الباب

1

أسس رياضية وتحليل الخطأ

Mathematical Preliminaries and Error Analysis

مقدمة

درسنا (قانون الغاز المثالي) $PV = NRT$ الذي يربط بين الضغط P، والحجم V، والحرارة T وعدد المولات N في الغاز (المثالي) في مقررات الكيمياء الابتدائية. وفي هذه الصيغة، يعتمد ثابت R على نظام القياس.

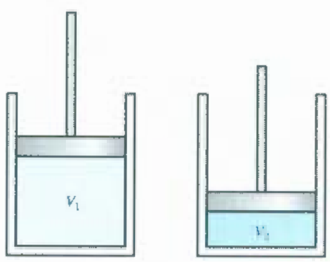
افترض أننا أجرينا تجربتين لاختبار هذا القانون باستخدام الغاز نفسه في كل حالة. لقد كان لديك في التجربة الأولى

$$P = 1.00 \text{ atm}, \qquad V = 0.100 \text{ m}^3$$
$$N = 0.00420 \text{ mol}, \qquad R = 0.08206$$

إن قانون الغاز المثالي يتوقع أن تكون درجة حرارة الغاز

$$T = \frac{PV}{NR} = \frac{(1.00)(0.100)}{(0.00420)(0.08206)} = 290.15 \text{ K} = 17^\circ\text{C}$$

وعندما قسنا درجة حرارة الغاز، وجدنا أن درجة حرارته الحقيقية تساوي 15° C.



والآن نعيد التجربة باستخدام قيم N و R نفسها، ولكن بزيادة الضغط بمثلين ونقصان الحجم بمثلين أيضًا. وبما أن حاصل الضرب PV يبقى نفسه، فإن درجة الحرارة المتوقعة تبقى 17° C، ولكننا نجد أن درجة الحرارة الآن هي 19° C.

ومن الواضح أن قانون الغاز المثالي مشكوك فيه، ولكن قبل الاستنتاج بأن القانون خطأ، يتعين في هذه الحالة معاينة البيانات لنرى ما إذا كان الخطأ يعزى إلى نتائج التجربة. وإذا كان الأمر كذلك فربما تمكنّا من تحديد درجة الدقة المطلوبة في نتائج التجربة؛ لنضمن عدم وجود خطأ بهذا المقدار.

إن تحليل الخطأ الداخل في الحسابات موضوع مهم في التحليل العددي، وسيُدرس في الفصل (2.1).

وسيناقش هذا التطبيق السابق في التمرين (28) من الفصل (2.1).

ويحتوي هذا الباب على مراجعة قصيرة لمواضيع التفاضل والتكامل في متغير واحد، التي نحتاج إليها في الأبواب اللاحقة، بالإضافة إلى مقدمة عن التقارب، وتحليل الخطأ، والتمثيل الآلي للأعداد.

1.1 مراجعة التفاضل والتكامل Review of Calculus

تعدّ مفاهيم النهاية والاتصال للدالة مواضيع رئيسة عند دراسة التفاضل والتكامل.

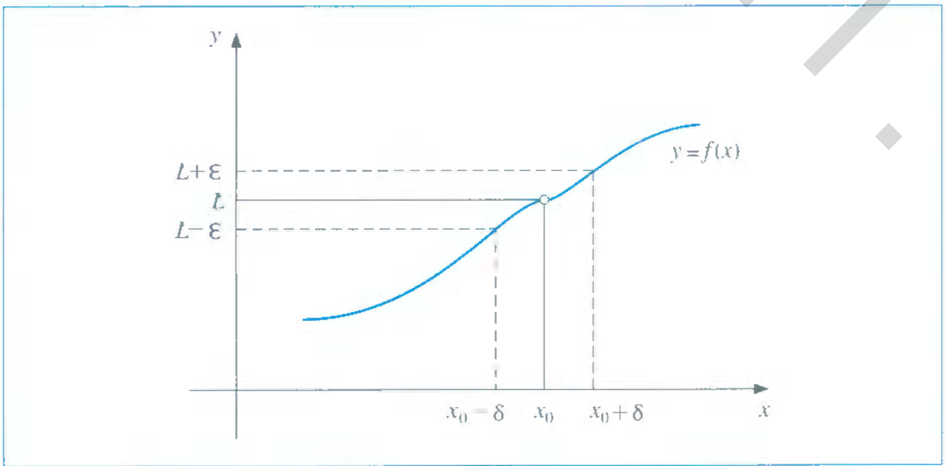
تعريف 1.1 يكون للدالة f المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية X نهاية قيمتها L عند النقطة x_0، وتُكتب

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

إذا كان لأي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$، يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث يتحقق $|f(x) - L| < \varepsilon$ عندما $x \in X$ و $0 < |x - x_0| < \delta$.

(انظر شكل (1.1)). ■

شكل 1.1



تعريف 2.1

افترض أن f دالة معرّفة على مجموعة من الأعداد الحقيقية X و $x_0 \in X$، تكون الدّالة f متصلة عند x_0 إذا كانت

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

وتكون الدّالة f متصلة على المجموعة X إذا كانت متصلة عند كل نقطة (عدد) في X. ■

لقد طُوّرت مفاهيم التفاضل والتكامل وتطبيقاته في أواخر القرن السابع عشر وأوائل القرن الثامن عشر. ولكن الصيغ الرياضية الدقيقة لمفهوم النهاية والاتصال لم تتبلور حتى جاء هينرج أبروارد هيين (1821–1881) وكارل فيرستراس (1815–1897) في القرن التاسع عشر.

نستخدم الرمز $C(X)$ ليعبّر عن الدّوال المتصلة جميعها على X. وعندما تكون X فترة على خط الأعداد الحقيقية، نحذف الحاصرتين ( ).

نعبّر عن مجموعة جميع الدّوال المتصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ بالرمز $C[a,b]$.

وتعرّف نهاية متتالية الأعداد الحقيقية أو الأعداد المركبة بطريقة مماثلة.

تعريف 3.1

افترض أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أعداد حقيقية أو مركبة.

يكون للمتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نهاية x (تتقارب المتتالية إلى x إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب $N(\varepsilon)$ بحيث $|x_n - x| < \varepsilon$ عندما $n > N(\varepsilon)$.

تعني الرموز الآتية

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \text{أو} \quad x_n \to x \quad \text{عندما} \quad n \to \infty$$

أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى x. ■

مبرهنة 4.1

إذا كانت f دالة معرّفة على مجموعة من الأعداد الحقيقية X، وكان $x_0 \in X$ فإن العبارات الآتية متكافئة

أ. f متصلة عند x_0.

ب. إذا كانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أي متتالية على X ومتقاربة إلى x_0 فإن

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$ ■

نفترض أن الدّوال جميعها والتي نستخدمها في الطرائق العددية متصلة؛ لأن هذا هو الحد الأدنى من المتطلبات للتنبؤ بسلوك الدّوال. وإن الدّوال غير المتصلة يمكنها القفز عن نقاط ذات أهمية مما يؤدي إلى صعوبات عند محاولة الحصول على تقريب لمسألة ما.

وإن الافتراضات الأكثر حبكة حول الدّالة تؤدي عموما إلى حلول تقريبية أفضل.

وإن الدّالة ذات الرسم الناعم يسهل التنبؤ بسلوكها بصورة أفضل من تلك الدّالة ذات الخشونة المتعددة. على سبيل المثال: إن شرط النعومة يعتمد على مفهوم المشتقة.

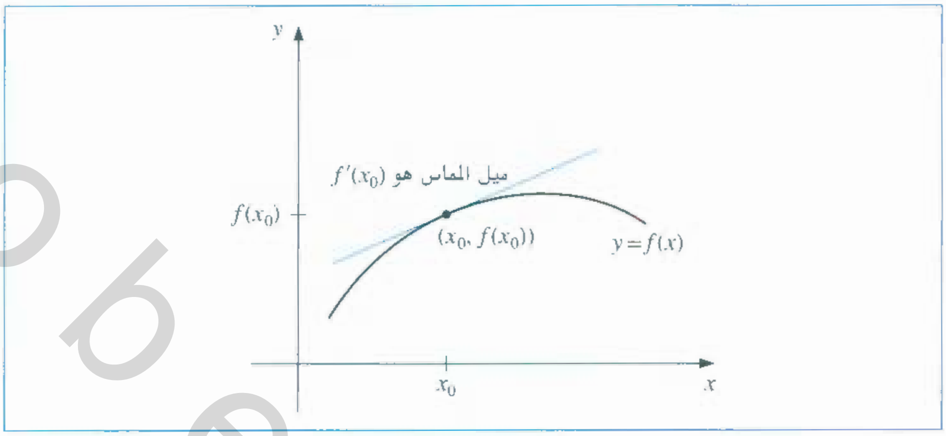
تعريف 5.1

افترض أن f دالة معرّفة على فترة مفتوحة تحتوي على x_0. نقول: إن الدّالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا كانت $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجودة. يسمى العدد $f'(x_0)$ مشتقة f عند x_0.

وتكون الدّالة f قابلة للاشتقاق على المجموعة X إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في X. ■

إن مشتقة الدّالة f عند x_0 هي ميل خط المماس لمنحنى f عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ كما في الشكل (2.1).

شكل 2.1



مبرهنة 6.1 إذا كانت الدّالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن f متصلة عند x_0. ■

تُعزى هـذه المبرهنة للرياضي مايكل رول (1652–1719)، وقد ظهرت عام 1691 في مقالة بعنوان *Me'thode pour re'sounder les e'galites* انتقد رول علم التفاضل والتكامل الذي طوّره إسحاق نيوتن وغوتفريد لايبنتز في البداية، ولكن أصبح رول أخيرًا من مطوّري هذا العلم.

نعبّر عن مجموعة الدّوال جميعها والتي يوجد لها n من المشتقات المتصلة على المجموعة X بالرمز $C^n(X)$، وعن مجموعة الدّوال التي لها مشتقات من جميع الرتب على X بالرمز $C^\infty(X)$. إن كثيرات الحدود، والدّوال النسبية، والمثلثية، والأسّية واللوغارتمية تنتمي كلها إلى $C^\infty(X)$ حيث تتألف X من الأعداد جميعها والتي تعرّف عليها هذه الدّوال. وإننا نحذف الأقواس في هذه الرموز عندما تكون X فترة على خط الأعداد الحقيقية كالسابق.

النظريات الآتية ذات أهمية رئيسة في اشتقاق طرائق تقدير الخطأ. وإن براهين هذه النظريات والنتائج جميعها والتي لم تُذكر مراجعها في هذا الفصل، يمكن الرجوع لها في أي كتاب تفاضل وتكامل رئيس.

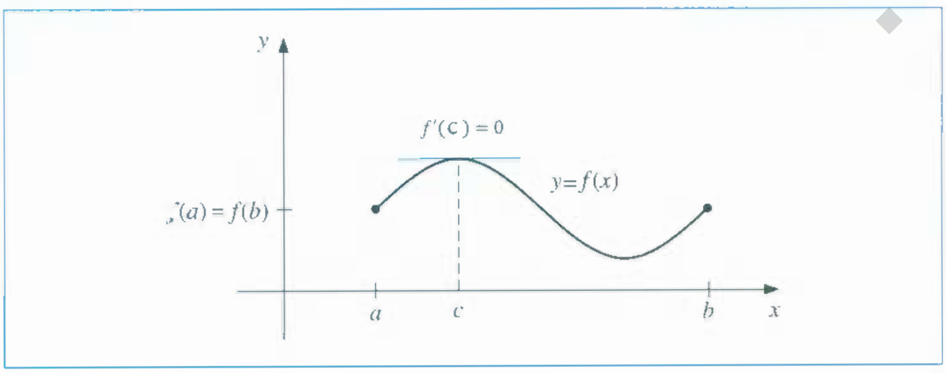
مبرهنة 7.1 مبرهنة رول Rolle's Theorem

إذا كانت $f \in C\,[a, b]$ قابلة للاشتقاق على (a,b)،

وإذا كانت $f(a) = f(b)$، فإنه يوجد عدد c في الفترة (a,b)، يحقق $f'(c) = 0$.

(انظر شكل 3.1). ■

شكل 3.1

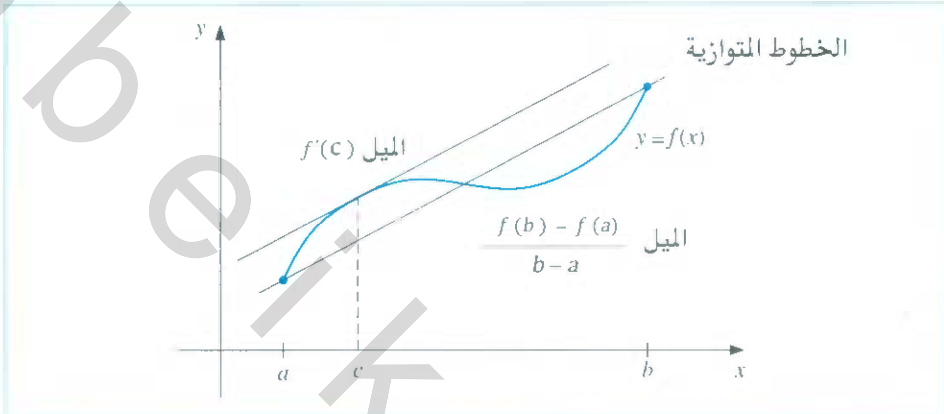


مبرهنة 8.1 مبرهنة القيمة الوسيطية Mean Value Theorem

إذا كانت $f \in C[a, b]$ وكانت f قابلة للاشتقاق على (a, b) فإنه يوجد عدد c في الفترة (a, b) يحقق $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(انظر شكل 4.1).

شكل 4.1

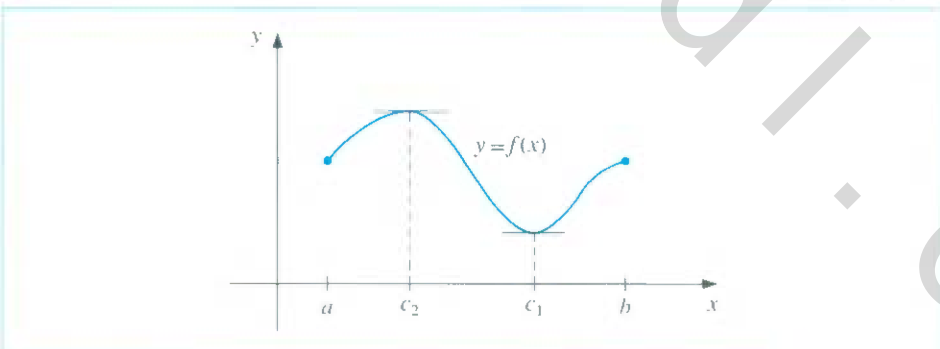


مبرهنة 9.1 مبرهنة القيمة القصوى Extreme Value Theorem

إذا كانت $f \in C[a, b]$ فإنه توجد نقطتان $c_1, c_2 \in [a, b]$ بحيث يكون $f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$ لجميع القيم $x \in [a, b]$. بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a, b) فإن النقطتين c_1 و c_2 تقعان على طرفي الفترة $[a, b]$ أو تكون f' مساوية للصفر.

(انظر شكل 5.1).

شكل 5.1



لقد بدأت البحوث حول تصميم الخوارزميات والأنظمة لاستخدام الرياضيات الرمزية مع بدايات 1960. وأول نظام فعّال ظهر كان في السبعينيات 1970. وكان من نوع LISP ويسمّى MACSYMA.

سنستخدم النظام الحاسوبي الجبري Maple حيثما كان مناسبًا كما ذكرنا في المقدمة.

إن الأنظمة الحاسوبية الجبرية (CAS) مفيدة في الاشتقاق الرمزي، وفي رسم الأشكال خصوصًا نوضح استخدام هاتين التقنيتين في المثال (1).

مثال 1

استخدم Maple لإيجاد $\max_{a \le x \le b} |f(x)|$ للدّالة $f(x) = 5\cos 2x - 2x \sin 2x$ على الفترتين $[1, 2]$ و $[0.5, 1]$.

سنبدأ أولاً بإمكانات Maple في الرسم. ولكي تتمكن من استخدام برمجية الرسم الكاملة، أدخل الأمر

```
>with(plots);
```

فتظهر لك قائمة أوامر ضمن البرمجية.

عرّف f بإدخال

```
>f:= 5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x);
```

إذ تعطيك Maple الآتي

$$f := 5\cos(2x) - 2x\sin(2x)$$

استخدم الأمر

```
>plot(f,x=0.5..2);
```

لكي ترسم f على الفترة $[0.5, 2]$،

يمكننا تحديد إحداثيات أي نقطة على الرسم عن طريق تحريك مؤشر الفأرة لى النقطة، ونقر زر الفأرة الأيسر، فتظهر عندئذ إحداثيات النقطة التي حدّدتها بالمؤشر في الصندوق الأبيض على الزاوية العليا اليسرى لشاشة Maple، وتظهر في الشكل (6.1) أيضًا. إن هذه الطريقة مفيدة لتقرير إحداثيات نقاط القيم المتطرفة للدّالات.

ثم نكمل حل المثال باستخدام مبرهنة القيمة الوسيطية.

أولاً: خذ الفترة $[1, 2]$ للحصول على المشتقة الأولى $g = f'$، أدخل

```
>g:=diff(f,x);
```

يعطيك Maple

$$g := -12\sin(2x) - 4x\cos(2x)$$

يمكنك عندئذ أن تحل $g(x) = 0$ للقيم $1 \le x \le 2$

وذلك باستخدام

```
>fsolve(g,x,1..2);
```

فتحصل على 1.358229874 وتحسب $f(1.358229874) = -5.675301338$،

وذلك باستخدام

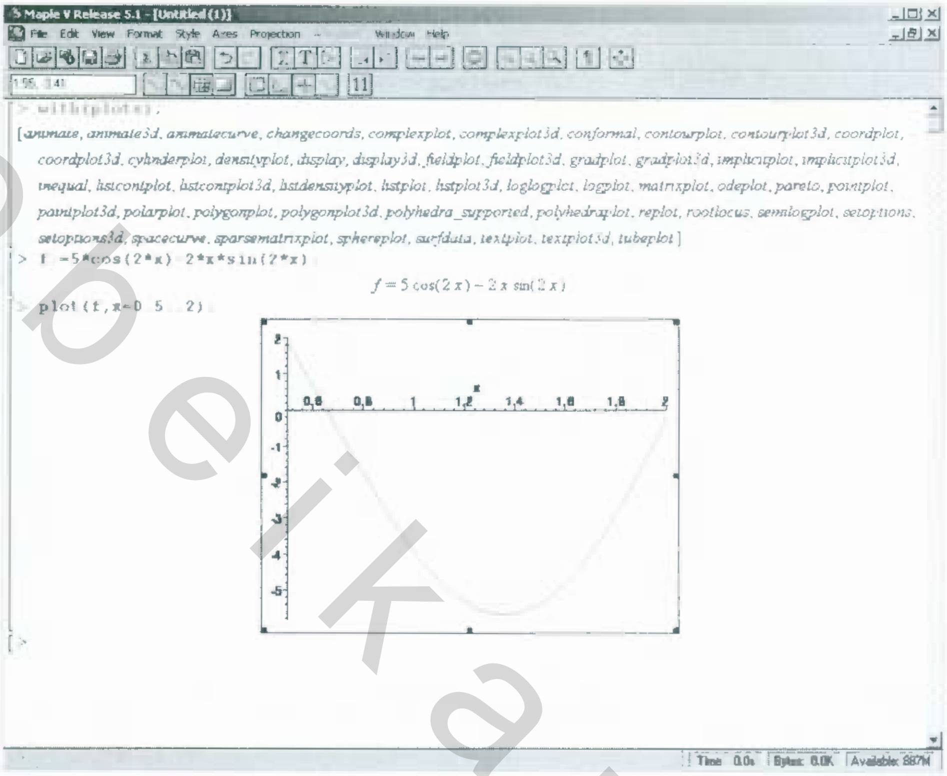
```
>evalf(subs(x=1.358229874,f));
```

إن هذا يعني وجود قيمة صغرى تساوي تقريبًا $f(1.358229874) = -5.675301338$.

