لكن المتجهات $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}$ تشكّل مجموعة متعامدة، لذلك

$$(v^{(j)})^t v^{(i)} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ إذا كان } \\ 1, & i = j \text{ إذا كان } \end{cases}$$

هذا مع حقيقة كون λ_i جميعا موجبة، مما يؤدي إلى أن

$$x^t A x = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \beta_i \lambda_i (v^{(j)})^t v^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i^2 > 0$$

ومن ثم فإن A موجبة التحديد. ■ ■ ■

إن الحصيلة النهائية للبند تأخذ في الحسبان حدود التقريب للقيم المميزة.

مبرهنة 13.9 دائرة جرسجورن Geršgorin Circle

إرشاد جرسجورين

S A Gers~gorin (1901-1933) برهن نتيجته الأصلية المتعلقة بتقدير القيم المميزة لصفوفة بعناصر مركبة في ورقة [Ger] ثم نشرها عام 1931 ريتشارد فارجا Richard Varga قد كتب حينئذ كتاب [Var2] حول نتائج جرسجورين ومبرهنة الدائرة

لتكن A مصفوفة بحجم $n \times n$ وتمثّل R_i الدائرة في المستوى المركب بمركز a_{ii} ونصف قطر $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$، بمعنى أن

$$R_i = \left\{ z \in \mathcal{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

حيث تمثّل $\mathcal{C}$ المستوى المركب. تكون القيم المميزة لـ A ضمن $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$، وأبعد من ذلك، فإن اتحاد أي عدد k من هذه الدوائر التي لا تتقاطع مع بقية الـ $(n-k)$ من الدوائر تتضمن بالتأكيد (حاسبين المضاعفات) k من القيم المميزة. ■

البرهان افترض أن λ قيمة مميزة لـ A مع متجه مقابل لها x. حيث $\|x\|_\infty = 1$. ولأن $Ax = \lambda x$. فإن التمثيل المماثل للمركبة يكون

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$$

لكل

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

فإذا كانت k عبارة عن عدد صحيح مع $|x_k| = \|x\|_\infty = 1$. فإن هذه المعادلة عند $i = k$ تؤدي إلى أن

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \lambda x_k$$

وبذلك فإن

$$\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j = \lambda x_k - a_{kk} x_k = (\lambda - a_{kk}) x_k$$

و

$$|\lambda - a_{kk}| \cdot |x_k| = \left| \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| |x_j|$$

وحيث إن $|x_k| = 1 \geq |x_j|$ لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ فإن

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

وبذلك فإن $\lambda \in R_k$، الذي يبرهن الفقرة الأول من مبرهنة. ويتطلب الفقرة الثاني لهذه مبرهنة استمرارية مداخلة ماهرة. وثمة برهان يمكن قراءته موجود في [Or2 p. 48]. ■ ■ ■

مثال 5 للمصفوفة

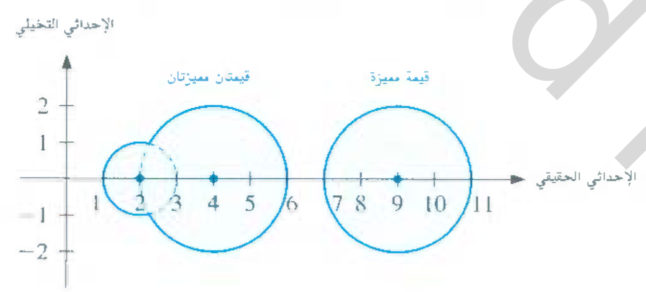
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

تكون الدوائر في مبرهنة Geršgorin Circle (انظر شكل 1.9)

$$R_1 = \{ z \in C \,|\, |z-4| \leq 2\}$$
$$R_2 = \{ z \in C \,|\, |z-2| \leq 1\}$$
$$R_3 = \{ z \in C \,|\, |z-9| \leq 2\}$$

ولكون R_1 و R_2 منفصلة عن R_3، فإن هناك قيمتين مميزتين ضمن $R_1 \cup R_2$ وواحدة ضمن R_3. وكذلك لأن $\rho(A) = \max_{1\leq i\leq 3} |\lambda_i|$ يكون لدينا $7 \leq \rho(A) \leq 11$.

شكل 1.9



EXERCISE SET مجموعة التمارين 1.9

1. أوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة المقابلة لها للمصفوفات بحجم 3 × 3 الآتية. هل هناك مجموعة متجهات مميزة مستقلة خطيًّا؟

أ. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. أوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة المقابلة لها للمصفوفات بحجم 3×3 الآتية. هل هناك مجموعة متجهات مميزة مستقلة خطيًّا؟

أ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. المصفوفات في التمرين 1(ب) و (ج) متماثلة.

أ. هل هي موجبة التحديد؟

ب. خذ المصفوفات موجبة التحديد في (أ). ابنِ مصفوفة متعامدة Q بحيث $Q^t AQ = D$ مصفوفة متماثلة، مستخدمًا المتجهات المميزة التي وُجدت في التمرين (1).

4. المصفوفات في التمرين 2(ب) و (ج) متماثلة.

أ. هل هي موجبة التحديد؟

ب. خذ المصفوفات موجبة التحديد في (أ). ابنِ مصفوفة متعامدة Q، حيث $Q^t AQ = D$ مصفوفة قطرية، مستخدمًا المتجهات المميزة التي وُجدت في التمرين (2).

5. استخدم مبرهنة Geršgorin Circle Theorem لتحديد حدود القيم المميزة للمصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix}$

6. استخدم مبرهنة Geršgorin Circle Theorem لتحديد حدود القيم المميزة للمصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

7. أثبت أن $\vec{v_1} = (2, -1)^t, \vec{v_2} = (1, 1)^t, \vec{v_3} = (1, 3)^t$ تكون معتمدة خطيًّا

8. أثبت أن أي أربعة متجهات ضمن $\mathbb{R}^3$ تكون معتمدة خطيًّا.

9. أثبت أن مجموعة $\{v_1, \dots, v_k\}$ المكونة من k من المتجهات المتعامدة واللاصفرية تكون مستقلة خطيًّا.

10. لتكن Q مصفوفة متعامدة:

أ. أثبت أن أعمدة Q تشكِّل مجموعة متعامدة من المتجهات.

ب. أثبت أن $\|Q\|_2 = 1$ و $\|Q^t\|_2 = 1$.

11. لتكن $\{v_1, \dots, v_n\}$ عبارة عن مجموعة من المتجهات المتعامدة واللاصفرية ضمن $\mathbb{R}^n$، وأن $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. حدّد القيم c_k عند $k = 1, 2, \dots, n$ إذا كان

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k$$

12. أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة بحجم $n \times n$ مع عدد n من القيم المميزة المختلفة فإن A لها عدد n من المتجهات المميزة المستقلة خطيًّا.

13. في التمرين (31) من الفصل (6.6)، استُخدمت المصفوفة المتماثلة

$$A = \begin{bmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{bmatrix}$$

في توضيح معدل أطوال جناح ذباب الفاكهة الناتجة من تزاوج ثلاثة أنواع من الذباب. ويمثِّل العنصر a_{ij} معدل طول جناح ذبابة وليدة ذكر من النوع i وأنثى من النوع j.

أ. أوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة المقابلة لها لهذه المصفوفة.

ب. استخدم مبرهنة (12.9) في الإجابة عن السؤال الذي ورد في الفقرة (ب) من التمرين (31) من الفصل (6.6). هل هذه المصفوفة موجبة التحديد؟

14. مصفوفة persymmetric matrix هي مصفوفة متماثلة حول كلا القطرين، بمعنى أن مصفوفة $A = (a_{ij})$ بحجم $N \times N$ تكون persymmetric إذا كانت $a_{ij} = a_{ji} = a_{N+1-i,N+1-j}$ لكل $i = 1, 2, \dots, N$ و $j = 1, 2, \dots, N$. ويتضمن عدد من المسائل في مبرهنة الاتصالات حلولاً للقيم المميزة والمتجهات المميزة لمصفوفات بصيغة persymmetric matrix. وعلى سبيل المثال، المتجه المميز المقابل للقيمة المميزة الصغرى للمصفوفة persymmetric matrix بحجم 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

يعطي وحدة الاستجابة لدفعة قناة الطاقة عند متتالية خطأ محدد بطول 2، ثم الوزن الأقل لأي متتالية خطأ محتملة.

أ. استخدم مبرهنة Geršgorin Circle Theorem لإثبات أنه إذا كانت A كما في أعلاه وλ هي القيمة المميزة الصغرى لها فإن $|\lambda - 4| = \rho(A - 4I)$، حيث تمثِّل ρ نصف القطر الطيفي.

ب. أوجد القيمة المميزة الصغرى للمصفوفة A من خلال إيجاد للقيم المميزة جميعها $A-4I$ وحساب نصف قطرها الطيفي، ومن ثم أوجد المتجه المميز المقابل لها.

ج. استخدم مبرهنة Geršgorin Circle Theorem لإثبات أنه إذا كانت λ هي القيمة المميزة الصغرى للمصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

فإن $|\lambda - 6| = \rho(B - 6I)$

د. كرِّر الفقرة (ب) مستخدماً المصفوفة B ونتيجة الفقرة (ج).

2.9 طريقة القوة The power Method

إن طريقة القوة Power method عبارة عن أسلوب إعادة يُستخدم في تحديد القيمة المميزة المهيمنة dominant eigenvalue للمصفوفة. أي القيمة المميزة ذات الحجم الأكبر. ومن خلال

إن اسم طريقة القوة مشتق من حقيقة كون التكرارات تضخم الحجم النسبي لسمات القيم المميزة.

بإجراء تعديل بسيط للطريقة. يمكن استخدامها لتحديد قيم مميزة أخرى أيضًا. وإحدى السمات المفيدة لطريقة القوة هي أنها لا تنتج قيمة مميزة فقط. بل تنتج المتجه المميز المقابل لها أيضًا. وفي الحقيقة إن طريقة القوة تُطبّق غالبًا لإيجاد متجه مميز لقيمة مميزة حدّدت بأساليب أخرى.

ولتطبيق طريقة القوة، نفترض أن المصفوفة A بحجم $n \times n$ لها n من القيم المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ مع مجموعة المتجهات المميزة المستقلة خطيًّا والمقابلة لها $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$.

ونفترض بالإضافة إلى ذلك أن لـ A بالتحديد قيمة مميزة وحيدة λ_1 هي القيمة الأكبر وعليه $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \cdots \ge |\lambda_n| \ge 0$.

يوضح مثال (2) في الفصل (2.9) أن مصفوفة بحجم $n \times n$ لا تحتاج إلى أن يكون لها عدد n من المتجهات المميزة، وإذا كانت كذلك فإن طريقة القوة ما تزال ناجحة، ولكن نجاحها غير مضمون.

وإذا كانت $\mathbf{x}$ أي متجه ضمن $\mathbb{R}^n$ فإن حقيقة كون $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ مستقلة خطيًّا، يؤدي إلى وجود الثوابت $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ مع

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{v}^{(j)}$$

وبضرب كلا طرفي المعادلة في المقادير $A, A^2, \ldots, A^k$ نحصل على

$$A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j A\mathbf{v}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \mathbf{v}^{(j)}$$

$$A^2\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j A\mathbf{v}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^2 \mathbf{v}^{(j)}$$

$$\vdots$$

$$A^k\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^k \mathbf{v}^{(j)}$$

وإذا عومل λ_1^k من كل حدٍّ في الجهة اليمنى للمعادلة الأخيرة فإن

$$A^k\mathbf{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}^{(j)}$$

ولأن $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ لكل $j = 2, 3, \ldots, n$، يكون لدينا $\lim_{k\to\infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$

و

$$\lim_{k\to\infty} A^k\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k \beta_1 \mathbf{v}^{(1)} \tag{1.9}$$

تتقارب هذه المتتالية إلى الصفر إذا كان $|\lambda_1| < 1$. وتتباعد إذا كان $|\lambda_1| > 1$ بشرط $\beta_1 \neq 0$ بطبيعة الحال.

