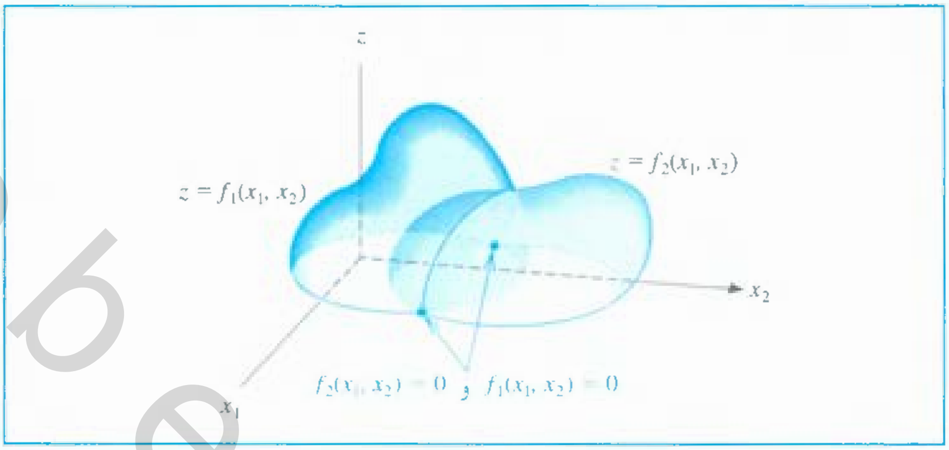
شكل 1 10



حيث يمكن النظر إلى كل دالة f_i على أنها تطبيق (mapping) المتجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ذي n بعداً إلى الخط الحقيقي $\mathbb{R}$. ويعطي شكل (1.10) تمثيلاً هندسيًّا لنظام غير خطي عندما $n = 2$.

يمكن تمثيل هذا النظام المكوّن من n من المعادلات غير الخطية في n من المجاهيل، عن طريق تعريف $\mathbf{F}$ ليتطبيق $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ كما يلي

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^t$$

إذا ما استخدمنا التعبير المتجهي لتمثيل المتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$، فإن النظام (1.10) يأخذ الصيغة

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad (2.10)$$

وإن الدوال $f_1, f_2, \dots, f_n$ هي دوال إحداثيات $\mathbf{F}$ (Coordinate functions).

مثال 1 يمكن وضع النظام غير الخطي 3×3

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

على صيغة المعادلة (2.10) عن طريق تعريف دوال الإحداثيات f_1، f_2 و f_3 من $\mathbb{R}^3$ إلى $\mathbb{R}$ كالآتي:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}$$

وبعد تعريف $\mathbf{F}$ من $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ بواسطة

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) \\
&= (f_1(x_1, x_2, x_3),\ f_2(x_1, x_2, x_3),\ f_3(x_1, x_2, x_3))^t \\
&= \Big(3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2},\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06, \\
&\quad e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}\Big)^t
\end{aligned}$$

■

قبل مناقشة حلّ نظام مُعطى بصيغة المعادلة (1.10) أو المعادلة (2.10) نحتاج إلى بعض النتائج حول الاتصال وقابلية الاشتقاق لدوال من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$.

وعلى الرغم من أنه يمكن عرض هذه الدراسة مباشرة (انظر التمرين 12). نستخدم طريقة بديلة تسمح لنا بعرض المفاهيم مبرهنة الأصعب حول النهايات والاتصال بدلالة الدوال من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$.

تعريف 1.10 لتكن $D \subset \mathbb{R}^n$. ولتكن $f \to D \subset \mathbb{R}$ دالة. نقول: إن L نهاية الدالة f عند $\mathbf{x}_0$ ونكتب

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

إذا كان لأي $0 < \varepsilon$ يوجد عدد $0 < \delta$ بحيث إن

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

كلما كان $\mathbf{x} \in D$ و

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$$

■

إن وجود النهاية مستقل عن القياس المستخدم، كما بُحث في الفصل (1.7). ويمكن استخدام أي قياس مناسب ليحقق الشرط في هذا تعريف. وإن قيمة δ المنتهة تعتمد على القياس الذي اختير. ولكن وجود δ مستقل عن القياس. ومع إمكانية استخدام قياسات متعددة فإن الاتصال مستقل عن اختيار أي قياس منتهٍ.

