كان أول ظهور للمصفوفة جاكوبيان في عام 1815 في بحث نشره كوشي (Cauchy). ولكن جاكوبي Jacobi كتب *De determinantibus functionalibus* في عام 1841 وبرهن العديد من النتائج عن هذه المصفوفة

وتُسمى المصفوفة $J(\mathbf{x})$ مصفوفة جاكوبيان (Jacobian matrix) ولها عدد من التطبيقات في التحليل. ويمكن أن تكون معلومة لدى القارئ. وخصوصاً في تطبيقات التكامل المضاعف لدالة في متغيرات متعددة حول منطقة تحتاج إلى تحويل المتغيرات.

إن ضعف طريقة نيوتن تظهر من الحاجة إلى حساب المصفوفة $J(\mathbf{x})$ وإيجاد معكوسها في كل خطوة. ومن الناحية العملية. يتم تجنب الحساب الصريح للمصفوفة $J(\mathbf{x})^{-1}$ بتنفيذ العملية بطريقة ثنائية الخطوة.

أولاً: يجب إيجاد متجه $\mathbf{y}$ الذي يحقق $J(\mathbf{x}^{(k-1)})\mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$. ثم لتقريب الجديد $\mathbf{x}^{(k)}$ يجمع مع $\mathbf{x}^{(k-1)}$. وتستخدم الخوارزمية 1.10 العملية ثنائية الخطوة.

ALGORITHM
الخوارزمية
1.10

طريقة نيوتن للأنظمة Newton's Method for systems

لإيجاد تقريب لحلّ نظام غير خطي $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ إذا علم تقريب مبدئي $\mathbf{x}$.

المدخلات: عدد n من المعادلات والمجاهيل؛ تقريب مبدئي $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$، حد خطأ مسموح به TOL، أكبر عدد من التكرارات (التراجعات) N.

المخرجات: حلّ تقريبي $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ أو عبارة تفيد بأن عدد التكرارات قد تم تخطيه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$
2	عندما ($k \leq N$) نفّذ الخطوات 3 – 7.
3	احسب $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ و $J(\mathbf{x})$ حيث $J(\mathbf{x})_{i,j} = (\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j)$ لكل $1 \leq i, j \leq n$.
4	حلّ النظام الخطي $n \times n$. $J(\mathbf{x})\mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$ لإيجاد $\mathbf{y}$.
5	ضع $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$
6	إذا كان $\|\mathbf{y}\| < TOL$ فإن المخرجات $(\mathbf{x})$ (كانت العملية ناجحة). توقف.
7	ضع $k = k + 1$
8	المخرجات (تم تخطي العدد الأكبر من التكرارت N). (العملية لم تنجح). توقف.

■

مثال 1

أثبت أن النظام غير الخطي الآتي من المثال (2) في الفصل (1.10)

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

له حلٌ تقريبي عند $(0.5, 0, -0.52359877)^t$.

نستخدم طريقة نيوتن للحصول على هذا التقريب المبدئي $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^t$

و $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3),\ f_2(x_1, x_2, x_3),\ f_3(x_1, x_2, x_3))^t$

حيث

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \tfrac{1}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06,$$

و

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}.$$

إن مصفوفة جاكوبيان $J(\mathbf{x})$ لهذا النظام هي

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2x_3 & x_2 \sin x_2x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

حيث

$$\begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix} = -\left(J\left(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}\right)\right)^{-1} \mathbf{F}\left(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}\right)$$

وهكذا يجب في الخطوة k فقط حلّ النظام الخطي $J\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)\mathbf{y}^{(k-1)} = -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)$ لإيجاد $\mathbf{y}^{(k-1)}$ حيث

$$J\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right) = \begin{bmatrix} 3 & x_3^{(k-1)} \sin x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)} & x_2^{(k-1)} \sin x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)} \\ 2x_1^{(k-1)} & -162\left(x_2^{(k-1)} + 0.1\right) & \cos x_3^{(k-1)} \\ -x_2^{(k-1)}e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} & -x_1^{(k-1)}e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} & 20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1^{(k-1)} - \cos x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)} - \frac{1}{2} \\ \left(x_1^{(k-1)}\right)^2 - 81\left(x_2^{(k-1)} + 0.1\right)^2 + \sin x_3^{(k-1)} + 1.06 \\ e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} + 20x_3^{(k-1)} + \frac{10\pi - 3}{3} \end{bmatrix}$$

تظهر النتائج باستخدام طريقة التكرار هذه في جدول (3.10). ■

جدول 3.10

$\Vert \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)} \Vert_\infty$	$x_3^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	k
	-0.10000000	0.10000000	0.10000000	0
0.422	-0.52152047	0.01946686	0.50003702	1
1.79×10^{-2}	-0.52355711	0.00158859	0.50004593	2
1.58×10^{-3}	-0.52359845	0.00001244	0.50000034	3
1.24×10^{-5}	-0.52359877	0.00000000	0.50000000	4
0	-0.52359877	0.00000000	0.50000000	5

إن المثال السابق يشرح إمكانية تقارب طريقة نيوتن بسرعة فائقة حالما يوجد تقريب يكون قريبًا من الحلِّ الحقيقي. وعلى كل حال فليس من السهل دائمًا تحديد قيم بدء تؤدي إلى حل. والطريقة صعبة التنفيذ مقارنة بغيرها. نفترض في الفصل الآتي طريقة للتخلص من الضعف الأخير. وعادة ما يمكن إيجاد نقاط بدء بالطريقة التي سنبحث فيها في الفصل (4.10).