ويمكن عمل إيجابية ما للعلاقة المبينة في المعادلة (1.9) من خلال تدريج القوى لـ $A^k\mathbf{x}$ وفق أسلوب مناسب لضمان أن النهاية في المعادلة (1.9) منتهية وليست صفرًا. ويبدأ التدريج باختيار $\mathbf{x}$ لتكون متجهًا حياديًّا $\mathbf{x}^{(0)}$ بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$ واختيار مركبة $x_{p_0}^{(0)}$ لـ $\mathbf{x}^{(0)}$ مع

$$x_{p_0}^{(0)} = 1 = \|\mathbf{x}^{(0)}\|_\infty$$

ليكن $\mathbf{y}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(0)}$، عرف $\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)}$. فيكون

$$\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)} = \frac{y_{p_0}^{(1)}}{x_{p_0}^{(0)}} = \frac{\beta_1\lambda_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j\lambda_j v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j v_{p_0}^{(j)}} = \lambda_1\left[\frac{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j(\lambda_j/\lambda_1)v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j v_{p_0}^{(j)}}\right]$$

ليكن p_1 أدنى عدد صحيح بحيث

$$|y_{p_1}^{(1)}| = \|\mathbf{y}^{(1)}\|_\infty$$

وعرف $\mathbf{x}^{(1)}$ من خلال

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}}\mathbf{y}^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}}A\mathbf{x}^{(0)}$$

ولذلك يكون

$$x_{p_1}^{(1)} = 1 = \|\mathbf{x}^{(1)}\|_\infty$$

والآن عرف

$$\mathbf{y}^{(2)} = A\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}}A^2\mathbf{x}^{(0)}$$

و

$$\mu^{(2)} = y_{p_1}^{(2)} = \frac{y_{p_1}^{(2)}}{x_{p_1}^{(1)}} = \frac{\left[\beta_1\lambda_1^2 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j\lambda_j^2 v_{p_1}^{(j)}\right]\Big/ y_{p_1}^{(1)}}{\left[\beta_1\lambda_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j\lambda_j v_{p_1}^{(j)}\right]\Big/ y_{p_1}^{(1)}}$$

$$= \lambda_1\left[\frac{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j(\lambda_j/\lambda_1)^2 v_{p_1}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\beta_j(\lambda_j/\lambda_1)v_{p_1}^{(j)}}\right]$$

ليكن p_2 أصغر عدد صحيح مع $|y_{p_2}^{(2)}| = \|\mathbf{y}^{(2)}\|_\infty$ h، عرف

$$\mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)}}\mathbf{y}^{(2)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)}}A\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)}y_{p_1}^{(1)}}A^2\mathbf{x}^{(0)}$$

وبالأسلوب نفسه، استنتج تعريف متتاليات المتجهات $\{\mathbf{x}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ و $\{\mathbf{y}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ومتتالية تدريجات $\{\mu^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ من خلال

$$\mathbf{y}^{(m)} = A\mathbf{x}^{(m-1)}$$

$$\mu^{(m)} = y_{p_{m-1}}^{(m)} = \lambda_1\left[\frac{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}(\lambda_j/\lambda_1)^m\beta_j v_{p_{m-1}}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}(\lambda_j/\lambda_1)^{m-1}\beta_j v_{p_{m-1}}^{(j)}}\right] \qquad (2.9)$$

$$\mathbf{x}^{(m)} = \frac{\mathbf{y}^{(m)}}{y_{p_m}^{(m)}} = \frac{A^m\mathbf{x}^{(0)}}{\prod_{k=1}^{m}y_{p_k}^{(k)}}$$

حيث يُستخدم عند كل خطوة p_m لتمثيل أصغر عدد صحيح بحيث

$$|y_{p_m}^{(m)}| = \|\mathbf{y}^{(m)}\|_\infty$$

ومن خلال فحص المعادلة (2.9). نرى أنه ما دام $|\lambda_j/\lambda_1| < 1$ لكل $j = 2, 3, \ldots, n$، فإن

$\lim_{m\to\infty}\mu^{(m)}=\lambda_1$ على أن يُختار $x^{(0)}$ بحيث $\beta_1 \neq 0$. والأكثر من ذلك، فإن متتالية المتجهات $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ تتقارب إلى متجه مميز مقترنًا مع λ_1 الذي له المعيار l_∞ واحد.

إن لطريقة القوة نقطة سلبية. وهي مجهولة إذا كان للمصفوفة عند البداية، قيمة مهيمنة وحيدة. كما أنه ليس معلومًا كيفية اختيار $x^{(0)}$ لضمان تمثيلها بدلالة المتجهات المميزة لمصفوفة تتضمن مساهمة لاصفرية من قبل المتجه المميز المقترن بالقيمة المميزة المهيمنة في حالة وجودها.

تنفذ الخوارزمية (1.9) طريقة القوة.

ALGORITHM
الخوارزمية
1.9

طريقة القوة Power Method

لتقريب القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقترن بها للمصفوفة A بحجم $n \times n$ بشرط متجه لاصفري x:

المدخلات: البعد n، مصفوفة A، متجه x، حد سماح TOL، أكبر عدد من التكرارات N.

المخرجات: تقريب القيمة المميزة μ، تقريب المتجه المميز x (مع $\|x\|_\infty = 1$) أو عبارة تفيد بأن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$
2	أوجد أصغر عدد صحيح p مع $1 \le p \le n$ و $\|x_p\| = \|x\|_\infty$.
3	ضع $x = x/x_p$
4	ما دام $(k \le N)$ فنفّذ الخطوات 5 - 11.
5	ضع $y = Ax$
6	ضع $\mu = y_p$
7	أوجد أصغر عدد صحيح p مع $1 \le p \le n$ و $\|y_p\| = \|y\|_\infty$.
8	إذا كانت $y_p = 0$ فإن المخرجات (المتجه المميز x). المخرجات (A له قيمة مميزة 0. اختر متجهًا جديدًا x وابدأ من جديد). توقف.
9	ضع $ERR = \|x - (y/y_p)\|_\infty$ $x = y/y_p$
10	إذا كان $ERR < TOL$ فإن المخرجات (μ, x) (العملية كانت ناجحة). توقف.
11	ضع $k = k + 1$.
12	المخرجات (إن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه). (العملية كانت فاشلة). توقف.

■

وعند اختيارنا في الخطوة (7) أصغر عدد صحيح p_m بحيث $\|y^{(m)}\|_\infty = |y_{p_m}^{(m)}|$، سيصبح هذا

المؤشر في نهاية الأمر ثابتًا عمومًا. إن المعدل الذي يتقارب عنده $\{\mu^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ إلى λ_1 يُحدّد بالتناسبات $|\lambda_j/\lambda_1|^m$ عند $j = 2, 3, \ldots, n$، من خلال $|\lambda_2/\lambda_1|^m$ خصوصًا. إن معدل التقارب هو $O(|\lambda_2/\lambda_1|^m)$ (انظر [IK, p. 148]). ولذلك هناك ثابت k بحيث إذا كانت m كبيرة تكون

$$\lim_{m\to\infty}\frac{|\mu^{(m+1)}-\lambda_1|}{|\mu^{(m)}-\lambda_1|}\approx\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|<1 \text{ الذي يؤدي إلى } |\mu^{(m)}-\lambda_1|\approx k\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m$$

لذلك فالمتتالية $\{\mu^{(m)}\}$ تتقارب خطيًّا إلى λ_1، وإن عملية Aitken's Δ^2 التي تناولناها في الفصل (5.2) يمكن استخدامها لتسريع التقارب. إن تنفيذ عملية Δ^2 في الخوارزمية (1.9) يتحقق من خلال تعديل الخوارزمية وفق الآتي:

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$ $\mu_0 = 0$ $\mu_1 = 0$
6	ضع $\mu = y_p$ $\hat{\mu} = \mu_0 - \dfrac{(\mu_1-\mu_0)^2}{\mu - 2\mu_1 + \mu_0}$
10	إذا كان $ERR < TOL$ و $k \geq 4$ فإن المخرجات $(\hat{\mu}, \mathrm{x})$. توقف.
11	ضع $k = k+1$ $\mu_0 = \mu_1$ $\mu_1 = \mu$

في الواقع، ليس من الضروري أن يكون للمصفوفة قيم مميزة مختلفة حتى تتقارب طريقة القوة. وإذا كانت لها قيمة مميزة مهيمنة وحيدة λ_1 مع تعددية r أكبر من 1، و $\mathrm{v}^{(1)}, \mathrm{v}^{(2)}, \ldots, \mathrm{v}^{(r)}$ هي متجهات مميزة مستقلة خطيًّا مقابلة لـ λ_1، فإن العملية ستبقى على تقارب إلى λ_1. إن متتالية المتجهات $\{\mathrm{x}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ ستكون في هذه الحالة متقاربة إلى متجه مميز مقترن مع λ_1 بمعيار l_∞ واحد يعتمد على اختيار المتجه الابتدائي $\mathrm{x}^{(0)}$، ويكون عبارة عن تركيب خطي من $\mathrm{v}^{(1)}, \mathrm{v}^{(2)}, \ldots, \mathrm{v}^{(r)}$

مثال 1 المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 14 & 0\\ -5 & 13 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

لها قيم مميزة $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$، ولذلك فإن طريقة القوة الموضحة في الخوارزمية (1.9) ستتقارب. ليكن $\mathrm{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ لذلك

$$\mathrm{y}^{(1)} = A\mathrm{x}^{(0)} = (10, 8, 1)^t$$

ومن ثم فإن

$$\|\mathrm{y}^{(1)}\|_\infty = 10,\quad \mu^{(1)} = y_1^{(1)} = 10,\quad \mathrm{x}^{(1)} = \frac{\mathrm{y}^{(1)}}{10} = (1, 0.8, 0.1)^t$$

جدول 1.9

m	$(\mathbf{x}^{(m)})^t$	$\mu^{(m)}$	$\hat{\mu}^{(m)}$
0	$(1, 1, 1)$		
1	$(1, 0.8, 0.1)$	10	6.266667
2	$(1, 0.75, -0.111)$	7.2	6.062473
3	$(1, 0.730769, -0.188803)$	6.5	6.015054
4	$(1, 0.722200, -0.220850)$	6.230769	6.004202
5	$(1, 0.718182, -0.235915)$	6.111000	6.000855
6	$(1, 0.716216, -0.243095)$	6.054546	6.000240
7	$(1, 0.715247, -0.246588)$	6.027027	6.000058
8	$(1, 0.714765, -0.248306)$	6.013453	6.000017
9	$(1, 0.714525, -0.249157)$	6.006711	6.000003
10	$(1, 0.714405, -0.249579)$	6.003352	6.000000
11	$(1, 0.714346, -0.249790)$	6.001675	
12	$(1, 0.714316, -0.249895)$	6.000837	

يؤدي الاستمرار بهذا النمط إلى القيم التي تظهر في جدول (1.9)، حيث تمثل $\hat{\mu}^{(m)}$ المتتالية المتولدة من خلال عملية Aitken's Δ^2. إن تقريب القيمة المميزة المهيمنة 6 عند هذه المرحلة هو $\hat{\mu}^{(10)} = 6.000000$ مع وحدة تقريب متجه مميز $(1, 0.714316, -0.249895)^t$.

وعلى الرغم من أن التقريب إلى القيمة المميزة صحيح بالنسبة إلى الخانات الموضحة، فإن تقريب المتجه المميز أقل دقة مقارنة بالمتجه المميز الحقيقي $(1, 0.714286, -0.25)^t$.

عندما يكون A متماثلًا، قد يحدث اختلاف في اختيار المتجهات $\mathbf{y}^{(m)}$، $\mathbf{x}^{(m)}$ وتدريجات $\mu^{(m)}$ لتحسين معدل التقارب للمتتالية $\{\mu^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ وللقيمة المميزة المهيمنة λ_1 معنويًّا. ومع أن معدل التقارب لطريقة القوة العامة هو $O(|\lambda_2/\lambda_1|^m)$، فإن معدل التقارب للعملية المعدلة المعطاة في الخوارزمية (2.9) للمصفوفة المتماثلة هو $O(|\lambda_2/\lambda_1|^{2m})$. (انظر [IK, pp. 149 ff]). ولأن المتتالية $\{\mu^{(m)}\}$ ما زالت متقاربة خطيًّا، فإنه يمكن تطبيق عملية Aitken's Δ^2.

تنفذ الخوارزمية (1.9) طريقة القوة المتماثلة.

ALGORITHM
الخوارزمية 2.9

طريقة القوة المتماثلة Symmetric Power Method

لتقريب القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقترن بها للمصفوفة A بحجم $n \times n$ وبشرط متجه لاصفري $\mathbf{x}$:

المدخلات: البعد n، مصفوفة A، متجه $\mathbf{x}$، حد سماح TOL، أكبر عدد من التكرارات N.

المخرجات: تقريب القيمة المميزة μ، تقريب المتجه المميز $\mathbf{x}$ (مع $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$) أو عبارة تفيد بأن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$ $\mathbf{x} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$
2	ما دام $(k \le N)$ فنفّذ الخطوات 3-8.

3	ضع $y = Ax$.
4	ضع $= x'y$.
5	إذا كانت $\|y\|_2 = 0$ فإن المخرجات (المتجه المميز x). المخرجات (لـ A قيمة مميزة 0. اختر متجها جديدا x وابدأ من جديد). توقف.
6	ضع $ERR = \left\| x - \frac{y}{\|y\|_2} \right\|_2$ $x = y/\|y\|_2$
7	إذا كان $ERR < TOL$ فإن المخرجات (x ،). (العملية كانت ناجحة). توقف
8	ضع $k = k + 1$.
9	المخرجات (إن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه). (العملية كانت فاشلة). توقف.