وإن ما نحتاج إليه في كثير من الأحيان هو القيمة العظمى التي تحققها الدّالة على فترة ما، وتحدث القيمة العظمى على نقطة حرجة أو على أحد حدود الفترة. وبما أن $f(1) = -3.899329037$ و $f(2) = -0.241008124$ فإن القيمة العظمى تحدث على النقطة الحرجة ويكون

بدئ بالعمل على تطوير مشروع "مابل" في جامعة واترلو في نهاية ثمانينيات القرن العشرين. وكان الهدف منه جعله في متناول أيدي الباحثين الرياضيين، والمهندسين، والعلماء، إضافة إلى توفيره للطلاب من أجل أغراض تربوية. وحتى يكون المشروع فاعلاً، يجب أن يكون قابلاً للنقل، ومناسبًا من حيث المكان والزمان. قدمت عروض للنظام في عام 1982، وأما العرض المكتوب الرئيس لمعايير تصميم نظام "مابل" فقد قدّم عام 1983 [CGG6]

شكل 6.1



$$\max_{1\le x\le 2}|f(x)| = \max_{1\le x\le 2}|5\cos 2x - 2x\sin 2x| = |f(1.358229874)| = 5.675301338$$

وإذا ما أردنا حل $g(x) = 0$ على الفترة $0.5 \le x \le 1$ فإننا نجد ذلك عند إدخال

>fsolve(g,x,0.5..1)

ويعطينا Maple

$$\text{fsolve}(-12\sin(2x) - 4x\cos(2x),\ x, .5..1)$$

إن هذا يعني أن Maple لم يتمكن من إيجاد حل على الفترة [0.5, 1].

وبما أن $f(0.5)= 1.860040545$ و $f(1)= -3.899329037$ نجد أن

$$\max_{0.5\le x\le 1}|f(x)| = \max_{0.5\le x\le 1}|5\cos 2x - 2x\sin 2x| = |f(1)| = 3.899329037$$ ■

ويوجد مفهوم آخر في التفاضل والتكامل يُستخدم بصورة مكثفة وهو تكامل ريمان.

تعريف 10.1 تكامل ريمان للدّالة f على الفترة $[a, b]$ هو النهاية الآتية شرط وجودها.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i$$

لقد اكتشف جورج ريمان (1826–1866) كثيرًا من الأمور حول تصنيف الدّوال التي لها تكاملات. وقد ساهم في أعمال مهمة في الهندسة ومبرهنة الأعداد المركبة أيضًا. ويعدّ من الرياضيين المشهورين في القرن التاسع عشر.

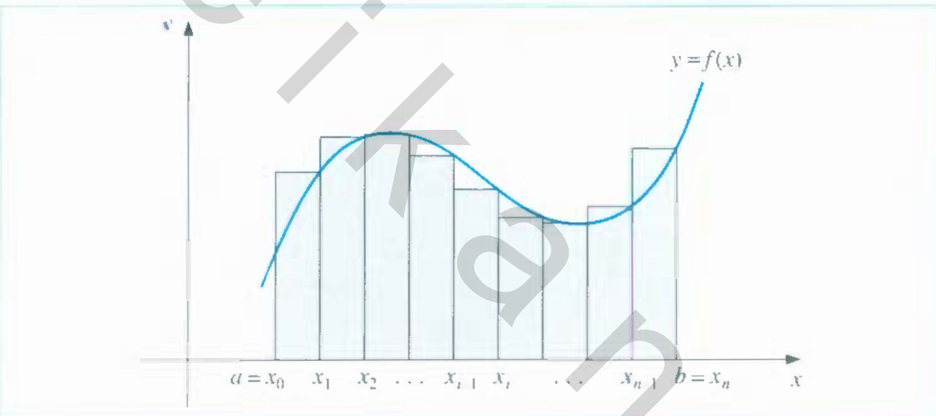
حيث إن الأعداد $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تحقق $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b$ وحيث $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ لكل $(i = 1, 2, \ldots, n)$ وحيث (z_i) أي عدد نختاره عشوائيًا في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$. ■

إذا كانت الدّالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنها قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$. وإن هذا الأمر يسمح لنا – ولسهولة الحساب – باختيار النقاط (x_i) لتكون متساوية لبعد في $[a, b]$، واختيار $(z_i = x_i)$ لكل $(i = 1, 2, \ldots, n)$. وفي هذه الحالة يكون

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

حيث إن الأعداد (x_i) في الشكل (7.1) هي $x_i = a + i(b-a)/n$.

شكل 7.1



هناك نتيجتان أخريان نحتاج إليهما في التحليل العددي. الأولى هي تعميم للمبرهنة المعروفة بمبرهنة القيمة الوسيطية للتكامل.

مبرهنة 11.1 مبرهنة القيمة الوسيطية الموزونة للتكامل
Weighted Mean Value Theorem for Integrals

إذا كانت $f \in C\,[a, b]$ وكان تكامل ريمان للدّالة $g(x)$ موجودًا على $[a, b]$. وكانت $g(x)$ لا تغير إشارتها على $[a, b]$ فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث

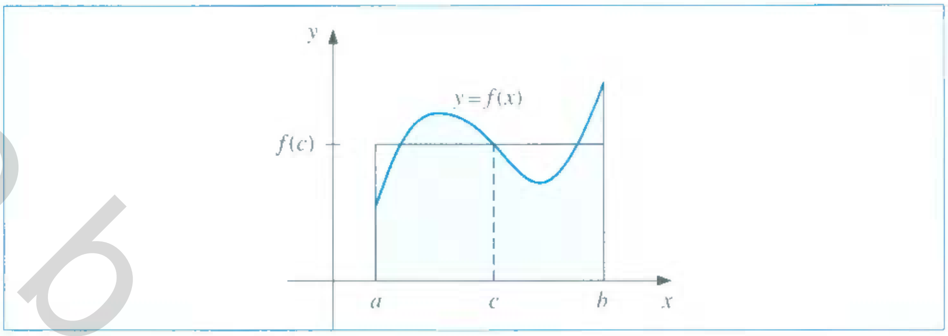
$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$ ■

وعندما يكون $g(x)=1$ فإن المبرهنة (11.1) هي مبرهنة القيمة الوسيطية للتكامل العادية، إذ تعطى القيمة الوسيطية لقيمة الدّالة f على الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\, dx$$

انظر شكل (8.1).

شكل 8.1



عادة لا يقدم برهان المبرهنة (11.1) في كتب التفاضل والتكامل الرئيسة. ولكنه يقدم في معظم كتب التحليل (انظر على سبيل المثال [Fu, p.162]).

كما لا تقدم المبرهنة الثانية التي نحتاج إليها عادة في مقرر التفاضل والتكامل الرئيس. والتي يمكن إثباتها بتطبيق مبرهنة رول على نحو متتال على الدوال $(f, f', \ldots)$ إلى أن نصل في النهاية إلى $f^{(n-1)}$.

مبرهنة 12.1 **تعميم مبرهنة رول Generalized Rolle's Theorem**

افترض أن $f \in C[a,b]$ قابل للاشتقاق n من المرات على الفترة (a,b). إذا كان $f(x)$ يساوي صفرًا على $(n+1)$ من الأعداد المختلفة $x_0, \ldots, x_n$ في الفترة $[a,b]$، فإنه يوجد عدد c في الفترة (a,b) بحيث $f^{(n)}(c)=0$. ■

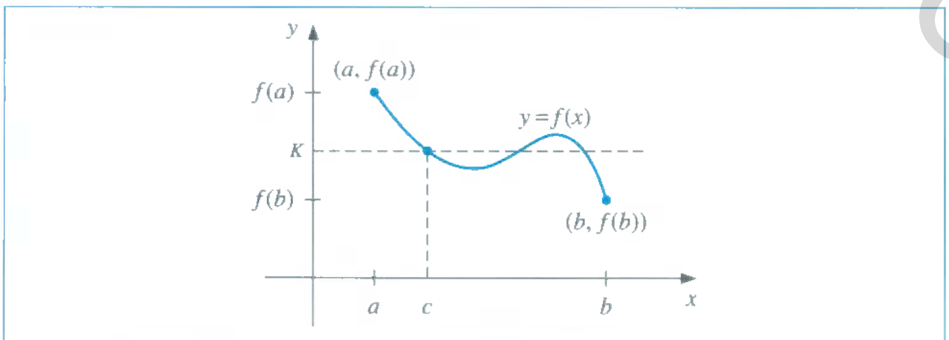
المبرهنة الآتية هي مبرهنة القيمة الوسيطية. ومع معقولية منطوقها حسبما يظهر، فإن البرهان خارج عن نطاق أي مقرر عادي في التفاضل والتكامل. ويمكن إيجاد البرهان في معظم كتب التحليل. (انظر على سبيل المثال [Fu, p.67]).

مبرهنة 13.1 **مبرهنة القيمة الوسيطية Intermediate Value Theorem**

إذا كان $f \in C[a,b]$، وكان K أي عدد يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c في (a,b) حيث $f(c)=K$. ■

يبيِّن الشكل (9.1) أحد خيارات العدد الذي تضمن وجوده مبرهنة القيمة الوسيطية. وفي هذا المثال يوجد اختياران آخران لهذا العدد.

شكل 9.1



مثال 2

لإثبات أن $x^5-2x^3+3x^2-1=0$ لها حل في الفترة $[0,1]$؛ ضع $f(x)=x^5-2x^3+3x^2-1$

لدينا الآن

$$f(0)=-1<0 \quad \text{و} \quad 0<1=f(1)$$

حيث إن f متصلة. لذلك فإن مبرهنة القيمة الوسيطية تضمن وجود عدد x في الفترة $0<x<1$ يحقق $x^5-2x^3+3x^2-1=0$. ■

ويظهر في المثال (2) أيضا أن مبرهنة القيمة الوسيطية تستخدم لتحديد توقيت وجود الحلول لبعض المسائل. ولكنها لا تعطي طريقة فاعلة لإيجاد الحلول. وسندرس ذلك في الباب (2). المبرهنة الأخيرة في هذه المراجعة للتفاضل والتكامل تصف كثيرات الحدود لتايلور (Taylor)، حيث تستخدم كثيرات الحدود هذه بصورة مكثفة في التحليل العددي.

مبرهنة 14.1

مبرهنة تايلور Taylor's Thoerem

افترض أن $f\in C^n[a,b]$، وأن $f^{(n+1)}$ موجودة على $[a,b]$. و $x_0\in[a,b]$. عندئذ لكل $x\in[a,b]$ يوجد عدد $\xi(x)$ بين x_0 و x بحيث يكون $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ و

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

و

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

■

لقد وصف بروك تايلور (1685–1731) هذه السلسلة عام 1715 في مقالته *"Methodus incremento-rum directa et inversa"* هناك حالة خاصة لهذه النتيجة. وقد تكون النتيجة نفسها معروفة في وقت سابق لدى إسحاق نيوتن وجيمس غريغوري وآخرين

تسمّى $P_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدّالة f حول x_0، ويسمّى $R_n(x)$ الحد الباقي (أو خطأ القطع) المرتبط بـ $P_n(x)$.

وبما أن العدد $\xi(x)$ في خطأ القطع $R_n(x)$ يعتمد على قيمة x التي تحسب عندها كثيرة الحدود $R_n(x)$، فهو دالّة في الوسيط x. وعلى الرغم من ذلك، يجب أن لا نتوقع أن نكون قادرين على حساب قيمة الدّالة $\xi(x)$ بصورة صريحة.

لقد اشتهر كولن ماكلورين (1698–1746) بأنه المدافع عن حساب التفاضل والتكامل الذي بلوره نيوتن. عندما كان هذا الموضوع يتعرض لهجوم شرس من قبل البيشوب جورج بيركلي.

تضمن مبرهنة تايلور وجود مثل هذه للدّالة. وتقع قيمتها ما بين قيمتي x_0 و x. وفي الحقيقة فإن إحدى مشاكل الطرائق العددية هي محاولة حساب الحد المعقول لقيمة $f^{(n+1)}(\xi(x))$ عندما تكون x ضمن فترة محدّدة.

لم يكتشف ماكلورين السلسلة التي تحمل اسمه. حيث كانت معروفة لدى الرياضيين في القرن السابع عشر قبل مولده. وعلى كل حال فلقد اكتشف طريقة نظام المعادلات الخطية كلها باستخدام قاعدة كرامر التي لم ينشرها كرامر إلا في عام 1750.

إن السلسلة اللانهائية التي نحصل عليها عند أخذ نهاية $P_n(x)$ عندما $n\to\infty$ تسمّى سلسلة تايلور للدّالة f حول x_0. وفي حالة $x_0=0$، فإن كثيرة حدود تايلور عادة ما تسمّى كثيرة حدود ماكلورين. وعادة ما تسمّى سلسلة تايلور بسلسلة ماكلورين Maclaurin.

إن خطأ القطع في كثيرة حدود تايلور يشير إلى الخطأ الناتج عن استخدام حصل جمع مقطوع أو منتهٍ (نهائي) لتقريب حاصل جمع سلسلة لانهائية.

مثال 3

أوجد (أ) كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية.

(ب) كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة للدّالة $f(x)=\cos x$ حول $x_0=0$، ثم استخدم كثيرات الحدود هذه لتقريب قيمة $\cos(0.01)$.

(ج) استخدم كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة والحدّ الباقي المرتبط به لتقريب $\int_0^{0.1} \cos x \, dx$

بما أن $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. فإنه يمكن تطبيق مبرهنة تايلور لكل $n \geq 0$. بملاحظة أن

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x \ \text{ and } \ f^{(4)}(x) = \cos x$$

نجد أن

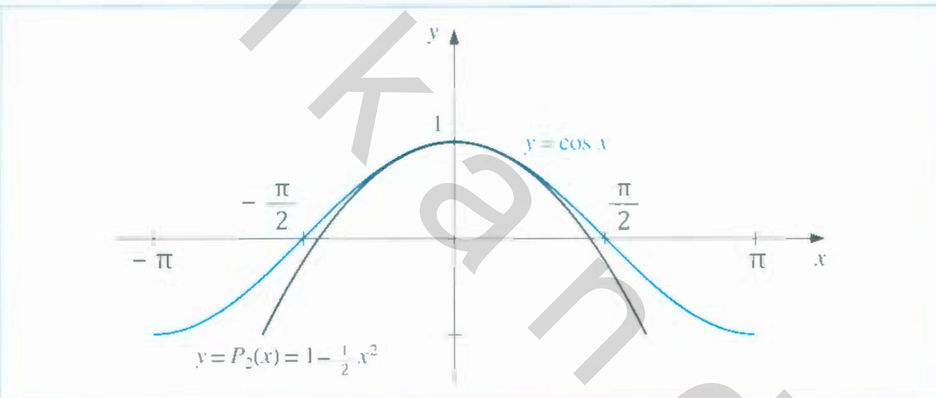
$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1 \ \text{ and } \ f'''(0) = 0$$

(أ) عندما $n = 2$ و $x_0 = 0$ يكون لدينا

$$\cos x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}x^3 \qquad \xi(x)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin\xi(x)$$

حيث إن $\xi(x)$ عدد (عادة ما يكون غير معلوم) بين 0 و x. (انظر شكل 10.1)

شكل 10.1



عندما يكون $x = 0.01$ فإننا نحصل من الصيغة أعلاه على

$$\cos(0.01) = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \sin\xi(0.01) = 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6}\sin\xi(0.01)$$

عندئذ فإن تقريب قيمة $\cos(0.01)$ الذي نحصل عليه باستخدام كثيرة حدود تايلور هو 0.99995.

وإن خطأ القطع أو الحد الباقي المرتبط بهذا التقريب هو

$$\frac{10^{-6}}{6}\sin\xi(0.01) = 0.1\overline{6} \times 10^{-6}\sin\xi(0.01)$$

حيث الخط المستخدم فوق العدد 6 في $0.1\overline{6}$ يعني أن العدد العشري هو عدد دوري (يكرّر نفسه إلى ما لانهاية).

وعلى الرغم من أننا لا نملك طريقة لتحديد $\sin\xi(0.01)$، فإننا نعرف أن جميع قيم الجيب تقع في الفترة $[-1,1]$. ولذلك فإن الخطأ الحاصل باستخدام التقريب 0.99995 لقيمة $\cos(0.01)$ يكون محدودًا بالقيمة

$$|\cos(0.01) - 0.99995| = 0.1\overline{6} \times 10^{-6}\sin\xi(0.01) \leq 0.1\overline{6} \times 10^{-6}$$

وبهـذا فإن هذا التقريب 0.99995 يتفق مع الخانات الخمس الأولى على الأقل لقيمة $\cos(0.01)$ ويكون

$$0.99994983 < 0.99995 - 0.16 \times 10^{-6} \le \cos(0.01) \le 0.99995 + 0.16 \times 10^{-6} < 0.99995017$$

إن حد الخطأ أكبر بكثير من الخطأ الحقيقي. وهذا يُعزى جزئيًا إلى استخدام حد غير دقيق (ضعيف) للقيمة $|\sin\xi(0.01)|$. يمكن برهنة أن $|\sin\xi(0.01)| \le |x|$ لجميع قيم x بما أن $0 \le \xi < 0.01$. فبإمكاننا استخدام حقيقة أن $|\sin\xi(0.01)| \le 0.01$ في صيغة الخطأ، ومن ثم نحصل على الحد 0.16×10^{-8}.

(ب) بما أن $f'''(0) = 0$ فإن كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة مع حد الباقي حول $x_0 = 0$ هو

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 \cos\tilde{\xi}(x)$$

حيث إن $0 < \tilde{\xi}(x) < 0.01$. تبقى كثيرة الحدود المقرِّبة نفسها. ويبقى التقريب 0.99995 ولكن لدينا الآن دقة أفضل بكثير. وبما أن $|\cos\tilde{\xi}(x)| \le 1$ لقيم x جميعها يكون لدينا

$$\left|\tfrac{1}{24}x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\right| \le \tfrac{1}{24}(0.01)^4(1) < 4.2 \times 10^{-10}$$

ولذلك

$$\left|\cos(0.01) - 0.99995\right| \le 4.2 \times 10^{-10}$$

و

$$0.99994999958 = 0.99995 - 4.2 \times 10^{-10} \le \cos(0.01) \le 0.99995 + 4.2 \times 10^{-10} = 0.99995000042$$

يفسر أول جزأين من المثال هدفي التحليل العددي:

(i) إيجاد تقريب لحل مسألة معطاة.

(ii) إيجاد حد لخطأ التقريب.