ويمكن إيجاد التقريب المبدئي لحلول الأنظمة غير الخطية 2×2 و 3×3 غالبًا باستخدام تسهيلات التطبيقات البيانية في مابل Maple.

إن النظام غير الخطي

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = 0$$
$$2x_1 + x_2^2 - 6 = 0$$

له حلان $(0.625204094, 2.179355825)^t$ و $(2.109511920, -1.334532188)^t$

لاستخدام مابل Maple نعرِّف أولاً المعادلتين

```
>eq1:=x1^2-x2^2+2*x2=0;
>eq2:=2*x1+x2^2-6=0;
```

لكي نحصل على التطبيق البياني لمعادلتين على المجموعة $-3 \le x_1, x_2 \le 3$ أدخل الأوامر

```
>with(plots);
>implicitplot({eq1,eq2},x1=-3..3,x2=-3..3);
```

ويمكننا من التطبيق في شكل (2.10) أن نقدِّر أن هناك حلولاً بالقرب من $(0.64, 2.2)^t$ و $(2.1, -1.3)^t$. ويعطينا هذا نقاط ابتداء جيدة لطريقة نيوتن.

تبدو المسألة بثلاثة أبعاد أصعب. افترض النظام غير الخطي

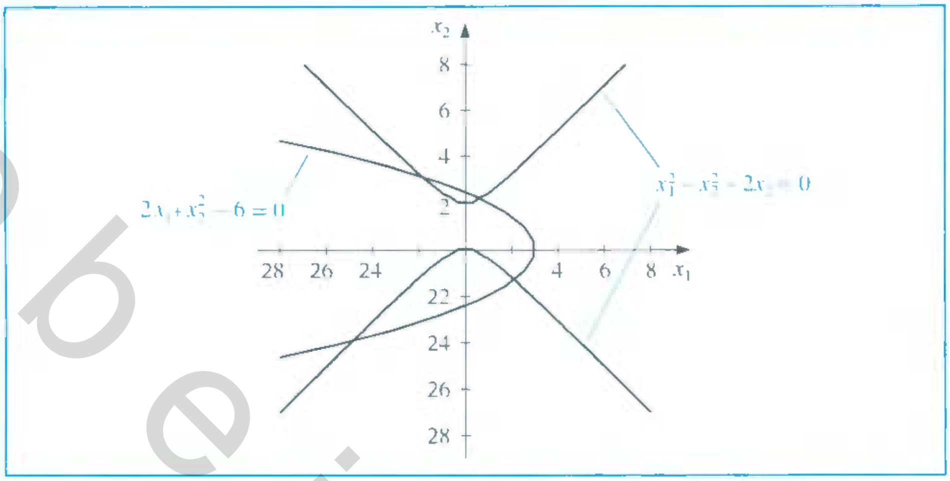
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + 4 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 = 0$$

عرِّف المعادلات الثلاث باستخدام أوامر Maple

```
>eq1:=2*x1-3*x2+x3-4=0;
>eq2:=2*x1+x2-x3+4=0;
>eq3:=x1^2+x2^2+x3^2-4=0;
```

إن المعادلة الثالثة تصف كرة نصف قطرها 2 ومركزها $(0, 0, 0)$، ولذلك كل من x_1 ، x_2 و x_3 يقع في $[-2, 2]$. إن أوامر Maple للحصول على التطبيق في هذه الحالة هي

شكل 2.10




```
>with(plots);
>implicitplot3d({eq1,eq2,eq3},x1=-2..2,x2=-2..2,x3=-2..2);
```

يوجد خيارات متعددة للتطبيق في ثلاثي الأبعاد. وهي متاحة في Maple لعزل حلّ النظام غير الخطي. ويمكننا على سبيل المثال تدوير التطبيق لنتمكن من رؤية أفضل لأجزاء السطوح، ثم يمكننا التركيز على مناطق حدوث التقاطعات وتغيير صيغة الإحداثيات للحصول على منظر أدق لإحداثيات التقاطع. إن التقريب المبدئي المعقول لهذه المسألة هو

$$(x_1, x_2, x_3)^t = (-0.5, -1.5, 1.5)^t.$$

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 2.10

1. استخدم طريقة نيوتن بأخذ $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ لحساب $\mathbf{x}^{(2)}$ لكل نظام غير خطي مما يلي:

أ. $4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$

$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$

ب. $\sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$

$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0$

ج. $x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12$

$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25$

د. $5x_1^2 - x_2^2 = 0$

$x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$

2. استخدم طريقة نيوتن بأخذ $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ لحساب $\mathbf{x}^{(2)}$ لكل نظام غير خطي مما يلي:

أ. $3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$

$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$

$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$

ب. $x_1^2 + x_2 - 37 = 0$

$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

ج. $15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13$

$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11$

$x_2^3 - 25x_3 = -22$

د. $10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$

$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0$

$8x_2x_3 + 4 = 0$

3. استخدم التسهيلات المتاحة في التطبيق في Maple لتقرّب حلول الأنظمة غير الخطية الآتية:

أ. $$4x_1^2 - 20x_1 + \tfrac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$$
$$\tfrac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$$

ب. $$\sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$$
$$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0$$

ج. $$x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12$$
$$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25$$

د. $$5x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$

4. استخدم التسهيلات المتاحة في التطبيق في Maple لتقرّب حلول الأنظمة غير الخطية الآتية ضمن الحدود المعطاة:

أ. $$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \tfrac{1}{2} = 0$$
$$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$
$$-1 \le x_1 \le 1, -1 \le x_2 \le 1, -1 \le x_3 \le 1$$

ب. $$x_1^2 + x_2 - 37 = 0$$
$$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$
$$-4 \le x_1 \le 8, -2 \le x_2 \le 2, -6 \le x_3 \le 0$$

ج. $$15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13$$
$$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11$$
$$x_2^3 - 25x_3 = -22$$
$$0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2$$

د. $$10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$$
$$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0$$
$$8x_2x_3 + 4 = 0$$
$$0 \le x_1 \le 2, -2 \le x_2 \le 0, 0 \le x_3 \le 2$$
$$0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2, -2 \le x_3 \le 0$$ و

5. استخدم الأجوبة التي حصلت عليها في التمرين (3) بوصفها تقريبات مبدئية لطريقة نيوتن. كرّر (عمليات تراجعية) للحصول على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$.

6. استخدم الأجوبة التي حصلت عليها في التمرين (4) بوصفها تقريبات مبدئية لطريقة نيوتن. كرّر (عمليات تراجعية) للحصول على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$.

7. استخدم طريقة نيوتن لتجد حلًّا للأنظمة غير الخطية الآتية في المجال المعطى كرر للحصول على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$.

أ. $$3x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^t$

ب. $$\ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1x_2) = \ln 2 + \ln \pi$$
$$e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1x_2) = 0$$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 2)^t$

ج. $$x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0$$
$$e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0$$
$$x_2^2 - 2x_1x_3 = 4$$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, -2, 1)^t$

د. $$6x_1 - 2\cos(x_2x_3) - 1 = 0$$
$$9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} + 0.9 = 0$$
$$60x_3 + 3e^{-x_1x_2} + 10\pi - 3 = 0$$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$

8. للنظام غير الخطي
$$4x_1 - x_2 + x_3 = x_1x_4$$
$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = x_2x_4$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = x_3x_4$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$
ستة حلول.

أ. برهن أنه إذا كان $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ حلًّا فإن $(-x_1, -x_2, -x_3, x_4)^t$ حلٌّ أيضًا.

ب. استخدم طريقة نيوتن بثلاثة تقريبات مبدئية لتجد الحلول جميعها التي تحقق $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$.

9. للنظام غير الخطي

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

مصفوفة جاكوبيان منفردة على نقطة الحلّ. طبّق طريقة نيوتن بأخذ $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$. لاحظ أن التقارب يمكن أن يكون بطيئًا أو يمكن ألا يحدث ضمن عدد معقول من التكرارات.

10. ما الصيغة التي تؤول إليها طريقة نيوتن عند تطبيقها على النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ المعطى بالصيغة

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

حيث A مصفوفة لها معكوس؟

11. برهن أنه عندما يكون $n = 1$ فإن طريقة نيوتن المعطاة بالمعادلة (9.10) تؤول إلى طريقة نيوتن المعهودة المعطاة بالمعادلة (5.2).

12. يمكن التنبؤ بمقدار الضغط اللازم لإغراق جسم كبير ثقيل في تربة طريّة متجانسة واقعة فوق أرض ذات قاعدة صلبة. من خلال مقدار الضغط اللازم لإغراق أجسام أصغر في التربة نفسها. وعلى نحو خاص. فإن مقدار الضغط p اللازم لإغراق صفيحة دائرية نصف قطرها r في أرض طرية بمسافة d. حيث تقع أرض القاعدة الصلبة على مسافة $D > d$ تحت السطح يمكن تقديره بمعادلة على الصيغة $p = k_1e^{k_2r} + k_3r$.

حيث k_1, k_2 و k_3 ثوابت، حيث $k_2 > 0$ تعتمد على d وعلى تجانس التربة، وليس على نصف قطر الصفيحة. (انظر [Bek, pp. 89–94]).

أ. أوجد قيم k_1, k_2 و k_3 إذا افترضنا أن صفيحة نصف قطرها 1 in، تتطلب ضغطًا مقداره 10 lb/in.² لترسو بمقدار 1 ft في حقل موحل. وصفيحة ذات نصف قطر 2 in تتطلب ضغطًا مقداره 12 lb/in.² لترسو قدمًا واحدة، وأن الصفيحة ذات نصف قطر 3 in تتطلب ضغطًا مقداره 15 lb/in.² لترسو بالمسافة نفسها.

(مفترضين أن عمق الأرض الموحلة أكثر من 1 ft.)

ب. استخدم حساباتك من الفقرة (أ) لتتنبأ بأصغر حجم لصحيفة دائرية لازمة لتتحمل ثقلاً مقداره 500 lb لكي ترسو مسافة أقل من 1 ft في حقل الأرض نفسها.