مثال 2

المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

متماثلة مع قيم مميزة $\lambda_1 = 6$ ، $\lambda_2 = 3$ ، $\lambda_3 = 1$. يتضمن جدول (2.9) نتائج طريقة القوة. أما النتائج في جدول (3.9) فهي لطريقة القوة المتماثلة . مفترضين في كل حالة أن $y^{(0)} = x^{(0)} = (1, 0, 0)^t$. انظر معنوية التحسن التي تحققها طريقة القوة المتماثلة. تتقارب تقريبات المتجهات المميزة المنتجة بطريقة القوة إلى المتجه $(1, -1, 1)^t$ مع $\|(1, -1, 1)^t\|_\infty = 1$. وفي طريقة القوة المتماثلة . فإن التقارب يكون إلى المتجه المتوازي $(\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)^t$ مع $\|(\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)^t\|_2 = 1$

جدول 2.9 طريقة القوة لـ Aitken's Δ^2

m	$(y^{(m)})^t$	$^{(m)}$	$\hat{}^{(m)}$	$(x^{(m)})^t$ مع $\|x^{(m)}\|_\infty = 1$
0				(1, 0, 0)
1	(4, −1, 1)	4		(1, −0.25, 0.25)
2	(4.5, −2.25, 2.25)	4.5	7	(1, −0.5, 0.5)
3	(5, −3.5, 3.5)	5	6.2	(1, −0.7, 0.7)
4	(5.4, −4.5, 4.5)	5.4	6.047617	$(1, -0.83\overline{3}, 0.83\overline{3})$
5	$(5.6\overline{6}, -5.166\overline{6}, 5.166\overline{6})$	$5.66\overline{6}$	6.011767	(1, −0.911765, 0.911765)
6	(5.823529, −5.558824, 5.558824)	5.823529	6.002931	(1, −0.954545, 0.954545)
7	(5.909091, −5.772727, 5.772727)	5.909091	6.000733	(1, −0.976923, 0.976923)
8	(5.953846, −5.884615, 5.884615)	5.953846	6.000184	(1, −0.988372, 0.988372)
9	(5.976744, −5.941861, 5.941861)	5.976744		(1, −0.994163, 0.994163)
10	(5.988327, −5.970817, 5.970817)	5.988327		(1, −0.997076, 0.997076)

جدول 3.9 طريقة القوة لـ Aitken's Δ^2

m	$(\mathbf{y}^{(m)})^t$	$\mu^{(m)}$	$\hat{\mu}^{(m)}$	$(\mathbf{x}^{(m)})^t$ مع $\|\mathbf{x}^{(m)}\|_2 = 1$
0	(1, 0, 0)			(1, 0, 0)
1	(4, −1, 1)	4	7	(0.942809, −0.235702, 0.235702)
2	(4.242641, −2.121320, 2.121320)	5	6.047619	(0.816497, −0.408248, 0.408248)
3	(4.082483, −2.857738, 2.857738)	5.666667	6.002932	(0.710669, −0.497468, 0.497468)
4	(3.837613, −3.198011, 3.198011)	5.909091	6.000183	(0.646997, −0.539164, 0.539164)
5	(3.666314, −3.342816, 3.342816)	5.976744	6.000012	(0.612836, −0.558763, 0.558763)
6	(3.568871, −3.406650, 3.406650)	5.994152	6.000000	(0.595247, −0.568190, 0.568190)
7	(3.517370, −3.436200, 3.436200)	5.998536	6.000000	(0.586336, −0.572805, 0.572805)
8	(3.490952, −3.450359, 3.450359)	5.999634		(0.581852, −0.575086, 0.575086)
9	(3.477580, −3.457283, 3.457283)	5.999908		(0.579603, −0.576220, 0.576220)
10	(3.470854, −3.460706, 3.460706)	5.999977		(0.578477, −0.576786, 0.576786)

مبرهنة 14.9 تعطي المبرهنة الآتية حد خطأ لتقريب القيم المميزة لمصفوفة متماثلة.

إذا كانت A مصفوفة متماثلة بحجم $n \times n$ مع قيم مميزة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ و $\|A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}\|_2 < \varepsilon$ لعدد ما حقيقي λ ومتجه $\mathbf{x}$ مع $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$، فإن

$$\min_{1 \le j \le n} |\lambda_j - \lambda| < \varepsilon$$

■

البرهان افترض أن $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$ تشكل مجموعة متعامدة من المتجهات المميزة لـ A ومقترنة على التوالي بالقيم المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

ووفقًا للنظريتين (5.9) و (2.9)، فإنه يمكن وضع $\mathbf{x}$ لمجموعة وحيدة من الثوابت $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ على الصورة

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{v}^{(j)}$$

ومن ثم فإن

$$\|A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}\|_2^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j (\lambda_j - \lambda) \mathbf{v}^{(j)} \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2 |\lambda_j - \lambda|^2 \ge \min_{1 \le j \le n} |\lambda_j - \lambda|^2 \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2$$

ولكن

$$\sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 = 1$$

لذا فإن

$$\varepsilon \ge \|A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}\|_2 > \min_{1 \le j \le n} |\lambda_j - \lambda|$$

■ ■ ■

إن طريقة القوة المعكوسة Inverse Power method عبارة عن تعديل لطريقة القوة لتعطي تقاربًا أسرع. وتُستخدم لتحديد القيمة المميزة لـ A القريبة من العدد المحدد q.

افترض أن للمصفوفة A قيمًا مميزة $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ مع متجهات مميزة مستقلة خطيًا $v^{(1)},\ldots,v^{(n)}$. إن القيم المميزة لِـ $(A-qI)^{-1}$ حيث $q\neq\lambda_i$ عند $i=1,2,\ldots,n$ تكون

$$\frac{1}{\lambda_1-q},\quad \frac{1}{\lambda_2-q},\quad \ldots,\quad \frac{1}{\lambda_n-q}$$

مع متجهات مميزة $v^{(1)},v^{(2)},\ldots,v^{(n)}$. (انظر التمرين 13 من الفصل 2.7) بتطبيق طريقة القوة لـ $(A-qI)^{-1}$ نحصل على

$$\mathbf{y}^{(m)}=(A-qI)^{-1}\mathbf{x}^{(m-1)}$$

$$\mu^{(m)}=y^{(m)}_{p_{m-1}}=\frac{y^{(m)}_{p_{m-1}}}{x^{(m-1)}_{p_{m-1}}}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j\frac{1}{(\lambda_j-q)^m}v^{(j)}_{p_{m-1}}}{\sum_{j=1}^{n}\beta_j\frac{1}{(\lambda_j-q)^{m-1}}v^{(j)}_{p_{m-1}}} \tag{3.9}$$

و

$$x^{(m)}=\frac{y^{(m)}}{y^{(m)}_{p_m}}$$

حيث يمثِّل p_m عند كل خطوة أصغر عدد صحيح لتكون $|y^{(m)}_{p_m}|=\|y^{(m)}\|_\infty$. وتتقارب المتتالية $\{\mu^{(m)}\}$ في المعادلة (3.9) إلى $1/(\lambda_k-q)$ حيث إن

$$\frac{1}{|\lambda_k-q|}=\max_{1\le i\le n}\frac{1}{|\lambda_i-q|}$$

و $\lambda_k\approx q+1/\mu^{(m)}$ هي القيمة المميزة لِـ A والأقرب إلى q .

ومع معلومية k، يمكن كتابة المعادلة (3.9) على الصورة

$$\mu^{(m)}=\frac{1}{\lambda_k-q}\left[\frac{\beta_k v^{(k)}_{p_{m-1}}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\beta_j\left[\frac{\lambda_k-q}{\lambda_j-q}\right]^m v^{(j)}_{p_{m-1}}}{\beta_k v^{(k)}_{p_{m-1}}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\beta_j\left[\frac{\lambda_k-q}{\lambda_j-q}\right]^{m-1} v^{(j)}_{p_{m-1}}}\right] \tag{4.9}$$

ولذلك فإن اختيار q يحدد التقارب. على أن تكون $1/(\lambda_k-q)$ قيمة مميزة مهيمنة لـ $(A-qI)^{-1}$ (مع أنه من الممكن أن تكون قيمة مميزة مضاعفة). وكلما اقتربت q من القيمة المميزة λ_k تسارع التقارب؛ لأن التقارب من رتبة

$$O\left(\left|\frac{(\lambda-q)^{-1}}{(\lambda_k-q)^{-1}}\right|^m\right)=O\left(\left|\frac{(\lambda_k-q)}{(\lambda-q)}\right|^m\right)$$

حيث تمثِّل λ القيمة المميزة لـ A وثاني أقرب قيمة لِـ q.

يوجد المتجه $y^{(m)}$ من المعادلة

$$(A-qI)y^{(m)}=x^{(m-1)}$$

يمكن استخدام تقليص جاوس مع الدوران لحلِّ هذا النظام عمومًا.

وعلى الرغم من أن طريقة القوة المعكوسة تتطلب حلَّ النظام بحجم $n\times n$ عند كل خطوة إلا أنه يمكن حفظ المضاعفات لتقليل الحسابات. إن اختيار q يمكن أن يستند إلى مبرهنة Geršgorin Circle Theorem أو إلى وسائل أخرى لتحديد موقعين لقيمة مميزة.

تحسب الخوارزمية (3.9) q من تقريب ابتدائي للمتجه المميز $\mathbf{x}^{(0)}$ من خلال

$$q = \frac{\mathbf{x}^{(0)t} A \mathbf{x}^{(0)}}{\mathbf{x}^{(0)t} \mathbf{x}^{(0)}}$$

إن هذا الاختيار لـ q ناتج من تأمل أنه لو كانت $\mathbf{x}$ عبارة عن متجه مميز لـ A نسبة إلى القيمة المميزة λ، فإن $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. ومن ثم فإن $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^t\mathbf{x}$ و

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^t A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^t A \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$$

وإذا كانت q قريبة من قيمة مميزة، فإن التقارب سيكون نوعًا ما سريعًا، ولكن يجب استخدام أسلوب الدوران في الخطوة (6) لتجنب التلويث بخطأ تقريب.

تُستخدم الخوارزمية (3.9) غالبًا في تقريب متجه مميز، عندما يكون تقريب القيمة المميزة معلومًا.

ALGORITHM

الخوارزمية 3.9

طريقة القوة المعكوسة Inverse Power Method

لتقريب القيمة المميزة والمتجه المميز المقترن بها للمصفوفة A بحجم $n \times n$ وبشرط متجه لاصفري $\mathbf{x}$؛

المدخلات: البعد n. مصفوفة A، متجه $\mathbf{x}$. حد سماح TOL، أكبر عدد من التكرارات N.

المخرجات: تقريب القيمة المميزة μ، تقريب المتجه المميز $\mathbf{x}$ (مع $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$) أو عبارة تفيد بأن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $q = \dfrac{\mathbf{x}^t A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^t\mathbf{x}}$
2	ضع $k = 1$
3	أوجد أصغر عدد صحيح p مع $1 \le p \le n$ و $\lvert x_p\rvert = \|\mathbf{x}\|_\infty$.
4	ضع $\mathbf{x} = \mathbf{x}/x_p$
5	ما دام $(k \le N)$ فنفّذ الخطوات 6-12.
6	حلّ النظام الخطي $(A - qI)\mathbf{y} = \mathbf{x}$
7	إذا كان النظام ليس له حل وحيد فإن المخرجات (q هي قيمة مميزة، q). توقف.
8	ضع $\mu = y_p$
9	أوجد أصغر عدد صحيح p مع $1 \le p \le n$ و $\lvert y_p\rvert = \|\mathbf{y}\|_\infty$
10	ضع $ERR = \|\mathbf{x} - (\mathbf{y}/y_p)\|_\infty$ $\mathbf{x} = \mathbf{y}/y_p$
11	إذا كان $ERR < TOL$ فضع $\mu = (1/\mu) + q$. المخرجات $(\mu, \mathbf{x})$. (العملية كانت ناجحة). توقف.

12	ضع $k = k + 1$.
13	المخرجات (إن أكبر عدد من التكرارات قد تم تجاوزه). (العملية كانت فاشلة). توقف.

ولتقارب طريقة القوة المعكوسة خطيًا، فإن عملية Aitken Δ^2 يمكن استخدامها مرة أخرى في تسريع التقارب. ويوضح مثال الآتي التقارب السريع لطريقة القوة المعكوسة إذا كانت q قريبة من قيمة مميزة.

مثال 3 تناولنا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

في مثال (1). أعطت الخوارزمية (1.9) التقريب $\mu^{(12)} = 6.000837$ باستخدام $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ ومع $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$، يكون لدينا

$$q = \frac{x^{(0)t} A x^{(0)}}{x^{(0)t} x^{(0)}} = \frac{19}{3} = 6.333333$$

إن نتائج تطبيق الخوارزمية (3.9) موجودة في جدول (4.9)، ويتضمَّن العمود الأيمن نتائج طريقة Aitken's Δ^2 مطبقة على $\mu^{(m)}$.