تعريف 2.10 لتكن f دالة من مجموعة $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$. نقول: إن f متصلة على $\mathbf{x}_0 \in D$ إذا كان $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ موجودة

وكان
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

وبالإضافة إلى ذلك تكون f متصلة على مجموعة D إذا كانت f متصلة على كل نقطة في D. ويُعبّر عن هذا المفهوم بكتابة $f \in C(D)$.

■

إن تعريفات الاتصال للدوال بمتغيرات عددها n تنبع من تلك الدوال بمتغير واحد عن طريق استخدام القياس بدلًا من القيمة المطلقة حيثما كان ذلك ضروريًا.

والآن يمكننا تعريف مفاهيم النهاية والاتصال للدوال من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ بافتراض دوال الإحداثيات من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$.

تعريف 3.10 ليكن $\mathbf{F}$ دالة من $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ على الصيغة

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))^t$$

حيث f_i تطبيق من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ لكل i. نعرّف

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} = (L_1, L_2, \ldots, L_n)^t$$

إذا وفقط إذا كان $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = L_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. ■

الدالة $\mathbf{F}$ متصلة على $\mathbf{x}_0 \in D$ إذا كان $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x})$ موجودة و$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$وبالإضافة إلى ذلك فإن $\mathbf{F}$. متصلة على D إذا كانت $\mathbf{F}$ متصلاً على كل $\mathbf{x}$ في D. ويعبّر عن هذا المفهوم بكتابة $\mathbf{F} \in C(D)$.

للدوال من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ يمكن غالبًا برهنة الاتصال ببرهنة أن الدالة قابلة للاشتقاق. (انظر مبرهنة 6.1). وعلى الرغم من أن هذه مبرهنة تعمم لدوال في عدة متغيرات، فإن المشتقة (أو المشتقة الكلية) لدالة في عدة متغيرات معقدة ولا تناقش هنا. وبدلًا من ذلك نعطي هذه مبرهنة التي تربط اتصال دالة في عدة متغيرات n على نقطة بالمشتقات الجزئية لتلك الدالة على تلك النقطة.

مبرهنة 4.10 لتكن f دالة من $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ و $\mathbf{x}_0 \in D$. إذا وجدت المشتقات الجزئية جميعها للدالة f ووجدت $\delta > 0$ و $K > 0$ بحيث كلما كان $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ و $\mathbf{x}_0 \in D$ حصلنا على

$$\left|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| \le K \quad \text{لكل} \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

عندها f متصلة على $\mathbf{x}_0$. ■

لقد تطوّرت في الباب 2 عملية إرجاعية لحلّ المعادلة $f(x) = 0$ عن طريق تحويل المعادلة أولًا إلى صيغة النقطة الثابتة $x = g(x)$. سنناقش طريقة مماثلة للدوال من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$.

تعريف 5.10 للدالة $\mathbf{G}$ من $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ نقطة ثابتة عند $\mathbf{p} \in D$ إذا كان $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. ■

وتعمم مبرهنة الآتية مبرهنة النقطة الثابتة (fixed point) (3.2) للحالة ذات الأبعاد n. وإن هذه مبرهنة حالة خاصة من مبرهنة التطبيق التقلصي (Contraction Mapping Theorem) ويوجد برهانها في [Or2, p. 153].

مبرهنة 610 لتكن $D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \mid a_i \le x_i \le b_i$ وكل $i = 1, 2, \ldots, n\}$ لمجموعة من الثوابت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$، افترض $\mathbf{G}$ دالة متصلة من $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ ومحققة للخاصية $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in D$ كلما $\mathbf{x} \in D$. عندئذ يكون للدالة $\mathbf{G}$ نقطة ثابتة في D.