13. لإيجاد شكل مسقط معتمد على الجاذبية بحيث يجعل زمن نقل الجسيمات الحبيبية أقل ما يمكن، قام شيارلا وشارلتون وروبرتس C. Chiarella, W. Charlton, and A.W. Roberts [CCR] بحلّ المعادلات الآتية بطريقة نيوتن

(i) $f_n(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \frac{\sin\theta_{n+1}}{v_{n+1}}(1 - \mu w_{n+1}) - \frac{\sin\theta_n}{v_n}(1 - \mu w_n) = 0$ لكل $n = 1, 2, \ldots, N - 1$

(ii) $f_N(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \Delta y \sum_{i=1}^{N} \tan\theta_i - X = 0$ ، حيث

أ. $v_n^2 = v_0^2 + 2gn\Delta y - 2\mu\Delta y \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cos\theta_j}$ لكل $n = 1, 2, \ldots, N$

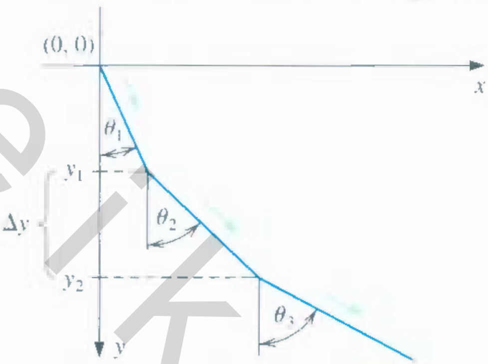
ب. و $w_n = -\Delta y v_n \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{v_i^3 \cos\theta_i}$ لكل $n = 1, 2, \ldots, N$

الثابت v_0 هو السرعة الابتدائية للمادة الحبيبية، X هو الإحداثي – x لنهاية المسقط. μ هي قوة الاحتكاك، N عدد أجزاء المسقط و $g = 32.17\text{ft/s}^2$ هو ثابت الجاذبية الأرضية.

المتغير v_i هو قياس زاوية الفقرة i للمسقط مع العمود كما هو مبين في الشكل الآتي، و v_i سرعة الجسيم الحبيبية في الفقرة i للمسقط.

حلّ (i) و (ii) للمعطيات الآتية $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^t$ حيث $\mu = 0, X = 2, \Delta y = 0.2, N = 20$ و $v_0 = 0$. حيث يمكن الحصول على قيم v_n و w_n مباشرة من (أ) و (ب).

كرّر التراجع حتى تحصل على $\|\theta^{(k)} - \theta^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-2}$.



14. تهدف تجربة بيولوجية ممتعة (انظر [Schr2]) إلى تحديد أعلى رتبة لحرارة الماء X_M التي يمكن للأنواع المختلفة من الهايدرا أن تعيش بها من دون أن تؤثر في مدة حياتها. إن إحدى الطرائق لحلّ هذه المسألة هي التوفيق بين مجموعة بيانات التجزئة باستخدام المربعات الصغرى الموزونة، ويكون التوفيق على الصيغة

$$f(x) = y = a/(x-b)^c$$

تمثّل قيم x رتبة حرارة الماء في البيانات. والثابت b هو المقارب لمنحنى f، وعليه فهو تقريب للقيمة X_M.

أ. برهن أن اختيار a, b, c لجعل $\sum_{i=1}^{n}\left[w_i y_i - \frac{a}{(x_i-b)^c}\right]^2$

أصغر ما يمكن يؤدي إلى حلّ النظام غير الخطي

$$a = \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i y_i}{(x_i-b)^c} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x_i-b)^{2c}}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i y_i}{(x_i-b)^c}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x_i-b)^{2c+1}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i y_i}{(x_i-b)^{c+1}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x_i-b)^{2c}}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i y_i}{(x_i-b)^c}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(x_i-b)}{(x_i-b)^{2c}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i y_i \ln(x_i-b)}{(x_i-b)^c}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x_i-b)^{2c}}$$

ب. حُلّ النظام غير الخطي للأنواع الحية بالبيانات الآتية، واستخدم الأوزان $w_i = \ln y_i$.

4	3	2	1	i
21.60	4.75	3.80	2.40	y_i
30.2	31.2	31.5	31.8	x_i

Quasi – Newton Methods أشباه طرائق نيوتن 3.10

في طريقة نيوتن لحلِّ أنظمة المعادلات غير الخطية ضعف واضح يكمن في التكرار التراجعي، ويجب حساب مصفوفة جاكوبيان وحلُّ نظام خطي $n \times n$ يستخدم هذه المصفوفة. افترض مقدار الحساب المرتبط بتكرار تراجعي واحد في طريقة نيوتن. إن مصفوفة جاكوبيان المرتبطة بنظام n من المعادلات غير الخطية على الصيغة $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ يتطلب n^2 من المشتقات الجزئية للدوال n التي هي مركبات $\mathbf{F}$ الواجب تحديدها وإيجاد قيمتها. وفي معظم الحالات يكون إيجاد القيم الصحيحة للمشتقات الجزئية غير مريح. على الرغم من أنه قد أصبحت هذه المسألة قابلة للتتبع مع انتشار أنظمة الحساب الرمزي كما في مابل Maple. وعندما يكون التقييم الصحيح غير عملي، يمكننا استخدام تقريبات الفرق المحدود لتقريب المشتقات الجزئية. وعلى سبيل المثال

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}^{(i)}) \approx \frac{f_j(\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{e}_k h) - f_j(\mathbf{x}^{(i)})}{h} \tag{10.10}$$

حيث h صغيرة بالقيمة المطلقة، و $\mathbf{e}_k$ هو المتجه الذي عنصره غير الصفري الوحيد هو 1 في الإحداثي k لهذا التقريب. وعلى كل حال لا تزال هناك حاجة إلى تنفيذ ما لا يقل عن n^2 من عمليات التقييم الدّالي العددية، وذلك لتقريب جاكوبيان. ولا ينقص من مقدار الحساب الذي هو من الرتبة $O(n^3)$ عمومًا، والذي يلزم لحلِّ النظام الخطي الذي يحتوي الجاكوبيان التقريبي هذا. ومن ثم فإن الجهد الحسابي لعملية واحدة في طريقة نيوتن لا يقل عن $(n^2 + n)$ من عمليات التقييم الدّالي العددي (n^2 لتقييم مصفوفة جاكوبيان و n لتقييم $\mathbf{F}$)، بالإضافة إلى $O(n^3)$ من العمليات الحسابية لحلِّ النظام الخطي. إن هذا الكم من الجهد الحسابي كبير، إلا في حالات قيم n الصغيرة نسبيًا والدوال سهلة التقييم عدديًا. سنعالج في هذا الفصل تعميمًا لطريقة القاطع (Secant Method) لأنظمة المعادلات غير الخطية، وهو ما يعرف بطريقة برويدن Boyden's method (انظر [Broy]).