لقد أعطت كثيرات حدود تايلور الإجابة نفسها للمطلوب (i)، ولكن كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة أعطت إجابة للمطلوب (ii) أفضل كثيرًا من إجابة كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية.

(ج) إن استخدام كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة يعطي

$$\begin{aligned}
\int_0^{0.1} \cos x\,dx &= \int_0^{0.1}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)dx + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\,dx \\
&= \left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{0.1} + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\,dx \\
&= 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\,dx
\end{aligned}$$

وعندئذ

$$\int_0^{0.1} \cos x\,dx \approx 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 = 0.0998\overline{3}$$

يحدّد حد الخطأ في التقريب من تكامل حد الباقي لتايلور واستخدام حقيقة أن $1 \le |\cos\xi(x)|$ لقيم x جميعها حيث

$$\frac{1}{24}\left|\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\right| \le \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4|\cos\tilde{\xi}(x)|\,dx$$

$$\le \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4\,dx = 8.\overline{3}\times 10^{-8}$$

وبما أن القيمة الحقيقية للتكامل هي

$$\int_0^{0.1} \cos x\,dx = \sin x\Big]_0^{0.1} = \sin 0.1 = 0.099833416647$$

فإن الخطأ الحقيقي لهذا التقريب هو 8.3314×10^{-8}، وهو ضمن حدّ الخطأ.

■

ويمكننا استخدام CAS في المثال (3).

باستخدام Maple، نعرّف f كما يلي:

```
>f:=cos(x);
```

إن Maple يسمح باستخدام عبارات متعددة متتالية في سطر واحد واستخدام (:) لإيقاف استجابات Maple. فعلى سبيل المثال نحصل على كثيرة حدود تايلور باستخدام

```
>s3:=taylor(f,x=0,4): p3:=convert(s3, polynom);
```

إن العبارة s3:=taylor(f,x=0,4) تحدد كثيرة حدود تايلور حول $x_0 = 0$ بأربعة حدود (الرتبة 3) والباقي المرتبط بها.

وتحوّل العبارة p3:=convert(s3, polynom) السلسلة s3 إلى كثيرة الحدود p3 بإسقاط الباقي.

ولكي نحصل على 11 منزلة في الجواب، ندخل

```
>Digits:=11;
```

ونجد قيمة $f(0.01)$، $P_3(0.01)$ و $|f(0.01) - P_3(0.01)|$ عن طريق

```
>y1:=evalf(subs(x=0.01,f));
>y2:=evalf(subs(x=0.01,p3));
>err:=abs(y1-y2);
```

هذا يعطينا $y_1 = f(0.01) = 0.99995000042,\ y_2 = P_3(0.01) = 0.99995000000,$

و $|f(0.01) - P_3(0.01)| = .42\times 10^{-9}$

للحصول على رسم مشابه للرسم المبين في شكل (10.1)، أدخل

```
>plot({f,p3},x=-Pi..Pi);
```

إن أوامر التكامل هي

```
>q1:=int(f,x=0..0.1);
>q2:=int(p3,x=0..0.1);
>err:=abs(q1-q2);
```

وتعطي القيم

$$q_1 = \int_0^{0.1} f(x)\,dx = 0.099833416647 \quad \text{و} \quad q_2 = \int_0^{0.1} P_3(x)\,dx = 0.099833333333$$

بخطأ مقداره $8.3314\times 10^{-8} = 0.83314\times 10^{-7}$.

إن الفقرتين (أ) و (ب) في المثال تدلان على كيفية إعطاء تقنيتي التقريب نفسه. لكنهما

تختلفـان في درجة الدقة. تذكّر أن تحديـد التقريب جزء واحد من هدفنا، وأن الجزء الذي لا يقل عنه أهمية هو إيجاد حد لخطأ التقريب.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 1.1

1. بيّن أن كلاً من الصيغ الآتية لها حل واحد على الأقل في الفترات المعطاة:
أ. $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ $[0.2, 0.3]$ و $[1.2, 1.3]$
ب. $(x-2)^2 - \ln x = 0$ $[1, 2]$ و $[e, 4]$
ج. $2x\cos(2x) - (x-2)^2 = 0$ $[2, 3]$ و $[3, 4]$
د. $x - (\ln x)^x = 0$ $[4, 5]$

2. أوجد فترات تحتوي على حلول للصيغ الآتية:
أ. $x - 3^{-x} = 0$ ب. $4x^2 - e^x = 0$
ج. $x^3 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$ د. $x^3 + -.001x^2 + 4.002x + 1.101 = 0$

3. بين أن $f'(x)$ يكون صفرًا على الأقل مرّة واحدة في الفترة المعطاة:
أ. $f(x) = 1 - e^x + (e-1)\sin((\pi/2)x)$ $[0, 1]$
ب. $f(x) = (x-1)\tan x + x\sin\pi x$ $[0, 1]$
ج. $f(x) = x\sin\pi x - (x-2)\ln x$ $[1, 2]$
د. $f(x) = (x-2)\sin x\ln(x+2)$ $[-1, 3]$

4. أوجد $\max_{a\le x\le b}|f(x)|$ لكل من الدّوال والفترات الآتية:
أ. $f(x) = (2 - e^x + 2x)/3$ $[0, 1]$
ب. $f(x) = (4x-3)/(x^2 - 2x)$ $[0.5, 1]$
ج. $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$ $[2, 4]$
د. $f(x) = 1 + e^{-\cos(x-1)}$ $[1, 2]$

5. استخدم مبرهنة القيمة الوسيطية ومبرهنة رول لإثبات أن الدّالة $f(x) = x^3 + 2x + k$ يقطع محور البيانات (محور x) مرّة واحدة فقط مهما كانت قيمة الثابت k.

6. ليكن $f \in C[a, b]$ و $f'(x)$ موجوداً على (a, b).
إذا كان $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,b)$ فأثبت وجود عدد واحد $p \in [a, b]$ على الأكثر يحقق $f(p) = 0$

7. ليكن $f(x) = x^3$.
أ. أوجد كثيرة حدود تايلور $P_2(x)$ من الرتبة الثانية حول $x_0 = 0$.
ب. أوجد $R_2(0.5)$، والخطأ الحقيقي الناتج من استخدام $P_2(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$.
ج. كرّر الفقرة (أ) مستخدمًا $x_0 = 1$.
د. كرّر الفقرة (ب) مستخدمًا كثيرة الحدود من الفقرة (جـ).

8. أوجـد كثيـرة حدود تايلـور من الرتبـة الثالثة $P_3(x)$ للدّالـة $f(x) = \sqrt{x+1}$ حول $x_0 = 0$
قرّب القيم $\sqrt{0.5}$، $\sqrt{0.75}$، $\sqrt{1.25}$، $\sqrt{1.5}$ باستخدام $P_3(x)$، وأوجد الأخطاء الحقيقية.

9. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية $P_2(x)$ للدّالة $f(x) = e^x\cos x$ حول $x_0 = 0$.
أ. اسـتخدم $P_2(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$ أوجد الحد الأعلى للخطأ $|f(0.5) - P_2(0.5)|$ مستخدمًا صيغة الخطأ، وقارن ذلك بالخطأ الحقيقي.
ب. أوجد حدًّا للخطأ $|f(x) - P_2(x)|$ الناتج عن استخدام $P_2(x)$ لتقريب $f(x)$ على الفترة $[0, 1]$.
ج. قرّب $\int_0^1 f(x)\,dx$ مستخدمًا $\int_0^1 P_2(x)\,dx$.

د. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في الفقرة (ج) مستخدمًا $\int_0^1 |R_2(x)\,dx|$، وقارن ذلك الحد بالخطأ الحقيقي.

10. كرّر المطلوب في التمرين (9) مستخدمًا $x_0 = \pi/6$.

11. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة $P_3(x)$ للدّالة $f(x) = (x-1)\ln x$ حول $x_0 = 1$.

أ. استخدم $P_3(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$، جد حدًّا أعلى للخطأ $|f(0.5) - P_3(0.5)|$ مستخدمًا صيغة الخطأ، ثم قارن ذلك بالخطأ الحقيقي.

ب. أوجد حدًّا للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ الناتج من استخدام $P_3(x)$ لتقريب $f(x)$ على الفترة $[0.5, 1.5]$.

ج. قرّب $\int_{0.5}^{1.5} f(x)\,dx$ باستخدام $\int_{0.5}^{1.5} P_3(x)\,dx$.

د. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في (جـ) باستخدام $\int_{0.5}^{1.5} |R_3(x)\,dx|$، وقارن ذلك بالخطأ الحقيقي.

12. ليكن $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$ و $x_0 = 0$.

أ. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة $P_3(x)$، واستخدمه لتقريب $f(0.4)$.

ب. استخدم صيغة الخطأ في مبرهنة تايلور لإيجاد حد أعلى للخطأ $|f(0.4) - P_3(0.4)|$ واحسب الخطأ الحقيقي.

ج. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة $P_4(x)$، واستخدمه لتقريب $f(0.4)$.

د. استخدم صيغة الخطأ في مبرهنة تايلور لإيجاد حد أعلى للخطأ $|f(0.4) - P_4(0.4)|$، واحسب الخطأ الحقيقي.

13. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة $P_4(x)$ للدّالة $f(x) = xe^{x^2}$ حول $x_0 = 0$.

أ. جد حدًّا أعلى للمقدار $|f(x) - P_4(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 0.4$.

ب. قرّب $\int_0^{0.4} f(x)\,dx$ مستخدمًا $\int_0^{0.4} P_4(x)\,dx$.

جـ. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في (ب) باستخدام $\int_0^{0.4} P_4(x)\,dx$.

د. قرّب $f'(0.2)$ باستخدام $P_4'(0.2)$ وأوجد الخطأ.

14. استخدم حد الخطأ لكثيرة حدود تايلور لتقدير الخطأ الناتج من استخدام $\sin x \approx x$ في تقدير $\sin 1^\circ$.

15. استخدم كثيرة حدود تايلور حول $\pi/4$ لتقريب $\cos 42^\circ$ بدرجة دقة 10^{-6}.

16. ليكن $f(x) = e^{x/2}\sin(x/3)$، استخدم مابل Maple لإيجاد ما يأتي:

أ. كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة الثالثة $P_3(x)$.

ب. $f^{(4)}(x)$ وحدًّا للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ على $[0, 1]$.

17. ليكن $f(x) = \ln(x^2 + 2)$، استخدم مابل Maple لإيجاد ما يأتي:

أ. كثيرة حدود تايلور $P_3(x)$ لنشر f حول $x_0 = 1$.

ب. القيمة العظمى للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 1$.

جـ. كثيرة حدود ماكلورين $\tilde{P}_3(x)$ للدّالة f.

د. القيمة العظمى للخطأ $|f(x) - \tilde{P}_3(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 1$.

هـ. هل التقريب $P_3(0)$ للقيمة $f(0)$ أفضل من التقريب $\tilde{P}_3(1)$ للقيمة $f(1)$؟

18. ليكن $f(x) = (1-x)^{-1}$ و $x_0 = 0$، أوجد كثيرة حدود تايلور $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x)$ حول x_0، وأوجد قيمة n الضرورية ليكون $P_n(x)$ تقريبًا للدّالة $f(x)$ ضمن 10^{-6} على الفترة $[0, 0.5]$.

19. ليكن $f(x) = e^x$ و $x_0 = 0$.

أ. أوجد كثيرة حدود تايلور $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x)$ حول x_0.

ب. أوجد قيمة n الضرورية ليكون $P_n(x)$ تقريبًا للدّالة $f(x)$ ضمن 10^{-6} على الفترة $[0, 0.5]$.

20. أوجد كثيرة حدود ماكلورين $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x) = \arctan x$.

21. استخدم $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ لتقدير $f(x) = \cos x$ على الفترة $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. وأوجد حدًّا لأكبر خطأ.

22. إن كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدالة f على x_0 يُشار إليها بعض الأحيان بأنها كثيرة الحدود من الأعلى رتبة n التي تعطي "أفضل" تقريب للدالة f بالقرب من x_0.

أ. اشرح سبب كون هذا الوصف دقيقًا.

ب. أوجد كثيرة الحدود التربيعية التي تعطي أفضل تقريب للدالة f بالقرب من $x_0 = 1$ إذا كانت صيغة خط المماس عند $x_0 = 1$ هي $y = 4x - 1$ وكان $f''(1) = 6$.

23. إذا أعطى استخدام كثيرة حدود ماكلورين للدالة e^x التقريب 2.5 لقيمة e. وتحدد حد الخطأ في هذا التقريب بالقيمة $E = \frac{1}{6}$ فأوجد حدًا للخطأ الناتج في E.

24. إن دالة الخطأ المعرف بالصيغة $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

يعطي احتمالاً بأن أي واحدة من سلسلة التجارب ستقع ضمن x من وحدات المعدل، مفترضين أن للمحاولات توزيعًا طبيعيًا بمعدل صفر، وانحرافًا معياريًا $\sqrt{2}/2$. ولا يمكن تقييم هذا التكامل بدلالة دوال ابتدائية، لذا يتعيّن استخدام أسلوب التقريب.

أ. اعمل تكامل سلسلة ماكلورين لـ e^{-x^2} لإثبات

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

ب. يمكن التعبير عن دالة الخطأ أيضًا بالصيغة

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^{2k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}$$

تحقّق من أن السلسلتين تتفقان عند $k = 1, 2, 3, 4$ [إرشاد: استخدم سلسلة ماكلورين لـ e^{-x^2}].

ج. استخدم السلسلة في الفقرة (أ) لتقريب $\mathrm{erf}(1)$ إلى 10^{-7}.

د. استخدم العدد نفسه من الحدود على صورة الفقرة (ج) لتقريب $\mathrm{erf}(1)$ مع السلسلة في الفقرة (ب).

هـ. وضّح سبب ظهور صعوبات عند استخدام السلسلة في الفقرة (ب) لتقريب $\mathrm{erf}(x)$.

25. الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تحقّق شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على الفترة $[a, b]$ إذا كان $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ لكل $x, y \in [a, b]$.

أ. أثبت أنه إذا حقّق f شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على فترة ما $[a, b]$. فإن $f \in C[a, b]$.

ب. أثبت أنه إذا كان لـ f مشتقة محددة في L على $[a, b]$، فإن f يحقّق شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على الفترة $[a, b]$.

ج. أعط مثالاً لدالّة تكون متصلة على فترة مغلقة، لكنه لا يحقّق شرط لبشتز على الفترة.

26. افترض $f \in C[a, b]$، حيث x_1 و x_2 ضمن $[a, b]$. وأن c_1 و c_2 ثابتان موجبان ثبت وجود العدد ξ ما بين x_1 و x_2 مع

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)}{c_1 + c_2}$$

27. ليكن $f \in C[a, b]$، وليكن p في الفترة المفتوحة (a, b).

أ. افترض $f(p) \neq 0$. أثبت وجود $\delta > 0$ مع $f(x) \neq 0$ لكل x ضمن $[p - \delta, p + \delta]$ حيث إن $[p - \delta, p + \delta]$ جزئية من $[a, b]$.

ب. افترض $f(p) = 0$ و $k > 0$. أثبت وجود $\delta > 0$ مع $|f(x)| \le k$ لكل x في الفترة $[p - \delta, p + \delta]$ حيث إن $[p - \delta, p + \delta]$ جزئية من $[a, b]$.

2.1 تدوير الأخطاء والحساب بالحاسوب Round-off Error and Computer Arithmetic

إن الحساب الذي يتم باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب يختلف عن الحساب في مقررات الجبر والتفاضل والتكامل. ومن الممكن التوقع – بناءً على خبرتك السابقة – أن العبارات الآتية صحيحة دائمًا، مثل $2 + 2 = 4$ ، $4 . 8 = 32$ و $(\sqrt{3})^2 = 3$. ففي الحساب العادي نتوقع نتائج صحيحة للعمليتين $2 + 2 = 4$ و $4 . 8 = 32$، ولكن لا نحصل على النتيجة $(\sqrt{3})^2 = 3$ بدقة كاملة. ولكي نفهم لماذا يكون هذا الأمر صحيحًا، يتعين علينا أن نستكشف عالم الحساب ذا الخانات (أو المراتب) المنتهية.

توقع ظهور خطأ بسبب التقريب حيثما تكون الحسابات باستخدام أعداد ليست من قوى العدد 2 إن إبقاء هذا الخطأ تحت السيطرة أمر مهم جدًا خصوصا عندما يكون عدد الحسابات كبيرا.

إننا نسمح في عالم الرياضيات التقليدية باستخدام أعداد ذوات خانات (أو مراتب) غير منتهية. فالحساب الذي نستخدمه في هذا العالم يُعرِّف $\sqrt{3}$ على أنه ذلك العدد الموجب الوحيد الذي لو ضربته في نفسه لأنتج العدد 3. ولكن في العالم الحاسوبي، فإن كل عدد قابل للتمثيل يحوي عددًا ثابتًا ومنتهيًا من الأعداد. وهذا يعني على سبيل المثال أن الأعداد النسبية – وربما ليس جميعها – يمكن تمثيلها بدقة. وبما أن $\sqrt{3}$ عدد غير نسبي، فإنه يعطي تمثيلًا تقريبيًا. ومن ثم لا يكون مربعه 3 تمامًا، مع أنه سيكون غالبًا قريبًا من 3 على نحو كافٍ بحيث يجعله مقبولًا في معظم الأحوال. وأخيرًا يكون هذا الحساب الآلي في معظم الأحيان مُرضيًا، ويمرّ من دون ملاحظة أو تحفظ. ولكن في بعض الأحيان تحدث مشكلات بسبب هذا الاختلاف.

إن الخطأ الناتج عند استخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب لإيجاد حسابات عددية حقيقية يُسمى خطأ (التقريب أو التدوير). ويحدث هذا الخطأ؛ لأن إجراء الحساب بالآلة يتضمن أعدادًا ذات عدد منتهٍ من الخانات، مما يؤدي إلى إجراء الحسابات باستخدام التمثيل التقريبي للأعداد. وفي الحاسوب العادي تستخدم مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية الصغيرة نسبيًا لتمثيل جميع الأعداد الحقيقية، وتحتوي هذه المجموعة على الأعداد النسبية الموجبة والسالبة فقط. وتحتفظ بالجزء الكسري مع جزء أسي.

نشرت IEEE (معهد مهندسي الكهرباء والإلكترونيات) في عام 1985 تقريرًا بعنوان

Binary Floating Point Arithmetic Standard 754 - 1985

"معايير 1985 – 754 للحساب باستخدام النقاط الثنائية العائمة" لقد صُمّمت النماذج لاستخدام الدقة المنفردة والثنائية والممتدة. وتُعتمد هذه المعايير على نحو عام من قبل صانعي الحواسيب الصغيرة التي تستخدم الأنظمة الثنائية. وعلى سبيل المثال ينفذ المعالج المساعد العددي للحواسيب الشخصية تمثيلًا من 64–بت (منزلة ثنائية) للعدد الحقيقي يسمى الحقيقي الطويل long real البت الأول هو دليل الإشارة، ويرمز له بـ S. حيث يُتبَعُ بأس من 11 بت، C، يسمى المميز characteristic، وجزء من 52 بت، f، يسمى الكسر العشري mantissa. والأساس للأس هو 2.