جدول 4.9

m	$x^{(m)t}$	$\mu^{(m)}$	$\hat{\mu}^{(m)}$
0	$(1, 1, 1)$		
1	$(1, 0.720727, -0.194042)$	6.183183	6.000116
2	$(1, 0.715518, -0.245052)$	6.017244	6.000004
3	$(1, 0.714409, -0.249522)$	6.001719	6.000004
4	$(1, 0.714298, -0.249953)$	6.000175	6.000003
5	$(1, 0.714287, -0.250000)$	6.000021	
6	$(1, 0.714286, -0.249999)$	6.000005	

لأي عدد حقيقي q، إذا كانت A متماثلة فإن $(A - qI)^{-1}$ متماثلة أيضًا، ومن ثم يمكن تطبيق طريقة القوة المتماثلة – الخوارزمية (2.9)– على $(A - qI)^{-1}$ لتسريع التقارب إلى

$$O\left(\left|\frac{\lambda_k - q}{\lambda - q}\right|^{2m}\right)$$

تتوافر أساليب عديدة لإيجاد تقريب القيم المميزة الأخرى لمصفوفة عند حساب تقريب القيمة المميزة المهيمنة. وسيقتصر عرضنا هنا على أساليب الانكماش deflation techniques.

تتضمَّن أساليب الانكماش تشكيل مصفوفة جديدة B قيمها المميزة هي نفسها لـ A، باستثناء القيمة المميزة المهيمنة لـ A فإنها تُستبدل بالقيمة المميزة 0 في B.

والنتيجة الآتية تبرر تلك العملية. ويمكن إيجاد برهان هذه مبرهنة في [Wil2, p. 596].

مبرهنة 15.9 افترض أن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ عبارة عن قيم مميزة لـ A ومتجهات مميزة $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$ مقترنة بها، وأن لـ λ_1 مضاعفًا هو 1. ليكن $\mathbf{x}$ متجهًا مع $\mathbf{x}^t\mathbf{v}^{(1)} = 1$. لذا فإن للمصفوفة

$$B = A - \lambda_1 \mathbf{v}^{(1)}\mathbf{x}^t$$

قيمًا مميزة $0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ مع متجهات مميزة $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)}, \ldots, \mathbf{w}^{(n)}$، حيث إن $\mathbf{v}^{(i)}$ و$\mathbf{w}^{(i)}$ مترابطان من خلال المعادلة

$$\mathbf{v}^{(i)} = (\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{w}^{(i)} + \lambda_1(\mathbf{x}^t\mathbf{w}^{(i)})\mathbf{v}^{(1)} \tag{5.9}$$

لكل $i = 2, 3, \ldots, n$. ■

يمكن استخدام العديد من الاختيارات للمتجه $\mathbf{x}$ في مبرهنة (15.9). ويظهر انكمش ويلاندت Wielandt deflation من تعريف

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}}(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})^t \tag{6.9}$$

حيث إن $v_i^{(1)}$ إحداثي لاصفري للمتجه المميز $\mathbf{v}^{(1)}$، وإن القيم $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ هي العناصر في الصف i للمصفوفة A.

مع هذا تعريف

$$\mathbf{x}^t\mathbf{v}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}}[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}](v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_n^{(1)})^t = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j^{(1)}$$

حيث إن الجمع هو الإحداثي i لحاصل الضرب $A\mathbf{v}^{(1)}$. ولأن $A\mathbf{v}^{(1)} = \lambda_1\mathbf{v}^{(1)}$، يكون لدينا

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j^{(1)} = \lambda_1 v_i^{(1)}$$

الذي يؤدي إلى أن

$$\mathbf{x}^t\mathbf{v}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}}(\lambda_1 v_i^{(1)}) = 1$$

وبذلك فإن $\mathbf{x}$ تحقق فرضيات مبرهنة (15.9). وأكثر من ذلك، (انظر التمرين 20) فإن الصف i لـ $B = A - \lambda_1\mathbf{v}^{(1)}\mathbf{x}^t$ يتضمّن عناصر صفرية كاملة.

إذا كانت $\lambda \neq 0$ قيمة مميزة مع متجه مميز مقابل لها $\mathbf{w}$ فإن العلاقة $B\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ تؤدي إلى أن الإحداثي i لـ $\mathbf{w}$ يجب أن يكون صفرًا أيضًا. والنتيجة أن العمود i للمصفوفة B لا يضيف أي مساهمة تجاه $B\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. ولذلك فإن المصفوفة B يمكن استبدالها بمصفوفة B' بحجم $(n-1) \times (n-1)$، ونحصل عليها من خلال حذف الصف والعمود i من B. وللمصفوفة B' قيم مميزة $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. فإذا كانت $|\lambda_2| > |\lambda_3|$ فإن طريقة القوة يعاد تطبيقها على المصفوفة B' لتحديد هذه القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز $\mathbf{w}^{(2)'}$، المقترن بـ λ_2 بالنسبة لى المصفوفة B'. لإيجاد المتجه المميز المقترن $\mathbf{w}^{(2)}$ للمصفوفة B، أدخل الإحداثي "صفر" بين الإحداثيين $w_{i-1}^{(2)'}$ و$w_i^{(2)'}$ للمتجه $w_i^{(2)'}$ ذي الأبعاد $(n-1)$، ومن ثم احسب $\mathbf{v}^{(2)}$ باستخدام المعادلة (5.9).

هلمت ويلاند
Helmut Wielandt (1910-2001)
عمل بالأصل في مجاميع التباديل. ولكنه خلال الحرب العالمية الثانية انشغل في بحث حول الأرصاد الجوية، التشفير، والديناميكا الهوائية. هذا تضمن مسائل الاهتزاز التي تتطلب تقديرًا للقيم المميزة المرتبطة بالمعادلات التفاضلية والمصفوفات

مثال 4 نعرف من المثال (2) أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

لهـا قيم مميزة $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$. افترض أن القيمة المميزة المهيمنة $\lambda_1 = 6$ والمتجه المميز المقترن بها $v^{(1)} = (1, -1, 1)^t$ قد حسبا. فالعملية التي اتضحت توًا لإيجاد λ_2 تكون كما يلي:

$$x = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)^t$$

$$v^{(1)}x^t = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\left[\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6}\right] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

و

$$B = A - \lambda_1 v^{(1)}x^t = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

وبحذف الصف الأول والعمود الأول نحصل على

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

الذي له قيم مميزة $\lambda_2 = 3$ و $\lambda_3 = 1$، وإن المتجه المميز $w^{(2)'}$ يمكن إيجاده من خلال حلّ النظام الخطي $(B' - 3I)w^{(2)'} = 0$ ليعطينا $w^{(2)'} = (1, -1)^t$.

وبإضافة صفر إلى المركبة الأولى نحصل على $w^{(2)} = (0, 1, -1)^t$، ومن المعادلة (5.9) لدينا المتجه المميز $v^{(2)}$ للمصفوفة A المقترن بـ $x_2 = 3$ وهو

$$v^{(2)} = (3-6)(0, 1, -1)^t + 6\left[\left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}\right)(0, 1, -1)^t\right](1, -1, 1)^t = (-2, -1, 1)^t$$ ■

وعلى الرغم من أن عملية الانكماش هذه يمكن استخدامها في إيجاد تقريبات للقيم جميعها والمتجهات المميزة للمصفوفة. فإن العملية معرضة لخطأ تقريب. وبعد استخدام الانكماش لتقريب قيمة مميزة لمصفوفة. فإن التقريب يجب استخدامه بمنزلة قيمة البداية لطريقة القوة المعكوسة التي طبّقت على المصفوفة الأصلية. وهذا سوف يضمن تقارب القيمة المميزة للمصفوفة الأصلية. وليس للمصفوفة التي صُغّرت والتي غالبًا ما تتضمّن أخطاءً. وعندما تكون القيم المميزة جميعها لمصفوفة ما مطلوبة. فإنه يمكن استخدام الأساليب المبينة في الفصل (4.9) المستندة إلى تحويلات التشابه.

نغلق هذا الفصل في الخوارزمية (4.9) التي تحسب ثاني قيمة مميزة مهيمنة لمصفوفة والمتجه المميز المقترن بها. بعدما حدّدت القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقابل لها.

ALGORITHM
الخوارزمية
4.9

انكماش وايلنت Wielandt Deflaion

لتقريب ثاني قيمة مميزة مهيمنة والمتجه المميز المقابل لها لمصفوفة A بحجم $n \times n$، بوجود التقريب λ للقيمة المميزة المهيمنة. والتقريب v للمتجه المميز المقابل لها. ومتجه $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$:

المدخلات: البعد n. مصفوفة A، قيمة تقريبية للقيمة المميزة λ مع متجه مميز $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$، متجه $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$، حد سماح TOL. أكبر عدد من التكرارات N.

المخرجات: تقريب القيمة المميزة μ، تقريب المتجه المميز u أو عبارة تفيد بأن الطريقة فاشلة.

الخطوة	المضمون
1	ليكن i أصغر عدد صحيح مع $1 \le i \le n$ و $\lvert v_i \rvert = \max_{1 \le j \le n} \lvert v_j \rvert$.
2	إذا كان $i \ne 1$. لكل $k = 1, \ldots, i-1$ ولكل $j = 1, \ldots, i-1$ فضع $b_{kj} = a_{kj} - \dfrac{v_k}{v_i} a_{ij}$.
3	إذا كان $i \ne 1$ و $i \ne n$ لكل $k = i, \ldots, n-1$ ولكل $j = 1, \ldots, i-1$ فضع $b_{kj} = a_{k+1,j} - \dfrac{v_{k+1}}{v_i} a_{ij}$ $b_{jk} = a_{j,k+1} - \dfrac{v_j}{v_i} a_{i,k+1}$
4	إذا كان $i \ne n$ لكل $k = i, \ldots, n-1$ ولكل $j = i, \ldots, n-1$ فضع $b_{kj} = a_{k+1,j+1} - \dfrac{v_{k+1}}{v_i} a_{i,j+1}$.
5	نفّذ طريقة القوة على المصفوفة $B' = (b_{kj})$ بحجم $(n-1) \times (n-1)$ مع كون x تقريبا ابتدائيًا.
6	إذا ما فشلت الطريقة فإن المخرجات (الطريقة فشلت). توقف. ما عدا ذلك. لتكن μ القيمة المميزة التقريبية و $\mathbf{w}' = (w'_1, \ldots, w'_{n-1})'$ المتجه المميز التقريبي.
7	إذا كان $i \ne 1$ لكل $k = 1, \ldots, i-1$ فضع $w_k = w'_k$
8	ضع $w_i = 0$.
9	إذا كان $i \ne n$. لكل $k = i+1, \ldots, n$ فضع $w_k = w'_{k-1}$
10	لكل $k = 1, \ldots, n$ ضع $u_k = (\mu - \lambda) w_k + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \right) \dfrac{v_k}{v_i}$ (احسب المتجه المميز مستخدما المعادلة 5.9).
11	المخرجات $(\mu, \mathbf{u})$ (العملية كانت ناجحة). توقف.

مجموعة التمارين 2.9 EXERCISE SET

1. أوجد أول ثلاث تكرارات نتيجة تطبيق طريقة القوة على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$

ب. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 2, 1)^t$

د. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -2, 0, 3)^t$

2. أوجد أول ثلاث تكرارات نتيجة تطبيق طريقة القوة على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 1)^t$

ب. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, 1)^t$

ج. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 5 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, -3)^t$

د. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 1)^t$

3. كرِّر التمرين (1) مستخدمًا طريقة معكوس القوة.

4. كرِّر التمرين (2) مستخدمًا طريقة معكوس القوة.

5. أوجد أول ثلاث تكرارات نتيجة تطبيق طريقة القوة المتماثلة على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$

ب. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$

ج. $\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^t$

د. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0, 0)^t$

6. أوجد أول ثلاث تكرارات نتيجة تطبيق طريقة القوة المتماثلة على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$

ب. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^t$

د. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 5 \end{bmatrix}$ استخدم $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, -3)^t$

7. استخدم طريقة القوة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (1). استمر بالتكرار حتى تحقق حد السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

8. استخدم طريقة القوة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (2). استمر بالتكرار حتى تحقق حد السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

9. استخدم طريقة معكوس القوة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (1). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

10. استخدم طريقة معكوس القوة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (2). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

11. استخدم طريقة القوة المتماثلة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (5). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

12. استخدم طريقة القوة المتماثلة لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (6). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

13. استخدم طريقة انكماش وايلندت لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (7). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

14. استخدم طريقة انكماش وايلندت لتقريب القيمة المميزة المهيمنة للمصفوفات في التمرين (8). استمر بالتكرار حتى تحقق حدَّ السماح 10^{-4} أو حتى يتجاوز عدد التكرارات العدد 25.

15. كرِّر التمرين (7) مستخدمًا أسلوب Aitken's Δ^2 وطريقة القوة للقيمة المميزة المهيمنة.

16. كرِّر التمرين (8) مستخدمًا أسلوب Aitken's Δ^2 وطريقة القوة للقيمة المميزة المهيمنة.

