2) + 3.39079(x-2)^2 + 1.95636(x-2)^3 & \text{إذا كان } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

وإن الرسم البياني للشريحة المتشابكة و $f(x) = e^x$ متشابهان تمامًا إلى رتبة عدم وجود أي فرق.

ب. لتقريب تكامل f على $[0, 3]$ الذي قيمته

$$\int_0^3 e^x\,dx = e^3 - 1 \approx 20.08553692 - 1 = 19.08553692$$

نجزِّئ تكامل الشريحة المتشابكة. وعلى صورة المثال السابق. يمكننا استخدام حقيقة كون النقاط متساوية التباعد لنستنتج أن

$$\int_0^3 S(x)\,dx = (a_0 + a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2)$$
$$+ \frac{1}{3}(c_0 + c_1 + c_2) + \frac{1}{4}(d_0 + d_1 + d_2)$$

لذا فإن تقريب التكامل هو

$$\begin{aligned}\int_0^3 S(x)\,dx &= (1 + 2.71828 + 7.38906) + \frac{1}{2}(1 + 2.70446 + 7.34933)\\ &+ \frac{1}{3}(0.45038 + 1.25408 + 3.39079)\\ &+ \frac{1}{4}(0.26790 + 0.71224 + 1.95636)\\ &= 19.06677.\end{aligned}$$

الخطأ المطلق في تقريب التكامل باستخدام الشريحتين المتشابكتين (Clamped) والطبيعي (Natural) هو

$$\text{Natural: } |19.08554 - 19.55229| = 0.46675$$

$$\text{Clamped: } |19.08554 - 19.06677| = 0.01877$$

عندئذ ولأغراض التكامل، فإن الشريحة المتشابكة أحسن بكثير. وعلينا ألا نفاجأ بذلك، لأن الشروط الحدودية للشريحة المتشابكة تكون على نحو محكم. أما في الشريحة الطبيعية فإننا نفترض، ولكون $f''(x) = e^x$ أن

$$0 = S''(x) \approx f''(0) = e^0 = 1$$

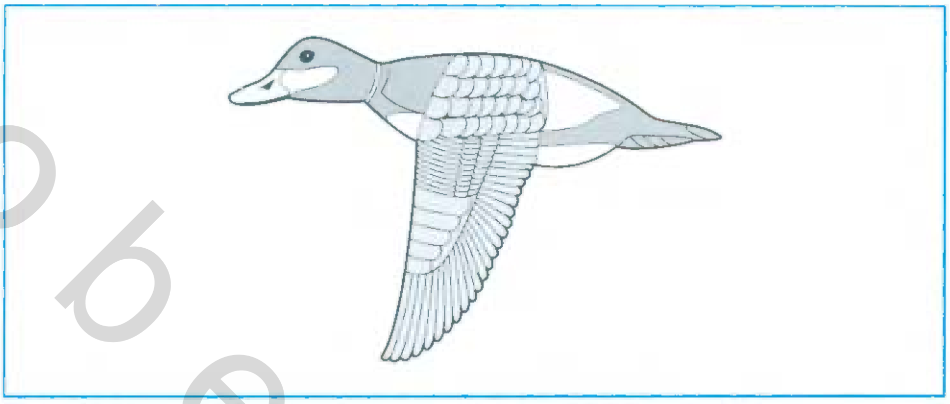
و

$$0 = S''(3) \approx f''(3) = e^3 \approx 20$$

■

ويستخدم المثال الآتي الشريحة لتقريب منحنى ليس له تمثيل دالّي.

مثال 3 يبيِّن الشكل (10.3) البطة الحمراء في حالة طيران. لتقريب المخطط العلوي للبطة، اخترنا نقاطًا على امتداد المنحنى عبر المواضع التي نرغب في أن يمرّ بها المنحنى المقرب. ويبيِّن جدول (17.3) إحداثيات 21 نقطة مقارنة بنظام الإحداثيات المبين في شكل (11.3). لاحظ استخدام نقاط إضافية عندما يتغير المنحنى بسرعة أكبر مما لو تغير ببطء.

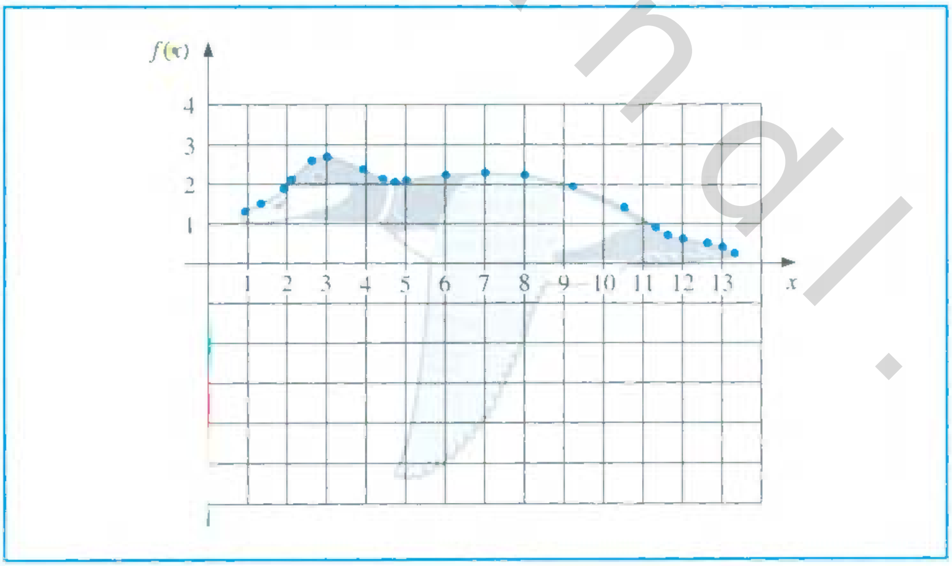


شكل 10.3

جدول 17.3

x	0.9	1.3	1.9	2.1	2.6	3.0	3.9	4.4	4.7	5.0	6.0	7.0	8.0	9.2	10.5	11.3	11.6	12.0	12.6	13.0	13.3
$f(x)$	1.3	1.5	1.85	2.1	2.6	2.7	2.4	2.15	2.05	2.1	2.25	2.3	2.25	1.95	1.4	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.25

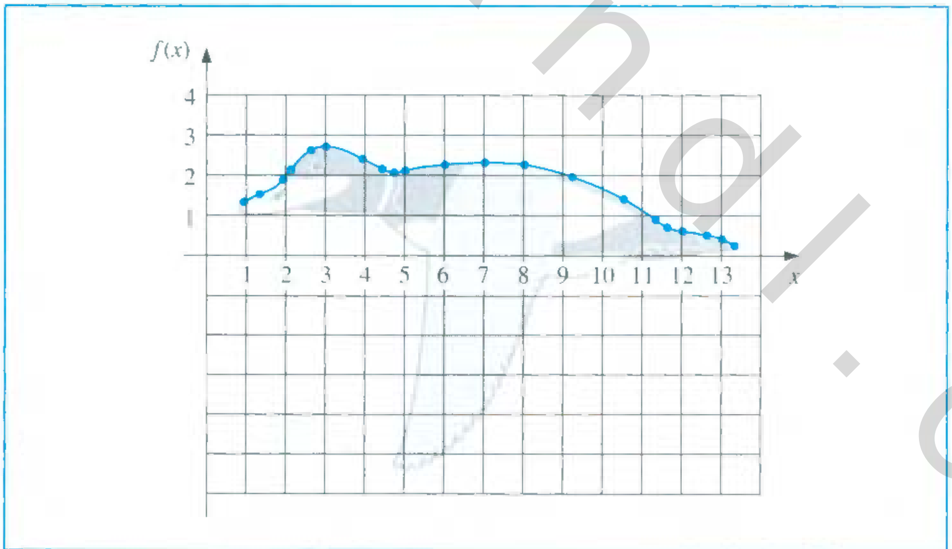
باستخدام الخوارزمية (4.3) لتوليد الشريحة التكعيبية الحرّة لهذه البيانات نحصل على المعاملات المبينة في الجدول (18.3). ومنحنى الشريحة هذا مشابه تقريبًا للمخطط الموضح في شكل (12.3).