وبما أن 52 منزلة ثنائية تقابل ما بين 15 و 16 منزلة عشرية، يمكننا افتراض عدد ضمن هذا النظام ذي 15 منزلة عشرية من الدقة على الأقل. الأس ذو 11 منزلة ثنائية يعطي الأعداد

0 ولغاية $2047 = 2^{11} - 1$. وعلى أي حال فاستخدام الأعداد الصحيحة الموجبة فقط للأس لن يمثِّل الأعداد الصغيرة بدقة. ولضمان كون الأعداد الصغيرة متساوية التمثيل؛ فإن 1023 تطرح من المميز. فيكون مدى الأس في الواقع من 1023 − 1024.

ولحفظ ما خُزِّن وتوفير تمثيل وحيد لكل عدد ذي نقطة عائمة؛ تُفترض معيارية ما. ويعطي استخدام هذا النظام عددًا ذا نقطة عائمة بصيغة

$$(-1)^s 2^{c-1023}(1+f)$$

افترض على سبيل المثال عدد الحاسبة

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000000

إن أول بت من اليسار هو 0، الذي يعني أن العدد موجب. ثم إن 11 بت التالية 10000000011 تعطي المميز وهي مكافئة للعدد العشري

$$c = 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + \cdots + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1024 + 2 + 1 = 1027$$

إن الجزء الأسي من العدد يكون $2^{1027-1023} = 2^4$. وآخر 52 بت تصف كون العشري هو

$$f = 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^8 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{12}$$

والنتيجة أن عدد الحاسبة هذا يمثل بكفاءة العدد العشري

$$(-1)^s 2^{c-1023}(1+f) = (-1)^0 \cdot 2^{1027-1023}\left(1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096}\right)\right)$$
$$= 27.56640625$$

على أي حال، أصغر عدد حاسبة تالٍ هو

0 10000000011 1011100100001111111111111111111111111111111111111111

وأكبر عدد حاسبة تالٍ هو

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000001

هذا يعني أن عدد الحاسبة الأصلي لا يمثل 27.56640625 فقط. وإنما يمثِّل نصف الأعداد الحقيقية أيضا التي هي ما بين 27.56640625 وأقرب عددي حاسبة مجاورين. ولكي نكون دقيقين؛ فإنه يمثِّل أي عدد حقيقي في الفترة

$$[27.5664062499999982236431605997495353221893310546875,$$
$$27.5664062500000017763568394002504646778106689453125)$$

إن أصغر عدد موجب معياري يمكن تمثيله، له $s = 0, c = 1$ وهو مكافئ لـ $f = 0$

$$2^{-1022} \cdot (1 + 0) \approx 0.2225 \times 10^{-307}$$

وإن أكبر عدد، له $s = 0, c = 2046$ وهو مكافئ لـ $f = 1 - 2^{-52}$

$$2^{1023} \cdot (2 - 2^{-52}) \approx 0.17977 \times 10^{309}$$

الأعداد التي تظهر في الحسابات، ولها قيمة تقل عن $2^{-1022} \cdot (1 + 0)$ تنتج نقصًا، وعادة ما تتجه قيمتها إلى الصفر. أمّا الأعداد التي قيمتها أكبر من $2^{1023} \cdot (2 - 2^{-52})$ تنتج زيادة. وعادة ما تؤول بالحسابات إلى أن تقف (ما لم يعطى البرنامج أوامر لاكتشاف ذلك). كما يجب

ملاحظة وجود تمثيلين للعدد صفر إحداهما صفر موجب عندما $s = 0$، $c = 0$ و $f = 0$، وقيمة سالبة للصفر عندما $s = 1$، $c = 0$ و $f = 0$.

إن استخدام الأعداد الثنائية يميل إلى إخفاء الصعوبات الحسابية التي تنتج عن استخدام مجموعة منتهية من الأعداد الآتية لتمثيل جميع الأعداد الحقيقية.

ولاختبار هذه المسائل سنفترض – من أجل التسهيل – أن الأعداد الآتية تمثل بالطريقة المعيارية للنقطة العائمة العشرية على الصورة

$$\pm 0.d_1d_2\ldots d_k \times 10^n \text{ ، } 1 \le d_1 \le 9 \text{ و } 0 \le d_i \le 9$$

إن الخطأ الناتج عن استخدام التمثيل بالنقطة العائمة بدلا من العدد نفسه يسمى خطأ التدوير. سواء أكان التمثيل يستخدم القطع أم التدوير.

لكل $i = 2,\ldots, k$ نسمي النقاط الممثّلة بهذا الشكل أعدادًا آلية عشرية k-digit ذات k من الخانات. إن أي عدد حقيقي موجب ضمن المدى العددي للآلة يمكن أن يمثّل معياريًا على الصورة $y = 0.d_1d_2\ldots d_kd_{k+1}d_{k+2}\ldots \times 10^n$

ونحصل على تمثيل y على صورة النقطة العائمة. ويعبّر عنها بالرمز $fl\,(y)$ عن طريق قطع خانات تمثيل y عند المنزلة k. هناك طريقتان لتنفيذ هذا القطع:

- تسمّى إحدى الطريقتين القطع Chopping، وتنفّذ بقطع الخانات $d_{k+1}d_{k+2}\ldots$ وتنتج هذه الطريقة
$$fl\,(y) = 0.d_1d_2\ldots d_k \times 10^n$$
- وتسمّى الطريقة الثانية التقريب rounding، وتنفّذ بإضافة $5 \times 10^{n-(k+1)}$ إلى y، ثم تقطع النتيجة لنحصل على عدد في الصورة
$$fl\,(y) = 0.\delta_1\delta_2\ldots\delta_k \times 10^n$$

ولذلك عند التقريب إذا كان $d_{k+1} \ge 5$ نضيف 1 إلى d_k لنحصل على $fl\,(y)$، أي أننا ندوّر (نقرّب) إلى أعلى. وعندما يكون $d_{k+1} < 5$، فإننا نقطع الخانات جميعها بعد المنزلة d_k. أي أننا ندوّر إلى أسفل. وأخيرا إذا كان التقريب إلى أسفل فإن $\delta_i = d_i$ لكل $i = 1, 2,\ldots, k$. وعلى كل حال إذا كان التقريب إلى أعلى فإن الخانات (وحتى الأسّ) يمكن أن تتغير.

مثال 1

إن للعدد π تمثيلا عشريًا على الصورة $\pi = 3.14159265\ldots$ وعند كتابته على الصورة العشرية المعيارية يكون لدينا $\pi = 0.314159265\ldots \times 10^1$، إن كتابة π على صورة النقطة العائمة مستخدمًا القطع عند المنزلة الخامسة يكون

$$fl\,(\pi) = 0.31415 \times 10^1 = 3.1415$$

يُعدّ الخطأ النسبي عموما مقياسا للدقة أفضل من الخطأ المطلق؛ لأن الأول يأخذ في الحسبان حجم العدد المقرّب.

وبالنظر إلى المنزلة السادسة في التمثيل العشري للعدد π نجد أنها 9. ولذلك يكون تمثيل π بالنقطة العائمة مستخدمًا تدوير المنزلة الخامسة هو

$$fl\,(\pi) = (0.31415 + 0.00001) \times 10^1 = 3.1416$$ ■

ويصف التعريف الآتي طريقتين لقياس أخطاء التقريب.

تعريف 15.1

إذا كان P^* تقريبًا إلى P، فإن الخطأ المطلق يكون $|P-P^*|$، والخطأ النسبي هو $|P-P^*|/|P|$، على أن $P \neq 0$. ■

مثال 2

احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في المثال الآتي:

أ. ليكن $P = 0.3000 \times 10^1$، $P^* = 0.3100 \times 10^1$؛ فإن الخطأ المطلق يساوي 0.1، والخطأ النسبي يساوي $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.

ب. ليكن $P = 0.3000 \times 10^{-3}$ و $P^* = 0.3100 \times 10^{-3}$؛ فإن الخطأ المطلق يكون 0.1×10^{-4}، والخطأ النسبي يكون $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.

ج. ليكن $P = 0.3000 \times 10^4$ و $P^* = 0.3100 \times 10^4$؛ فإن الخطأ المطلق يكون 0.1×10^3، والخطأ النسبي مرة ثانية يكون $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$.

لا نستطيع إيجاد قيمة صحيحة للخطأ الحقيقي الناتج عن التقريب في كثير من الأحيان، وبدلا من ذلك نجد حدّا للخطأ، وهو الذي يعطينا قيمة الخطأ الأسوأ.

يُظهر هذا المثال أن الخطأ النسبي نفسه $0.333\overline{3} \times 10^{-1}$ يحدث مقابل أخطاء مطلقة متعددة. وبوصفه مقياسًا للدقة، فإن الخطأ المطلق يمكن أن يكون مضللًا. ويكون الخطأ النسبي ذا معنى أفضل؛ لأن الخطأ النسبي يأخذ حجم القيمة في الحسبان. ■

يستخدم التعريف الآتي الخطأ النسبي ليعطي مقياسًا لأرقام دقة التقريب المعنوية.

تعريف 16.1

يقال: إن العدد P^* يكون تقريبًا للعدد P بأرقام معنوية عددها t، إذا كان t أكبر عدد صحيح غير سالب يكون لدينا

$$\frac{|P-P^*|}{|P|} \le 5 \times 10^{-t}$$

■

يُستخدم مصطلح الأرقام المعنوية لوصف عدد الخانات العشرية التي يظهر أنها صحيحة على نحو واسع

إن هذا التعريف أدق ويعطي مفهومًا متصلًا.

يوضح الجدول (1.1) وباستخدام قيم متعددة للعدد P الطبيعة المتصلة للأرقام المعنوية عن طريق تسجيل أصغر حد أعلى لقيمة $|P-P^*|$، ويعبّر عنها بالرمز $\max|P-P^*|$. عندما تتوافق P^* مع P لأربعة أرقام معنوية.

جدول 1.1

P	0.1	0.5	100	1000	5000	9990	10000
$\max\|P-P^*\|$	0.00005	0.00025	0.05	0.5	2.5	4.995	5

وبالرجوع إلى التمثيل الآلي للأعداد، نجد أن التمثيل بالنقطة العائمة $fl(y)$ للعدد y يكون له الخطأ النسبي

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right|$$

إذا استخدم k من الخانات العشرية وطريقة القطع للتمثيل الآلي للعدد

$$y = 0.d_1d_2\ldots d_kd_{k+1}\ldots \times 10^n$$

فإن

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| = \left|\frac{0.d_1d_2\ldots d_kd_{k+1}\ldots \times 10^n - 0.d_1d_2\ldots d_k \times 10^n}{0.d_1d_2\ldots \times 10^n}\right|$$

$$= \left|\frac{0.d_{k+1}d_{k+2}\ldots \times 10^{n-k}}{0.d_1d_2\ldots \times 10^n}\right| = \left|\frac{0.d_{k+1}d_{k+2}\ldots}{0.d_1d_2\ldots}\right| \times 10^{-k}$$

وبما أن $d_1 \neq 0$، فإن أصغر قيمة للمقام تساوي 0.1، الحد الأعلى للبسط هو 1، وعليه يكون

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \le \frac{1}{0.1} \times 10^{-k} = 10^{-k+1}$$

إن حد الخطأ النسبي باستخدام الحساب التقريبي ذي k من الخانات هو $0.5 \times 10^{-k+1}$ بطريقة مماثلة. (انظر التمرين 24).

لاحظ أن حدود الخطأ النسبي باستخدام الحساب ذي k من الخانات تكون مستقلة عن العدد الذي تمثّله. وتعود هذه النتيجة إلى الطريقة التي تتوزّع بها الأعداد الآلية على طول الخط الحقيقي. إن العدد نفسه من الأعداد الآلية العشرية يستخدم لتمثيل الفترات $[0.1, 1], [1, 10]$ $[10, 100]$؛ بسبب صيغة المؤشر الأسيّة. إن عدد الأعداد الآلية العشرية في الفترة $[10^n, 10^{n+1}]$ ثابت للأعداد الصحيحة جميعها n ضمن حدود الآلة.

بالإضافة إلى التمثيل غير الصحيح للأعداد، فإن الحساب المنفّذ في الحاسوب غير دقيق. وهو ينطوي – في الحساب – على التعامل بالأعداد الثنائية بعمليات سحب أو بعمليات منطقية متعددة. وبما أن الميكانيكيات الفعلية لهذه العمليات لا علاقة لها بهذا التمثيل، فإننا سننشئ تقريب الحساب بالحاسوب الخاص بنا. وعلى الرغم من أن الحساب الذي ننشئه لا يعطي الصورة الصحيحة، إلا أنه يكفي لشرح المشكلات التي تظهر.

ليكن $fl(x)$، $fl(y)$ التمثيل بالنقطة العائمة لكل من الأعداد الحقيقية x، y، وأن الرموز $\oplus, \ominus, \otimes, \oplus$ تمثّل عمليات الآلة للجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على التوالي. وسنفترض حسابا مبنيًّا على عدد محدود من الخانات معرّفا كالآتي:

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y)), \qquad x \otimes y = fl(fl(x) \times fl(y))$$

$$x \ominus y = fl(fl(x) - fl(y)), \qquad x \oplus y = fl(fl(x) \div fl(y))$$

إن هذا الحساب يتطابق مع استخدام الحساب العادي للتمثيل بالنقطة العائمة للعددين x، y ثم تحويل النتيجة الصحيحة لتمثيلها بطريقة "النقطة العائمة ذات العدد المحدود من الخانات".

إن حساب التقريب قابل للاستخدام في CAS. وإن أمر مابل Maple

```
>Digits:=t;
```

يؤدي إلى تدوير الحساب جميعه إلى t من الخانات. فعلى سبيل المثال توجد قيمة $fl(fl(x) + fl(y))$ باستخدام التقريب بعدد t من الخانات عن طريق الأمر

```
>evalf(evalf(x)+evalf(y));
```

إن استخدام الحساب ذي t من الخانات بطريقة القطع أكثر صعوبة. ويتطلب خطوات متتالية أو طريقة. ويبحث تمرين (27) هذه المسألة.

مثال 3 ليكن $x = \frac{5}{7}, y = \frac{1}{3}$ وأن طريقة القطع ذات الخانات الخمس هي المستخدمة في الحسابات المشتملة على x ، y. ويعطي الجدول (2.1) قيم العمليات شبه الحاسوبية على $fl(x) = 0.71428 \times 10^0$ $fl(y) = 0.33333 \times 10^0$. ■

وبما أن أعلى قيمة للخطأ النسبي للعمليات في المثال (3) هي 0.267×10^{-4}، فإن الحساب يعطي نتائج مقبولة ذات 5 خانات. على كل حال افترض أن لدينا $u = 0.714251$، $v = 98765.9$ و $w = 0.111111 \times 10^{-4}$ وأخيرا يكون $fl(u) = 0.71425 \times 10^0$، $fl(v) = 0.98765 \times 10^5$ $fl(w) = 0.11111 \times 10^{-4}$.

جدول 2.1

العملية	النتيجة	القيمة الفعلية	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
$x \oplus y$	0.10476×10^{1}	$22/21$	0.190×10^{-4}	0.182×10^{-4}
$x \ominus y$	0.38095×10^{0}	$8/21$	0.238×10^{-5}	0.625×10^{-5}
$x \otimes y$	0.23809×10^{0}	$5/21$	0.524×10^{-5}	0.220×10^{-4}
$x \oslash y$	0.21428×10^{1}	$15/7$	0.571×10^{-4}	0.267×10^{-4}

(لقد اختيرت هذه الأعداد لتوضيح بعض المشكلات التي يمكن أن تظهر في الحساب ذي الخانات المنتهية.)

نجد أن $x \ominus u$ تعطي خطأ مطلقا صغيرًا في جدول (3.1)، ولكنها تعطي خطأ نسبيًا كبيرًا. إن القسمة على عدد صغير w أو الضرب في العدد الكبير v يكبر الخطأ المطلق دون تعديل الخطأ النسبي. وإن جمع الأعداد الصغيرة والكبيرة u و v يعطي خطأً مطلقًا كبيرًا، ولكن ليس خطأً نسبيًا كبيرًا.

جدول 3.1

العملية	النتيجة	القيمة الفعلية	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
$x \ominus u$	0.30000×10^{-4}	0.34714×10^{-4}	0.471×10^{-5}	0.136
$(x \ominus u) \oslash w$	0.27000×10^{1}	0.31243×10^{1}	0.424	0.136
$(x \ominus u) \otimes v$	0.29629×10^{1}	0.34285×10^{1}	0.465	0.136
$u \otimes v$	0.98765×10^{5}	0.98766×10^{5}	0.161×10^{1}	0.163×10^{-4}

إن واحدًا من أكثر الحسابات التي تنتج خطأً هو الحساب الذي يتعامل مع حذف الأعداد المعنوية عند طرح أعداد متساوية تقريبًا. افترض أن عددين متساويان تقريبا x، y حيث $x > y$ وافترض أن تمثيلهما باستخدام k من الخانات هو

$$fl(x) = 0.d_1d_2 \ldots d_p\alpha_{p+1}\alpha_{p+2} \ldots \alpha_k \times 10^n$$

و

$$fl(y) = 0.d_1d_2 \ldots d_p\beta_{p+1}\beta_{p+2} \ldots \beta_k \times 10^n$$

إن شكل النقطة العائمة للمقدار $x - y$ هو

$$fl(fl(x) - fl(y)) = 0.\sigma_{p+1}\sigma_{p+2} \ldots \sigma_k \times 10^{n-p}$$

حيث إن

$$0.\sigma_{p+1}\sigma_{p+2} \ldots \sigma_k = 0.\alpha_{p+1}\alpha_{p+2} \ldots \alpha_k - 0.\beta_{p+1}\beta_{p+2} \ldots \beta_k$$

إن العدد بصيغة النقطة العائمة المستخدم لتمثيل $x - y$ يحوي $k - p$ عددًا معنويًا على الأكثر. على كل حال وفي معظم آلات الحساب، فإن $x - y$ يعطي عدد k عددا معنويًا تاركًا الأعداد الأخيرة التي عددها p إما أصفارًا وإما محددة عشوائيًا. إن أي حسابات ضافية للمقدار $x - y$ تسترجع مسألة الحفاظ على $k - p$ من الأعداد المعنوية؛ لأن أي سلسلة من الحسابات لا تكون أدق من الحلقة الأضعف فيها.

إذا أنتج حساب أو تمثيل ذو عدد منتهٍ من الأعداد خطأً، فإن هذا الخطأ يكبر عند القسمة على عدد صغير (أو على نحو مكافئ عند الضرب في عدد كبير). افترض على سبيل المثال أن

للعدد z التقريب $z+\delta$ ذا العدد المحدود من الأعداد، حيث حصلنا على الخطأ δ عن طريق التمثيل أو عن طريق حساب سابق.

الآن إذا قسمنا على $\varepsilon = 10^{-n}$، حيث $n > 0$ فإن

$$\frac{z}{\varepsilon} \approx fl\left(\frac{fl(z)}{fl(\varepsilon)}\right) = (z+\delta)\times 10^{n}$$

وهكذا فإن الخطأ المطلق في هذا التقريب $|\delta| \times 10^{n}$ هو الخطأ المطلق الأصلي $|\delta|$، مضروبًا في العدد 10^{n}.