وبالإضافة إلى ذلك افترض أن مركبات $\mathbf{G}$ الدّالية جميعها لها مشتقات جزئية متصلة، ويوجد ثابت أن $K < 1$ بالخاصية

$$\left|\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| \leq \frac{K}{n} \quad \text{حيثما} \quad \mathbf{x} \in D$$

لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ وكل مركبة دالية g_i. عندئذ تكون المتتالية $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرّفة بأي نقطة عشوائية $\mathbf{x}^{(0)}$ في D والناتجة عن

$$\mathbf{x}^{(k)} = G(\mathbf{x}^{(k-1)}) \quad \text{لكل} \quad k \geq 1$$

متقاربة إلى نقطة ثابتة $\mathbf{p} \in D$ ويكون

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\|_\infty \leq \frac{K^k}{1-K}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty \tag{3.10}$$

■

مثال 2 افترض النظام غير الخطي من المثال (1) المعطى كالآتي:

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$
$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

إذا حُلّت المعادلة i للمجهول x_i، فإن النظام يتحول إلى مسألة النقطة الثابتة

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}\cos(x_2x_3) + \frac{1}{6} \\ x_2 &= \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1 \\ x_3 &= -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \end{aligned} \tag{4.10}$$

افترض أن $\mathbf{G}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ معرّف بالصيغة $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_3(\mathbf{x}))^t$، حيث

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}\cos(x_2x_3) + \frac{1}{6}$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1$$
$$g_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

ستستخدم النظريتان (4.10) و (6.10) لبرهنة أن $\mathbf{G}$ له نقطة ثابتة وحيدة في

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^t \mid -1 \leq x_i \leq 1, \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, 3\}$$

لكل $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ في D

$$|g_1(x_1, x_2, x_3)| \leq \frac{1}{3}|\cos(x_2x_3)| + \frac{1}{6} \leq 0.50$$

$$|g_2(x_1, x_2, x_3)| = \left|\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1\right| \leq \frac{1}{9}\sqrt{1 + \sin 1 + 1.06} - 0.1 < 0.09,$$

و

$$|g_3(x_1, x_2, x_3)| = \frac{1}{20}e^{-x_1x_2} + \frac{10\pi - 3}{60} \le \frac{1}{20}e + \frac{10\pi - 3}{60} < 0.61$$

لذلك $-1 \le g_i(x_1, x_2, x_3) \le 1$ لكل $i = 1, 2, 3$، وهكذا $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in D$ حيثما $\mathbf{x} \in D$.

إن إيجاد محدود للمشتقات الجزئية على D يعطي

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right| = 0 \quad \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right| = 0, \quad \text{و} \quad \left|\frac{\partial g_3}{\partial x_3}\right| = 0$$

وكذلك

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right| \le \frac{1}{3}|x_3| \cdot |\sin x_2x_3| \le \frac{1}{3}\sin 1 < 0.281$$

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_3}\right| \le \frac{1}{3}|x_2| \cdot |\sin x_2x_3| \le \frac{1}{3}\sin 1 < 0.281$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right| = \frac{|x_1|}{9\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}} < \frac{1}{9\sqrt{0.218}} < 0.238$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right| = \frac{|\cos x_3|}{18\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}} < \frac{1}{18\sqrt{0.218}} < 0.119$$

$$\left|\frac{\partial g_3}{\partial x_1}\right| = \frac{|x_2|}{20}e^{-x_1x_2} \le \frac{1}{20}e < 0.14$$

و

$$\left|\frac{\partial g_3}{\partial x_2}\right| = \frac{|x_1|}{20}e^{-x_1x_2} \le \frac{1}{20}e < 0.14$$

بما أن المشتقات الجزئية للدوال g_1، g_2 وg_3 منتهية على D. فإن مبرهنة (4.10) تضمن أن هذه الدوال متصلة على D. ووفقا لذلك، فإن $\mathbf{G}$ متصلة على D. وبالإضافة إلى ذلك. فإن لكل $\mathbf{x} \in D$

$$\left|\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| \le 0.281 \quad \text{لكل } i = 1, 2, 3 \text{ و } j = 1, 2, 3$$

ويتحقّق الشرط في الفقرة الثاني من مبرهنة (6.10) بالقيمة $K = 3(0.281) = 0.843$.