شكل 11.3

جدول 3 18

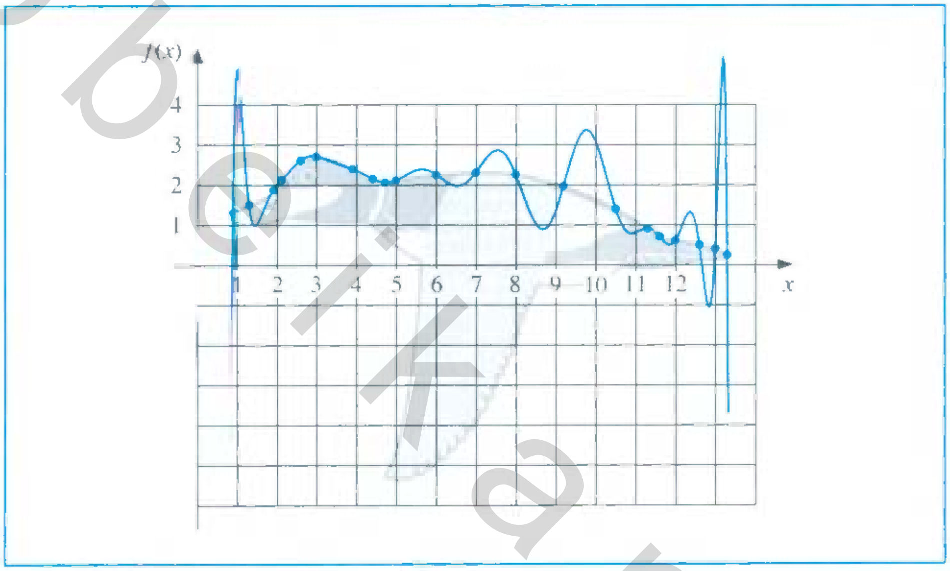
d_j	c_j	b_j	a_j	x_j	j
−0.25	0.00	5.44	1.3	0.9	0
0.95	−0.30	0.42	1.5	1.3	1
−2.96	1.41	1.09	1.85	1.9	2
−0.45	−0.37	1.29	2.1	2.1	3
0.45	−1.04	0.59	2.6	2.6	4
0.17	−0.50	−0.02	2.7	3.0	5
0.08	−0.03	−0.50	2.4	3.9	6
1.31	0.08	−0.48	2.15	4.4	7
−1.58	1.27	−0.07	2.05	4.7	8
0.04	−0.16	0.26	2.1	5.0	9
0.00	−0.03	0.08	2.25	6.0	10
−0.02	−0.04	0.01	2.3	7.0	11
0.02	−0.11	−0.14	2.25	8.0	12
−0.01	−0.05	−0.34	1.95	9.2	13
−0.02	−0.10	−0.53	1.4	10.5	14
1.21	−0.15	−0.73	0.9	11.3	15
−0.84	0.94	−0.49	0.7	11.6	16
0.04	−0.06	−0.14	0.6	12.0	17
−0.45	0.00	−0.18	0.5	12.6	18
0.60	−0.54	−0.39	0.4	13.0	19
			0.25	13.3	20



شكل 3.12

يعطي شكل (13.3) توضيحًا للمنحنى الذي وُلّد مستخدمًا كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي لتوفيق البيانات في جدول (17.3). وتتكوّن كثيرة حدود الاستكمال الداخلي في هذه الحالة من الرتبة 20. وتتغير بحدة منتجة توضيحًا غريبًا جدًا لظهر لبطة سواءً عند طيرانها أو غير ذلك.

شكل 13.3



ولاستخدام الشريحة المتشابكة لتقريب هذا المنحنى، سنحتاج إلى تقريبات اشتقاقية للنهايات. وحتى لو توافرت هذه التقريبات، يمكننا توقُّع تحسن طفيف، بسبب التوافق الكبير ما بين الشريحة التكعيبية الحرّة ومنحنى أعلى المخطط. ■

إن إنشاء أخدود متشابك لتقريب أسفل المخطط للبطة الحمراء سيكون أصعب، لأن منحنى هذا الجزء لا يمكن صياغته على شكل دالّة لـ x. وعند نقاط معينة لا يظهر المنحنى على نحو متّسق. ويمكن حل المشاكل باستخدام شرائح منفصلة لتمثيل نقاط مختلفة للمنحنى، ولكن الحل الأكثر فاعلية لمنحنيات من هذا النوع سنتناوله في الفصل الآتي.

شروط الحدود المتشابكة عمومًا هي المفضلة عندما تُقرّب الدّوال من خلال الشرائح التكعيبية، لذا يجب تقدير مشتقة الدّالة عند نهايات الفترة. وعند تساوي التباعد ما بين النقاط بالقرب من النهايتين. ويمكن إيجاد تقريبات باستخدام الصيغة (7.4) أو أيٍّ من الصيغ الأخرى المناسبة المذكورة في الفصلين (1.4 و 2.4). وعند عدم تساوي التباعد ما بين النقاط، فإن المسألة تعدو أصعب.

وكي نختم هذا الفصل، فإننا ندرج صيغة حد الخطأ للشريحة التكعيبية مع الشروط الحدودية المتشابكة. ويمكن إيجاد برهان هذه النتيجة في [Schul, pp. 57–58].

مبرهنة 13.3 ليكن $f \in C^4[a, b]$ وليكن $\max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)| = M$. إذا كان S استكمالاً داخليًا للشريحة التكعيبية المتشابكة الوحيدة لـ f بالنسبة إلى النقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$، فإنه لكل x في $[a, b]$ يكون لدينا

$$|f(x) - S(x)| \le \frac{5M}{384} \max_{0 \le j \le n-1} (x_{j+1} - x_j)^4$$
■

وينتج أيضًا حد خطأ من الرتبة الرابعة. وينتج أيضًا في حالة الشروط الحدودية الحرّة. ولكن من الصعوبة صياغتها. (انظر [BD, pp. 827–835]).

ستعطي الشروط الحدودية الحرّة نتائج أقل دقةً مقارنةً بالشروط المتشابكة قرب طرفي الفترة $[x_0, x_n]$ ما لم تكن الدّالة f مقتربة من تحقيق $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$. ثمة بديل للشرط الحدودي الحرّ – ولا يتطلب معلومات عن مشتقة f– هو شرط اللاعقدة *not-a-knot* انظر ([Deb2, pp. 55–56]) . وهذا الشرط يتطلب كون $S'''(x)$ متصلة عند x_1 وعند x_{n-1}.

مجموعة التمارين 4.3 EXERCISE SET

1. حدّد الشريحة التكعيبية الحرّة S التي تستكمل داخليًا البيانات $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$.

2. حدّد الشريحة التكعيبية المتشابكة S التي تستكمل داخليًا البيانات $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$ وتحقق $s'(0) = s'(2) = 1$.

3. أنشئ الشريحة التكعيبية الحرّة للبيانات الآتية:

أ.

x	$f(x)$
8.3	17.56492
8.6	18.50515

ب.

x	$f(x)$
0.8	0.22363362
1.0	0.65809197

ج.

x	$f(x)$
−0.5	−0.0247500
−0.25	0.3349375
0	1.1010000

د.

x	$f(x)$
0.1	−0.62049958
0.2	−0.28398668
0.3	0.00660095
0.4	0.24842440

4. أنشئ الشريحة التكعيبية الحرّة للبيانات الآتية:

أ.

x	$f(x)$
0	1.00000
0.5	2.71828

ب.

x	$f(x)$
−0.25	1.33203
0.25	0.800781

ج.

x	$f(x)$
0.1	−0.29004996
0.2	−0.56079734
0.3	−0.81401972

د.

x	$f(x)$
−1	0.86199480
−0.5	0.95802009
0	1.0986123
0.5	1.2943767

5. نتجت البيانات في التمرين (3) باستخدام الدّوال الآتية. استخدم الشرائح التكعيبية التي أنشئت في التمرين (3) لقيم x المبينة لتقريب $f(x)$ و $f'(x)$، واحسب الخطأ الحقيقي:

أ. $f(x) = x \ln x$ والتقريب إلى $f(8.4)$ و $f'(8.4)$

ب. $f(x) = \sin(e^x - 2)$ والتقريب إلى $f(0.9)$ و $f'(0.9)$

ج. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$ والتقريب إلى $f(-\frac{1}{3})$ و $f'(-\frac{1}{3})$

د. $f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x - 1$ والتقريب إلى $f(0.25)$ و $f'(0.25)$

6. نتجت البيانات في التمرين (3) باستخدام الدّوال الآتية. استخدم الشرائح التكعيبية التي أنشئت في التمرين (3) لقيم x المبينة لتقريب $f(x)$ و $f'(x)$، واحسب الخطأ الحقيقي:

أ. $f(x) = e^{2x}$ والتقريب إلى $f(0.43)$ و $f'(0.43)$

ب. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ والتقريب إلى $f(0)$ و $f'(0)$

ج. $f(x) = x^2\cos x - 3x$ والتقريب إلى $f(0.18)$ و $f'(0.18)$

د. $f(x) = \ln(e^x + 2)$ والتقريب إلى $f(0.25)$ و $f'(0.25)$

7. أنشئ الشريحة التكعيبية المتشابكة مستخدمًا بيانات التمرين (4) وحقيقة كون:

أ. $f'(8.3) = 1.116256$ و $f'(8.6) = 1.151762$

ب. $f'(0.8) = 2.1691753$ و $f'(1.0) = 2.0466965$

ج. $f'(-0.5) = 0.7510000$ و $f'(0) = 4.0020000$

د. $f'(0.1) = 3.58502082$ و $f'(0.4) = 2.16529366$

8. أنشئ الشريحة التكعيبية المتشابكة مستخدمًا بيانات التمرين (4) وحقيقة كون:

أ. $f'(0) = 2$ و $f'(0.5) = 5.43656$

ب. $f'(-0.25) = 0.437500$ و $f'(0.25) = -0.625000$

ج. $f'(0.1) = -2.8004996$ و $f'(0.3) = -2.4533949$

د. $f'(-1) = 0.15536240$ و $f'(0.5) = 0.45186276$

9. كرّر التمرين (5) مستخدمًا الشرائح التكعيبية المتشابكة التي أُنشئت في التمرين (7).

10. كرّر التمرين (6) مستخدمًا الشرائح التكعيبية المتشابكة التي أُنشئت في التمرين (8).

11. تعرّف شريحة تكعيبية طبيعية S على $[0, 2]$ من خلال

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3 & \text{إذا كان } 0 \le x < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & \text{إذا كان } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

جد b, c, d.

12. تعرّف شريحة تكعيبية متشابكة s للدّالة f على $[1, 3]$ من خلال

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3 & \text{إذا كان } 1 \le x < 2 \\ s_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3 & \text{إذا كان } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

فإذا كان $f'(1) = f'(3)$ فجد a, b, c, d.

13. تعرّف شريحة تكعيبية طبيعية S من خلال

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3 & \text{إذا كان } 1 \le x < 2 \\ S_1(x) = 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3 & \text{إذا كان } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

فإذا كان S يستكمل البيانات داخليًا $(1, 1), (2, 1), (3, 0)$ فأوجد B, D, b, d .

14. تعرّف شريحة تكعيبية متشابكة S الخاص بالدّالة f من خلال

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 & 0 \le x < 1 \text{ إذا كان } \\ s_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \text{ إذا كان } \end{cases}$$

أوجد $f'(0)$ و $f'(2)$.

15. أنشئ شريحة تكعيبية حرّة لتقريب $f(x) = \cos \pi x$ مستخدمًا القيم المعطاة من خلال $f(x)$ عند $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$.

أ. أنشئ تكاملا للشريحة على امتداد [0,1]، وقارن النتيجة بـ $\int_0^1 \cos \pi x \, dx = 0$

ب. استخدم مشتقات الشريحة لتقريب $f'(0.5)$ و $f''(0.5)$، وقارن هذه التقريبات بالقيم الحقيقية.

16. أنشئ شريحة تكعيبية حرّة لتقريب $f(x) = e^{-x}$ باستخدام القيم المعطاة من خلال $f(x)$ عند $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$.

أ. أنشئ تكاملا للشريحة على امتداد [0,1]، وقارن النتيجة بـ $\int_0^1 e^{-x} \, dx = 1 - 1/e$.

ب. استخدم مشتقات الشريحة لتقريب $f'(0.5)$ و $f''(0.5)$، وقارن هذه التقريبات بالقيم الحقيقية.

17. كرّر التمرين (15) بإنشاء شريحة تكعيبية متشابكة بدلاً من حرّة مستخدمًا $f'(0) = f'(1) = 0$.

18. كرّر التمرين (16) بإنشاء شريحة تكعيبية متشابكة بدلاً من حرّة مستخدمًا $f'(0) = -1$ ، $f'(1) = -e^{-1}$.

19. افترض أن $f(x)$ كثيرة حدود من الرتبة 3. أثبت أن $f(x)$ هي شريحتها التكعيبية المتشابكة نفسها. لكن لا يمكن أن تكون شريحتها التكعيبية الحرّة.

20. افترض أن البيانات $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^n$ تقع على خط مستقيم. ما الذي يمكن قوله حول الشريحتين التكعيبيتين الحرّة والمتشابكة للدّالة f ؟ إرشاد: خذ تلميحًا عن نتائج التمرينين (1 و 2).

21. مفترضين التقسيمات $x_0 = 0, x_1 = 0.05, x_2 = 0.1$ لـ $[0, 0.1]$، أوجد دالّة استكمال داخلي خطي مجزّأ F إلى $f(x) = e^{2x}$. قرّب $\int_0^{0.1} e^{2x} \, dx$ بـ $\int_0^{0.1} F(x) \, dx$، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية.

22. ليكن $f \in C^2[a, b]$ ولتكن النقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ معلومة. اشتق تقديرًا للخطأ مشابها لما في المبرهنة (13.3)، لدالّة استكمال داخلي خطي مجزأة f. استخدم هذا التقدير لاشتقاق حدود خطأ من التمرين (21).

23. أنشئ توسيعًا للخوارزميات (4.3) و (5.3) لتشمل –ضمن المخرجات- المشتقتين الأولى والثانية للشريحة عند النقاط

24. أنشئ توسيعا للخوارزميتين (4.3) و (5.3) لتشمل –ضمن المخرجات– تكامل الشريحة على امتداد الفترة $[x_0, x_n]$.

25. مفترضين التقسيمات $x_0 = 0, x_1 = 0.05, x_2 = 0.1$ لـ $[0, 0.1]$ و $f(x) = e^{2x}$:

أ. أوجد الشريحة التكعيبية S مع الشروط الحدودية المتشابكة التي تستكمل داخليًا f.

ب. أوجد تقريبا إلى $\int_0^{0.1} e^{2x} \, dx$ من خلال حساب $\int_0^{0.1} s(x) \, dx$.

ج. استخدم المبرهنة (13.3) لتقدير $\max_{0 \le x \le 0.1} |f(x) - s(x)|$ و $\left| \int_0^{0.1} f(x) \, dx - \int_0^{0.1} s(x) \, dx \right|$

د. حدِّد الشريحة التكعيبية S مع شروط حدودية حرّة، وقارن $S(0.02)$, $s'(0.02)$, $e^{0.04} = 1.04081077$

26. لتكن الدّالة f معرفة على $[a, b]$، ولتكن النقاط $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$ معلومة. أثبت أن دالّة شريحة الاستكمال الداخلي التربيعية S تتشكل من كثيرة حدود تربيعية

وكثيرة حدود تربيعية
$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 \text{ في } [x_0, x_1]$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 \text{ في } [x_1, x_2]$$

بحيث

(i) $S(x_0) = f(x_0)$, $S(x_1) = f(x_1)$ و $S(x_2) = f(x_2)$

(ii) $S \in C^1[x_0, x_2]$

أثبت أن الشرطين (i) و (ii) يؤديان إلى خمس صيغ في ستة مجاهيل $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$ تكمن المشكلة في تقرير الشرط الإضافي الذي نفترضه لجعل الحل وحيداً. فهل الشرط $S \in C^2[x_0, x_2]$ يؤدي إلى حل ذي معنى؟

27. استخدم التمرين (26) لتحديد شريحة تكعيبية S تستكمل داخليًا البيانات $f(0) = 0$، $f(1) = 1$، $f(2) = 2$ وتحقق $s'(0) = 2$.