مثال 4 ليكن $p = 0.54617$ و $q = 0.54601$. فإن القيمة الصحيحة كحاصل طرح $r = p - q$ هي $r = 0.00016$. افترض أن عملية الطرح قد أُجريت باستخدام الحساب بأربع خانات. وأن تدوير p و q لأربع خانات يعطينا $p^* = 0.5462$، $q^* = 0.5460$ على التوالي ويعطينا $r^* = p^* - q^* = 0.0002$ بوصفه تقريبًا للعدد r باستخدام أربع خانات.

وبما أن

$$\frac{|r - r^*|}{|r|} = \frac{|0.00016 - 0.0002|}{|0.00016|} = 0.25$$

فإن النتيجة تحمل عددًا معنويًا واحدًا. حيث كانت p^*، q^* صحيحة لأربعة أرقام معنوية ولخمسة أرقام معنوية على التوالي.

إذا استخدمت طريقة القطع للحصول على أربع خانات. فإن التقريب لأربع خانات للأعداد p، q، r هو $p^* = 0.5461$، $q^* = 0.5460$، $r^* = p^* - q^* = 0.0001$ وهذا يعطينا

$$\frac{|r - r^*|}{|r|} = \frac{|0.00016 - 0.0001|}{|0.00016|} = 0.375$$

والذي ينتج دقة ذات عدد معنوي واحد. ■

ومن الممكن تجنب خطأ التقريب عن طريق تكرار صياغة المسألة كما هو موضح في المثال الآتي:

مثال 5 ينص قانون الصيغة التربيعية على أن جذري $ax^2 + bx + c = 0$ عندما $a \neq 0$ هما

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.1}$$

طبّق القانون على الصيغة $x^2 + 62.10x + 1 = 0$ التي يكون جذراها المقرّبان (مستخدمًا حساب التقريب لأربع خانات) هما $x_1 = -0.01610723$، $x_2 = -62.08390$. في هذه الصيغة، b^2 أكبر بكثير من $4ac$. عندئذ فإن البسط في حساب x_1 يتضمن طرح عددين متساويين تقريبًا.

بما أن

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(62.10)^2 - (4.000)(1.000)(1.000)}$$
$$= \sqrt{3856. - 4.000} = \sqrt{3852.} = 62.06$$

ونحصل على

$$fl(x_1) = \frac{-62.10 + 62.06}{2.000} = \frac{-0.04000}{2.000} = -0.02000$$

إن جذري المعادلة التربيعية العامة x_1 و x_2 يرتبطان مع المعاملات بحسب المعادلات الآتية $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ إن هذه حالة خاصة من معادلات فايتيه Viète's formulas لمعاملات كثيرات الحدود.

وهو تقريب ضعيف للقيمة $x_1 = -0.01611$ بخطأ نسبي كبير

$$\frac{|-0.01611 + 0.02000|}{|-0.01611|} \approx 2.4 \times 10^{-1}$$

ومن جهة أخرى فإن حساب x_2 يتضمن جمع عددين متساويين تقريبًا هما $-b$ و $-\sqrt{b^2-4ac}$ وهذا لا يشكل أي مشكلة، لأن

$$fl(x_2) = \frac{-62.10 - 62.06}{2.000} = \frac{-124.2}{2.000} = -62.10$$

يُنْتِج الخطأ النسبي الصغير

$$\frac{|-62.08 + 62.10|}{|-62.08|} \approx 3.2 \times 10^{-4}$$

نغيّر قانون الصيغة التربيعية عن طريق جعل البسط عددا نسبيًا (بالضرب في المرافق) للحصول على تقريب أدق للعدد x_1 باستخدام التقريب ذي الأربع خانات. فيصبح

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\left(\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{-b - \sqrt{b^2-4ac}}\right) = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

وبالتبسيط. نحصل على الصيغة التربيعية البديلة

$$x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2-4ac}} \tag{2.1}$$

باستخدام (2.1) نحصل على

$$fl(x_1) = \frac{-2.000}{62.10 + 62.06} = \frac{-2.000}{124.2} = -0.01610$$

الذي يحمل الخطأ النسبي الصغير 6.2×10^{-4} ■

يمكن تطبيق طريقة الضرب في المرافق لنحصل على الصيغة التربيعية البديلة للعدد x_2

$$x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2-4ac}} \tag{3.1}$$

تستخدم هذه الصيغة إذا كان b عددًا سالبًا. على كل حال، لا يؤدي الاستخدام الخطأ للصيغة x_2 في المثال (5) إلى طرح عددين متساويين تقريبا فقط. بل يؤدي أيضًا إلى القسمة على ناتج الطرح الصغير. إن عدم الدقة الناتج عن هذا التركيب يعطينا

$$fl(x_2) = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2-4ac}} = \frac{-2.000}{62.10 - 62.06} = \frac{-2.000}{0.04000} = -50.00$$

بخطأ نسبيّ كبير هو 1.9×10^{-1}. ■

ويمكن تقليل عدم الدقة الناتجة عن خطأ التقريب عن طريق إعادة ترتيب العمليات الحسابية وهذا ما يوضحه المثال الآتي.

مثال 6

أوجد قيمة $f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5$ عند $x = 4.71$ مستخدمًا حساب الخانات الثلاث. يعطي جدول (4.1) النتائج الوسيطة في الحسابات. تحقق من صحة هذه النتائج، للتأكد من أن فهمك للحساب بثلاث خانات صحيح. تذكر أن طريقة القطع لثلاث خانات تعطي بسهولة القيم الثلاث للخانات الثلاث الأولى من اليسار ودون أي تدوير، وتختلف جذريًا عن القيم التي تحصل عليها بطريقة التقريب لثلاث خانات.

جدول 1.4

	x	x^2	x^3	$6.1x^2$	$3.2x$
المضبوط	4.71	22.1841	104.487111	135.32301	15.072
(القطع) ذو ثلاث منازل	4.71	22.1	104.	134.	15.0
(التدوير) ذو ثلاث منازل	4.71	22.2	105.	135.	15.1

تذكر وجوب إجراء القطع (أو التدوير) بعد كل عملية حساب.

ننظر إلى الحسابات التي قمنا بها لإيجاد قيمة x^3 باستخدام التقريب لثلاث خانات. ولتوضيح ذلك، نجد أولاً $x^2 = 4.71^2 = 22.1841$ وندوّرها إلى العدد 22.2 مستخدمين بعد ذلك قيمة x_2 هذه لإيجاد $x^3 = x^3 \cdot x = 22.2 \cdot 4.71 = 104.562$، وندور هذه القيمة إلى 105.

أما الحساب الدقيق (دون قطع أو تدوير) فهو

$$f(4.71) = 104.487111 - 135.32301 + 15.072 + 1.5$$
$$= -14.263899$$

يكون باستخدام قطع الخانات الثلاث $f(4.71) = ((104. - 134.) + 15.0) + 1.5 = -13.5$

ويكون باستخدام التقريب لثلاث خانات $f(4.71) = ((105. - 135.) + 15.1) + 1.5 = -13.4$

وتكون الأخطاء النسبية لطريقتي الخانات الثلاث أعلاه على التوالي:

$$\left|\frac{-14.263899 + 13.5}{-14.263899}\right| \approx 0.05 \quad \text{و} \quad \left|\frac{-14.263899 + 13.4}{-14.263899}\right| \approx 0.06$$

(القطع) for chopping و (التدوير) for rounding

توجد طريقة بديلة بكتابة $f(x)$ باستخدام الأقواس المتداخلة (nested) كما يأتي

$$f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5 = ((x - 6.1)x + 3.2)x + 1.5$$

وهذا يعطي طريقة القطع لثلاث خانات

$$f(4.71) = ((4.71 - 6.1)4.71 + 3.2)4.71 + 1.5 = -14.2$$

وتعطي طريقة التقريب لثلاث خانات 14.3-، والأخطاء النسبية الجديدة تكون

القطع لثلاث خانات
$$\left|\frac{-14.263899 + 14.2}{-14.263899}\right| \approx 0.0045$$

التقريب لثلاث خانات
$$\left|\frac{-14.263899 + 14.3}{-14.263899}\right| \approx 0.0025$$

إن استخدام الأقواس المتداخلة قد خفّض الخطأ النسبي للتقريب بالقطع إلى أقل من 10% مما

حصلنا عليه في الأصل. أما في حالة التقريب بالتدوير فقد كان التحسين أكثر ظهورًا، حيث حدث في المثال السابق أن انخفض الخطأ إلى أكثر من 95%. ■

يجب التعبير دائما عن كثيرات الحدود باستخدام الأقواس المتداخلة (nested) قبل إجراء الحسابات، لأن هذه الصيغة تجعل عدد العمليات الحسابية أقل ما يمكن.

إن تقليل الخطأ في مثال (6) كان بسبب تقليل العمليات الحسابية من أربع عمليات ضرب وثلاث عمليات جمع إلى عمليتي ضرب وثلاث عمليات جمع. وإن إحدى طرائق تقليل خطأ التقريب تكون بتقليل عدد العمليات الحسابية التي تنتج الخطأ.

مجموعة التمارين 2.1 EXERCISE SET

1. احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتج عن تقريب p بالقيمة p^*:

أ. $p = \pi,\ p^* = 22/7$ ب. $p = \pi,\ p^* = 3.1416$ ج. $p = e,\ p^* = 2.718$

د. $p = \sqrt{2},\ p^* = 1.414$ هـ. $p = e^{10},\ p^* = 22000$ و. $p = 10^{\pi},\ p^* = 1400$

ز. $p = 8!,\ p^* = 39900$ ح. $p = 9!,\ p^* = \sqrt{18\pi}(9/e)^9$

2. أوجد أكبر فترة تقع فيها p^* لكي تقرّب p بخطأ نسبي حده الأعلى 10^{-4} لكل قيمة من قيم p:

أ. π ب. e ج. $\sqrt{2}$ د. $\sqrt[3]{7}$

3. افترض أن p^* يجب أن تقرّب p بخطأ نسبي حدُّه الأعلى 10^{-3}. أوجد أكبر فترة يجب أن تقع فيها p^* لكل قيمة p فيما يأتي:

أ. 150 ب. 900 ج. 1500 د. 90

4. أجرِ العمليات الحسابية الآتية:

(i) بصورة دقيقة.

(ii) مستخدمًا القطع لثلاث خانات.

(iii) مستخدمًا التقريب لثلاث خانات.

(iv) احسب الأخطاء النسبية في (ii) و (iii).

أ. $\frac{4}{5} + \frac{1}{3}$ ب. $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$ ج. $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{11}\right) + \frac{3}{20}$ د. $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{11}\right) - \frac{3}{20}$

5. مستخدمًا حساب التقريب لثلاث خانات لإجراء الحسابات الآتية، احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي مستخدما خمس خانات على الأقل لإيجاد القيمة الصحيحة

أ. $133 + 0.921$ ب. $133 - 0.499$ ج. $(121 - 0.327) - 119$

د. $(121 - 119) - 0.327$ هـ. $\dfrac{\frac{13}{14} - \frac{6}{7}}{2e - 5.4}$ و. $-10\pi + 6e - \frac{3}{62}$

ز. $\left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{7}\right)$ ح. $\dfrac{\pi - \frac{22}{7}}{\frac{1}{17}}$

6. أعد حل تمرين (5) مستخدما حساب التقريب لأربع خانات.

7. أعد حل تمرين (5) مستخدما حساب القطع لثلاث خانات.

8. أعد حل تمرين (5) مستخدما حساب القطع لأربع خانات.

9. إن أول ثلاثة حدود غير صفرية لسلسلة ماكلورين للدّالة arctangent هي $x - (1/3)x^3 + (1/5)x^5$ احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في التقريبات الآتية للعدد π مستخدما كثيرة الحدود بدلًا من arctangent:

أ. $4\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ ب. $16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

10. يمكن تعريف العدد e بالقيمة $e = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$، احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي عند استخدام التقريبات الآتية للعدد e:

أ. $\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{n!}$ ب. $\sum_{n=0}^{10}\frac{1}{n!}$

11. ليكن $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x}$

أ. أوجد: $\lim_{x\to 0} f(x)$

ب. استخدم حساب التقريب لأربع خانات لإيجاد قيمة $f(0.1)$.

جـ. عوّض عن كل دالّة مثلية مستخدمًا كثيرة حدود ماكلورين الثالثة التي تمثّلها. أوجد القيمة في (ب).

د. إن القيمة الفعلية هي $f(0.1) = -1.99899998$. أوجد الأخطاء النسبية للإجابات في (ب)، (ج).

12. ليكن $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

أ. أوجد: $\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x})/x$.

ب. استخدم حساب التقريب لأربع خانات لإيجاد قيمة $f(0.1)$.

جـ. عوّض عن كل دالّة مثلية مستخدمًا كثيرة حدود ماكلورين الثالثة التي تمثّلها. أوجد القيمة في (ب).

د. إن القيمة الفعلية هي $f(0.1) = 2.003335000$. أوجد الأخطاء النسبية للإجابات في (ب)، (ج).

13. استخدم حساب التقريب لأربع خانات وصيغ مثال (5) لإيجاد التقريبات الأكثر دقّة لجذور الصيغ لتربيعية الآتية. واحسب الأخطاء المطلقة والأخطاء النسبية

أ. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0$ ب. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{123}{4}x - \frac{1}{6} = 0$

ج. $1.002x^2 - 11.01x + 0.01265 = 0$ د. $1.002x^2 + 11.01x + 0.01265 = 0$

14. أعد حل التمرين (13) باستخدام حساب القطع لأربع خانات.

15. استخدم النموذج الحقيقي بطول 64-bit لتجد الكسر العشري المكافئ للأعداد الآلية بالنقطة المتحركة

أ. 0 10000001010 10010011000000000000 00000000000000000000000000000000

ب. 1 10000001010 10010011000000000000 00000000000000000000000000000000

ج. 0 01111111111 01010011000000000000 00000000000000000000000000000000

د. 0 01111111111 01010011000000000000 00000000000000000000000000000001

16. أوجد العدد الأكبر الآتي والعدد الأصغر السابق لكل عدد آلي في التمرين (15). مستخدمًا الصيغة العشرية (كسور عشرية).

17. لتكن النقطتان (x_0, y_0) و (x_1, y_1) على خط مستقيم و $y_1 \neq y_0$. يوجد معادلتان لإيجاد قاطع x على الخط هما

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{و} \quad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0}$$

أ. برهن على صحة هاتين المعادلتين جبريًّا.

ب. استخدم البيانات $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$، $(x_1, y_1) = (1.93, 4.76)$، وحساب التقريب لثلاث خانات، لتجد قاطع x بالطريقتين. أي الطريقتين أفضل؟ ولماذا؟

18. كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدّالة $f(x) = e^x$ هي $\sum_{i=0}^{n}(x^i/i!)$. استخدم كثيرة حدود تايلور من الرتبة

التاسعة، وحساب القطع لثلاث خانات لتجد تقريبًا للعدد e^{-5} مستخدمًا كلاً من الطرائق الآتية:

أ. $e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-5)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i 5^i}{i!}$

ب. $e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{9} \frac{5^i}{i!}}$

ج. إن القيمة التقريبية الصحيحة لأقرب ثلاث خانات للعدد e^{-5} هي 6.74×10^{-3}. أي المعادلتين في (أ)، (ب) أدق؟ ولماذا؟

19. ليكن $ax + by = e$ و $cx + dy = f$ نظام معادلتين خطيتين، حيث قيم a, b, c, d, e, f معطاة، ويمكن حلهما لقيم x، y بالطريقة التالية:

افترض $m = \frac{c}{a}$ حيث $a \neq 0$.

$$d_1 = d - mb$$

$$f_1 = f - me$$

$$y = \frac{f_1}{d_1}$$

$$x = \frac{e - by}{a}$$

وحلّ نظام المعادلتين الخطيتين في لكل مما يلي مقربًا الجواب لأربع مراتب:

أ. $1.130x - 6.990y = 14.20$
$1.013x - 6.099y = 14.22$

ب. $8.110x + 12.20y = -0.1370$
$-18.11x + 112.2y = -0.1376$

20. كرّر التمرين (19) مستخدمًا حساب القطع ذي الأربع خانات.

21. أ. بيّن أن أسلوب تداخل كثيرة الحدود الموضحة في مثال (6) يمكن تطبيقه أيضًا في حساب $f(x) = 1.01e^{4x} - 4.62e^{3x} - 3.11e^{2x} + 12.2e^{x} - 1.99$.

ب. استخدم تقريب الجواب لثلاث خانات. افترض كون $e^{1.53} = 4.62$، وأن $e^{nx} = (e^x)^n$ لتقييم $f(1.53)$ وحسبما هو معطى في (أ).

ج. أعد الحسابات في (ب)، من خلال عمل تداخل الحسابات أولا.

د. قارن التقريبات في (ج) بنتيجة التقريب لثلاث خانات صحيحة $f(1.53) = -7.61$.

22. لدينا متوازي سطوح مستطيلة أطوال جوانبه 3 cm، 4 cm، و 5 cm مقيسة إلى أقرب سنتمتر. ما أفضل حد علوي وحد سفلي لحجم هذا المتوازي؟ وما أفضل حد علوي وحد سفلي للمساحة السطحية؟

23. لتكن $P_n(x)$ كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة n لدالّة معكوس الظل. استخدم Maple محملًا 75 مرتبة عشرية لإيجاد قيمة n اللازمة لتقريب π ضمن 10^{-25} مستخدمًا الصيغ الآتية:

أ. $4\left[P_n\left(\frac{1}{2}\right) + P_n\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

ب. $16P_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4P_n\left(\frac{1}{239}\right)$

24. افترض أن $fl(y)$ تقريب k من الخانات لـ y. أثبت أن

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \le 0.5 \times 10^{-k+1}$$

[إرشاد: إذا كان $d_{k+1} < 5$ فإن $fl(y) = 0.d_1d_2\ldots d_k \times 10^n$. وإذا كان $d_{k+1} \geq 5$ فإن $fl(y) = 0.d_1d_2\ldots d_k \times 10^n + 10^{n-k}$]

25. إن معاملات ذات الحدين $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$

تحسب عدد الطرائق لاختيار مجموعة جزئية ذات سعة k من مجموعة سعتها m.

أ. افترض أن أعداد حاسبة عشرية بالصيغة

$\pm 0.d_1d_2d_3d_4 \times 10^n$ مع $1 \leq d_1 \leq 9,\ 0 \leq d_i \leq 9$ إذا كان $i = 2, 3, 4$ و $|n| \leq 15$.

ما أكبر قيمة لـ m لتكون معاملات ذات الحدين $\binom{m}{k}$ التي يمكن حسابها لجميع قيم k وفق التعريف. دون التسبب في اتساع النتيجة؟

ب. أثبت أنه يمكن حساب $\binom{m}{k}$ أيضا من خلال $\binom{m}{k} = \left(\frac{m}{k}\right)\left(\frac{m-1}{k-1}\right)\cdots\left(\frac{m-k+1}{1}\right)$.

ج. ما أكبر قيمة لـ m لتكوّن معاملات ذات الحدين $\binom{m}{3}$ التي يمكن حسابها وفق الصيغة في (ب) دون التسبب في اتساع النتيجة؟

د. استخدم الصيغة في (ب) وحساب القطع ذي الخانات الأربع لحساب عدد مجموعات الورق الخماسية المحتمل سحبها من حزمة ورق من 52 ورقة. احسب الأخطاء الحقيقية والنسبية.