17. انكماش هوتلنك Hotelling Deflation. افترض أنه قد وُجدت أكبر قيمة مميزة λ_1 والمتجه المميز $\mathbf{v}^{(1)}$ المقابل لها لمصفوفة متماثلة A بحجم $n \times n$. أثبت أن للمصفوفة

$$B = A - \frac{\lambda_1}{(\mathbf{v}^{(1)})^t\mathbf{v}^{(1)}}\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{v}^{(1)})^t$$

القيم المميزة نفسها $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ لـ A. إلا أن لـ B قيمة مميزة 0 مع متجه مميز $v^{(1)}$ بدلاً من متجه مميز λ_1. استخدم طريقة الانكماش هذه لإيجاد λ_2 لكل مصفوفة في التمرين (5). ويمكن لهذه الطريقة أن تستمر نظريًّا لإيجاد قيم مميزة أخرى. لكن خطأ تقريب سرعان ما يجعل هذا الجهد عديم الفائدة.

18. أسلوب أنهيليشن Annihilation Technique. افترض أن المصفوفة A، بحجم $n \times n$ لها قيم مميزة $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ رتبة كما يلي:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

مع متجهات مميزة مستقلة خطيًّا $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$.

أ. أثبت أنه عند تطبيق طريقة القوة بمتجه ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$ معطى من خلال

$$\mathbf{x}^{(0)} = \beta_2 \mathbf{v}^{(2)} + \beta_3 \mathbf{v}^{(3)} + \cdots + \beta_n \mathbf{v}^{(n)}$$

فإن المتتالية $\{\mu^{(m)}\}$ الموضحة في الخوارزمية (1.9) ستتقارب إلى λ_2.

ب. أثبت أنه لأي متجه $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}^{(i)}$. فإن المتجه $\mathbf{x}^{(0)} = (A - \lambda_1 I)\mathbf{x}$ يحقق الخاصية المعطاة في الفقرة (أ).

ج. أوجد تقريبًا إلى λ_2 للمصفوفات في التمرين (1).

د. أثبت أن هذه الطريقة يمكن استمرارها لإيجاد λ_3 مستخدمين $\mathbf{x}^{(0)} = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)\mathbf{x}$.

19. باتباع منهجية التمرين (11) في الفصل (3.6) والتمرين (15) في الفصل (2.7)، افترض أن لنوع من الخنافس دورة حياة مدتها 4 سنوات. وأن للأنثى معدل بقاء قدره $\frac{1}{2}$ في سنتها الأولى، و$\frac{1}{4}$ في سنتها الثانية، و$\frac{1}{8}$ في سنتها الثالثة. وافترض بالإضافة إلى ذلك أن الأنثى تلد في المعدل أنثيين في السنة الثالثة و4 إناث في السنة الرابعة. وتوضح المصفوفة A مساهمة أنثى واحدة لسنة واحدة في مجتمع الإناث في السنة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

إذ يمثّل العنصر في الصف i والعمود j المساهمة المحتملة مرة أخرى لأنثى بالعمر j في مجتمع الإناث للسنة التالية بالعمر: i

أ. استخدم مبرهنة دائرة جيركجورن Geršgorin Circle Theorem لتحديد منطقة ضمن المستوى المركب، بحيث تتضمن القيم المميزة جميعها لـ A.

ب. استخدم طريقة القوة لتحديد القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقابل لها.

ج. استخدم الخوارزمية (4.9) لتحديد أي قيم مميزة متبقية ومتجهاتها المميزة للمصفوفة A.

د. أوجد القيم المميزة لـ A باستخدام كثيرة حدود الخاصية لـ A وطريقة نيوتن.

هـ. ما تقديرك على المدى البعيد لمجتمع هذه الخنافس؟

20. أثبت أن الصف i لـ $B = A - \lambda_1 \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{x}^t$ هو صفر. حيث λ_1 أكبر قيمة مميزة لـ A، وأن $\mathbf{v}^{(1)}$ هو المتجه المميز المقابل لها، و$\mathbf{x}$ عبارة عن المتجه المعرف بالمعادلة (6.9).

21. المصفوفة الثلاثية الأقطار $(m-1) \times (m-1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix}$$

مشاركة في طريقة الفرق الرجعي لحل معادلة الحرارة. (انظر الفصل 2.12) ولاستقرار الطريقة فإننا نحتاج إلى $\rho(A^{-1}) < 1$. ومع $m = 11$، قرّب $\rho(A^{-1})$ لكل مما يلي:

أ. $\alpha = \frac{1}{4}$ ب. $\alpha = \frac{1}{2}$ ج. $\alpha = \frac{3}{4}$

متى تكون الطريقة مستقرة؟

22. القيم المميزة للمصفوفة A في التمرين (21) هي

$$\lambda_i = 1 + 4\alpha\left(\sin\frac{\pi i}{2m}\right)^2 \quad \text{لكل} \quad i = 1, \ldots, m-1$$

قارن التقريب في التمرين (21) بالقيمة الحقيقية لـ $\rho(A^{-1})$. ومرة أخرى متى تكون الطريقة مستقرة؟

23. المصفوفتان $(m-1) \times (m-1)$ A وB حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha & -\frac{\alpha}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 1-\alpha & \frac{\alpha}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\alpha}{2} & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

مشاركتان في طريقة Crank–Nicolson لحلِّ معادلة الحرارة. (انظر الفصل 2.12)؛ مع $m = 11$،

قرّب $\rho(A^{-1}B)$ لكل مما يلي:

أ. $\alpha = \frac{1}{4}$ ب. $\alpha = \frac{1}{2}$ ج. $\alpha = \frac{3}{4}$

24. من الممكن تمثيل نظام ديناميكي خطي بالمعادلة

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t)$$

حيث إن A، B، C وD عبارة عن مصفوفات متغيرة بحجم $n \times n$، $n \times r$، $m \times n$ و $m \times r$ على التوالي، وإن كلًا من x، y و u عبارة عن متغيرات متجه بأبعاد n، m وr على التوالي. ولكي يكون النظام مستقرًا، يجب أن تكون للقيم المميزة جميعها للمصفوفة A مع جزء حقيقي غير موجب لجميع قيم t. فهل النظام مستقر إذا كان

أ. $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2.5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ ب. $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

3.9 طريقة هاوسهولدر House Holder's Method

ألستون هاوس هولدر

(1904-1993)

Alston Householder

عمل بحث في علوم عديدة رياضية قبل أن يصبح مديرا لمختبر أوك ريدج الوطني Oak Ridge National Laboratory في ولاية تنيسي عام 1948 وقد تم تطوير هذه الطرائق في الأعوام 1950s عندما بدأ العمل في حل النظم الخطية

سنستخدم في الفصل (4.9) طريقة QR لتقليص مصفوفة ثلاثية الأقطار مماثلة لمصفوفة تكون قطرية تقريبًا. إن العناصر القطرية للمصفوفة المتقلصة عبارة عن تقريبات للقيم المميزة لتلك المصفوفة. وسنعرض في هذا الفصل طريقة ابتكرها Alston Householder لتقليص مصفوف معينة لمصفوفة مماثلة ثلاثية الأقطار. ومع الربط بين المسائل التي نحلُّها ضمن هذين الفصلين بوضوح، فإن لطريقة Householder تطبيقات واسعة في غير مجالات تقريب القيم المميزة .

تستخدم طريقة Householder في إيجاد مصفوفة ثلاثية الأقطار متماثلة B تكون مماثلة لمصفوفة معلومة A. تؤدي مبرهنة (10.9) إلى أن A مماثلة لمصفوفة قطرية D نظرًا لوجود مصفوفة متعامدة

Q بالخاصية $D = Q^{-1}AQ = Q^{t}AQ$. ولأن المصفوفة Q (وD أيضًا) صعبة الحساب عمومًا؛ فإن طريقة هاوسهولدر Householder توفّر حلًّا وسطًا. وبعد تنفيذ طريقة هاوسهولدر Householder، يمكن استخدام طرائق فاعلة مثل خوارزمية QR في تقريب دقيق للقيم المميزة للمصفوفة ثلاثية الأقطار المتماثلة الناتجة.

تعريف 16.9 ليكن $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ مع $\mathbf{w}^t\mathbf{w} = 1$. وتسمى المصفوفة $n \times n$

$$P = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t$$

تحويل هاوسهولدر Householder transformation. ■

إن تحويلات هاوسهولدر Householder تستخدم استبعاد الخلايا الصفرية اختياريًّا selectively zero out blocks للعناصر في متجهات أو أعمدة مصفوفات بحيث تكون مستقرة معها بحدٍّ أقصى بالنسبة إلى خطأ تقريب. (انظر [Wil2, pp. 152–162] لمزيد من النقاش). وإن خصائص تحويلات هاوسهولدر Householder موضحة في مبرهنة الآتية:

مبرهنة 17.9 إن تحويل هاوسهولدر Householder، $P = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t$، يكون متماثلًا ومتعامدًا. ولذلك فإن $P^{-1} = P$. ■

البرهان بما أن

$$(\mathbf{w}\mathbf{w}^t)^t = (\mathbf{w}^t)^t\mathbf{w}^t = \mathbf{w}\mathbf{w}^t$$

يكون لدينا

$$P^t = (I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t)^t = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t = P$$

وبالإضافة إلى ذلك بما أن $\mathbf{w}^t\mathbf{w} = 1$، فإن

$$PP^t = (I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t)(I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t) = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t + 4\mathbf{w}\mathbf{w}^t\mathbf{w}\mathbf{w}^t$$
$$= I - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^t + 4\mathbf{w}\mathbf{w}^t = I$$

ولذلك فإن

$$P^{-1} = P^t = P$$ ■ ■ ■

إن طريقة هاوسهولدر Householder تبدأ بتحديد تحويل $P^{(1)}$ مع خاصية كون $A^{(2)} = P^{(1)}AP^{(1)}$ لها

$$a_{j1}^{(2)} = 0 \quad \text{لكل} \quad j = 3, 4, \ldots, n \tag{7.9}$$

ومن خلال التماثل فإن $a_{1j}^{(2)} = 0$.

يُختار المتجه $w_1, w_2, \ldots, w_n$ بحيث $\mathbf{w}^t\mathbf{w} = 1$. وإن المعادلة (7.9) متحققة. وفي المصفوفة

$$A^{(2)} = P^{(1)}AP^{(1)} = (I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t)A(I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t)$$

لدينا $a_{11}^{(2)} = a_{11}$ و $a_{j1}^{(2)} = 0$ لكل $j = 3, 4, \ldots, n$. ويفترض هذا الاختيار n من الشروط

على n من المجاهيل $w_1, w_2, \ldots, w_n$ إن وضع $w_1 = 0$ يضمن أن $a_{11}^{(2)} = a_{11}$ ونحن نريد من

$$P^{(1)} = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t$$

أن تحقق

$$P^{(1)}(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1})^t = (a_{11}, \alpha, 0, \ldots, 0)^t \tag{8.9}$$

حيث ستُختار α لاحقًا. ولتبسيط الصيغة، ليكن

$$\hat{\mathbf{w}} = (w_2, w_3, \ldots, w_n)^t \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \hat{\mathbf{y}} = (a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1})^t \in \mathbb{R}^{n-1}$$

وإن $\hat{P}$ هي $(n-1) \times (n-1)$ تحويل Householder $\hat{P} = I_{n-1} - 2\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}^t$.

إذن تصبح المعادلة (8.9)

$$P^{(1)}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \hat{P} & \\ 0 & & & \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} a_{11} \\ \hline \hat{\mathbf{y}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a_{11} \\ \hline \hat{P}\hat{\mathbf{y}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} a_{11} \\ \hline \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]$$

مع

$$\hat{P}\hat{\mathbf{y}} = (I_{n-1} - 2\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}^t)\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} - 2(\hat{\mathbf{w}}^t\hat{\mathbf{y}})\hat{\mathbf{w}} = (\alpha, 0, \ldots, 0)^t \tag{9.9}$$

ليكن $r = \hat{\mathbf{w}}^t\hat{\mathbf{y}}$. لذا فإن

$$(\alpha, 0, \ldots, 0)^t = (a_{21} - 2rw_2, a_{31} - 2rw_3, \ldots, a_{n1} - 2rw_n)^t$$

ويمكننا تحديد القيم w_i جميعها حال معرفتنا لقيم α و r. وإن مكوّنات المعادلة تعطي

$$(\alpha, 0, \ldots, 0)^t = (a_{21} - 2rw_2, a_{31} - 2rw_3, \ldots, a_{n1} - 2rw_n)^t$$

ولذلك فإن

$$2rw_2 = a_{21} - \alpha \tag{10.9}$$

و

$$2rw_j = a_{j1} \quad \text{لكل} \quad j = 3, \ldots, n \tag{11.9}$$

وبتربيع جهتي كل من المعادلتين وجمعهما نحصل على

$$4r^2 \sum_{j=2}^{n} w_j^2 = (a_{21} - \alpha)^2 + \sum_{j=3}^{n} a_{j1}^2$$

وبما أن $\mathbf{w}^t\mathbf{w} = 1$ و $w_1 = 0$، يكون لدينا $\sum_{j=2}^{n} w_j^2 = 1$

و

$$4r^2 = \sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 - 2\alpha a_{21} + \alpha^2 \tag{12.9}$$

من خلال المعادلة (9.9). وحقيقة كون P متعامدة نحصل على

$$\alpha^2 = (\alpha, 0, \ldots, 0)(\alpha, 0, \ldots, 0)' = (\hat{P}\hat{\mathbf{y}})'\hat{P}\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}'\hat{P}'\hat{P}\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}}$$

ومن ثم فإن

$$\alpha^2 = \sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2$$

التي عند تعويضها في المعادلة (12.9) تعطي

$$2r^2 = \sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 - \alpha a_{21}$$

ولكي نضمن أن $2r^2 = 0$ فقط عندما $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$، فإننا نختار

$$\alpha = -\operatorname{sgn}(a_{21})\left(\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2\right)^{1/2}$$

الذي يؤدي إلى أن

$$2r^2 = \sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2 + |a_{21}|\left(\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2\right)^{1/2}$$

ومع هذا الاختيار لـ α و $2r^2$، نحل المعادلتين (10.9) و (11.9) لنحصل على

$$w_2 = \frac{a_{21} - \alpha}{2r} \quad \text{و} \quad w_j = \frac{a_{j1}}{2r}$$ لكل $j = 3, \ldots, n$

ولتلخيص اختيار $P^{(1)}$، فإنه لدينا

$$\alpha = -\operatorname{sgn}(a_{21})\left(\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2\right)^{1/2}$$

$$r = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}a_{21}\alpha\right)^{1/2}$$

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = \frac{a_{21} - \alpha}{2r}$$

و

$$w_j = \frac{a_{j1}}{2r}$$

لكل $j = 3, \ldots, n$.