تتطلب الطريقة n فقط من عمليات التقييم الدّالي العددي لكل تكرار (إعادة). كما ينقص عدد العمليات الحسابية إلى $O(n^2)$. وإنها تنتمي إلى عائلة من الطرائق تُسمى "تحديث أقل تغير في القاطع" (least – change secant updates) الذي ينتج خوارزميات تُسمى أشباه نيوتن quasi – Newton. إن هذه الطرائق تستعيض عن مصفوفة جاكوبيان في طريقة نيوتن باستخدام مصفوفة تقريب محدثة في كل تكرار. وإن سلبية هذه الطرائق تكمن في خسارة التقارب التربيعي في طريقة نيوتن، الذي يستعاض عنه عمومًا بتقارب يُسمى الخطي العالي Superlinear والذي يتضمن أن

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{p}\|}{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{p}\|} = 0$$

حيث تعبر $\mathbf{p}$ عن حلِّ المعادلة $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ و $\mathbf{x}^{(i)}$ و $\mathbf{x}^{(i+1)}$ وهي تقريبات متتالية لحلِّ $\mathbf{p}$.

ونجد في معظم التطبيقات أن الاختزال إلى التقارب الخطي العالي مقبول على نحو أفضل بوصفه بديلاً لتقليل مقدار الحساب. وهناك سلبية أخرى لطرائق أشباه نيوتن؛ إذ إنها لا تصحح نفسها بنفسها بخلاف ما يحدث في طريقة نيوتن.

إن طريقة نيوتن تصحح خطأ تقريب عمومًا عن طريق التكرار المتتالي. ولكن طريقة برويدن لا تفعل ذلك إلا إذا أدخلت ضوابط خاصة بذلك. لشرح طريقة برويدن، افترض أن لديك تقريبا مبدئيًّا $\mathbf{x}^{(0)}$ لحل p للنظام $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. نحسب التقريب الآتي $\mathbf{x}^{(1)}$ بطريقة نيوتن نفسها. أو نستخدم في حالة عدم الملاءمة لحساب $J(\mathbf{x}^{(0)})$ بالضبط معادلات الفروق المعطاة في المعادلة (10.10) لتقريب المشتقات الجزئية. وعلى كل حال فلحساب $\mathbf{x}^{(2)}$ نبتعد عن طريقة نيوتن ونتفحص طريقة القاطع لمعادلة واحدة غير خطية. وطريقة القاطع تستخدم التقريب

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

بوصفه بديلاً للمشتقة $f'(x_1)$ في طريقة نيوتن. في الأنظمة الخطية، $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$ هو متجه وإن عملية القسمة المقابلة له غير معرّفة. وعلى كل حال تسير العملية سيرًا مماثلا، بأن نستعيض عن المصفوفة $J(\mathbf{x}^{(1)})$ في طريقة نيوتن للأنظمة باستخدام مصفوفة A_1 ذات الخاصية

$$A_1(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) \qquad (11.10)$$

إن أي متجه في $\mathbb{R}^n$ يمكن كتابته بوصفه مجموعًا لأحد مضاعفات $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$ مع أحد مضاعفات المتممة العمودية للمتجه $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$. ولكي نعرّف المصفوفة A_1 تعريفا وحيدا، نحتاج إلى تحديد سلوكها على المتممة العمودية للمتجه $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$. وبما أنه لا يوجد أي معلومات حول تغير $\mathbf{F}$ باتجاه عمودي على $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$ فإننا نطلب أن

$$A_1\mathbf{z} = J(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{z} \text{ ما دام } (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)})^t\mathbf{z} = 0 \qquad (12.10)$$

وهكذا فإن أي متجه عمودي على $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$ لا يتأثر بالتحديث من $J(\mathbf{x}^{(0)})$، التي استخدمت لحساب $\mathbf{x}^{(1)}$، لـ A_1، التي تستخدم لحساب $\mathbf{x}^{(2)}$. إن الشرطين (10.11) و (10.12) يعرّفان A_1 تعريفًا وحيدًا (انظر [DM]) على الصيغة

$$A_1 = J(\mathbf{x}^{(0)}) + \frac{[\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) - J(\mathbf{x}^{(0)})(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)})](\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)})^t}{\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_2^2}$$

إنها هذه المصفوفة التي تستخدم مكان $J(\mathbf{x}^{(1)})$ لتحديد $\mathbf{x}^{(2)}$ على الصيغة

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} - A_1^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$$

وحالما تحدّد $\mathbf{x}^{(2)}$، تتكرّر العملية لتحديد $\mathbf{x}^{(3)}$، باستخدام A_1 بدلًا من $A_0 \equiv J(\mathbf{x}^{(0)})$ واستخدام $\mathbf{x}^{(2)}$ و $\mathbf{x}^{(1)}$ بدلًا من $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(0)}$. وعموما حالما تحدّد $\mathbf{x}^{(i)}$ فإن $\mathbf{x}^{(i+1)}$ تحسب من

$$A_i = A_{i-1} + \frac{\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2}\mathbf{s}_i^t \qquad (13.10)$$

و

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - A_i^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) \qquad (14.10)$$

حيث يستخدم الرمز $\mathbf{y}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i-1)})$، ويُستخدَم $\mathbf{s}_i = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}$ لتبسيط المعادلات.