26. ليكن $f \in C[a, b]$ دالّة مشتقته موجودة على (a, b). افترض أننا نريد تقييم f عند x_0 ضمن (a, b) بدلاً من حساب القيمة الحقيقية $f(x_0)$، والقيمة التقريبية $\tilde{f}(x_0)$ هي القيمة الحقيقية لـ f عند $x_0 + \epsilon$ بمعنى أن $\tilde{f}(x_0) = f(x_0 + \epsilon)$.

أ. استخدم مبرهنة القيمة الوسيطية لتقدير الخطأ المطلق $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|$، والخطأ النسبي $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|/|f(x_0)|$ مفترضين $f(x_0) \neq 0$.

ب. إذا كانت $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$ و $x_0 = 1$ فأوجد حدودا للخطأ المطلق والخطأ النسبي لـ

i. $f(x) = e^x$ **ii.** $f(x) = \sin x$

ج. كرّر (ب) مع $\epsilon = (5 \times 10^{-6})x_0$ و $x_0 = 10$.

27. تقطع عمليات Maple الآتية العدد الطافح x إلى t من الخانات

```
chop:=proc(x,t);
 if x=0 then 0
 else
 e:=ceil(evalf(log10(abs(x))));
 x2:=evalf(trunc(x*10^(t-e))
 *10^(e-t));
 fi
end;
```

تحقّق من فاعلية العملية للقيم الآتية:

أ. $x = 124.031,\ t = 5$ ب. $x = 124.036,\ t = 5$ ج. $x = -124.031,\ t = 5$ د. $x = -124.036,\ t = 5$

هـ. $x = 124.036,\ t = 5$ و. $x = 0.00656,\ t = 2$ ز. $x = 0.00656,\ t = 2$ ح. $x = -0.00653,\ t = 2$

ل. $x = -0.00656,\ t = 2$

28. أوضح المثال الافتتاحي في هذا الفصل تجربة فيزيائية تضمنت درجة حرارة غاز تحت الضغط. في هذا التطبيق كان لدينا $V = 0.100\ m^3$، $P = 1.00$ atm، $N = 0.00420$ mol و $R = 0.08206$. وبحل T في قانون الغاز المثالي نحصل على

$$T = \frac{PV}{NR} = \frac{(1.00)(0.100)}{(0.00420)(0.08206)} = 290.15\ \text{K} = 17^\circ\text{C}$$

لقد وجد أن T تساوي $15^\circ C$ تحت الظروف المخبرية المذكورة تساوي $15^\circ C$، عند مضاعفة الضغط وتناقص الحجم إلى النصف أصبحت T تساوي $19^\circ C$. افترض أن البيانات عبارة عن قيم مقربة ودقيقة ضمن المواقع المعطاة. أثبت أن القيم المخبرية ضمن حدود الدقة لقانون الغاز التالي.

3.1 الخوارزميات والتقارب Algorithms and Convergence

ستتفحص خلال هذا الكتاب طرائق للتقريب تسمّى الخوارزميات، وتتضمن متتاليات من الحسابات.

الخوارزميات: هي طريقة تصف دون أي التباس عددًا محدودًا من الخطوات التي تنفذ بترتيب محدد. إن الغرض من الخوارزميات هو تنفيذ عملية لحل مسألة أو إيجاد تقريب حل لمسألة تستخدم "الرمز الشكلي" Pseudocode لوصف الخوارزميات. إن هذا الرمز الشكلي يحدد شكل المدخلات الواردة وشكل المخرجات المطلوبة.

إن استخدام الخوارزمية قديم قدم الرياضيات المنظمة واسمها مأخوذ من اسم الرياضي العربي محمد بن موسى الخوارزمي (850–780). وتبدأ الترجمة اللاتينية لأعماله بالكلمات:
"Dixit Algorismi"
التي تعني " يقول الخوارزمي".

ولا تعطي العمليات العددية كلها المخرجات المرضية لمدخلات اختيرت عشوائيًا. لذا يجب أن تتضمن كل خوارزمية طريقة توقف مستقلة عن الطريقة العددية، لتجنب العروات اللانهائية. وهناك رمزان للترقيم يستخدمان في الخوارزميات

- النقطة (.) وتستخدم لإنهاء خطوة.
- الفاصلة المنقوطة (;) وتفصل بين عمليين ضمن خطوة.

ويستخدم الفراغ في بداية الفقرة Indentation ليدل على أن مجموعات من العبارات وجب التعامل معها بوصفها وحدة واحدة.

أما تقنيات العروات في الخوارزميات، فإما أن تكون محكمة بالعد Counter – Controlled مثل

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

ضع $x_i = a_i + i \cdot h$

وإما أن تكون محكمة بالشرط Controlled – condition مثل:

عندما يكون $i < N$ أجر الخطوات 3 – 6.

While $i < N$ do Steps 3–6

ولكي نسمح بالتنفيذ الشرطي، نستخدم الصيغ الآتية

إذا كان ... فإن If ... then

أو إذا كان ... فإن غير ذلك If ... then else

تتبع خطوات الخوارزميات قواعد إنشاء البرامج البنائية، وقد رُتّبت على أن تتضمن أدنى صعوبة عند ترجمة الرمز الشكلي إلى أي لغة برمجة صالحة للتطبيقات العلمية تحري لخوارزميات

كثيرًا من التعليقات التي تكتب بخط مائل ضمن أقواس لتمييزها من العبارات الخوارزمية.

مثال 1 نصف فيما يأتي إحدى الخوارزميات لحساب $\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$ حيث N و $x_1, x_2, \ldots, x_N$ معطاة.

المدخلات: $N, x_1, x_2, \ldots, x_N$

المخرجات: $SUM = \sum_{i=1}^{N} x_i$

الخطوة	المضمون
1	ضع $SUM = 0$ (المجموع الابتدائي)
2	عند $i = 1, 2, \ldots, N$ نفذ ضع $SUM = SUM + x_i$ (أضف الحد التالي).
3	المخرجات (SUM) توقف.

■

مثال 2 كثيرة حدود تايلور من الرتبة N للدالة $f(x) = \ln x$ مفكوك حول $x_0 = 1$ هي

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i+1}}{i}(x-1)^i$$

وقيمة $\ln 1.5$ لثماني خانات عشرية هي 0.40546511.

افترض أننا نريد إيجاد أقل قيمة للعدد N التي تحقق $|\ln 1.5 - P_N(1.5)| < 10^{-5}$ دون استخدام الحد الباقي لكثيرة حدود تايلور.

نعلم من حساب التفاضل والتكامل أنه إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متناوبة ذات نهاية A تتناقص القيم المطلقة لحدودها، فإن A والمجموع الجزئي $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ ذا الرتبة N يختلفان بقيمة أقل من قيمة الحد ذي الرتبة $(N + 1)$. أي أن

$$|A - A_N| \le |a_{N+1}|$$

تستخدم هذا الحد في الخوارزمية الآتية:

المدخلات: القيمة x، حد السماح TOL، أكبر عدد تكرارات M.

المخرجات: الرتبة N لكثيرة حدود أو عبارة فشل.

الخطوة	المضمون
1	ضع $N = 1$ $y = x - 1$ $SUM = 0$ $POWER = y$ $TERM = y$ $SIGN = -1$ (تستخدم لتنفيذ عكس الإشارات).
2	بينما $N \le M$ نفذ الخطوات 3 – 5.
3	ضع $SIGN = -SIGN$ (لعكس الإشارة) $SUM = SUM + SIGN \cdot TERM$ (لجمع الحدود). $POWER = POWER \cdot y$ $TERM = POWER/(N + 1)$ (لحساب الحد التالي).
4	إذا كان $\|TERM\| < TOL$ فإن (لاختبار الدقة). المخرجات (N)

5	ضع $N = N + 1$ (حضّر للتكرار التالي).
6	المخرجات ('Method Failed') (العملية لم تكن ناجحة). توقف.

■

إن المدخلات في مسألتنا هي $x = 1.5, TOL = 10^{-5}$ وربما $M = 15$. إن اختيار M يعطي حدًّا أعلى لعدد العمليات الحسابية التي يرغب في إجرائها، مع علمنا بإمكانية فشل الخوارزمية إذا اجتزنا هذا الحد. إن المخرج (الناتج) هو قيمة للعدد N أو رسالة فشل يعتمد على دقة أداة الحساب. سنتصدى لمسائل تقريب متعددة في محتوى الكتاب. وفي كل حالة نحتاج إلى تحديد طرائق التقريب التي تعطي نتائج صحيحة يمكن الاعتماد عليها لحل مجموعة واسعة من المسائل. كما نحتاج إلى شروط مختلفة لتصنيف دقة هذه الطرائق بسبب الاختلاف بين الطرائق المستخدمة لاشتقاق التقريب. وليس من الضروري أن تكون هذه الشروط جميعها مناسبة لمسألة بعينها.

■

إن أحد المعايير التي نضعها على الخوارزمية كلما أمكن ذلك، هو أن التغييرات الصغيرة في البيانات الابتدائية تُنتج في المقابل تغييرات صغيرة في النتائج النهائية. إن الخوارزمية التي تحقق هذه الخاصية تسمى مستقرة stable، وفي غير ذلك فهي غير مستقرة unstable. إن بعض الخوارزميات تكون مستقرة فقط عند اختيارات محددة للبيانات الابتدائية. وتسمى هذه الخوارزميات مستقرة شرطيًا Conditionally Stable. سنصف خواص استقرار الخوارزميات كلما كان ذلك ممكنًا. ولكي نتفحص موضوع نمو خطأ التقريب وعلاقته باستقرار الخوارزمية، نفترض أن خطأً قيمته $E_0 > 0$ قد وقع عند خطوة ما في الحسابات، وإن مقدار الخطأ بعد n من العمليات الآتية هو E_n. وتوجد حالتان تحدثان عمليًا في أكثر الأحيان نعرفهما كما يأتي.

إن جذر stable هو نفسه جذر stand وstandard. وفي الرياضيات فإن كلمة مستقر stable تعني أن تغييرا صغيرا في البيانات الابتدائية أو الشروط لا يؤدي إلى تغيير كبير في حل تلك المسألة.

تعريف 17.1

افترض أن $E_0 > 0$ هو الخطأ الابتدائي، وأن E_n هي قيمة الخطأ بعد n من الخطوات الآتية. إذا كان $E_n \approx CnE_0$ حيث كان C ثابتًا لا يعتمد على n، فإن نمو الخطأ يسمّى خطيًّا Linear. وإذا كان $E_n \approx C^n E_0$ حيث $C > 1$ فإن نمو الخطأ يسمى أسيًّا Exponential. ■

لا يمكن تجنب النمو الخطي للخطأ عادة، وعندما يكون C و E_0 صغيرين، إن النتائج تكون مقبولة عمومًا. أما النمو الأسيّ فيجب تجنبه؛ لأن الحد C^n يصبح كبيرًا حتى لقيم n الصغيرة نسبيًا، وإن هذا ليس دقيقًا مهما كان حجم E_0، وعندئذ فإن الخوارزمية التي تعطي نموًّا خطيًا للخطأ تكون ثابتة، حيث أن الخوارزمية التي تعطي نموًّا أسيًّا للخطأ تكون غير مستقرة. (انظر الشكل 11.1)

تمثّل النقاط الظاهرة الواقعة على خط مستقيم (في أسفل الشكل 11.1) نموّ الخطأ الخطي المستقر، حيث تمثّل النقاط في الجزء العلوي في الشكل نمو الخطأ الأسّيّ غير المستقر.

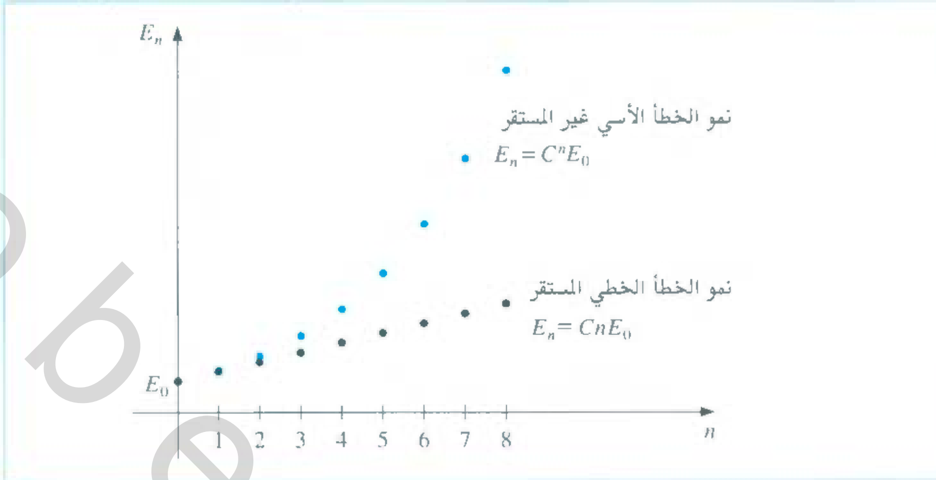
مثال 3

إن الصيغة الإرجاعية recursive

$$p_n = \frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2} \quad \text{لـ} \quad n = 2, 3, \ldots$$

لها الحل

$$p_n = c_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n$$



شكل 1.11

لأي ثابتين c_1 و c_2 لأن

$$\frac{10}{3} p_{n-1} - p_{n-2} = \frac{10}{3}\left[c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + c_2 3^{n-1}\right] - \left[c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + c_2 3^{n-2}\right]$$
$$= c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left[\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{3} - 1\right] + c_2 3^{n-2}\left[\frac{10}{3} \cdot 3 - 1\right]$$
$$= c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{9}\right) + c_2 3^{n-2}(9) = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n = p_n$$

إذا كان $p_0 = 1$ و $p_1 = \frac{1}{3}$ فإن $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$ عندئذ تكون قيمة $p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لقيم n جميعها. افترض أنك استخدمت حساب التقريب من الخانات الخمس لحساب حدود المتتالية المعطاة بهذه الصيغة. عندها تكون قيمة $\hat{p}_0 = 1.0000$، و $\hat{p}_1 = 0.33333$ وهو ما يتطلب تعديل الثوابت لـ $\hat{c}_1 = 1.0000$ و $\hat{c}_2 = -0.12500 \times 10^{-5}$ إن المتتالية التقريبية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ الناتجة تعطى بالمعادلة

$$\hat{p}_n = 1.0000\left(\frac{1}{3}\right)^n - 0.12500 \times 10^{-5}(3)^n$$

ويكون خطأ التقريب

$$p_n - \hat{p}_n = 0.12500 \times 10^{-5}(3^n)$$

وينمو أسيًا مع n. وهذا يعكس عدم دقة قصوى بعد عدد قليل من الحدود. ويظهر في الجدول (5.1) أيضًا في صفحة (34).

إن الصيغة الإرجاعية $p_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$ لكل $n = 2, 3, \ldots$ من جهة أخرى لها الحل $p_n = c_1 + c_2 n$ لأي ثابتين c_1 و c_2، لأن

$$2p_{n-1} - p_{n-2} = 2(c_1 + c_2(n-1)) - (c_1 + c_2(n-2))$$
$$= c_1(2-1) + c_2(2n - 2 - n + 2) = c_1 + c_2 n = p_n$$

جدول 5.1

n	المحسوب $\hat{p}_n$	الصحيح p_n	الخطأ النسبي
0	0.10000×10^{1}	0.10000×10^{1}	
1	0.33333×10^{0}	0.33333×10^{0}	
2	0.11110×10^{0}	0.11111×10^{0}	9×10^{-5}
3	0.37000×10^{-1}	0.37037×10^{-1}	1×10^{-3}
4	0.12230×10^{-1}	0.12346×10^{-1}	9×10^{-3}
5	0.37660×10^{-2}	0.41152×10^{-2}	8×10^{-2}
6	0.32300×10^{-3}	0.13717×10^{-2}	8×10^{-1}
7	-0.26893×10^{-2}	0.45725×10^{-3}	7×10^{0}
8	-0.92872×10^{-2}	0.15242×10^{-3}	6×10^{1}

إذا كان $p_0 = 1$ و $p_1 = \frac{1}{3}$ فإن الثوابت في هذه الصيغة تصبح $c_1 = 1$ و $c_2 = -\frac{2}{3}$ ويكون $p_n = 1 - \frac{2}{3}n$. وباستخدام حساب التقريب لخمسة أرقام ينتج في هذه الحالة أن $\hat{p}_0 = 1.0000$ و $\hat{p}_1 = 0.33333$ ونتيجة لذلك. تصبح قيم الثوابت المقربة لخمسة خانات هي $\hat{c}_1 = 1.0000$ و $\hat{c}_2 = -0.66667$، وهكذا يكون

$$\hat{p}_n = 1.0000 - 0.66667n$$

وبذلك يصبح خطأ التقريب

$$p_n - \hat{p}_n = \left(0.66667 - \frac{2}{3}\right)n$$

وينمو خطيًا مع n. و ينعكس هذا في الاستقرار الظاهر في جدول (6.1). ■

جدول 6.1

n	المحسوب $\hat{p}_n$	الصحيح p_n	الخطأ النسبي
0	0.10000×10^{1}	0.10000×10^{1}	
1	0.33333×10^{0}	0.33333×10^{0}	
2	-0.33330×10^{0}	-0.33333×10^{0}	9×10^{-5}
3	-0.10000×10^{1}	-0.10000×10^{1}	0
4	-0.16667×10^{1}	-0.16667×10^{1}	0
5	-0.23334×10^{1}	-0.23333×10^{1}	4×10^{-5}
6	-0.30000×10^{1}	-0.30000×10^{1}	0
7	-0.36667×10^{1}	-0.36667×10^{1}	0
8	-0.43334×10^{1}	-0.43333×10^{1}	2×10^{-5}

يمكن تخفيف تأثيرات أخطاء التقريب باستخدام حساب لمراتب من رتب كبيرة. مثل الخيار الثنائي الدقة أو المتعدد الدقة المتاح في معظم الحواسيب.

إن مساوئ استخدام الحساب الثنائي الدقة تكمن في استغراقه وقتًا أطول، وعدم إلغائه أخطاء التقريب، بل تأجيل ذلك إلى حين إجراء عمليات حسابية آتية.

إن إحدى الطرائق لتوقع خطأ التقدير تكون باستخدام حساب الفئات (أي الاحتفاظ بأصغر القيم الممكنة وأكبرها في كل خطوة). وبذلك نحصل على فترة تحوي القيمة الحقيقية في النهاية. ولسوء الحظ قد نحتاج إلى فترة صغيرة جدًا للتنفيذ المعقول.

وبما أننا نستخدم التقنية التفاعلية المتضمنة المتتاليات نختتم هذا الفصل بمناقشة بعض المصطلحات التي تصف معدل التقارب الحادث عند توظيف (تطبيق) التقنية العددية. وبصورة عامة، فإننا نرغب في حدوث التقارب بأقصى سرعة ممكنة.

ونستعمل التعريف الآتي للمقارنة بين سرعة تقارب الطرائق المختلفة.

تعريف 18.1 لتكن $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية تتقارب نحو الصفر. و $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو العدد α. إذا وجد ثابتًا موجبًا K يحقق

$$|\alpha_n - \alpha| \le K\,|\beta_n| \quad \text{لقيم } n \text{ الكبيرة}$$

فإننا نقول: إن $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو العدد α بسرعة تقارب $O(\beta_n)$ (يقرأ هذا التعبير "oh كبيرة لقيمة β_n"). ويشار إليها بكتابة $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$. ■

ومع أن التعريف (18.1) يسمح للمتتالية $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ بأن تقارن بأي متتالية $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ فإننا في معظم الحالات نستخدم

$$\beta_n = \frac{1}{n^p}$$

حيث إن p عدد موجب $p > 0$. وعادة ما يكون اهتمامنا بأكبر قيمة للعدد p التي تحقق $\alpha_n = \alpha + O(1/n^p)$.