ومع هذا الاختيار فإن

$$A^{(2)} = P^{(1)}AP^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

وبعد إيجاد $P^{(1)}$ وحساب $A^{(2)}$. تُعاد العملية عند $k = 2, 3, \ldots, n-2$ كما يلي:

$$\alpha = -\operatorname{sgn}(a_{k+1,k}^{(k)}) \left(\sum_{j=k+1}^{n} (a_{jk}^{(k)})^2 \right)^{1/2}$$

$$r = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha a_{k+1,k}^{(k)} \right)^{1/2}$$

$$w_1^{(k)} = w_2^{(k)} = \ldots = w_k^{(k)} = 0$$

$$w_{k+1}^{(k)} = \frac{a_{k+1,k}^{(k)} - \alpha}{2r}$$

$$w_j^{(k)} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{2r} \quad \text{لكل} \quad j = k+2, k+3, \ldots, n$$

$$P^{(k)} = I - 2\mathbf{w}^{(k)} \cdot (\mathbf{w}^{(k)})^t$$

و

$$A^{(k+1)} = P^{(k)} A^{(k)} P^{(k)}$$

حيث

$$A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k+1)} & a_{12}^{(k+1)} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21}^{(k+1)} & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_{k+1,k}^{(k+1)} & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & a_{k+1,k+2}^{(k+1)} \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \vdots & & & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

وباستمرار هذا النمط. تُصاغ المصفوفة ثلاثية الأقطار المتماثلة $A^{(n-1)}$. حيث

$$A^{(n-1)} = P^{(n-2)} P^{(n-3)} \cdots P^{(1)} A P^{(1)} \cdots P^{(n-3)} P^{(n-2)}$$

مثال 1 المصفوفة 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

متماثلة. وأول تطبيق لتحويل Householder هو

$$\alpha = -(1)\left(\sum_{j=2}^{4} a_{j1}^2 \right)^{1/2} = -3, \quad r = \left(\frac{1}{2}(-3)^2 - \frac{1}{2}(1)(-3) \right)^{1/2} = \sqrt{6}$$

$$w = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (0, 2, -1, 1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{10}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

باستمرار التكرار الثانية

$$\alpha = -\frac{5}{3}, \quad r = \frac{2\sqrt{5}}{3}, \quad w = \left(0, 0, 2\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^t, \quad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

وإن المصفوفة ثلاثية الأقطار المتماثلة هي

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{33}{25} & \frac{68}{75} \\ 0 & 0 & \frac{68}{75} & \frac{149}{75} \end{bmatrix}$$

تنفّذ الخوارزمية (5.9) طريقة Householder كما هي موضحة هنا على الرغم من الالتفاف على عمليات ضرب المصفوفة.

ALGORITHM
الخوارزمية
5.9

هاوسهولدر Householder's

لإيجاد مصفوفة ثلاثية الأقطار متماثلة $A^{(n-1)}$ ومماثلة للمصفوفة المتماثلة $A = A^{(1)}$. نبني المصفوفات $A^{(2)}, A^{(3)}, \dots, A^{(n-1)}$ الآتية. حيث $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ لكل $k = 1, 2, \dots, n-1$.

المدخلات: البعد n، مصفوفة A.

المخرجات: $A^{(n-1)}$ (يمكن إعادة كتابة A في كل خطوة).

الخطوة	المضمون
1	لكل $k = 1, 2, \dots, n-2$. نفذ الخطوات 2 - 14.

2	ضع $q = \sum_{j=k+1}^{n} \left(a_{jk}^{(k)}\right)^2$
3	إذا كان $a_{k+1,k}^{(k)} = 0$ فضع $\alpha = -q^{1/2}$ ما عدا ذلك فضع $\alpha = -\frac{q^{1/2} a_{k+1,k}^{(k)}}{\lvert a_{k+1,k}^{(k)}\rvert}$
4	ضع $RSQ = \alpha^2 - \alpha a_{k+1,k}^{(k)}$. (إرشاد: $RSQ = 2r^2$)
5	ضع $v_k = 0$. (إرشاد: $v_1 = \cdots = v_{k-1} = 0$ ولكن لا حاجة إليه). $v_{k+1} = a_{k+1,k}^{(k)} - \alpha$ ولكل $j = k+2, \ldots, n$. ضع $v_j = a_{jk}^{(k)}$ (إرشاد: $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2RSQ}}\right)\mathbf{v} = \frac{1}{2r}\mathbf{v}$)
6	لكل $j = k, k+1, \ldots, n$. ضع $u_j = \left(\frac{1}{RSQ}\right)\sum_{i=k+1}^{n} a_{ji}^{(k)} v_i$ (إرشاد: $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{RSQ}\right)A^{(k)}\mathbf{v} = \frac{1}{2r^2}A^{(k)}\mathbf{v} = \frac{1}{r}A^{(k)}\mathbf{w}$)
7	ضع $PROD = \sum_{i=k+1}^{n} v_i u_i$ (إرشاد: $PROD = \mathbf{v}^t\mathbf{u} = \frac{1}{2r^2}\mathbf{v}^t A^{(k)}\mathbf{v}$)
8	لكل $j = k, k+1, \ldots, n$. ضع $z_j = u_j - \left(\frac{PROD}{2RSQ}\right)v_j$ (إرشاد: $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \frac{1}{2RSQ}\mathbf{v}^t\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{1}{4r^2}\mathbf{v}^t\mathbf{u}\mathbf{v}$ $= \mathbf{u} - \mathbf{w}\mathbf{w}^t\mathbf{u} = \frac{1}{r}A^{(k)}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{w}^t\frac{1}{r}A^{(k)}\mathbf{w}$)
9	لكل $l = k+1, k+2, \ldots, n-1$. نفّذ الخطوتين 10 و 11. (إرشاد: احسب $A^{(k+1)} = A^{(k)} - \mathbf{v}\mathbf{z}^t - \mathbf{z}\mathbf{v}^t = (I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t)A^{(k)}(I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t)$)
10	لكل $j = l+1, \ldots, n$. ضع $a_{jl}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k)} - v_l z_j - v_j z_l$ $a_{lj}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k+1)}$
11	ضع $a_{ll}^{(k+1)} = a_{ll}^{(k)} - 2v_l z_l$
12	ضع $a_{nn}^{(k+1)} = a_{nn}^{(k)} - 2v_n z_n$

13	لكل $j = k+2, \ldots, n$. ضع $a_{kj}^{(k+1)} = a_{jk}^{(k+1)} = 0$
14	ضع $a_{k+1,k}^{(k+1)} = a_{k+1,k}^{(k)} - v_{k+1}z_k$ $a_{k,k+1}^{(k+1)} = a_{k+1,k}^{(k+1)}$ (إرشاد: العناصر الأخرى لـ $A^{(k+1)}$ هي نفسها التي لـ $A^{(k)}$.)
15	المخرجات ($A^{(n-1)}$) (لقد استكملت العملية. $A^{(n-1)}$ متماثلة. ثلاثية الأقطار. ومماثلة لـ A). توقف

■

ولتطبيق خوارزمية Householder لمصفوفة $n \times n$ معينة، يجب عمل التعديلات الآتية للأخذ في الحسبان إمكانية عدم التماثل.

الخطوة	التعديل
6	لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ ضع $u_j = \frac{1}{RSQ} \sum_{i=k+1}^{n} a_{ji}^{(k)} v_i$ $y_j = \frac{1}{RSQ} \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij}^{(k)} v_i$
8	لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ فضع $z_j = u_j - \frac{PROD}{RSQ} v_j$
9	لكل $l = k+1, k+2, \ldots, n$. نفِّذ الخطوتين 10 و11.
10	لكل $j = 1, 2, \ldots, k$ ضع $a_{jl}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k)} - z_j v_l$ $a_{lj}^{(k+1)} = a_{lj}^{(k)} - y_j v_l$
11	لكل $j = k+1, \ldots, n$ ضع $a_{jl}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k)} - z_j v_l - y_l v_j$

وبعد تعديل هذه الخطوات، احذف الخطوات (12 – 14) والمخرجات $A^{(n-1)}$.

لن تكون المصفوفة $A^{(n-1)}$ الناتجة ثلاثية الأقطار ما لم تكن المصفوفة الأصلية A متماثلة. وعلى أي حال فإن العناصر جميعها التي تقع تحت القطر الثانوي السفلي ستكون 0. إن مصفوفة من هذا النوع تسمى *upper Hessenberg*، بمعنى أن $H = (h_{ij})$ هي upper Hessenberg إذا كانت $h_{ij} = 0$ لـ $i \geq j+2$ جميعها.

سنتحقق في الفصل الآتي من كيفية تطبيق خوارزمية QR لتحديد القيم المميزة لـ $A^{(n-1)}$، التي هي نفسها لتلك التي للمصفوفة الأصلية A.

مجموعة التمارين 3.9 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة Householder's لوضع المصفوفات الآتية في صيغة ثلاثية الأقطار:

أ. $\begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix}$

2. استخدم طريقة Householder لوضع المصفوفات الآتية في صيغة ثلاثية الأقطر:

أ. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & -0.5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 8 & 0.25 & 0.5 & 2 & -1 \\ 0.25 & -4 & 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0 & 5 & 0.75 & -1 \\ 2 & 1 & 0.75 & 5 & -0.5 \\ -1 & 2 & -1 & -0.5 & 6 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

3. عدّل خوارزمية Householder (5.9) لحساب المصفوفات upper Hessenberg مماثلة والمصفوفات غير المتماثلة الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

4.9 الخوارزمية QR The QR Algorithm

إن طرائق الانكماش الموضحة في الفصل (2.9) ليست مناسبة عمومًا لحساب القيم المميزة جميعها لمصفوفة بسبب نمو خطأ تقريب. وسنعتمد في هذا الفصل خوارزمية QR بوصفها أسلوب تقليص المصفوفة وتحديد القيم المميزة جميعها لمصفوفة متماثلة في آن واحد.

ولتطبيق طريقة QR، نبدأ بمصفوفة متماثلة بصيغة ثلاثية الأقطار. بمعنى أن العناصر غير الصفرية فقط في المصفوفة تقع على القطر الرئيس أو على الأقطار الفرعية مباشرةً فوق القطر الرئيس أو تحته. فإذا لم تكن هذه هي صيغة المصفوفة المتماثلة فإن الخطوة الأولى هي تطبيق طريقة Householder لحساب مصفوفة ثلاثية الأقطار متماثلة ومماثلة للمصفوفة المعطاة، وبنفس القيم المميزة.

وسنفترض في بقية هذا الفصل أن المصفوفة المتماثلة التي حُسبت لها هذه القيم المميزة ثلاثية الأقطار. فإذا جعلنا A تمثّل مصفوفة من هذا النوع، يمكننا تبسيط الصيغة من خلال عنونة عناصر A كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix} \qquad (13.9)$$

فإذا كانت $b_2 = 0$ أو $b_n = 0$ فإن المصفوفة 1×1، $[a_1]$ أو $[a_n]$ تعطي قيمة مميزة a_1 أو a_n لـ A فورا.