28. أ. تضمنت مقدمة هذا الباب جدولًا يضم عدد السكان للولايات المتحدة للأعوام 1940 إلى 1990. استخدم استكمالًا داخليًا للشريحة التكعيبية لتقريب عدد السكان في السنوات 1930 و1965 و2010.

ب. عدد السكان عام 1930 كان 123,203,000 تقريبًا. فما دقة أرقام السنتين 1965 و 2010؟

29. تتحرك سيارة على طريق مستقيم، وتسجل بياناتها عند نقط كثيرة. وتظهر هذه البيانات في الجدول الآتي، حيث يظهر الزمن (Time) بالثانية، المسافة (Distance) بالقدم، والسرعة (Speed) بالقدم لكل ثانية.

الوقت	0	3	5	8	13
المسافة	0	225	383	623	993
السرعة	75	77	80	74	72

أ. استخدم شريحة تكعيبية متشابكة لتخمين موقع السيارة وسرعتها عند الثانية العاشرة $t = 10$ s.

ب. استخدم مشتقة الشريحة لتحديد ما إذا كان يمكن للسيارة أن تتجاوز سرعة 55-mi/h على الطريق. وإذا كان ذلك فما المرة الأولى التي تتجاوز فيها السيارة هذه السرعة؟

ج. ما السرعة القصوى المتوقعة لهذه السيارة؟

30. فاز حصان يدعى Smart Jones في سباق الخيول (Kentucky Derby) لعام 2004 في وقت 2:04.06 (دقيقتين و4.06) في سباق 1.25 ميل. والزمن عند نقطة (علامة) ربع الميل، نصف الميل، والميل، كانت 0:22.99 و 0:46.73 و 1:37.35 على التوالي.

أ. استخدم هذه القيم معًا عند وقت الانطلاق لإنشاء شريحة تكعيبية حرّة سباق Smart Jones.

ب. استخدم الشريحة لتخمين الزمن عند نقطة ثلاثة أرباع الميل، وقارن ذلك بالزمن الحقيقي 1:11.80.

ج. استخدم الشريحة لتقريب سرعة انطلاق Smart Jones وسرعته عند خط النهاية.

31. من المعتقد أن الكميات العالية من حمض التنتلك في أوراق أشجار البلوط البالغة تعيق نموّ يرقات عثّة الشتاء (*Operophtera bromata L., Geometridae*) التي تؤذي هذه الأشجار كثيرًا في سنوات معينة. يبين الجدول الآتي معدل وزن عينتين من هذه اليرقات خلال الأيام 28 الأولى

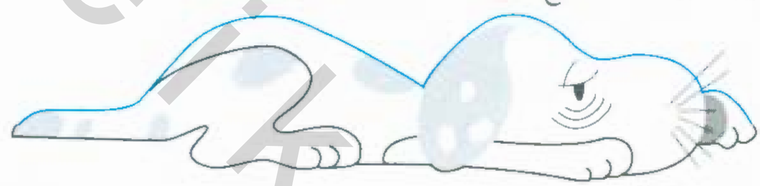
بعد ولادتها. أخذت العينة الأولى من يرقات تربّت على أوراق بلوط طريّة (حديثة)، حيث تربت العينة الثانية على أوراق بالغة (عتيقة) من نفس الشجرة.

أ. استخدم شريحة تكعيبية حرّة لتقريب منحنى معدل الوزن لكل عينة.

ب. أوجد أعلى معدل وزن تقريبي لكل عينة من خلال إيجاد القيمة القصوى للشريحة.

اليوم	0	6	10	13	17	20	28
معدل وزن العينة (2) بالملجم	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
معدل وزن العينة (1) بالملجم	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

32. طلب تقدير الجزء العلوي من هذا الوحش الأرستقراطي باستخدام استكمالات داخلية لشريحة تكعيبية متشابكة. وقد رسم المنحنى على مخطط شبكي، وبني الجدول منه. استخدم الخوارزمية (5.3) لإنشاء الشرائح التكعيبية المتشابكة الثلاثة.



المنحنى 1				المنحنى 2				المنحنى 3			
i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	1	3.0	1.0	0	17	4.5	3.0	0	27.7	4.1	0.33
1	2	3.7		1	20	7.0		1	28	4.3	
2	5	3.9		2	23	6.1		2	29	4.1	
3	6	4.2		3	24	5.6		3	30	3.0	−1.5
4	7	5.7		4	25	5.8					
5	8	6.6		5	27	5.2					
6	10	7.1		6	27.7	4.1	−4.0				
7	13	6.7									
8	17	4.5	−0.67								

33. كرّر التمرين (32)، ولكن بإنشاء ثلاث شرائح طبيعية مستخدمًا الخوارزمية (4.3).

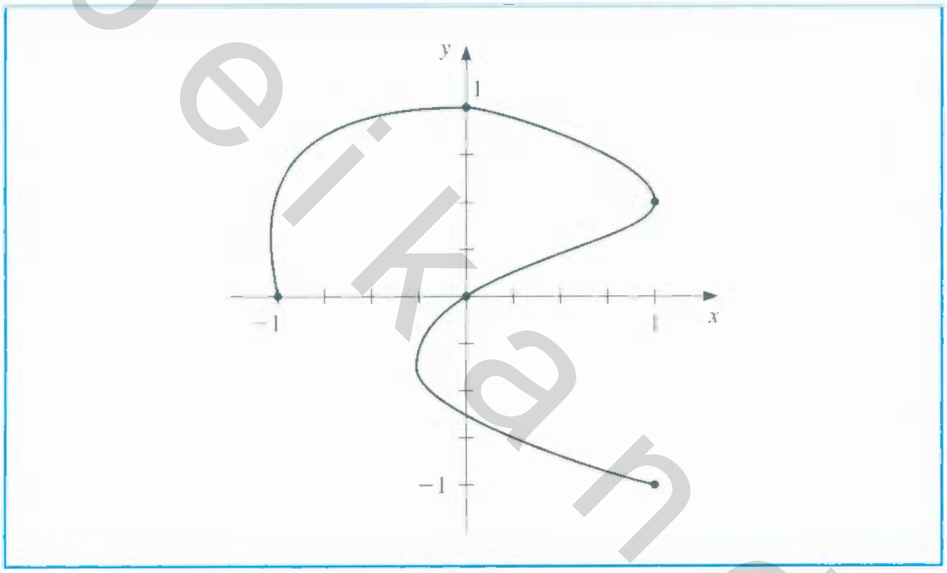
5.3 المنحنيات الوسيطية Parametric Curves

ليس ممكنًا استخدام أي من الأساليب التي تطوّرت في هذا الفصل لتوليد منحنيات بالصيغة التي نراها في شكل (14.3)، لأن هذا المنحنى لا يمكن الصيغة عنه بوصفه دالّة لأحد الوسيطات التنسيقية بدلالة الآخر. سوف نرى في هذا الفصل كيف تمثل منحنيات عامة باستخدام وسيط

للتعبير عن كل من متغيري إحداثيات -x و-y. ويمكن توسيع هذا الأسلوب ليمثّل منحنيات عامة وأسطحًا في فضاء. ويكون أسلوب الوسيط المباشر لتحديد كثيرة حدود أو كثيرة حدود مجزأة لربط النقاط $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ وفق ترتيب محدد مستخدمًا وسيط t على فترة $[t_0, t_n]$ مع $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ثم إنشاء دوال تقريب
مع $x_i = x(t_i)$ و $y_i = y(t_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$.

يعرض المثال الآتي ذلك الأسلوب في حالة كون كل من دالتي التقريب كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي.

شكل 14.3



مثال 1 أنشئ زوجًا من كثيرات حدود لاجرانج لتقريب المنحنى على صورة الشكل (14.3) مستخدمًا نقاط البيانات الظاهرة على المنحنى.