وبالطريقة نفسها يمكن برهنة أن $\partial g_i / \partial x_j$ متصل على D لكل $i = 1, 2, 3$ و $j = 1, 2, 3$. (لقد افتُرض هذا في التمرين 3). ووفقا لذلك. يوجد لـ $\mathbf{G}$ نقطة ثابتة وحيدة في D ويوجد للنظام غير الخطي حلّ في D.

انظر أن امتلاك $\mathbf{G}$ نقطة ثابتة في D لا يتضمَّن أن حلّ النظام الأصلي وحيد على هذا المجال، لأن حلّ المجهول x_2 في المعادلة (4.10) قد احتوى على اختيار الجذر التربيعي الموجب. إن التمرين 7 (د) يتفحص الحالة التي تحدث إذا اختير الجذر التربيعي السالب في هذه الخطوة. بدلًا من ذلك.

لإيجاد تقريب للنقطة الثابتة $\mathbf{p}$، نختار $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^t$.

إن متتالية المتجهات الناتجة عن

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{3}\cos x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)} + \frac{1}{6}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{9}\sqrt{\left(x_1^{(k-1)}\right)^2 + \sin x_3^{(k-1)} + 1.06} - 0.1$$

$$x_3^{(k)} = -\frac{1}{20}e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

تتقارب إلى الحلّ الوحيد للمعادلة (4.10). لقد نتجت النتائج في جدول (1.10) حتى تحقق

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$$

جدول 1.10

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	−0.10000000	
1	0.49998333	0.00944115	−0.52310127	0.423
2	0.49999593	0.00002557	−0.52336331	9.4×10^{-3}
3	0.50000000	0.00001234	−0.52359814	2.3×10^{-4}
4	0.50000000	0.00000003	−0.52359847	1.2×10^{-5}
5	0.50000000	0.00000002	−0.52359877	3.1×10^{-7}

إن استخدام حد الخطأ (3.10) بالقيمة $K = 0.843$ يعطي

$$\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{p}\|_\infty \le \frac{(0.843)^5}{1 - 0.843}(0.423) < 1.15$$

التي لا تشير إلى الدقة الحقيقية لـ $\mathbf{x}^{(5)}$ بسبب التقريب الابتدائي غير الدقيق

إن الحل الفعلي هو

$$\mathbf{p} = \left(0.5, 0, -\frac{\pi}{6}\right)^t \approx (0.5, 0, -0.5235987757)^t$$

ولذلك فالخطأ الحقيقي هو

$$\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{p}\|_\infty \le 2 \times 10^{-8}$$

إن إحدى الطرائق لتسريع تقارب عملية النقطة الثابتة الإرجاعية تكون باستخدام $x_1^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ من $x_1^{(k-1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k-1)}$ في حساب $x_i^{(k)}$ كما في طريقة جاوس – سيدل للأنظمة الخطية، ثم تصبح معادلات المركبات

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{3}\cos\left(x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)}\right) + \frac{1}{6}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{9}\sqrt{\left(x_1^{(k)}\right)^2 + \sin x_3^{(k-1)} + 1.06} - 0.1$$

$$x_3^{(k)} = -\frac{1}{20}e^{-x_1^{(k)}x_2^{(k)}} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

وبأخذ $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^t$ تعرض نتائج هذه الحسابات في جدول (2.10).