وإذا ما نُفذت الطريقة كما لخِّص في المعادلتين (13.10) و (14.10) فإن عدد عمليات التقييم الدّالي العددي سينخفض من $n^2 + n$ إلى n، (تلك اللازمة لإيجاد قيمة $(\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)})$، ولكن لا يزال عدد $O(n^3)$ من الحسابات مطلوبًا لحلّ النظام الخطي $n \times n$ المرتبط بذلك.

(انظر الخطوة 4 في الخوارزمية (1.10).

$$A_i \mathbf{s}_{i+1} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) \qquad (15.10)$$

لا يمكن تبرير استخدام الطريقة بهذه الصيغة، بسبب الاختزال من التقارب التربيعي لطريقة نيوتن إلى التقارب الخطي العالي. وعلى كل حال يمكن إدخال تحسين معتمد عن طريق استخدام معادلة شيرمان وموريسون الخاصة بإيجاد معكوس المصفوفة. (انظر على سبيل المثال ([DM, p. 55]

مبرهنة 8.10 معادلة شيرمان – موريسون [Sherman - Morrison formula]

إذا كانت A مصفوفة لها معكوس و y و x متجهين، فإن $A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t$ لها معكوس، حيث إن

$$(A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{x}\mathbf{y}^t A^{-1}}{1 + \mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x}} \quad \text{و} \quad \mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x} \neq -1$$

■

إن معادلة شيرمان – موريسون (Sherman - Morrison) جاءت من ملخص ورقة بحث قدمها جاك شيرمان ووينيفرد موريسون عام 1949 في اجتماع معهد الإحصاء الرياضي في بولدر، كولورادو (Institute of Mathematical Statistics)

إن طريقة شيرمان – موريسون تسمح بحساب A_i^{-1} مباشرة من A_{i-1}^{-1}، لاغية الحاجة إلى إيجاد معكوس المصفوفة عند كل تكرار. بافتراض $A = A_{i-1}$ ، $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i)/\|\mathbf{s}_i\|_2^2$ و $\mathbf{y} = \mathbf{s}_i$ فإن المعادلة (3.10) ومبرهنة (8.10) معًا تقتضيان

$$A_i^{-1} = \left(A_{i-1} + \frac{\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2}\mathbf{s}_i^t\right)^{-1}$$

$$= A_{i-1}^{-1} - \frac{A_{i-1}^{-1}\left(\frac{\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2}\mathbf{s}_i^t\right)A_{i-1}^{-1}}{1 + \mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}\left(\frac{\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2}\right)}$$

$$= A_{i-1}^{-1} - \frac{(A_{i-1}^{-1}y_i - \mathbf{s}_i)\mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2 + \mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i - \|\mathbf{s}_i\|_2^2}$$

ولذلك ينتج

$$A_i^{-1} = A_{i-1}^{-1} + \frac{(\mathbf{s}_i - A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i)\,\mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}}{\mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i} \qquad (16.10)$$

إن هذا الحساب يحوي عملية ضرب مصفوفة – متجه فقط في كل خطوة. ولذلك يتطلب $O(n^2)$ فقط من العمليات الحسابية.

لقد تم تجاوز حساب A_i وكذلك ضرورة حلّ النظام الخطي (15.10). إن الخوارزمية (2.10) تنبع من هذا الإنشاء، وتدخل المعادلة (16.10) تقنية التكرار (14.10).

ALGORITHM الخوارزمية 2.10

برويدن Broyden

لإيجاد تقريب لحلّ نظام غير خطي $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ إذا علم تقريب مبدئي $\mathbf{x}$.

المدخلات: عدد n من المعادلات والمجاهيل، تقريب مبدئي $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$. حد خطأ مسموح به TOL. أكبر عدد من التكرارات (التراجعات) N.

المخرجات: حلّ تقريبي $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ أو عبارة تفيد بأن عدد التكرارات قد تم تخطيه.

الخطوه	المضمون
1	ضع $A_0 = J(\mathbf{x})$ حيث $J(\mathbf{x})_{i,j} = \partial f_i/\partial x_j(\mathbf{x})$ لكل $1 \le i$ و $j \le n$ $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ (ملحوظة : $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$).
2	ضع $A = A_0^{-1}$ (استخدم طريقة جاوس للحذف.)
3	ضع $\mathbf{s} = -A\mathbf{v}$ (ملحوظة : $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1$) $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$ $k = 2$. (ملحوظة : $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)}$).
4	ما دام ($k \le N$) فنفّذ الخطوات 5 – 13.
5	ضع $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ (احفظ $\mathbf{v}$) $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ (ملحوظة : $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$) $\mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ (ملحوظة : $\mathbf{y} = \mathbf{y}_k$).
6	ضع $\mathbf{z} = -A\mathbf{y}$ (ملحوظة : $\mathbf{z} = -A_{k-1}^{-1}\mathbf{y}_k$).
7	ضع $p = -\mathbf{s}^t\mathbf{z}$ (ملحوظة : $p = \mathbf{s}_k^t A_{k-1}^{-1}\mathbf{y}_k$).
8	ضع $\mathbf{u}^t = \mathbf{s}^t A$
9	ضع $A = A + \frac{1}{p}(\mathbf{s} + \mathbf{z})\mathbf{u}^t$ (انظر $A = A_k^{-1}$).
10	ضع $\mathbf{s} = -A\mathbf{v}$ (ملحوظة : $\mathbf{s} = -A_k^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$).
11	ضع $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$ (ملحوظة : $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k+1)}$).
12	إذا كان $\lVert\mathbf{s}\rVert < TOL$ فعندئذ المخرجات $(\mathbf{x})$ (كانت العملية ناجحة.) توقف
13	ضع $k = k + 1$.
14	المخرجات (تم تخطي العدد الأكبر من التكرارات N). (العملية لم تنجح.) توقف