عندما تكون $b_j = 0$ عند بعض قيم j حيث $2 < j < n$، يمكن اختصار المسألة إلى مصفوفات أصغر بدلًا من A كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{j-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{j-1} & a_{j-1} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} a_j & b_{j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{j+1} & a_{j+1} & b_{j+2} & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{j+2} & a_{j+2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix} \tag{14.9}$$

فإذا لم تكن أي من b_j صفرًا فإن طريقة QR تتقدم من خلال صياغة متتالية مصفوفات $A = A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots$ كما يلي:

1. تُحلّل $A = A^{(1)}$ بوصفها حالة ضرب $A^{(1)} = Q^{(1)}R^{(1)}$، حيث إن $Q^{(1)}$ متعامدة و$R^{(1)}$ مثلث علوي.
2. $A^{(2)}$ معرفة بأنها $A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)}$.

تُحلّل $A^{(i)}$ بالتحديد بوصفها حالة ضرب $A^{(i)} = Q^{(i)}R^{(i)}$ لمصفوفة متعامدة $Q^{(i)}$ ومصفوفة مثلث علوي $R^{(i)}$. ومن ثم فإن $A^{(i+1)}$ تعرّف من خلال ضرب $R^{(i)}$ مع $Q^{(i)}$ في الاتجاه المعاكس $A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)}$. ولأن $Q^{(i)}$ متعامدة، فإن $R^{(i)} = Q^{(i)t}A^{(i)}$

و
$$A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)} = (Q^{(i)t}A^{(i)})Q^{(i)} = Q^{(i)t}A^{(i)}Q^{(i)} \tag{15.9}$$

ولذلك فإن $A^{(i+1)}$ متماثل مع القيم المميزة نفسها لـ $A^{(i)}$. ومن خلال أسلوب تعريف $R^{(i)}$ و $Q^{(i)}$، فإننا نضمن أيضا كون $A^{(i+1)}$ ثلاثية الأقطار. مستمرين في الاستنتاج. فإن لـ $A^{(i+1)}$ القيم المميزة نفسها التي للمصفوفة الأصلية A. وتتجه $A^{(i+1)}$ لتكوّن مصفوفة قطرية بالقيم المميزة لـ A ضمن القطر.

ولتوضيح عملية إنشاء مصفوفتين تحليليتين $Q^{(i)}$ و $R^{(i)}$، فإننا نحتاج إلى تعبير "مصفوفة تدوير rotation matrix".

تعريف 18.9

تختلف مصفوفة تقريب rotation matrix P عن المصفوفة الحيادية ذات العناصر الأربعة غالبا. هذه العناصر الأربعة تكون بالصيغة

$$p_{ii} = p_{jj} = \cos\theta \quad \text{و} \quad p_{ij} = -p_{ji} = \sin\theta$$

لقيمة ما θ و بعض $i \neq j$. ■

إذا كانت A عبارة عن مصفوفة تدوير 2×2

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{[illegible]} \\ \sin\theta & \text{[illegible]} \end{bmatrix}$$

فإن A هي مصفوفة تدوير مع عقارب الساعة بزاوية θ

ومن السهل إثبات (انظر التمرين 8) أنه لأي مصفوفة تدوير فإن المصفوفة AP تختلف عن A فقط في الأعمدة i و j، وأن المصفوفة PA تختلف عن A فقط في الصفوف i و j. وعند أي $i \neq j$ فإن الزاوية θ يمكن اختيارها بحيث يكون للضرب PA عنصر صفري لـ $(PA)_{ij}$. وبالإضافة إلى ذلك فإن كل مصفوفة تدوير P هي متعامدة لكون تعريف يؤدي إلى أن $PP^t = I$. إن عملية تحليل $A^{(1)}$ إلى $A^{(1)} = Q^{(1)}R^{(1)}$ تستخدم الضرب لـ $n-1$ من مصفوفات تقريب لإنشاء

$$R^{(1)} = P_n P_{n-1} \cdots P_2 A^{(1)}$$

نختار في البداية مصفوفة تقريب P_2 مع

$$p_{12} = -p_{21} = \sin\theta_2 \quad \text{و} \quad p_{11} = p_{22} = \cos\theta_2$$

حيث إن

$$\cos\theta_2 = \frac{a_1}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} \qquad \text{و} \qquad \sin\theta_2 = \frac{b_2}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}}$$

ومن ثم فإن للمصفوفة

$$A_2^{(1)} = P_2 A^{(1)}$$

صفرًا في الموقع $(2, 1)$، أي في الصف الثاني والعمود الأول لكون العنصر $(2, 1)$ في $A_2^{(1)}$ هو

$$(-\sin\theta_2)a_1 + (\cos\theta_2)b_2 = \frac{-b_2 a_1}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} + \frac{a_1 b_2}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} = 0$$

ولأن عملية الضرب $P_2A^{(1)}$ تؤثِّر في كلا الصفين 1 و 2 لـ $A^{(1)}$، فإن المصفوفة الجديدة لا تحتفظ بالضرورة بعناصر صفرية في المواقع $(1, 3), (1, 4), \ldots, (1, n)$. وعلى أي حال فإن $A^{(1)}$ ثلاثية الأقطار، وعليه فإن العناصر $(1, 4), \ldots, (1, n)$ لـ $A_2^{(1)}$ يجب أن تكون 0. ويمكن للعنصر $(1, 3)$ فقط الذي في الصف الأول والعمود الثالث ألا يكون صفرًا.

وتُختار المصفوفة P_k عمومًا بحيث لا يكون العنصر $(k-1, k+1)$ صفرًا. وصيغة المصفوفة $A_k^{(1)}$

$$A_k^{(1)} = \begin{bmatrix} z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & z_{k-1} & q_{k-1} & r_{k-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & x_k & y_k & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & b_{k+1} & a_{k+1} & b_{k+2} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

وصيغة P_{k+1}

$$P_{k+1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|cc|c} I_{k-1} & & O & O \\ \hline & c_{k+1} & s_{k+1} & \\ O & & & O \\ & -s_{k+1} & c_{k+1} & \\ \hline O & & O & I_{n-k-1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow k \text{ الصف} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \\ k \text{ العمود} \end{array} \qquad (16.9)$$

حيث يعبر O عن أن المصفوفة بأبعاد مناسبة مع عناصرها كلها أصفار.

يُختار الثابتان $c_{k+1} = \cos\theta_{k+1}$ و $s_{k+1} = \sin\theta_{k+1}$ في P_{k+1} بحيث يكون العنصر $(k+1\ \ k)$ في $A^{(1)}_{k+1}$ صفرًا، بمعنى أن $s_{k+1}x_k - c_{k+1}b_{k+1} = 0$. ولأن $c^2_{k+1} + s^2_{k+1} = 1$، فإن حلّ هذه المعادلة هو

$$c_{k+1} = \frac{x_k}{\sqrt{b^2_{k+1} + x^2_k}} \quad \text{و} \quad s_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{\sqrt{b^2_{k+1} + x^2_k}}$$

وإن صيغة $A^{(1)}_{k+1}$ هي

$$A^{(1)}_k = \begin{bmatrix}
z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \cdots & & & & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\
\vdots & & 0 & z_k & q_k & r_k & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & & 0 & x_{k+1} & y_{k+1} & 0 & \ddots & 0\\
\vdots & & & & b_{k+2} & a_{k+2} & b_{k+3} & \ddots & 0\\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & & & & & \ddots & \ddots & b_n\\
0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & b_n & a_n
\end{bmatrix}$$

وبتقدم هذا الإنشاء في المتتالية $P_2, \ldots, P_n$ نحصل على المصفوفة القطرية العليا

$$R^{(1)} \equiv A^{(1)}_n = \begin{bmatrix}
z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & r_{n-2}\\
\vdots & & & \ddots & z_{n-1} & q_{n-1}\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x_n
\end{bmatrix}$$

والنصف الآخر من عملية التحليل QR هو المصفوفة

$$Q^{(1)} = P^t_2 P^t_3 \cdots P^t_n$$

لأن تعامديةمصفوفات تقريب تؤدي إلى أن

$$Q^{(1)} R^{(1)} = (P^t_2 P^t_3 \cdots P^t_n) \cdot (P_n \cdots P_3 P_2) A^{(1)} = A^{(1)}$$

إن المصفوفة $Q^{(1)}$ متعامدة، لأن

$$(Q^{(1)})^t Q^{(1)} = (P_2^t P_3^t \cdots P_n^t)^t (P_2^t P_3^t \cdots P_n^t) = (P_n \cdots P_3 P_2) \cdot (P_2^t P_3^t \cdots P_n^t) = I$$

وبالإضافة إلى ذلك فإن $Q^{(1)}$ هي مصفوفة upper-Hessenberg. ولكي ترى لماذا يعدّ هذا صحيحاً، يمكنك متابعة الخطوات في التمرينين (9) و (10).

ونتيجة لذلك فإن $A^{(2)} = R^{(1)} Q^{(1)}$ هي مصفوفة upper-Hessenberg أيضاً، لأن عملية ضرب $Q^{(1)}$ من الجهة اليسرى في المصفوفة المثلثية العليا $R^{(1)}$ لا تؤثّر في عناصر المثلث السفلي. وهذا يؤدي إلى أن $A^{(2)}$ ثلاثية الأقطار في الحقيقة، لكوننا قد عرفنا أنها متماثلة.

إن العناصر اللاقطرية لـِ $A^{(2)}$ ستكون عموماً أصغر قيمة من عناصر $A^{(1)}$ المقابلة لها، ولذلك فإن $A^{(2)}$ هي أقرب إلى أن تكون مصفوفة قطرية من $A^{(1)}$. كرر العملية لإنشاء ... ،$A^{(3)}$، $A^{(4)}$.

إذا كان للقيم المميزة لـِ A قيم مختلفة مع $|\lambda_n| > \cdots > |\lambda_2| > |\lambda_1|$. فإن معدل تقارب العنصر $b_{j+1}^{(i+1)}$ إلى الصفر في المصفوفة $A^{(i+1)}$ يعتمد على النسبة $|\lambda_{j+1}/\lambda_j|$. (انظر [Fr]) إن معدل تقارب $b_{j+1}^{(i+1)}$ إلى الصفر يحدد المعدل الذي يتقارب معه العنصر $a_j^{(i+1)}$ للقيمة J المميزة λ_j. لذلك فإن معدل التقارب يمكن أن يكون بطيئاً إذا كان $|\lambda_{j+1}/\lambda_j|$ قريباً من الباب.

ولتسريع هذا التقارب، فثمة أسلوب تنقل shifting technique مُطبّق مماثل لذلك الذي استُخدم مع طريقة عكس القوة في الفصل (2.9). يُختار الثابت σ قريباً من قيمة مميزة لـِ A. وهذا من شأنه أن يعدل عملية التحليل في المعادلة (15.9) لاختيار $Q^{(i)}$ و$R^{(i)}$ بحيث تكون

$$A^{(i)} - \sigma I = Q^{(i)} R^{(i)} \tag{17.9}$$

ونتيجة لذلك، فإن المصفوفة $A^{(i+1)}$ تعرف لتكون

$$A^{(i+1)} = R^{(i)} Q^{(i)} + \sigma I \tag{18.9}$$

ومع هذا التعديل فإن معدل تقارب $b_{j+1}^{(i+1)}$ إلى الصفر يعتمد على النسب $|(\lambda_{j+1} - \sigma)/(\lambda_j - \sigma)|$. وهذا يمكن أن يؤدي إلى تطوير معنوي مقارنة بمعدل تقارب $a_j^{(i+1)}$ إلى λ_j إذا ما كانت σ قريبة من λ_{j+1}، ولكنها ليست كذلك بالنسبة إلى λ_j.

نغير هنا σ عند كل خطوة بحيث عندما تكون لـِ A قيم مميزة مختلفة، فإن $b_n^{(i+1)}$ تتقارب إلى 0 أسرع من $b_j^{(i+1)}$ ولأي عدد صحيح j أصغر من n. وعندما تكون $b_n^{(i+1)}$ صغيرة بما يكفي، فإننا نفترض أن $\lambda_n \approx a_n^{(i+1)}$، نحذف السطر والعمود n للمصفوفة، ونتقدم بنفس المنهجية لإيجاد تقريب إلى λ_{n-1}. وتستمر العملية حتى يتحدد التقريب لكل قيمة مميزة.

إن أسلوب التنقل يُختار عند الخطوة i ثابت التنقل σ_i، حيث إن σ_i هي القيمة المميزة للمصفوفة

$$E^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{n-1}^{(i)} & b_n^{(i)} \\ b_n^{(i)} & a_n^{(i)} \end{bmatrix}$$

التي تكون أكثر قربًا إلى $a_n^{(i)}$. ويترجم هذا التنقل القيم المميزة لـ A بالعامل σ_i. ومع أسلوب التنقل هذا، فإن التقارب يكون في العادة تكعيبيًا. (انظر [WR, p. 270]) تتابع الطريقة هذه التنقلات حتى تكون $b_n^{(i+1)} \approx 0$، ومن ثم إضافة التنقلات إلى $a_n^{(i+1)}$ لتقريب القيمة المميزة λ_n. فإذا كان لـ A قيم مميزة بنفس المقدار فإن $b_j^{(i+1)}$ قد يقترب إلى 0 لبعض $j \neq n$ بمعدل أسرع مما هو عليه $b_n^{(i+1)}$. وفي هذه الحالة فإن أسلوب فصل المصفوفة الموضح في المعادلة (14.9) يمكن تطبيقه لتقليص المسألة إلى أخرى تتضمن زوجًا من المصفوفات من الرتبة منخفضة.