جدول 2.10

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	−0.10000000	
1	0.49998333	0.02222979	−0.52304613	0.423
2	0.49997747	0.00002815	−0.52359807	2.2×10^{-2}
3	0.50000000	0.00000004	−0.52359877	2.8×10^{-5}
4	0.50000000	0.00000000	−0.52359877	3.8×10^{-8}

إن نتيجة خطوة التراجع $\mathbf{x}^{(4)}$ دقيقة ضمن 10^{-7} في المعيار l_∞، ولذلك فإن التقارب لهذه المسألة قد تسارع باستخدام طريقة جاوس – سيدل. وعلى كل حال فإن هذه الطريقة لا تؤدي دائما إلى تسارع التقارب. ■

يعطي مابل Maple الدالة fsolve لحلّ أنظمة معادلات. ويمكن حلُّ مسألة النقطة الثابتة في مثال (2) بالأوامر الآتية:

```
>g1:=x1=(2*cos(x2*x3)+1)/6:
>g2:=x2=sqrt(x1^2+sin(x3)+1.06)/9-0.1:
>g3:=x3=-(3*exp(-x1*x2)+10*Pi-3)/60:
>fsolve({g1,g2,g3},{x1,x2,x3},{x1=-1..1,x2=-1..1,x3=-1..1});
```

إن الأوامر الثلاثة الأولى تعرّف النظام. والأمر الأخير يدخل العملية fsolve. الجواب الناتج هو $\{x3 = -.5235987758,\ x1 = .5000000000,\ x2 = -.2102454409\ 10^{-10}\}$

وعمومًا fsolve(eqns,vars,options) يحلُّ نظام المعادلات المثل بالوسيط eqns للمتغيرات المثلّة بالوسيط vars تحت الوسيطات الاختيارية المثلة بـ options. وتحت options نحدّد منطقة يطلب فيها من البرنامج أن يبحث عن حلّ، وإن هذا التحديد ليس إلزاميًا، وإن Maple يحدد فضاء البحث الخاص بها إذا حُذفت الخيارات options.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 1.10

1. برهن أن الدالة $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرّفة بالصيغة

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3,\ x_1 \cos x_2,\ x_2^2 + x_3)^t$$

متصلة على كل نقطة في $\mathbb{R}^3$.

2. أعط مثالًا لدالة $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تكون متصلة على كل نقطة في $\mathbb{R}^3$ ما عدا $(1, 0)$.

3. برهن أن المشتقات الجزئية الأولى في مثال (2) متصلة على D.

4. للنظام اللاخطي

$$-x_1(x_1 + 1) + 2x_2 = 18$$
$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 = 25$$

حلان.

أ. قرّب الحلين بالتطبيق.

ب. استخدم التقريبات من الفقرة (أ) بوصفها تقريبات ابتدائية لعملية إرجاعية لدالة مناسبة،

وحدّد الحلول ضمن 10^{-5} في معيار l_∞.

5. يمكن تحويل النظام غير الخطي

$$x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0$$
$$x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0$$

إلى مسألة النقطة الثابتة

$$x_1 = g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10}$$

$$x_2 = g_2(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2^2 + x_1 + 8}{10}$$

أ. استخدم مبرهنة (6.10) لبرهنة أن $\mathbf{G} = (g_1, g_2)^t$ بتطبيق $D \subset \mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^2$ له نقطة ثابتة في $D = \{(x_1, x_2)^t \mid 0 \le x_1, x_2 \le 1.5\}$.

ب. طبّق تكرارًا داليًّا لتقريب الحل.

جـ. هل تسرّع طريقة جاوس – سيدل التقارب؟

6. يوجد للنظام غير الخطي $5x_1^2 - x_2^2 = 0,$

$$x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0$$

حلّ بالقرب من $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^t$.

أ. أوجد دالة $\mathbf{G}$ ومجموعة D في $\mathbb{R}^2$ بحيث $\mathbf{G} : D \to \mathbb{R}^2$ ويكون للدالة $\mathbf{G}$ نقطة ثابتة وحيدة في D.

ب. طبّق التكرار الدّالي لتقريب الحلّ ضمن 10^{-5} في معيار l_∞.

