تعطي تقاربًا تربيعيًا للنقطة الثابتة p للدالة g. (انظر الفصل 4.2) لقد ظهرت طريقة نيوتن من هذا الشرط باختيار $\phi(x) = 1/f'(x)$، بافتراض $f'(x) \neq 0$.

إن استخدام طريقة مشابهة في حالة n من الأبعاد تتطلب التعامل مع مصفوفة

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & a_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{1n}(\mathbf{x}) \\ a_{21}(\mathbf{x}) & a_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\mathbf{x}) & a_{n2}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

حيث كل عنصر $a_{ij}(\mathbf{x})$ دالة من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$. إن هذا يتطلب إيجاد مصفوفة $A(\mathbf{x})$ بحيث إن $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$

تعطي تقاربًا تربيعيًا لحلّ المعادلة $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ بافتراض أن $A(\mathbf{x})$ لها معكوس بالقرب من النقطة الثابتة $\mathbf{p}$ في $\mathbf{G}$.

وتوازي مبرهنة الآتية مبرهنة (8.2) في الفصل (4.2). ويتطلب برهانها القدرة على التعبير عن $\mathbf{G}$ بدلالة سلسلة تايلور في n من المتغيرات حول $\mathbf{p}$.

مبرهنة 7.10 لتكن $\mathbf{p}$ حلًا للمعادلة $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. افترض أنه يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث

(i) $\partial g_i/\partial x_j$ متصل على $N_\delta = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta\}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, n$؛

(ii) $\partial^2 g_i(\mathbf{x})/(\partial x_j \partial x_k)$ متصل و $|\partial^2 g_i(\mathbf{x})/(\partial x_j \partial x_k)| \leq M$ لثابت ما M عندما $\mathbf{x} \in N_\delta$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, n$ و $k = 1, 2, \ldots, n$؛

(iii) $\partial g_i(\mathbf{p})/\partial x_k = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $k = 1, 2, \ldots, n$؛

عندئذ يوجد عدد $\hat{\delta} \leq \delta$ بحيث إن المتتالية الناتجة عن $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ تتقارب تربيعيًا إلى $\mathbf{p}$ لأي اختيار $\mathbf{x}^{(0)}$ يحقق: $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{p}\|_\infty < \hat{\delta}$. بالإضافة إلى ذلك فإن

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2}\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{p}\|_\infty^2 \quad \text{لكل} \quad k \geq 1$$

■

لكي تستخدم مبرهنة (7.10)، افترض أن $A(\mathbf{x})$ مصفوفة $n \times n$ مدخلاتها دوال من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ على صيغة المعادلة (5.10). حيث ستُختار المدخلات المنتهية لاحقًا. وافترض بالإضافة إلى ذلك أن $A(\mathbf{x})$ لها معكوس بالقرب من $\mathbf{p}$ الذي هو حلٌ للمعادلة $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. وافترض أن $b_{ij}(\mathbf{x})$ تمثل المدخلة ذات الصف i والعمود j في $A(\mathbf{x})^{-1}$.

بما أن $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$ يكون لدينا $g_i(\mathbf{x}) = x_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})$ ويكون

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^{n}\left(b_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})\right), & \text{إذا كان } i = k \\ -\sum_{j=1}^{n}\left(b_{ij}(\mathbf{x})\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})\right), & \text{إذا كان } i \neq k \end{cases}$$

obeikandl.com

وتؤدي مبرهنة (7.10) إلى أننا نحتاج إلى $\partial g_i(\mathbf{p})/\partial x_k = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $k = 1, 2, \ldots, n$. إن هذا يعني أنه لكل $i = k$، يكون

$$0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{p})$$

ولذلك يكون

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = 1 \tag{6.10}$$

عندما $k \neq i$. يكون

$$0 = -\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p})$$

ولذلك فإن

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p}) = 0 \tag{7.10}$$

وبتعريف المصفوفة $J(\mathbf{x})$ كما يلي:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{8.10}$$

نرى أن الشرطين (6.10) و (7.10) يتطلبان أن

$A(\mathbf{p})^{-1} J(\mathbf{p}) = I$. أي المصفوفة المحايدة ولذلك يكون $A(\mathbf{p}) = J(\mathbf{p})$.

ومن ثم فإن اختيارًا مناسبًا للمصفوفة $A(\mathbf{x})$ هو $A(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})$، لأنه يحقّق الشرط (iii) من مبرهنة (7.10).

تعرّف الدالة $\mathbf{G}$ بالمعادلة

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

وتنشأ عملية التكرار الدّالي من اختيار $\mathbf{x}^{(0)}$ وتوليد المعادلة (9.10)

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \quad \text{لكل } k \geq 1. \tag{9.10}$$

تسمى هذه العملية بعملية نيوتن للأنظمة غير الخطية (Newton's method for nonlinear systems) ويتوقع أن تعطي تقاربًا تربيعيًا عمومًا. على أن يكون معلومًا لدينا قيمة بداية دقيقة على نحو كافٍ. وتكون $J(\mathbf{p})^{-1}$ موجودة.

obeikandl.com