■

مثال 1 لقد حُلّ النظام غير الخطي الآتي بطريقة نيوتن في المثال (1) من الفصل (10 ـ 2)

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

إن مصفوفة جاكوبيان لهذا النظام هي

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2 x_3 & x_2 \sin x_2 x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2 e^{-x_1 x_2} & -x_1 e^{-x_1 x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

افترض $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^t$،

و $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))^t$

حيث

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \tfrac{1}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}$$

فإن

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1.199950 \\ -2.269833 \\ 8.462025 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$A_0 = J\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 9.999833 \times 10^{-4} & -9.999833 \times 10^{-4} \\ 0.2 & -32.4 & 0.9950042 \\ -9.900498 \times 10^{-2} & -9.900498 \times 10^{-2} & 20 \end{bmatrix}$$

نحصل على

$$A_0^{-1} = J\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3333332 & 1.023852 \times 10^{-5} & 1.615701 \times 10^{-5} \\ 2.108607 \times 10^{-3} & -3.086883 \times 10^{-2} & 1.535836 \times 10^{-3} \\ 1.660520 \times 10^{-3} & -1.527577 \times 10^{-4} & 5.000768 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

وبذلك فإن

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - A_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.4998697 \\ 1.946685 \times 10^{-2} \\ -0.5215205 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -3.394465 \times 10^{-4} \\ -0.3443879 \\ 3.188238 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1.199611 \\ 1.925445 \\ -8.430143 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 0.3998697 \\ -8.053315 \times 10^{-2} \\ -0.4215204 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_1^t A_0^{-1} \mathbf{y}_1 = 0.3424604$$

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} + (1/0.3424604)\left[(\mathbf{s}_1 - A_0^{-1}\mathbf{y}_1)\mathbf{s}_1^t A_0^{-1}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3333781 & 1.11050\times 10^{-5} & 8.967344\times 10^{-6} \\ -2.021270\times 10^{-3} & -3.094849\times 10^{-2} & 2.196906\times 10^{-3} \\ 1.022214\times 10^{-3} & -1.650709\times 10^{-4} & 5.010986\times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} - A_1^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.4999863 \\ 8.737833\times 10^{-3} \\ -0.5231746 \end{bmatrix}$$

يعرض جدول (4.10) تكرارات إضافية. وإن التكرار الخامس في طريقة برويدن ذو دقة أقل قليلًا من دقة التكرار الرابع بطريقة نيوتن المعطاة في المثال في نهاية الفصل السابق. ■

جدول 4.10

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2$
3	0.5000066	8.672157×10^{-4}	−0.5236918	7.83×10^{-3}
4	0.5000003	6.083352×10^{-5}	−0.5235954	8.12×10^{-4}
5	0.5000000	-1.448889×10^{-6}	−0.5235989	6.24×10^{-5}
6	0.5000000	6.059030×10^{-9}	−0.5235988	1.50×10^{-6}

هناك أيضًا عمليات متاحة تبقي التقارب التربيعي، ولكنها تقلل عدد عمليات التقييم الدالي على نحو كبير. إن الطرائق من هذا النوع قد اقترحت في الأصل من قبل براون [Brow,k]. ويمكن الرجوع إلى [MC] لإجراء مسح ومقارنة بين بعض الطرائق الشائعة الاستخدام من هذا النوع. وعلى كل حال، فإن تنفيذ هذه الطرائق تنفيذًا فاعلاً أصعب كثيرًا من طريقة برويدن Broyden.

EXERCISE SET
مجموعة التمارين 3.10

1. استخدم طريقة برويدن بافتراض أن $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ لحساب $\mathbf{x}^{(2)}$ لكلٍّ من الأنظمة غير الخطية الآتية:

أ. $4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0$

$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$

ب. $\sin(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 = 0$

$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0$

ج. $3x_1^2 - x_2^2 = 0$

$3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$

أستخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^t$

د. $\ln(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1x_2) = \ln 2 + \ln \pi$

$e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1x_2) = 0$

أستخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 2)^t$

2. استخدم طريقة برويدن بافتراض أن $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ لحساب $\mathbf{x}^{(2)}$ لكل من الأنظمة غير الخطية الآتية:

أ. $3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$

$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$

$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$

ب. $x_1^2 - x_2 - 37 = 0$

$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

ج.
$$x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1 x_3 + 6 = 0$$
$$e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0$$
$$x_2^2 - 2x_1 x_3 = 4$$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, -2, 1)^t$

د.
$$6x_1 - 2\cos(x_2 x_3) - 1 = 0$$
$$9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} + 0.9 = 0$$
$$60x_3 + 3e^{-x_1 x_2} + 10\pi - 3 = 0$$
استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$