هناك مرونة في اختيار المتغيّر. وسوف نختار النقاط $\{t_i\}_{i=0}^{4}$ المتساوية التباعد في $[0, 1]$. التي تعطي البيانات في جدول (19.3).

جدول 19.3

i	0	1	2	3	4
t_i	0	0.25	0.5	0.75	1
x_i	−1	0	1	0	1
y_i	0	1	0.5	0	−1

وهذا ينتج كثيرات حدود استكمال داخلي متداخلة

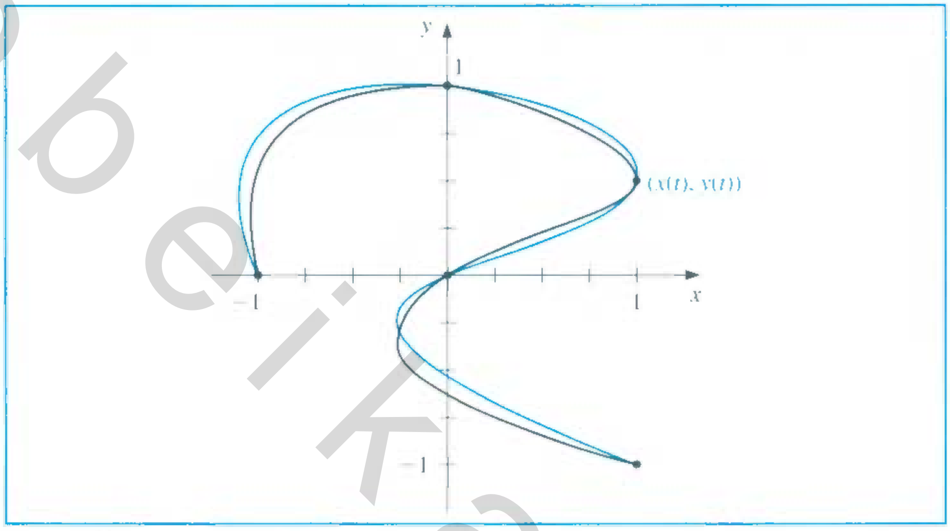
$$x(t) = \left(\left(\left(64t - \frac{352}{3}\right)t + 60\right)t - \frac{14}{3}\right)t - 1$$

و

$$y(t) = \left(\left(\left(-\frac{64}{3}t + 48\right)t - \frac{116}{3}\right)t + 11\right)t$$

وعند رسم هذا النظام الوسيط نحصل على الشكل البياني الموضح بالأزرق في شكل (15.3). ومع أنه يمرّ عبر النقاط المطلوبة، وله الشكل الرئيس نفسه، فإنه لا يتعدى التقريب الخام (الابتدائي) للمنحنى الأصلي. سيتطلب التقريب الأدق نقاطًا إضافية، مع زيادة مرافقة بالحسابات.

شكل 15 3



إن نظامًا ناجحًا لرسوم الحاسوب يحتاج لأن يكون مبنيًا على أساس مبرهنة رياضية منتظمة بحيث تكون النتائج متوقعة. ولكن هذه المبرهنة يجب تطبيقها ضمن لخلفية بحيث يتمكن الرسام من تأسيس لتصميم وفقا للافتراض

ويمكن توليد منحنيات هرمايت والشريحة بالأسلوب نفسه، ولكنها تتطلب جهودًا حسابية واسعة أيضًا. تتطلب التطبيقات في الرسوم الحاسوبية توليدًا سريعًا لمنحنيات ملساء يمكن تعديلها بسهولة وسرعة. ولغرض حسابي وجمالي؛ فإن تغيير جزء واحد من هذه المنحنيات يجب ألا يكون له أثر ولو قليلًا في بقية أجزائها. يلغي هذا استخدام كثيرات حدود استكمال داخلي أو الشرائح؛ لأن تغيير أحد الأجزاء يؤثر في المنحنى كله. إن اختيار منحنى الاستخدام في الرسم الحاسوبي يكون غالبا عبارة عن صيغة لكثيرة حدود هرمايت التكعيبية المجزّأة. ويحدد كل جزء من كثيرة حدود هرمايت التكعيبية كليًا من خلال وصف أطرافها والمشتقات عند الأطراف هذه. ويمكن لجزء واحد من المنحنى أن يتغير نتيجةً لذلك، حيث يترك غالبية المنحنى على حاله. وتحتاج الأجزاء المتجاورة إلى التعديل، لضمان الملوسة عند الأطراف فقط. ويمكن تنفيذ الحسابات سريعًا، ويمكن تعديل المنحنى جزءًا بعد آخر. تحتاج مشكلة استكمال هرمايت الداخلي إلى وصف المشتقات عند الأطراف لكل جزء من المنحنى. لنفترض أن المنحنى له $n+1$ من نقاط البيانات $(x(t_0), y(t_0)), \ldots, (x(t_n), y(t_n))$، ونرغب في تحديد معالم المكعب لاستيعاب سمات معقدة. ويجب وصف $x'(t_i)$ و $y'(t_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, n$ بعد ذلك.

هذا ليس صعبًا على الصورة التي تبدو لنا؛ لأن كل جزء ينتج مستقلًا. وعلينا ضمان أن المشتقات عند الأطراف لكل جزء تماثل تلك التي في الجزء المجاور فقط. وأخيرًا نستطيع تبسيط العملية لتكون عبارة عن تحديد زوج من كثيرات حدود هرمايت التكعيبية في الوسيط t في الأساس، حيث إن $t_0 = 0$ و $t_1 = 1$ علمًا أن بيانات الأطراف $(x(0), y(0))$ و $(x(1), y(1))$ والمشتقات dy/dx (at $t = 0$) و dy/dx (at $t = 1$).

لاحظ أننا نعرّف ستة شروط فقط. وأن كثيرات الحدود التكعيبية في $x(t)$ و $y(t)$ لكل منها أربعة وسيطات. ليصبح المجموع ثمانية. وهذا يوفر مرونة في اختيار زوج من كثيرات حدود هرمايت التكعيبية لتحقيق الشروط، كون الصيغة الطبيعية لتحديد $x(t)$ و $y(t)$ تتطلب منا وصف $x'(0), x'(1), y'(0), y'(1)$. يتطلب منحنى هرمايت الواضح في x و y وصف المحصلات

$$\frac{dy}{dx}(t=0)=\frac{y'(0)}{x'(0)} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx}(t=1)=\frac{y'(1)}{x'(1)}$$

فقط.

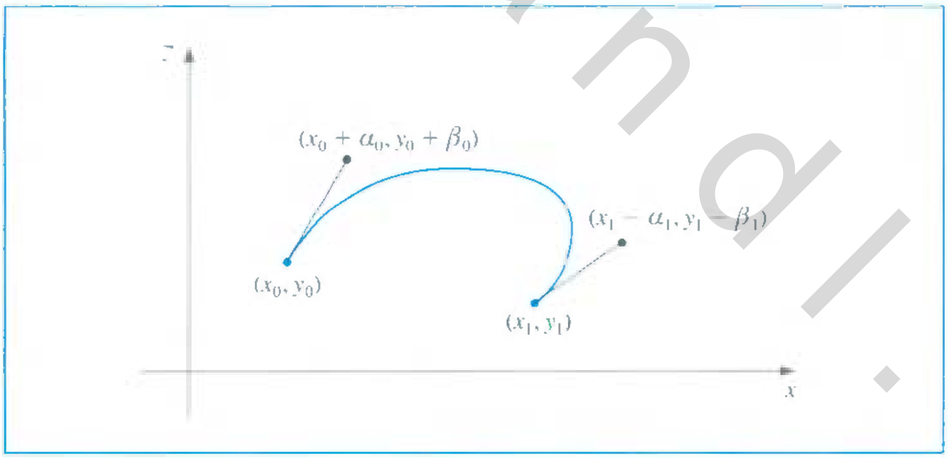
وعند ضرب $x'(0)$ و $y'(0)$ في عامل قياس مشترك، فإن خط المماس للمنحنى عند $(x(0), y(0))$ يبقى نفسه. لكن يتغير شكل المنحنى. وكلما كان عامل القياس أكبر، يكون المنحنى أقرب في تقريب خط المماس من $(x(0), y(0))$. وتظهر حالة مشابهة عند نقطة النهاية الأخرى $(x(1), y(1))$.