مثال 4 افترض أنه لكل $n \ge 1$ لدينا

$$\hat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3} \quad \text{و} \quad \alpha_n = \frac{n+1}{n^2}$$

فمع أن $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \hat{\alpha}_n = 0$ فإن المتتالية $\{\hat{\alpha}_n\}$ تتقارب إلى هذه النهاية بسرعة أكبر كثيرًا من المتتالية $\{\alpha_n\}$. على نحو الجدول (7.1) الذي حسب مستخدمًا حساب التقريب بخمسة أرقام.

جدول 7.1

n	1	2	3	4	5	6	7
α_n	2.00000	0.75000	0.44444	0.31250	0.24000	0.19444	0.16327
$\hat{\alpha}_n$	4.00000	0.62500	0.22222	0.10938	0.064000	0.041667	0.029155

توجد طرائق متعددة أخرى لوصف نمو المتتاليات والدّوال، ويتطلب بعضها حدودا عليا وحدودا دنيا للمتتالية أو الدّالة تحت الدراسة. إن ي كتاب جيد في تحليل الخوارزميات مثل [CLRS] يحتوي على هذه المعلومات.

إذا افترضنا $\beta_n = 1/n$ و $\hat{\beta}_n = 1/n^2$ نجد أن

$$|\alpha_n - 0| = \frac{n+1}{n^2} \le \frac{n+n}{n^2} = 2\cdot\frac{1}{n} = 2\beta_n$$

و

$$|\hat{\alpha}_n - 0| = \frac{n+3}{n^3} \le \frac{n+3n}{n^3} = 4\cdot\frac{1}{n^2} = 4\hat{\beta}_n$$

عندئذ

$$\hat{\alpha}_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{و} \quad \alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

إن سرعة تقارب $\{\alpha_n\}$ للصفر مماثلة لسرعة تقارب $\{1/n\}$ للصفر. حيث تتقارب $\{\hat{\alpha}_n\}$ للصفر بسرعة مماثلة للمتتالية الأسرع في التقارب $\{1/n^2\}$. ■

نستعمل أيضًا رمز oh الكبيرة لوصف السرعة التي تتقارب فيها الدوال.

تعريف 19.1 افترض أن $\lim_{h\to 0} G(h) = 0$، وأن $\lim_{h\to 0} F(h) = L$. إذا وجدنا ثابتًا موجبًا K حيث إن $|F(h) - L| \le K|G(h)|$ لقيم h الصغيرة على نحو كافٍ فعندئذ نكتب

$$F(h) = L + O(G(h))$$ ■

إن الدوال التي نستخدمها للمقارنة عادة ما تأخذ الصورة $G(h) = h^p$. حيث إن $p > 0$ ينصبّ اهتمامنا على أكبر قيمة للعدد p التي تحقّق $F(h) = L + O(h^p)$.

مثال 5 لقد وجدنا في المثال (3) (ب) من الفصل (1.1) أن كثيرة حدود تايلور تعطي

$$\cos h = 1 - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{24}h^4 \cos\xi(h)$$

لعدد ما $\xi(h)$ بين الصفر و h. وأخيرًا يكون

$$\cos h + \tfrac{1}{2}h^2 = 1 + \tfrac{1}{24}h^4 \cos\xi(h)$$

وهذا يتضمن أن

$$\cos h + \tfrac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

لأن

$$\left|(\cos h + \tfrac{1}{2}h^2) - 1\right| = \left|\tfrac{1}{24}\cos\xi(h)\right| h^4 \le \tfrac{1}{24}h^4$$

وهذا يعني أنه عندما تكون $h\to 0$، فإن $\cos h + \frac{1}{2}h^2$ يتقارب إلى نهاية 1 بسرعة قريبة من سرعة تقارب h^4 للصفر. ■

EXERCISE SET   مجموعة التمارين 3.1

1. أ. استخدم حساب القطع لثلاثة أرقام لتجد المجموع $\sum_{i=1}^{10}(1/i^2)$، مستخدمًا $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}$ أولاً ثم $\frac{1}{100} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{1}$. أي الطريقتين أدق؟ ولماذا؟

   ب. اكتب خوارزمية لإيجاد مجموع المتسلسلة المحدودة $\sum_{i=1}^{N} x_i$ بترتيب عكسي.

2. يعرّف العدد e بالسلسلة $e = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$، استخدم حساب القطع لأربعة أرقام لإيجاد التقريبات الآتية للعدد e. ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي:

   أ. $e \approx \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$ ب. $e \approx \sum_{j=0}^{5} \frac{1}{(5-j)!}$

   ج. $e \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$ د. $e \approx \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{(10-j)!}$

3. إن متسلسلة ماكلورين لدالّة الظل المقابل متقاربة على الفترة $-1 < x \le 1$ وهي

$$\arctan x = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1}$$

   أ. استخدم الحقيقة $\tan \pi/4 = 1$ لإيجاد عدد الحدود n للمتسلسلة المطلوب جمعها للحصول على $|4P_n(1) - \pi| < 10^{-3}$.

   ب. تشترط لغة البرمجة C++ أن تكون قيمة π صحيحة بحد خطأ أصغر من 10^{-10}. ما عدد حدود السلسلة التي نحتاج إلى جمعها للحصول على هذه الرتبة من الدقة؟

4. يقدم التمرين (3) تفاصيل طريقة غير فعالة للحصول على تقريب العدد π. يمكن تحسين هذه الطريقة على نحو مفيد بملاحظة أن $\pi/4 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ ثم إيجاد قيمة متسلسلة الظل المقابل arctan عند $\frac{1}{2}$ وعند $\frac{1}{3}$. أوجد عدد حدود السلسلة التي يجب جمعها لضمان تقريب العدد π ضمن 10^{-3}.

5 توجد صيغة أخرى لحساب π يمكن استنتاجها من المتطابقة $\pi/4 = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$. أوجد عدد حدود السلسلة التي يجب جمعها لضمان تقريب العدد π ضمن 10^{-3}.

6 أوجد سرعة التقارب للمتتاليات الآتية عندما $n \to \infty$:

أ. $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$ ب. $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n^2} = 0$

ج. $\lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 = 0$ د. $\lim_{n\to\infty} [\ln(n+1) - \ln(n)] = 0$

7. أوجد سرعة تقارب الدوال الآتية عندما $h \to 0$

أ. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ ب. $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$

ج. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h\cos h}{h} = 0$ د. $\lim_{h\to 0} \frac{1-e^h}{h} = -1$

8. أ. ما عدد عمليات الضرب والجمع المطلوبة لإيجاد حاصل جمع الصيغة

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_i b_j \text{؟}$$

ب. عدّل الصيغة في (أ) على أن تقلّل عدد العمليات الحسابية.

9. لتكن $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود، وافترض أن x_0 معطاة. أنشئ خوارزمية لإيجاد قيمة $P(x_0)$ مستخدما عمليات الضرب المتداخلة.

10. يعطي التمرين (5) من الفصل (2.1) صيغ بديلة للجذرين x_1 و x_2 للصيغة $ax^2 + bx + c = 0$. أنشئ خوارزمية بالمدخلات a, b, c والمخرجات x_1 و x_2 لتحسب الجذرين x_1 و x_2 (اللذين يمكن أن يكونا متساويين أو مرافقين مركبين) مستخدما أفضل صيغة لكل جذر.

11. أنشئ خوارزمية مدخلاتها عدد صحيح $n \geq 1$، الأعداد $x_0, x_1, \ldots, x_n$ وعدد x التي مخرجها حاصل الضرب $(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

12. افترض أن $\frac{1-2x}{1-x+x^2} + \frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4} + \frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8} + \cdots = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$

لكل $x < 1$ وافترض أن $x = 0.25$. اكتب خوارزمية تحدد عدد الحدود المطلوبة في الطرف الأيسر للصيغة، ونفّذها على أن يكون اختلاف الطرف الأيسر عن الطرف الأيمن أقل من 10^{-6}.

13. أ. افترض أن $0 < q < p$ وأن $\alpha_n = \alpha + O(n^{-p})$ برهن أن $\alpha_n = \alpha + O(n^{-q})$.

ب. اكتب جدولا فيه $1/n, 1/n^2, 1/n^3$ و $1/n^4$ للقيم $n = 5, 10, 100$ و 1000. وناقش معدلات التقارب المختلفة لهذه المتتاليات عندما تصبح n كبيرة.

14. أ. افترض أن $0 < q < p$ وأن $F(h) = L + O(h^p)$. برهن على أن $F(h) = L + O(h^q)$.

ب. اكتب جدولاً فيه h, h^2, h^3, h^4 للقيم $h = 0.5, 0.1, 0.01$ و 0.001. وناقش معدلات التقارب المختلفة لقوى h هذه عندما تقترب h من الصفر.

15. افترض أنه عندما تقترب x من الصفر يكون

$$F_1(x) = L_1 + O(x^\alpha) \text{ و } F_2(x) = L_2 + O(x^\beta)$$

وليكن كل من c_1 و c_2 عددين ثابتين غير الصفر. وعرّف

$$F(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x) \text{ و } G(x) = F_1(c_1x) + F_2(c_2x)$$

برهن على أنه إذا كان $\gamma = \text{minimum}\{\alpha, \beta\}$، فإنه عندما تقترب x من الصفر فإن

أ. $F(x) = c_1L_1 + c_2L_2 + O(x^\gamma)$

ب. $G(x) = L_1 + L_2 + O(x^\gamma)$

16. تسمّى المتتالية $\{F_n\}$ المعرفة على الصورة الآتية $F_0 = 1, F_1 = 1$ و $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ لكل $n \geq 0$، متتالية فيبوناتشي (Fibonacci Sequence). إن حدود هذه المتتالية تحدث طبيعيا في كثير من الأصناف الحياتية، خصوصًا مثل تلك التي لها بتلات وحراشف مرتبة على صورة لولب لوغارتمي. لتكن المتتالية $\{x_n\}$ معرّفة بالصيغة $x_n = F_{n+1}/F_n$. على فرض أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ موجودة. أثبت أن $x = (1+\sqrt{5})/2$. يسمّى هذا العدد النسبة الذهبية (golden ratio).

17. إن متتالية فيبوناتشي تحقّق الصيغة $F_n \equiv \tilde{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

أ. اكتب عملية لحساب F_{100} مستخدمًا Maple.

ب. استخدم Maple بالقيمة المفترضة للأمر Digits متبوعًا بالأمر evalf لحساب $\tilde{F}_{100}$.

ج. لماذا نجد القيمة في (أ) أدق من تلك في (ب)؟

د. لماذا يكون الحصول على النتيجة باستخدام (ب) أسرع من الحصول على النتيجة باستخدام الطريقة في (أ)؟

هـ. ماذا يحدث عندما تستخدم الأمر Simplify بدلًا من الأمر evalf في حساب $\tilde{F}_{100}$؟

18. السلسلة التوافقية $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ تباعدية (divergent). ولكن المتتالية $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ متقاربة، لأن $\{\gamma_n\}$ متتالية محدودة غير متزايدة. إن النهاية $\gamma = 0.5772156649\ldots$ للمتتالية $\{\gamma_n\}$ تسمّى ثابت أويلر (Euler).

أ. استخدم القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من γ ضمن الحد 10^{-2}.

ب. استخدم القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من γ ضمن الحد 10^{-3}.

ج. ماذا يحدث إذا استخدمت القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من ضمن γ الحد 10^{-4}؟

4.1 البرمجيات العددية Numerical Software

توجد برامج حاسوبية لتقريب حلول عددية للمسائل. في هذا الكتاب قدّما برامج مكتوبة باللغات Mathematica، MATLAB، Pascal، C، FORTRAN، Maple و Java. لغرض استخدامها في حل الأمثلة والتمارين الواردة في هذا الكتاب. وتعطي هذه البرامج نتائج مرضية لمعظم المسائل التي تحتاج إلى حل، ولكنها تقع ضمن ما نسميه برامج الغرض الخاص، ونستخدم هذا المصطلح لنميّز بين هذه البرامج وبرامج الرياضيات العادية، وإن البرامج في هذه الحقائب تسمى برامج الغرض العام.

إن البرامج في حقائب الغرض العام تختلف في محتواها عن الخوارزميات والبرامج الواردة في هذا الكتاب. وإن حقائب الغرض العام تتعامل مع طرائق لتقليل الأخطاء الناتجة عن

التقريب الآلي، والانسياب السفلي والانسياب العلوي. وهي تصف أيضًا مدى المدخلات التي تؤدي إلى نتائج ذات دقة محدّدة معينة.

ولما كانت هذه الخواص تعتمد على الآلة فإن الحقائب ذات الغرض العام تستخدم وسيطات تصف مؤشرات النقطة العائمة للآلة المستخدمة في الحسابات.

ولتوضيح بعض الفروق بين البرامج في حقائب الغرض العام والبرنامج الذي ضمّناه في هذا الكتاب، افترض البرنامج الذي نستخدمه لإيجاد المعيار الإقليدي لمتجه بعده n $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ إن هذا (المعيار) (norm) غالبًا ما يطلب ضمن البرامج الكبيرة. ويعرّف بالآتي

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$$

يستخدم هذا المعيار (norm) لقياس المسافة بين المتّجه $\mathbf{x}$ والمتّجه $\mathbf{0}$.

على سبيل المثال: معيار المتجه $\mathbf{x} = (2, 1, 3, -2, -1)^t$ هو

$$\|\mathbf{x}\|_2 = [2^2 + 1^2 + 3^2 + (-2)^2 + (-1)^2]^{1/2} = \sqrt{19}$$

وعندئذ فإن بعده عن المتّجه $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, 0)^t$ هو $\sqrt{19} \approx 4.36$.

نبين هنا نوع الخوارزمية التي تقدمها هذه المسألة، إنها لا تحتوي على أي وسيطات (برامترات) تعتمد على الآلة. ولا تقدم أي توكيدات للدقة. ولكنها تعطي نتائج دقيقة في "معظم الأوقات".

المدخلات: $n, x_1, x_2, \ldots, x_n$

المخرجات: $NORM$

الخطوة	المضمون
1	ضع $SUM = 0$
2	عند $i = 1, 2, \ldots, n$ ضع $SUM = SUM + x_i^2$
3	ضع $NORM = SUM^{1/2}$
4	المخرجات ($NORM$) توقف.

إن البرنامج المبني على هذه الخوارزمية سهل الكتابة والفهم، ولكن قد يفشل البرنامج في إعطاء دقة كافية لعدة أسباب. فعلى سبيل المثال: قد تكون قيمة بعض الأعداد كبيرة جدًّا أو صغيرة جدًّا. فلا يمكن تمثيلها بدقة في نظام النقطة العائمة الحاسوبي. وقد لا يعطي الترتيب العادي لتنفيذ الحسابات النتائج الأدق أيضًا. أو قد لا يكون البرنامج العادي المتاح لاستخراج الجذر التربيعي هو الأفضل بالنسبة إلى هذه المسألة.

إن أمورًا من هذا النوع تؤخذ في الحسبان من قبل مصمّمي الخوارزميات عندما يكتبون برامج ذات غرض عام. وتستخدم هذه البرامج في الغالب على صورة برامج فرعية لحل مسائل أكبر. ولذلك يجب أن تحتوي على ضوابط لا نحتاج إليها.

والآن افترض برنامجًا حاسوبيًّا ذا غرض عام لاستخدامه في حساب المعيار الإقليدي.

أولًا: قد تقع قيمة المركبة x_i للمتّجه ضمن مدى الآلة، ولكن قد لا يقع مربع تلك المركبة ضمن ذلك

المدى. يمكن حدوث مثل هذا الأمر عندما يكون $|x_i|$ صغيرا جدًا لدرجة أن x_i^2 يسبب الانسياب السفلي أو عندما تكون $|x_i|$ كبيرة جدًا، على أن x_i^2 تسبب الانسياب العلوي.

ومن الممكن أن تقع هذه الحدود جميعها ضمن مدى الآلة أيضًا، ولكن الانسياب العلوي يحدث بسبب جمع مربع أحد هذه الأبعاد للمجموع المحسوب.

ولما كانت معايير الدقة تعتمد على الآلة التي تجرى عليها الحسابات، فإن الوسيطات المعتمدة على الآلة تدخل ضمن الخوارزميات. افترض أننا نستخدم حاسوبًا فرضيًا قاعدته 10، ويملك $t \ge 4$ خانات دقة، وأصغر أسيّة $emin$ وأعلى أسيّة $emax$، عندئذ تكون مجموعة أعداد النقاط العائمة في هذه الآلة مكوّنة من الصفر والأعداد على الصيغة $x = f \cdot 10^e$ حيث

$$f = \pm(f_1 10^{-1} + f_2 10^{-2} + \cdots + f_t 10^{-t})$$

حيث لكل $1 \le f_1 \le 9$ و $0 \le f_i \le 9$ لكل $i = 2, \ldots, t$ حيث $emin \le e \le emax$.

إن هذه القيود تعني أن أصغر عدد موجب يمكن تمثيله في الآلة هو $\sigma = 10^{emin-1}$، ومن ثم يمكن لأي عدد محسوب x بقيمة $|x| < \sigma$ أن يسبب انسيابًا أدنى، وينتج عن ذلك أن تصبح قيمة x صفرًا. إن أكبر عدد موجب يمكن تمثيله هو $\lambda = (1 - 10^{-t})10^{emax}$، ومن ثم فإن أي عدد محسوب x بقيمة $|x| > \lambda$ يسبب انسيابًا أعلى. إذا حدث انسياب أدنى غالبًا ما يستمر البرنامج دون أي خسارة مهمة في الدقة، أما عندما يحدث انسياب أعلى فإن البرنامج يفشل.

تفترض الخوارزمية أن خواص الآلة المتعلقة بالنقطة العائمة توصف باستخدام الوسيطات (البرامترات) N, s, S, y, Y سيعبر عن أكبر عدد من المدخلات التي يمكن أن تجمع بدرجة دقة $t/2$ من الأعداد بالرمز N. إن هذا يعني أن الخوارزمية تستمر في العمل لإيجاد قياس المتجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ فقط إذا كان $n \le N$. ولكي تحل مشكلة الانسياب الأدنى والأعلى، فإن أعداد النقطة العائمة غير الصفرية تقسَّم إلى المجموعات الآتية:

- أعداد صغيرة في القيمة x وهي تلك التي تحقّق $0 < |x| < y$.
- أعداد وسيطية في القيمة x عندما يكون $y \le |x| < Y$.
- أعداد كبيرة في القيمة x عندما يكون $Y \le |x|$.

نختار الوسيطين y و Y بحيث نضمن عدم وجود مشكلة انسياب أدنى أو أعلى في عمليات التربيع أو جمع الأعداد وسيطية القيمة. إن تربيع الأعداد صغيرة القيمة يمكن أن يؤدي إلى انسياب أدنى، ولذلك يستخدم عامل ضربي S يكبر الواحد بكثير لكي يتجنب العدد $(Sx)^2$ الانسياب الأدنى عندما لا يتجنبه x^2. إن جمع الأعداد ذات القيم الكبيرة وتربيعها يمكن أن يؤدي إلى انسياب أعلى. لذلك نستخدم في هذه الحالة عددًا s أصغر من الواحد بكثير لضمان تجنب $(sx)^2$ الانسياب الأعلى عند دمجه أو حسابه في عملية الجمع حتى ولو كان x^2 يؤدي إلى ذلك الانسياب.