3. استخدم طريقة برويدن لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية في التمرين (1) باستخدام التقريبات الابتدائية $\mathbf{x}^{(0)}$. استخدم التكرار حتى تحصل على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$:

أ. $(0, 0)^t$ ب. $(0, 0)^t$ ج. $(1, 1)^t$ د. $(2, 2)^t$

4. استخدم طريقة برويدن لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية في التمرين (2) باستخدام التقريبات الابتدائية $\mathbf{x}^{(0)}$. استخدم التكرار حتى تحصل على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$:

أ. $(1, 1, 1)^t$ ب. $(2, 1, -1)^t$ ج. $(-1, -2, 1)^t$ د. $(0, 0, 0)^t$

5. استخدم طريقة برويدن لتقريب حلول الأنظمة غير الخطية باستخدام التقريبات الابتدائية $\mathbf{x}^{(0)}$. استخدم التكرار حتى تحصل على $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-6}$:

أ.
$$x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12$$
$$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25$$

ب.
$$5x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$

ج.
$$15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13$$
$$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11$$
$$x_2^3 - 25x_3 = -22$$

د.
$$10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0$$
$$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0$$
$$8x_2 x_3 + 4 = 0$$

6. يوجد للنظام الخطي
$$4x_1 - x_2 + x_3 = x_1 x_4$$
$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = x_2 x_4$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = x_3 x_4$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$
ستة حلول.

أ. برهن أنه إذا كان $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ حلًّا فإن $(-x_1, -x_2, -x_3, x_4)^t$ حلٌ أيضًا.

ب. استخدم طريقة برويدن ثلاث مرات لتقريب كل حلّ. كرّر العملية حتى تحصل على
$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$$

7. يوجد للنظام غير الخطي
$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$
$$x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} = 0$$
$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$
مصفوفة جاكوبيان منفردة بالحل. طبّق طريقة برويدن بأخذ $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$ لاحظ أن التقارب ربما يكون بطيئًا أو أنه لا يحدث ضمن عدد معقول من التكرارات.

8. برهن أنه إذا كان $0 \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ و $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$، فإن $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$، حيث $\mathbf{z}_1 = (\mathbf{y}^t\mathbf{z}/\|\mathbf{y}\|_2^2)\mathbf{y}$ يكون موازيًا للمتجه $\mathbf{y}$، وأن $\mathbf{z}_2$ عمودي على $\mathbf{y}$.

9. برهن أنه إذا كان $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ فإن $\det(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^t) = 1 + \mathbf{v}^t\mathbf{u}$.

10. أ. استخدم نتيجة التمرين (9) لتبرهن أنه إذا كانت A^{-1} موجودة و$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$، فإن $(A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t)^{-1}$ تكون موجودة إذا وفقط إذا كان $\mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x} \neq -1$.

ب. بضرب الطرف الأيمن في المصفوفة $A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t$، برهن أنه عندما يكون $\mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x} \neq -1$ نحصل على

$$(A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{x}\mathbf{y}^t A^{-1}}{1 + \mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x}}$$

11. تعامل التمرين (13) من الفصل (1.8) مع تحديد العلاقة الأسية بطريقة المربعات الصغرى على الصيغة $R = bw^a$ لتقريب مجموعة من البيانات التي تربط الوزن بقاعدة تعرق حشرات العث مودست سفنكس. وتحوّلت المسألة في ذلك التمرين إلى علاقة لوغارتم – لوغارتم. وقد أُدخِل في الفقرة (جـ) حد تربيعي في محاولة لتحسين التقريب. بدلًا من تحويل المسألة، حدّد الثابتين a و b اللذين يجعلان $\sum_{i=1}^{n}(R_i - bw_i^a)^2$ أصغر ما يمكن، لبيانات التمرين (13) من الفصل (1.8).

احسب الخطأ المرتبط بهذا التقريب، وقارنه بالخطأ الناتج من التقريبات السابقة لهذه المسألة.

4 10 طرائق التناقص الأشد انحدارًا Steepest Descent Techniques

تأتي تسمية هذه الطريقة من التطبيق الثلاثي الأبعاد بالإيماء في الاتجاه الأسفل

إن ميزة طرائق نيوتن وأشباه نيوتن في حلِّ أنظمة المعادلات غير الخطية تكمن في سرعة التقارب حالما عرف تقريب دقيق على نحو كافٍ. أما ضعف هذه الطرائق فيكمن في الحاجة إلى تقريب مبدئي دقيق للحل لكي نضمن التقارب. إن طريقة التناقص الأشد انحدارًا التي تُفترض في هذا الفصل تتقارب إلى الحل فقط خطيًّا، ولكنها عادة ما تتقارب حتى في حالة التقريبات. لذا تستخدم هذه الطريقة لإيجاد تقريبات ذات دقة كافية لتصبح مستخدمة في الطرائق المبنية على طريقة نيوتن بالطريقة نفسها التي تستخدم بها طريقة التنصيف للمعادلة الوحدة.

إن طريقة التناقص الأشد انحدارًا تحدّد نقطة صغرى محلية لدالة متعددة المتغيرات على دالة الصيغة $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

إن هذه الطريقة ذات قيمة بمعزل تامٍّ عن التطبيق المستخدم بوصفه طريقة بدء حل الأنظمة غير الخطية. (هناك تطبيقات أخرى تُبحث في التمارين).

إن الربط بين تصغير دالة من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ وحل نظام معادلات غير خطية هو سبب حقيقة أن النظام على الصيغة

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$