ولمزيد حول تبسيط العملية في الرسوم الحاسوبية المتداخلة، فإن المشتقة عند نقطة نهاية تبسط مستخدمة نقطة ثانية (وتدعى نقطة الدلالة *guidepoint*) على خط التماس المطلوب. وكلما كانت نقطة الدلالة بعيدة عن النقطة، أصبح بإمكان المنحنى تقريب خط المماس أكثر من النقاط.

تظهر النقاط عند (x_0, y_0) و (x_1, y_1) في شكل (16.3). ونقطة الدلالة لـ (x_0, y_0) هي $(x_0+\alpha_0, y_0+\beta_0)$. ونقطة الدلالة لـ (x_1, y_1) هي $(x_1-\alpha_1, y_1-\beta_1)$. إن كثيرة حدود هرميت التكعيبية $x(t)$ على $[0, 1]$ تحقّق

$$x(0)=x_0,\quad x(1)=x_1,\quad x'(0)=\alpha_0,\quad x'(1)=\alpha_1$$

شكل 16.3



وكثيرة الحدود الوحيدة التي تحقّق هذه الشروط هي

$$x(t)=[2(x_0-x_1)+(\alpha_0+\alpha_1)]t^3+[3(x_1-x_0)-(\alpha_1+2\alpha_0)]t^2+\alpha_0 t+x_0 \qquad (22.3)$$

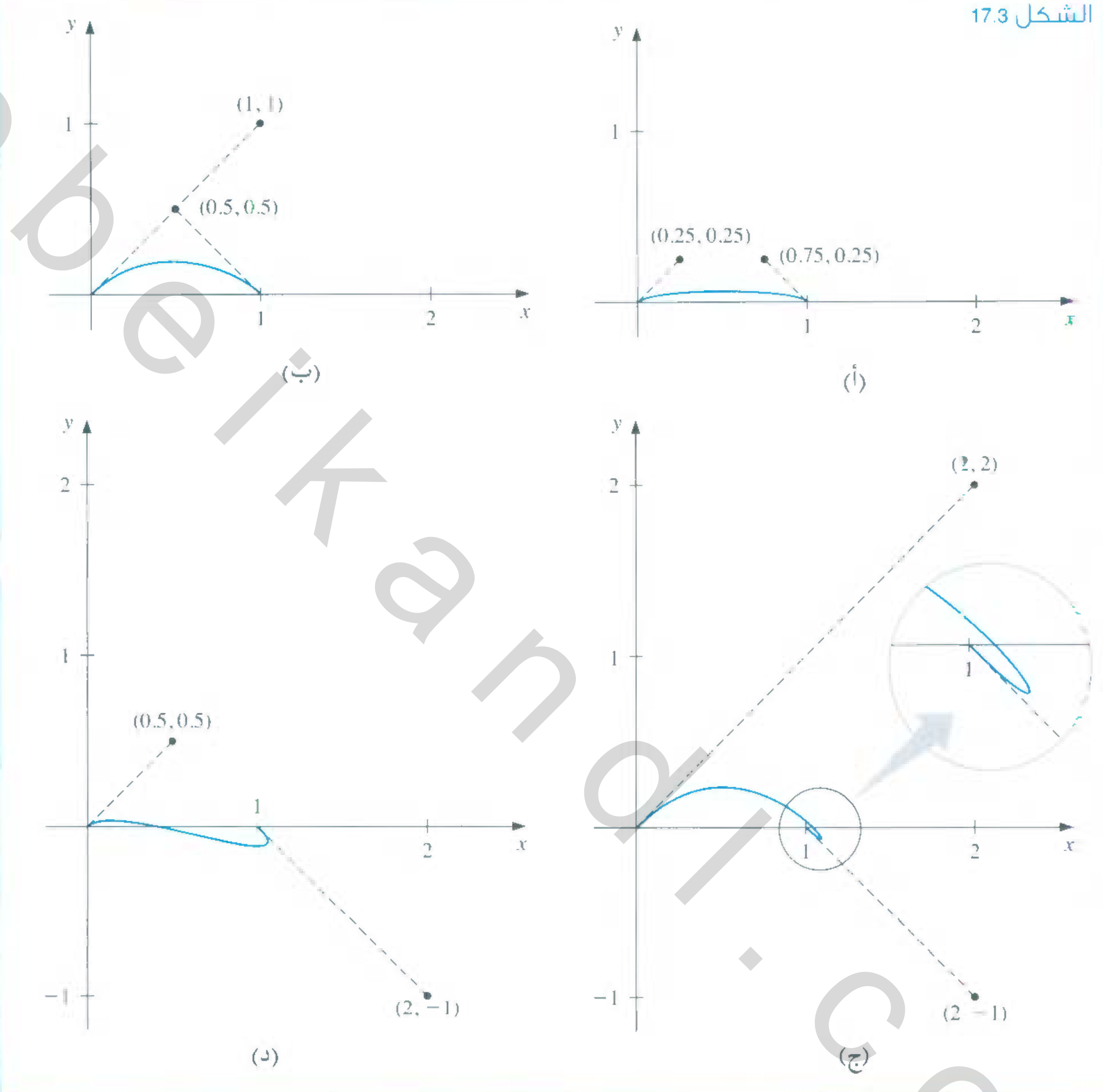
وبالأسلوب نفسه، فإن كثيرة الحدود التكعيبية الوحيدة التي تحقّق

$$y(0)=y_0,\quad y(1)=y_1,\quad y'(0)=\beta_0,\quad y'(1)=\beta_1$$

تكون

$$y(t)=[2(y_0-y_1)+(\beta_0+\beta_1)]t^3+[3(y_1-y_0)-(\beta_1+2\beta_0)]t^2+\beta_0 t+y_0 \qquad (23.3)$$

الشكل 17.3



مثال 2 تبين الرسوم البيانية في الشكل 17.3 بعض الإمكانات لمنحنيات أنتجت من خلال الصيغ (22.3) و (23.3) عندما تكون النقاط هي $(1, 0)$ و $(0, 0)$ ومقدار الميل عند هذه النقاط 1 و -1 على التوالي. إن تبيان الميل عند الأطراف يتطلب كون $\alpha_0 = \beta_0$ و $\alpha_1 = \beta_1$ فقط، لأن النسب α_0/β_0 و α_1/β_1 تعطي على التوالي الميل عند يسار الأطراف ويمينها. ■

كان بيير آيتن بيزير (1910-1999) PierreEtienne Be'zier رئيساً للتصميم والإنتاج في شركة رينو للسيارات معظم حياته المهنية بدأ بحثه في التصميم المدعم بالحاسوب والتصنيع عام 1960. مطوّرًا أدوات فاعلة في تصميم المنحنى والسطح وأسس طريقة توليد حاسوبية في ثلاثة اتجاهات (3D) لنماذج السيارات.

من إيجابيات منحنيات بيزير Be'zier التي تحمل اسمه. أنها تستند إلى مبرهنة رياضية دقيقة، ولا تحتاج لأن تكون ماثلة كليًا أمام النقطة بالتطبيق الذي يريد عمل منحنى أو سطح تتحقق فيه الافتراضات. هذه المنحنيات هي القاعدة لنظام هوامش Adobe Postscript القوي. حيث تنتج المنحنيات آليًا. وتظهر في العديد من برمجيات التصاميم الحاسوبية.

والأسلوب المعياري لتحديد منحنيات في حالة رسوم بيانية متداخلة هو استخدام الفأرة أولا أو كرة المسار trackball لتحديد النقاط ونقاط الدلالة لتوليد التقريب الأول للمنحنى. ويمكن تحديد هذه يدويًا، ولكن معظم أنظمة الرسوم البيانية تسمح لك باستخدام جهاز الإدخال لرسم المنحنى على الشاشة تلقائيًا. وسوف تختار النقاط ونقاط الدلالة المناسبة لهذا المنحنى التلقائي.