ولتجنب الضرب غير الضروري، نختار y و Y بحيث يكون مدى الأعداد وسيطية القيمة كبيرًا قدر الإمكان. إن الخوارزمية الآتية تعديل لتلك المشروحة في [Brow, W. p. 471]. وتستخدم عملية ضرب مركبات المتجه صغيرة القيمة للحصول على واحدة وسيطية القيمة. ثم تزع الضرب

عن حاصل الجمع وتستمر في تربيع الأعداد الصغيرة والوسيطية وجمعها حتى الوصول إلى مركبة ذات قيمة كبيرة. وبمجرد ظهور مركبة قيمتها كبيرة، تضرب الخوارزمية المجموع السابق. وتستمر في عمليات الضرب في ثابت وفي التربيع. وجمع الأعداد المتبقية. إن الخوارزمية تفترض أنه في أثناء الانتقال من الأعداد الصغيرة إلى الأعداد الوسيطية. تكون الأعداد الصغيرة غير المضروبة في ثابت مهملة مقارنة بالأعداد الوسيطية. وبالمثل في أثناء الانتقال من الأعداد الوسيطية إلى الأعداد الكبيرة، فإن الأعداد الوسيطية غير المضروبة في ثابت تكون مهملة مقارنة بالأعداد الكبيرة. وهكذا يجب اختيار الوسيطات الضربية بحيث تكون مساواة الأعداد للصفر فقط عندما تكون مهملة حقًّا.

إن العلاقات بين خواص الآلة كما وصفت عن طريق $t, \sigma, \lambda, emin, emax$ ومعلمات الخوارزمية N, s, S, y, Y تعطى في آخر الخوارزمية.

تستخدم الخوارزمية ثلاثة أعلام لتبين المراحل المختلفة في عملية الجمع. تعطى هذه الأعلام قيمًا ابتدائية في الخطوة 3 في الخوارزمية. يعطى العلم 1 (FLAG 1) القيمة 1 حتى ملاقاة مركبة وسيطية أو كبيرة. ثم يحوّل إلى 0. يعطى العلم 2 (FLAG 2) القيمة 0 عندما تجمع الأعداد الصغيرة ثم يُحوّل إلى 1 عند ملاقاة أول عدد وسيطي، ويُحول مرة أخرى إلى 0 عند إيجاد عدد كبير.

يعطى العلم 3 (FLAG 3) القيمة 0 ابتداء. ويتحوّل إلى 1 عند ملاقاة عدد كبير لأول مرّة.

تدخل الخطوة 3 العلم DONE الذي قيمته 0 حتى الانتهاء من الحسابات. ثم يحوّل إلى 1.

المدخلات: $N, s, S, y, Y, \lambda, n, x_1, x_2, \ldots, x_n$

المخرجات: $NORM$ أو عبارة خطأ مناسبة.

الخطوة	المضمون
1	إذا كان $n \le 0$ فالمخرجات (الحد n يجب أن يكون موجبا). توقف
2	إذا كان $n \ge N$ فالمخرجات (الحد n كبير جدًا). توقف
3	ضع $SUM = 0$ $FLAG1 = 1$ (الأرقام الصغيرة تجمع). $FLAG2 = 0$ $FLAG3 = 0$ $DONE = 0$ $i = 1$
4	بينما ($i \le n$ و $FLAG1 = 1$) نفذ الخطوة 5.
5	إذا كان $\lvert x_i \rvert < y$ فضع $SUM = SUM + (Sx_i)^2$ $i = i + 1$ ما عدا ذلك ضع $FLAG1 = 0$ (نتج عدد غير صغير).
6	إذا كان $i \le n$ فضع $NORM = (SUM)^{1/2}/S$ $DONE = 1$ ما عدا ذلك ضع $SUM = (SUM/S)/S$ (مقياس للأعداد الكبيرة). $FLAG2 = 1$

7	بينما ($i \le n$ و $FLAG2 = 1$) نفذ الخطوة 8. (تجمع الأعداد الوسيطية).
8	إذا كان $\lvert x_i \rvert < y$ فضع $SUM = SUM + x_i^2$ $i = i + 1$ ما عدا ذلك ضع $FLAG2 = 0$ (نتج عدد كبير).
9	إذا كان $DONE = 0$ فإنه إذا كان $i > n$ فضع $NORM = (SUM)^{1/2}$ $DONE = 1$ ما عدا ذلك ضع $SUM = ((SUM)s)s$ (مقياس للأعداد الكبيرة). $FLAG3 = 1$
10	بينما ($i \le n$ و $FLAG3 = 1$) نفذ الخطوة 11.
11	ضع $SUM = SUM + (sx_i)^2$ (جمع الأعداد الكبيرة). $i = i + 1$
12	إذا كان $DONE = 0$ فإنه إذا كان $SUM^{1/2} < \lambda s$ فضع $NORM = (SUM)^{1/2}/s$ $DONE = 1$ ما عدا ذلك ضع $SUM = \lambda$ (المعيار كبير جدًا).
13	إذا كان $DONE = 1$ فالمخرجات ('Norm is', $NORM$) وما عدا ذلك المخرجات ($'Norm \ge', NORM$ حدث تخطٍّ).
14	توقف.

لقد اختيرت العلاقات بين مؤشرات الآلة $t, \sigma, \lambda, emin, emax$ ووسيطت الخوارزمية في [Brow, W, p. 471] N, s, S, y, Y على الصورة الآتية:

$N = 10^{e_N}$ بحيث $e_N = \lfloor (t-2)/2 \rfloor$، أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي $(t-2)/2$.

$s = 10^{e_s}$ بحيث $e_s = \lfloor -(emax + e_N)/2 \rfloor$.

$S = 10^{e_S}$ بحيث $e_S = \lceil (1 - emin)/2 \rceil$، أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي $(1 - emin)/2$.

$y = 10^{e_y}$ بحيث $e_y = \lceil (emin + t - 2)/2 \rceil$.

$Y = 10^{e_Y}$ بحيث $e_Y = \lfloor (emax - e_N)/2 \rfloor$.

إن موثوقية هذه الخوارزمية قد زادت التعقيد كثيرًا إذا ما قُورنت بالخوارزمية لتي بحثت في هذا الفصل. هناك أشــكال كثيرة من البرمجيات العددية ذات الغرض العام متحة تجاريًا وفي متناول الجمهور. إن معظم البرمجيات المبكرة كانت قد كتبت للحواسيب المركزية. وإليك مرجع جيد هو *Sources and Development of Mathematical Software* ومحرره Wayne Cowell [Co].

وفي الوقت الحاضر وحين أصبح الحاسوب ذو الشاشة قويًّا بما يكفي. فقد أصبحت البرمجيات العددية متاحة للحواسيب الشـخصية ومحطات العمل. وقد كتبت معظم هذه ابرمجيات بلغة FORTRAN 77 على الرغم من كتابة بعضها بلغات Java ،FORTRAN 90، C++، C. إن عمليات ALGOL كانت قد قدمت لحسابات المصفوفات في عام 1971 [WR]. ثم طوّرت حقيبة برمجيات FORTRAN مبنيــة على عمليات ALGOL. وكان هذا التطوير موجَّهًا إلى برمجيت EISPACK. لقد وُثّقت هذه البرمجيات عن طريق Springer – Verlag بوصفها جزءًا من مذكرات المحاضرات

لقد طُــوّر الحـاســوب الشخصي فــي أول الثمانينيـات مــن القرن العشــرين على يد ســتيف وزنياك Steve Wozniak وستيف جوبس Steve Jobs مؤســســي حاسـوب أبل Apple Compute.

وكـان أول حـاسـوب محمول هو أوزبورن Osborne I الذي صنع عــام 1981، مع أنـه كان أكبر وأثـقل كثيرا مما نتـصـوره الآن حاسوبا محمولا

إن نظام فورتران (FORmula TRANslator) كان لغة البرمجــة العلمية الأصلية ذات الغــرض العــام. ومــا زالت قيد الاســتخدام في الحالات التي تتطلب حســابات علميــة متعمقة. وإن الطبعــة الحاليــة المقننة لهذه اللغة هي FORTRAN

إن مشروع EISPACK هو أول حقيبة كبيرة للبرمجيــات العــددية التي أصبحــت متـاحة للاسـتخدام. وفـتحــت الطـريق لبرمجيـات أخرى تتبعها.

> تأسست هندسة البرمجيات كنظام مخبري في سبعينيات وثمانينيات القرن العشرين حيث طور برنامج EISPACK في مختبرات آرغنون ولينباك فيما بعد. ومع بداية ثمانينيات القرن العشرين كانت مختبرات أرغنون ذات شهرة عالية بكونها القدوة في هذا المجال ليس فقط في المجال الرمزي وإنما في مجال الحسابات العددية أيضا

في سلسلة علم الحاسوب Lecture Notes in Computer Science Series [Sm B] and [Gar]. تستخدم برمجيات FORTRAN لحساب القيم المميّزة eigenvalues والمتجهات المميّزة eigenvectors لعدد من أنواع المصفوفات المختلفة. إن EISPACK مصان من قبل نتلب netlib. ويمكن الدخول إليه عن طريق موقع نتلب http://www.netlib.org أما LINPACK فهو حقيبة برمجيات FORTRAN لتحليل نظم صيغ خطية وحلها وحل مسائل مربعات الصغرى الخطية. إن توثيق هذه البرمجية موجود في [DBMS]. وموضوع على موقع نتلب (netlib). وهناك مقدمة متدرجة خطوة خطوة لبرامج LINPACK و EISPACK و BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) مشروحة في [CV] ولقد أتيحت برمجية LAPACK أول مرة عام 1992. وهي من مكتبة برمجيات فورتران. وهي أقوى من LINPACK و EISPACK وذلك بتكامل هاتين المجموعتين من الخوارزميات في برمجية موحدة متجددة. وقد أعيد إنشاء البرمجيات للتوصل إلى معالجات المتّجهات على نحو كاف. وأداء أكثر كفاءة أو ذاكرة مشتركة. لقد طُوّر LAPACK أفقيًا وبعمق في الطبعة 3.0 المتاحة JAVA، C++، C، FORTRAN 90، FORTRA. إن حقيبة BLAS ليست جزءًا من LAPACK. ولكن الشيفرة لـ BLAS موزّعة مع LAPACK. وإن دليل LAPACK الطبعة الثالثة متاح من SIAM. The LAPACK User's Guide, 3rd ed.[AN] وهو متاح أيضا على الموقع

http://www.netlib.org / lapack /lug/lapack_lug.html

ويمكن الحصول على LAPACK أو برمجيات فردية من LAPACK عن طريق موقع نتلب netlib. وتوجد حقائب أخرى لحل أنواع محددة من المسائل موجودة للاستخدام العام ومتاحة على نتلب. ويمكن الاستزادة من المعلومات في المقالة "Software Distribution Using Netlib" للمؤلفين [DRW] Wade و Roman و Dongarra. إن هذه البرامج قادرة على فحص الشروط الخاصة جميعها التي يمكن أن تؤدي إلى الخطأ أو الفشل.

> لقد أصبحت IMSL أول مكتبة علمية للحواسيب العمة على نطاق واسع في عام 1970م. ومنذ ذلك الوقت أصبحت المكتبات متاحة للأنظمة الحاسوبية على مدى الحواسيب الشخصية.

سنناقش في آخر كل فصل بعض البرمجيات الملائمة للأغراض العامة. إن البرمجيات التجارية المتاحة تمثّل ما توصل إليه العلم في الطرائق العددية. وغالبًا ما تبنى محتوياتها على حقائب المستوى العمومي. ولكنها تحتوي على طرائق في مكتبات لأي نوع من المسائل تتكون من المكتبات STAT، MATH، و SFUN للرياضيات العددية والإحصاء والدّوال الخاصة على التوالي. تحتوي هذه المكتبات على أكثر من 900 برمجية كانت متاحة أصلا في FORTRAN 77 ومتاحة الآن في FORTRAN 90، C و Java. إن هذه البرمجيات تحل أكثر مسائل التحليل العددي شيوعًا. وإن المعلومات عن المكتبات متاحة على http://www.vni.com وهي متوفرة على نحو كاف وبتوثيق موسّع. ويوجد مثال برامجي لكل برنامج، بالإضافة إلى معلومات عن القاعدة المرجعية. ويحتوي IMSL على طرائق للأنظمة الخطية، تحليل نظام القيم، الاستيفاء الداخلي، التكامل والتفاضل، الصيغ التفاضلية، التمويلات، الصيغ غير الخطية، الأعظمية، وعمليات المصفوفة/المتجهات الرئيسة. وتحتوي المكتبة على برمجيات إحصائية واسعة أيضا. لقد وجدت مجموعة الخوارزميات العددية The Numerical Algorithms Group (NAG) في المملكة المتحدة منذ 1970. وتقدم NAG أكثر من 1000 برمجية في مكتبة FORTRAN 77 و400 برمجية في مكتبة C، وأكثر من 200 برمجية في مكتبة FORTRAN 90 ومكتبة للآلات المتوازية ومجموعات من محطات العمل أو الحواسيب الشخصية. إن مجموعة جزئية من مكتبة FORTRAN 77 (the NAG Foundation Library) متاحة للحواسيب الشخصية ومحطات العمل في حال كان فضاء العمل فيها محدودًا. يحتوي دليل استخدام NAG على تعليمات وأمثلة مع مثال

> تأسست مجموعة الخوارزميات العددية (NAG) في المملكة المتحدة عام 1971م. وطوّرت أول مكتبة لبرمجة الرياضيات وهي تحوي الآن أكثر من 10 000 مستخدم. وتحوي أكثر من ألف دالّة في الرياضيات والإحصاء. تمتد من البرمجيات الإحصائية، والرمزية، المرئية والمحاكاة العددية إلى المجمعات وأدوات التطوير التطبيقي

مخرجات لكل برمجية. إن [Ph] مرجع لقدمة مفيدة لبرمجيات NAG. تحتوي مكتبة NAG على برمجيات لتنفيذ معظم المهام الرئيسة في التحليل العددي بطريقة تشبه تلك التي في IMSL، وهي تحتوي على بعض البرمجيات الإحصائية أيضًا، ومجموعة من برمجيات الرسم. والمكتبة متاحة تجاريًا من مجموعة الخوارزميات العددية ذات الموقع على الشبكة http://www.nag.com لقد صُمّمت حقائب IMSL و NAG لعالم الرياضيات. والعالم أو المهندس الذي يرغب في استدعاء برمجيات Java، C، أو FORTRAN ذات النوعية العالية من داخل البرنامج. إن التوثيق المتاح مع الحقائب التجارية يشرح البرنامج المطلوب لاستخدام البرامج المكتبية. إن الحقائب الثلاث الآتية ذات بيئات فردية. وعندما تنشط فإن المستخدم يدخل أوامر تؤدي إلى حل مسألة ما عن طريق الحقيبة. وعلى كل حال فإن كل حقيبة تسمح بإنشاء برنامج ضمن لغة الأوامر فيها. إن MATLAB مختبر مصفوفي كان أصلًا برنامج FORTRAN نشره كليف مولر Cleve Moler [Mo] وقد بني معظم المختبر على برمجيات EISPACK و LINPACK مع أن دوال مثل الأنظمة غير الخطية، التكامل العددي، الشرائح التكعيبية، مطابقة المنحنيات، الأعظمية، الصيغ التفاضلية العادية، وأدوات الرسم قد ضمّنت فيه. إن هذا النظام القوي ذا الشمولية الذاتية مفيد خصوصًا لاستخدامه في مقرر الجبر الخطي التطبيقي. لقد أصبح ماتلاب MATLAB متاحًا منذ 1985، ويمكن الحصول على معلومات عن هذا النظام من شركة الأعمال الرياضية The MathWorks Inc، وعنوانها على الإنترنت هو http://www.mathworks.com والحقيبة الأخرى هي مابل Maple، وهي نظام حاسوبي جبري (CAS) طوّر في عام 1980م من قبل مجموعة الحساب الرمزي في جامعة واترلو Symbolic Computational Group at University of Waterloo إن تصميم نظام مابل Maple قد نُشرَ في بحث تشار، جيدس، جنتلمن، وجونت
B.W. Char, K.O. Geddes, W.M. Gentlemen, and G.H. gonnet [CGGG]

كُتبت ماتلاب MATLAB في الأصل لإتاحة الوصول إلى برمجية للمصفوفة في مشروعات لنباك وإيزباك EISPACK و LINPACK

كُتب النموذج الأول في أواخر 1970 لاستخدامه في مقررات مبرهنة المصفوفات، الجبر الخطي والتحليل العددي. ويوجد في الوقت الحاضر أكثر من 500,000 مستخدم للماتلاب MATLAB في أكثر من 100 بلد

إن برمجيات NAG متوافقة مع مابل Maple ابتداءً من النموذج 7.0.

مع اختيارنا Maple نظامًا معياريًا لنا في CAS، فإن Mathematical المشهورة التي ظهرت في عام 1988 يمكن استخدامها لهذا الغرض.

إن مابل Maple متاح منذ الثمانينيات 1980، وعنوان الحقيبة http://www.maplesoft.com ومابل Maple المكتوبة بلغة C قابلة لمعالجة المعلومات بطريقة رمزية. وإن هذه المعالجة الرمزية تسمح للمستخدم بالحصول على الأجوبة الدقيقة بدلًا من القيم العددية. وبإمكان مابل Maple إعطاء أجوبة دقيقة لمسائل رياضية، مثل التكاملات، الصيغ التفاضلية، والأنظمة الخطية. إنها تحوي إنشاءً برامجيًا. وتسمح بحفظ نص الأوامر في ملفات صحائف العمل التي يمكن إدخالها في مابل، ومن ثم تنفيذ الأوامر. لقد اختير مابل لاستخدامه في هذا الكتاب بسبب خصائص الحساب الرمزي، الحساب العددي وصحائف العمل. (تستخدم أوامر مابل وتكتب في متن هذا الكتاب). والحقيبة الثالثة هي Mathematical التي طوّرها ولفرام ريسيرج Wolfram Research عام 1985. ونشرت أول مرة عام 1988. إنها حقيبة قوية ومرغوبة من نوع CAS، وهي شائعة في مجالي التربية والأعمال. يمكن الحصول على المعلومات حول هذه الحقيبة على العنوان http://www.wolfram.com. ويمكن الرجوع إلى كتب كودي وييت [Cody-Waite CW] وكوكلر [Kockler Ko] لمعلومات إضافية حول البرامج ومكتبات البرامج، وإلى بحث دوناكرا واكلر المنشور عام 1995 Dongarra - Walker. ويمكن الرجوع إلى كتاب جايتيني–جاتلين وفرايز [CF] Chaitini - Chatelin and Frayse، وكذلك إلى بحث جولدبرغ [Goldberg Goldb] لمعلومات إضافية حول حسابات النقطة العائمة. إن كتب شندل [Schendell Sche]، فيليبس وفريمان [PF] Philips and Freeman، وجولب وأورتيقا [Golub Ortega GO] من الكتب التي تعرض تطبيق الطرائق العددية على الحواسيب المتوازية.