جـ. هل تسرّع طريقة جاوس – سيدل التقارب؟

7. استخدم مبرهنة (6.10) لتبرهن أن $\mathbf{G} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ له نقطة ثابتة وحيدة في D. طبّق التكرار الدّالي لتقريب الحلّ ضمن 10^{-5} باستخدام $\|\cdot\|_\infty$:

أ. $$\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\cos(x_2x_3) + 0.5}{3}, \frac{1}{25}\sqrt{x_1^2 + 0.3125} - 0.03, -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}\right)^t$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^t \mid -1 \le x_i \le 1, i = 1, 2, 3\}$$

ب. $$\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{13 - x_2^2 + 4x_3}{15}, \frac{11 + x_3 - x_1^2}{10}, \frac{22 + x_2^3}{25}\right)$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^t \mid 0 \le x_1 \le 1.5, i = 1, 2, 3\}$$

جـ. $$\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = (1 - \cos(x_1x_2x_3), 1 - (1 - x_1)^{1/4} - 0.05x_3^2 + 0.15x_3, x_1^2 + 0.1x_2^2 - 0.01x_2 + 1)^t;$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^t \mid -0.1 \le x_1 \le 0.1, -0.1 \le x_2 \le 0.3, 0.5 \le x_3 \le 1.1\}$$

د. $$\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{3}\cos(x_2x_3) + \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1, -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}\right)^t$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^t \mid -1 \le x_i \le 1, i = 1, 2, 3\}$$

8. استخدم التكرار الدّالي لإيجاد حلول للأنظمة غير الخطية الآتية بحيث تكون دقيقة ضمن 10^{-5}، باستخدام $\|\cdot\|_\infty$:

أ. $x_2^2 + x_2^2 - x_1 = 0$
$x_1^2 - x_2^2 - x_2 = 0$

ب. $3x_1^2 - x_2^2 = 0$
$3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$

ج. $x_1^2 + x_2 - 37 = 0$
$x_1 - x_2^2 - 5 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

د. $x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 = 0$
$\frac{x_1^2}{7x_2x_3} - 1 = 0$

9. استخدم طريقة جاوس – سيدل لتقريب النقاط الثابتة في التمرين (7) ضمن 10^{-5} مستخدماً $\|\cdot\|_\infty$.

10. كرّر التمرين (8) باستخدام طريقة جاوس – سيدل.

11. افترضنا في التمرين (11) من الفصل (9.5) مسألة تنبؤ لمجتمع نوعين من الكائنات الحية اللذين يتنافسان على كمية الطعام نفسها. وافترضنا في تلك المسألة. أنه يمكن التنبؤ بحل نظام المعادلتين للنوعين كما يلي:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)(4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t))$$

و

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)(2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)).$$

نرغب في هذا التمرين أن نفترض مسألة تحديد التوازن بين مجتمع هذين النوعين. وإن المعيار الرياضي اللازم تحقيقه لكي يكون هذان المجتمعان في حالة توازن هو تحقيق المعادلتين الآتيتين:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = 0$$

إن هذا يحدث عندما ينقرض النوع الأول ويكون تعداد مجتمع النوع الثاني 20 000 أو عندما ينقرض النوع الثاني ويكون مجتمع النوع الأول 13 333. هل يمكن أن يحدث التوازن في أي حالة أخرى؟

12. برهن أن الدالة $\mathbf{F}$ التطبيق على $D \subset \mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ تكون متصلة على $\mathbf{x}_0 \in D$. بالضبط إذا كان لأي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث تتحقق لأي معيار $\|\cdot\|$، الخاصية $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ عندما $\mathbf{x}_0 \in D$ ويكون $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

2.10 طريقة نيوتن Newton's Method

لقد تحوّلت المسألة في المثال (2) من الفصل السابق إلى مسألة النقطة الثابتة عن طريق الحل الجبري للمعادلات الثلاث للمتغيرات الثلاثة x_1، x_2 و x_3.

وعلى كل حال فمن المستغرب أن تنجح هذه الطريقة. وسنفترض في هذا الفصل طريقة لوغارتمية لتنفيذ هذا التحويل في أحوال أعم.

لإنشاء خوارزمية تنتج طريقة مناسبة للنقطة الثابتة في حالة البعد الواحد؛ وجدنا دالة ϕ بحيث إن الخاصية

$$g(x) = x - \phi(x)f(x)$$