ويمكن المناورة بالنقاط ونقاط الدلالة فيما بعد لمواضع تستطيع إنتاج منحنى ذي شكل مقبول. ولكون الحسابات بحدها الأدنى. فإن المنحنى يمكن تحديده سريعًا، حيث يمكن فضلًا عن ذلك ملاحظة التغيير الناتج حالا. والأكثر من ذلك. فإن جميع البيانات المطلوبة لحساب المنحنيات بتوقع وجيدها في الإحداثيات ونقاط الدلالة. ولا يتطلب الأمر معرفة تحليلية لمستخدم النظام أخيرًا.

وتستخدم برامج الرسوم البيانية المشهورة هذا النوع من الأنظمة لتمثيل رسمها البياني التلقائي بصيغة صيغة إلى حد ما. وتكعيبات هرمايت موضحة على أنها كثيرات حدود بيزير Be'zier التي تدخل عامل قياس 3 عند حساب الاشتقاقات عند نقاط النهاية. وهذا يختزل الصيغ الوسيطة إلى

$$x(t) = [2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + 3\alpha_0 t + x_0 \quad (24.3)$$

و

$$y(t) = [2(y_0 - y_1) + 3(\beta_0 + \beta_1)]t^3 + [3(y_1 - y_0) - 3(\beta_1 + 2\beta_0)]t^2 + 3\beta_0 t + y_0 \quad (25.3)$$

إلى $0 \le t \le 1$، لكن هذا التغيير يكون واضحًا لمستخدم النظام.

تنشئ الخوارزمية (6.3) مجموعة منحنيات بيزير معتمدة على الصيغ الوسيطة في المعادلتين (24.3 و 25.3).

ALGORITHM

الخوارزمية

6.3

منحنى بيزير Be'zier Curve

لإنشاء منحنيات بيزير التكعيبية $C_0, \ldots, C_{n-1}$ بصيغة متغيّرة، بحيث C_i ممثلة كالآتي:

$$(x_i(t), y_i(t)) = \left(a_0^{(i)} + a_1^{(i)}t + a_2^{(i)}t^2 + a_3^{(i)}t^3, b_0^{(i)} + b_1^{(i)}t + b_2^{(i)}t^2 + b_3^{(i)}t^3\right)$$

لـ $0 \le t \le 1$، حيث إنها محددة بنقطة الطرف الأيسر (x_i, y_i)، نقطة الدلالة اليسرى (x_i^+, y_i^+) نقطة الطرف الأيمن (x_{i+1}, y_{i+1})، ونقطة الدلالة اليمنى (x_{i+1}^-, y_{i+1}^-) لكل $i = 0, 1, \ldots, n-1$

المدخلات: $n; (x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n); (x_0^+, y_0^+), \ldots, (x_{n-1}^+, y_{n-1}^+); (x_1^-, y_1^-), \ldots, (x_n^-, y_n^-)$

المخرجات: المعاملات $\{a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}\}$ لكل $0 \le i \le n-1$

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 0, 1, \ldots, n-1$. نفذ الخطوتين 2 و 3.
2	ضع $a_0^{(i)} = x_i$ $b_0^{(i)} = y_i$ $a_1^{(i)} = 3(x_i^+ - x_i)$

2	$b_1^{(i)} = 3(y_i^+ - y_i)$ $a_2^{(i)} = 3(x_i + x_{i+1}^- - 2x_i^+)$ $b_2^{(i)} = 3(y_i + y_{i+1}^- - 2y_i^+)$ $a_3^{(i)} = x_{i+1} - x_i + 3x_i^+ - 3x_{i+1}^-$ $b_3^{(i)} = y_{i+1} - y_i + 3y_i^+ - 3y_{i+1}^-$
3	المخرجات $(a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)})$.
4	توقف.

■

تتكون المنحنيات الثلاثية الأبعاد بطريقة مماثلة بواسطة تعيين مركبات إضافية لـ z_0 و z_1 للعقد، و $z_0 + \gamma_0$ و $z_1 - \gamma_1$ للنقاط الدالة. وتعتبر المسألة الصعبة المتضمنة تمثيل المنحنيات ثلاثية الأبعاد في فقدان البعد الثالث عند رسم المنحنى على شاشة الحاسوب ثنائية الأبعاد. تستخدم تقنيات متعددة ومختلفة. ولكن هذا الموضوع يقع ضمن واقع الرسوم البيانية الحاسوبية. وللحصول على مقدمة لهذا الموضوع وطرق إمكانية تعديل هذه التقنيات عند تمثيلها على السطوح المستوية. يرجى الرجوع إلى الكتب المتعددة حول أساليب رسومات الحاسوب البيانية مثل [Hill, F] أو [FVFH].

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 5.3

1. لتكن $(x_0, y_0) = (0, 0)$ و $(x_1, y_1) = (5, 2)$ نقاط نهاية منحنى. استخدم نقاط الدلالة أدناه لإنشاء تقريبات هرمايت التكعيبية الوسيطة $(x(t), y(t))$ للمنحنى، وارسم التقريبات:

أ. $(1, 1)$ و $(6, 1)$ ب. $(0.5, 0.5)$ و $(5.5, 1.5)$

ج. $(1, 1)$ و $(6, 3)$ د. $(2, 2)$ و $(7, 0)$

2. كرّر التمرين (1) مستخدماً كثيرات حدود بيزير التكعيبية.

3. أنشئ كثيرات حدود بيزير التكعيبية معتمداً الأطراف ونقاط الدلالة الآتية وارسمها:

أ. النقطة $(1, 1)$ مع نقطة دلالة $(1.5, 1.25)$ للنقطة $(6, 2)$ مع نقطة دلالة $(7, 3)$.

ب. النقطة $(1, 1)$ مع نقطة دلالة $(1.25, 1.5)$ للنقطة $(6, 2)$ مع نقطة دلالة $(5, 3)$.

ج. النقطة $(0, 0)$ مع نقطة دلالة $(0.5, 0.5)$ للنقطة $(4, 6)$ مع نقطة دلالة داخلة $(3.5, 7)$ ونقطة دلالة خارجة $(4.5, 5)$ للنقطة $(6, 1)$ مع نقطة دلالة $(7, 2)$.

د. النقطة $(0, 0)$ مع نقطة دلالة $(0.5, 0.5)$ للنقطة $(2, 1)$ مع نقطة دلالة داخلة $(3, 1)$ ونقطة دلالة $(3, 1)$ للنقطة $(4, 0)$ مع نقطة دلالة داخلة $(1, 5)$ ونقطة دلالة $(3, -1)$ للنقطة $(6, -1)$ مع نقطة دلالة $(6.5, -0.25)$.

4. استخدم البيانات في الجدول الآتي والخوارزمية (6.3) لتقريب شكل الحرف n:

i	x_i	y_i	α_i	β_i	α_i'	β_i'
0	3	6	3.3	6.5		
1	2	2	2.8	3.0	2.5	2.5
2	6	6	5.8	5.0	5.0	5.8
3	5	2	5.5	2.2	4.5	2.5
4	6.5	3			6.4	2.8

5. افترض أن كثيرة حدود بيزير التكعيبية قد وضعت عبر النقاط (u_0, v_0) و (u_3, v_3) مع نقاط دلالة (u_1, v_1) و (u_2, v_2) على التوالي.

أ. اشتق الصيغ الوسيطة لـ $u(t)$ و $v(t)$ مفترضًا أن

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_3, \quad u'(0) = u_1 - u_0, \quad u'(1) = u_3 - u_2$$

و

$$v(0) = v_0, \quad v(1) = v_3, \quad v'(0) = v_1 - v_0, \quad v'(1) = v_3 - v_2$$

ب. لتكن $f(\frac{1}{3}i) = u_i$ لكل $i = 0, 1, 2, 3$ و $g(\frac{1}{3}i) = v_i$ لكل $i = 0, 1, 2, 3$. أثبت أن كثيرة حدود برنستاين من الرتبة 3 في t لـ f هي $u(t)$، وكثيرة حدود برنستاين من الرتبة 3 في t لـ g هي $v(t)$.

(انظر تمرين 29 من الفصل 1.3)

6.3 مسح الطرائق والبرمجيات Survey Methods and Software

بحثنا في هذا الباب تقريب دالّة باستخدام كثيرات حدود وكثيرات حدود مجزّأة. ويمكن وصف الدّالة من خلال صيغة تعريفية أو من خلال تهيئة نقاط في السطح يمرّ من خلالها الشكل البياني للدّالة.

إن مجموعة النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ معطاة في كل حالة، وإن معلومات أخرى كقيمة مشتقات مختلفة، يمكن أن تكون ضمن المتطلبات أيضًا. نحن بحاجة إلى إيجاد دالّة تقريبية تحقّق الشروط المحددة من قبل هذه البيانات. إن كثيرة حدود استكمال داخلي $P(x)$ هي كثيرة حدود ذات أقل رتبة وتحقّق للدّالة f

$$P(x_i) = f(x_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

ومع أن كثيرة الحدود هذه هي استكمال داخلي وحيد، فإنه يمكن أن تأخذ صيغًا مختلفة. وصيغة لاجرانج غالبًا ما تستخدم في جداول استكمال داخلي عندما تكون n صغيرة. وفي اشتقاق صيغ لتقريب المشتقات والتكاملات أيضًا. وتستخدم طريقة نيفيل في حسب الكثير من كثيرات الحدود المستكملة داخليًا عند نفس القيمة لـ x. وتكون صيغ نيوتن لكثيرات الحدود أكثر تناسبًا للحساب، وتستخدم على نحو واسع لاشتقاق صيغ لحل الصيغ التفاضلية أيضًا. ويتسم استكمال داخلي كثيرة حدود بحالة ضعف تكمن في التذبذب، خصوصًا إذا كان عدد النقاط كبيرًا. ويمكن تطبيق طرائق أخرى في هذه الحالة.

تستكمل كثيرات حدود هرمايت الدّالة ومشتقاتها عند النقاط داخليًا. ويمكن أن تكون دقيقة جدًّا، لكن ذلك يتطلّب معلومات أكثر حول الدّالة المراد تقريبها. وعندما يكون هناك عدد كبير من النقاط، فإن كثيرات حدود هرمايت معرضة لحالة ضعف التذبذب أيضًا.

أكثر صيغ الاستكمال الداخلي شيوعًا في الاستخدام هي استكمال داخلي كثيرة حدود مجزّأة. فإذا توفّرت قيم الدّالة والمشتقة، فإنه ينصح باستكمال هرمايت الداخلي التكعيبي. إنها الطريقة الفضلى لقيم استكمال داخلي الدّالة، التي تمثّل حل صيغة الاشتقاق. وعندما لا يتوافر سوى قيم الدّالة، فإنه يمكن استخدام استكمال داخلي الشريحة التكعيبية الحرّة. هذا يجبر المشتقة الثانية للشريحة لتصبح صفرًا عند الأطراف. وتتطلب شرائح تكعيبية أخرى بيانات إضافية. ويحتاج الشريحة التكعيبية التشابكية إلى قيم مشتقة الدّالة عند الأطراف للفترة على سبيل المثال.

هناك طرائق استكمال داخلي أخرى شائعة الاستخدام مثل الاستكمال داخلي مثلثاتي. وبالتحديد

تحول فورير السريع Fast Fourier Transform الذي سيُتناول في الباب الثامن. ويستخدم مع كميات كبيرة من البيانات عندما تكون الدّالة ذا طبيعة دورية. ويستخدم الاستكمال الداخلي من خلال دوالّ معقولة أيضًا. وإذا حصل شك في دقة البيانات، فإن أساليب الملوسة يمكن تطبيقها. وينصح عندئذ باستخدام بعض صيغ المربعات الصغرى Least Squares لتوفيق البيانات مثل كثيرات حدود. دوالّ مثلثاتية. دوال معقولة. وشرائح يمكن استخدامها في المربعات الصغرى لتوفيق البيانات. وسوف نتناول هذه المواضيع في الباب الثامن. تستند برامج نمطية الاستكمال الداخلي في مكتبة IMSL إلى الكتاب

"*A Practical Guide to Splines* by Carl de Boor [Deb2]" واستخدام استكمال داخلي من خلال شرائح تكعيبية. ويُستخدم النمط البرامجي CSDEC لاستكمال داخلي من خلال شرائح تكعيبية مع شروط إنهاء تُتاح للمستخدم. CSPER هو لاستكمال داخلي من خلال شرائح تكعيبية مع شروط إنهاء دورية. وCSHER هو لاستكمال داخلي من خلال كثيرات حدود هرمايت شبه المجزأة. والنمط البرامجي CSDEC يدمج ما بين الخوارزميتين (4.3 و5.3). والنمط البرامجي CSINT يستخدم شرط اللاعقدة الذي ذُكر في نهاية الفصل (4.3). وهناك شرائح تكعيبية لتقليل التذبذبات والإبقاء على التقعر أيضًا. وطرائق استكمال داخلي في اتجاهين من خلال شرائح ثنائية التكعيب موجودة أيضًا.

تتضمن مكتبة NAG http://www.netlib.org برامج نمطية فرعية subroutines مثل EO1AEF لاستكمال داخلي كثيرات حدود وهرمايت، EO1BAF لاستكمال داخلي شرائحي تكعيبي و EO1BEF لاستكمال داخلي هرمايت التكعيبي المجزّأ. يُستخدم النمط البرامجي الفقرةي EO1ABF لاستكمال داخلي لبيانات عند نقاط متساوية التباعد. أما النمط البرامجي الفقرةي EO1AAF فيطبق على بيانات عند نقاط غير متساوية التباعد. ويتضمن NAG برامج نمطية جزئية لاستكمال داخلي من دوالّ بمتغيرين أيضًا.

وتحتوي المكتبة netlib على البرامج النمطية الجزئية cubsp1.f من خلال الحزمة pppack لحساب الشريحة التكعيبية مع شروط مختلفة الأطراف. ومن خلال الحزمة slatec، فإن polint.f يعطي معامل فروقات نيوتن المنقسمة لنقاط بيانات متقطعة (منفصلة). ونجد برامج نمطية فرعية مختلفة لحساب كثيرات حدود هرمايت المجزأة من خلال الحزمة slatec/pchip.

ويمكن استخدام دالّة MATLAB التي هي INTERP1 لاستكمال داخلي لمجموعة نقاط بيانات متقطعة، باستخدام أقرب استكمال داخلي مجاور، أو استكمال داخلي خطي، أو استكمال شريحة داخلي تكعيبي. أو استكمال داخلي تكعيبي. مخرجات INTERP1 كثيرة حدود قيد الحساب عند مجموعة نقاط متقطعة. ويمكن استخدام POLYFIT المبني على تقريب المربعات الصغرى (انظر الفصل 1.8) لإيجاد دالّة استكمال داخلي من الرتبة n على الأكثر. ويمرّ عبر $n+1$ من النقاط المحددة. ويمكن إنتاج شرائح تكعيبية مع الدّالة SPLINE. يمكن استخدام Maple لإنشاء كثيرة حدود استكمال داخلي مستخدما الأوامر

```
>interp(X,Y,x);
```

حيث X عبارة عن النقطة [x[0], x[1],..., x[n]]

وY عبارة عن النقطة [f(x[0]), f(x[1]),..., f(x[n])]

وx هو المتغير قيد الاستخدام. ويمكن إنشاء الشريحة التكعيبية الطبيعية مع Maple أيضًا. أدخل أولا

```
>readlib(spline)
```

لجاهزية الحزمة. ومع X وY المبينين في المقطع السابق، فإن الأمر

```
>spline(X,Y,z,3);
```

تَنشأ الشريحة التكعيبية الطبيعية التي تستكمل داخليًا

Y = [y[0],..., y[n]] و X = [x[0],..., x[n]]

حيث X هو المتغير. والعدد 3 يشير إلى رتبة الشريحة التكعيبية. ويمكن إيجاد شرائح خطية وتربيعية أيضًا.

المراجع العامة للطرائق في هذا الفصل من تأليف [Po] Powell و [Da] Davis وتعود الورقة حول الشرائح إلى [Scho] Schoenberg. هذه كتب مهمة حول الشرائح من تأليف Schultz [Schul], De Boor [Deb2], Dierckx [Di], Schumaker [Schum].