مثال 1 لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 \\ b_2^{(1)} & a_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\ 0 & b_3^{(1)} & a_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

إن إيجاد معلمة تسريع الانتقال يتطلب إيجاد القيم المميزة لـ

$$\begin{bmatrix} a_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\ b_3^{(1)} & a_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

التي هي $\mu_1 = 4$ و $\mu_2 = 2$. إن اختيار القيمة المميزة الأكثر قربًا إلى $a_3^{(1)} = 3$ هو عشوائي ونحن نختار $\mu_2 = 2$ وننتقل بهذا المقدار. لذا فإن $\sigma_1 = 2$ و

$$\begin{bmatrix} d_1 & b_2^{(1)} & 0 \\ b_2^{(1)} & d_2 & b_3^{(1)} \\ 0 & b_3^{(1)} & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وباستمرار العملية الحسابية نحصل على

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = \sqrt{2}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } q_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = 0, \quad r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومن ثم فإن

$$A_2^{(1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وأبعد من ذلك، فإن

$$z_2 = 1, \quad c_3 = 0, \quad \sigma_3 = 1, \quad q_2 = 1, \quad x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومن ثم فإن

$$R^{(1)} = A_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

ولحساب $A^{(2)}$، لدينا

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_1^{(2)} = 2, \quad b_2^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_2^{(2)} = 1, \quad b_3^{(2)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_3^{(2)} = 0$$

ومن ثم فإن

$$A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ولقد استكمل تكرارًا واحدًا لطريقة QR. وبما أن $b_2^{(2)} = \sqrt{2}/2$ و $b_3^{(2)} = -\sqrt{2}/2$ غير صغيرتين، فإن تكرارًا آخر لطريقة QR قد يُنفّذ. ونحسب في هذا التكرار القيم المميزة $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$ للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_2^{(2)} & b_3^{(2)} \\ b_3^{(2)} & a_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ونختار $\sigma_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ القيمة المميزة الأقرب إلى $a_3^{(2)} = 0$. ويعطينا استكمال العملية الحسابية

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.6720277 & 0.37597448 & 0 \\ 0.37597448 & 1.4736080 & 0.030396964 \\ 0 & 0.030396964 & -0.047559530 \end{bmatrix}$$

فإذا كانت $b_3^{(3)} = 0.030396964$ صغيرة بما يكفي فإن التقريب لقيمة المميزة λ_3 هو 1.5864151. والمجموع لـ $a_3^{(3)} = -0.047559530$، والانتقالات هي $\sigma_1 + \sigma_2 = 2 + (1 - \sqrt{3})/2$ وبحذف كل من الصف والعمود الثالث نحصل على

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.6720277 & 0.37597448 \\ 0.37597448 & 1.4736080 \end{bmatrix}$$

الذي له قيم مميزة $\mu_1 = 2.7802140$ و $\mu_2 = 1.3654218$. وبإضافة الانتقال نحصل على التقريبات

$$\lambda_1 \approx 4.4141886 \text{ و } \lambda_2 \approx 2.9993964$$

ولأن القيم المميزة الحقيقية للمصفوفة A هي 4.41420, 3.00000 و 1.58579، فإن طريقة QR قد أعطت أربع خانات معنوية دقيقة في إعادتين فقط.

تنفّذ الخوارزمية (6.9) طريقة QR.

ALGORITHM

الخوارزمية

6.9

طريقة QR

لإيجاد القيم المميزة لمصفوفة $n \times n$ ثلاثية الأقطار ومتماثلة

$$A \equiv A_1 = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2^{(1)} & a_2^{(1)} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_n^{(1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n^{(1)} & a_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

المدخلات: $n; a_1^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, b_2^{(1)}, \ldots, b_n^{(1)}$، حد سماح TOL، أكبر عدد من التكرار M.

المخرجات: قيم مميزة لـ A، أو توصية بتقسيم A، أو عبارة تفيد تجاوز أكبر عدد من التكرارات.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$ $SHIFT = 0$ (انتقال تجميعي)
2	ما دام $k \le M$. فنفّذ الخطوات 3 – 19. (تختبر الخطوات 3 – 7 النجاح).
3	إذا كانت t $\lvert b_n^{(k)} \rvert \le TOL$ فضع $\lambda = a_n^{(k)} + SHIFT$ المخرجات (λ) فضع $n = n - 1$
4	إذا كانت $\lvert b_2^{(k)} \rvert \le TOL$ ضع $\lambda = a_1^{(k)} + SHIFT;$ المخرجات (λ) فضع $n = n - 1$ $a_1^{(k)} = a_2^{(k)}$ وعند $j = 2, \ldots, n$. ضع $a_j^{(k)} = a_{j+1}^{(k)}$ $b_j^{(k)} = b_{j+1}^{(k)}$
5	إذا كانت $n = 0$ فتوقف.
6	إذا كانت $n = 1$ فضع $\lambda = a_1^{(k)} + SHIFT$ المخرجات (λ) توقف.
7	عند $j = 3, \ldots, n - 1$. إذا كانت $\lvert b_j^{(k)} \rvert \le TOL$ فإن المخرجات (قسّم إلى $b_{j-1}^{(k)}, \ldots, b_2^{(k)}, a_{j-1}^{(k)}, \ldots, a_1^{(k)}$ و $(SHIFT, b_n^{(k)}, \ldots, b_{j+1}^{(k)}, a_n^{(k)}, \ldots, a_j^{(k)})$ توقف.
8	ضع $b = -(a_{n-1}^{(k)} + a_n^{(k)})$ (احسب انتقالا). $c = a_n^{(k)} a_{n-1}^{(k)} - [b_n^{(k)}]^2$ $d = (b^2 - 4c)^{1/2}$
9	إذا كانت $b > 0$ فضع $\mu_1 = -2c/(b + d)$ $\mu_2 = -(b + d)/2$ وغير ذلك، ضع $\mu_1 = (d - b)/2$ $\mu_2 = 2c/(d - b)$

10	إذا كانت $n = 2$ ضع $\lambda_1 = \mu_1 + SHIFT$ $\lambda_2 = \mu_2 + SHIFT$ المخرجات (λ_1, λ_2) توقف.
11	اختر σ بحيث $\lvert\sigma - a_n^{(k)}\rvert = \min\{\lvert\mu_1 - a_n^{(k)}\rvert, \lvert\mu_2 - a_n^{(k)}\rvert\}$
12	ضع $SHIFT = SHIFT + \sigma$ (تجميع الانتقال).
13	عند $j = 1, \ldots, n$، ضع $d_j = a_j^{(k)} - \sigma$ (نفّذ انتقالاً).
14	ضع $x_1 = d_1$. (تحسب الخطوتان 14 و 15 $R^{(k)}$.) $y_1 = b_2$
15	عند $j = 2, \ldots, n$، ضع $z_{j-1} = \left\{x_{j-1}^2 + \left[b_j^{(k)}\right]^2\right\}^{1/2}$ $c_j = \dfrac{x_{j-1}}{z_{j-1}}$ $\sigma_j = \dfrac{b_j^{(k)}}{z_{j-1}}$ $q_{j-1} = c_j y_{j-1} + s_j d_j$ $x_j = -\sigma_j y_{j-1} + c_j d_j$ فإذا كانت $j \neq n$ فضع $r_{j-1} = \sigma_j b_{j+1}^{(k)}$ $y_j = c_j b_{j+1}^{(k)}$ (حُسبت $A_j^{(k)} = P_j A_{j-1}^{(k)}$ توّاً، و $R^{(k)} = A_n^{(k)}$.)
16	ضع $z_n = x_n$ (تحسب الخطوات 16 – 18 $A^{(k+1)}$). $a_1^{(k+1)} = \sigma_2 q_1 + c_2 z_1$ $b_2^{(k+1)} = \sigma_2 z_2$
17	عند $j = 2, 3, \ldots, n-1$، ضع $a_j^{(k+1)} = \sigma_{j+1} q_j + c_j c_{j+1} z_j$ $b_{j+1}^{(k+1)} = \sigma_{j+1} z_{j+1}$
18	ضع $a_n^{(k+1)} = c_n z_n$
19	ضع $k = k + 1$
20	المخرجات (تم تجاوز أكبر عدد من التكرارات). (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

بالإمكان استخدام عملية مماثلة لإيجاد التقريبات للقيم المميزة لصفوفة $n \times n$ matrix غير متماثلة. حيث تتقلّص المصفوفة أولاً لمصفوفة upper-Hessenberg H مماثلة مستخدمين خوارزمية هاوسهولدر للمصفوفات غير المتماثلة.

تفترض عملية QR التحليلية الصيغة الآتية، أولاً

$$H \equiv H^{(1)} = Q^{(1)} R^{(1)} \qquad (19.9)$$

وبعد ذلك يُعرّف $H^{(2)}$ من خلال

$$H^{(2)} = R^{(1)} Q^{(1)} \qquad (20.9)$$

وتحليله إلى

$$H^{(2)} = Q^{(2)} R^{(2)} \qquad (21.9)$$

وتستمر طريقة التحليل في الاتجاه نفسه كما في خوارزمية QR. وتُختار المصفوفات بوضع أصفار لعناصر مناسبة للمصفوفة، وتُستخدم عملية انتقال شبيهة بتلك التي في طريقة QR. وعلى أي حال فإن الانتقال يكون أكثر تعقيدًا إلى حدٍّ ما بالنسبة إلى المصفوفات غير المتماثلة؛ لأنه قد تظهر قيم مميزة مركبة وبالقيمة نفسها. وإن عملية الانتقال تعدّل الحسابات في المعادلات (19.9)، (20.9) و (21.9) للحصول على طريقة QR مضاعفة

$$H_{(1)} - \sigma_1 I = Q_{(1)} R_{(1)},\ H_{(2)} = R_{(1)} Q_{(1)} + \sigma_1 I,\ H_{(2)} - \sigma_2 I = Q_{(2)} R_{(2)} \text{ و } H_{(3)} = R_{(2)} Q_{(2)} + \sigma_2 I$$

حيث إن σ_1 و σ_2 عبارة عن متقارنات مركبة، و $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots$ هي مصفوفات upper-Hessenberg حقيقية.

ويمكن إيجاد طريقة QR بشرح كامل في أعمال Wilkinson [Wil2]. وتوجد خوارزميات وبرامج مفصلة لهذه الطريقة، وأغلب الطرائق شائعة الاستخدام موجودة في [WR]. ونحن نوجّه القارئ إلى هذه الأعمال فيما إذا لم تعطِ الطريقة التي نحن بصددها نتائج مرضية. ويمكن تطبيق طريقة QR بأسلوب ينتج متجهات مميزة وقيمًا مميزة لمصفوفة، ولكن الخوارزمية (6.9) لم تصمّم لتحقيق ذلك. فإذا وجدت حاجة إلى المتجهات المميزة لمصفوفة متماثلة وإلى القيم المميزة فإننا نقترح استخدام طريقة معكوس القوة بعد تطبيق الخوارزميتين (5.9) و(6.9) أو استخدام واحدة من أقوى الأساليب المذكورة في [WR].

مجموعة التمارين 4.9 EXERCISE SET

1. طبّق إعادتين لخوارزمية QR على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

هـ. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ و. $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$

2. طبِّق إعادتين لخوارزمية QR على المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. استخدم الخوارزمية QR لتحديد – ضمن 10^{-5} – القيم المميزة جميعها للمصفوفات في التمرين (1).

4. استخدم الخوارزمية QR لتحديد – ضمن 10^{-5} – القيم المميزة جميعها للمصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5. استخدم طريقة معكوس القوة لتحديد – ضمن 10^{-5} – المتجهات المميزة جميعها للمصفوفات في التمرين (1).

6. استخدم طريقة معكوس القوة لتحديد – ضمن 10^{-5} – المتجهات المميزة جميعها للمصفوفات في التمرين (2).

7. أ. أثبت أن مصفوفة تقريب

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

التي تطبّق على المتجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$ لها أثر هندسي لتدوير x عبر الزاوية θ دون تغيير قيمتها بالنسبة إلى $\|\cdot\|_2$.

ب. أثبت أن قيمة x بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$ يمكن أن تتغير من خلال مصفوفة تقريب.

8. لتكن P مصفوفة تدوير مع $p_{ii} = p_{jj} = \cos\theta$ و $p_{ij} = -p_{ji} = \sin\theta$ لكل $i < j$. أثبت أنه لأي مصفوفة A بحجم $n \times n$

$$(AP)_{pq} = \begin{cases} a_{pq} & \text{إذا كان } q \neq i, j \\ (\cos\theta)a_{pj} + (\sin\theta)a_{pi} & \text{إذا كان } q = j \\ (\cos\theta)a_{pi} - (\sin\theta)a_{pj} & \text{إذا كان } q = i \end{cases}$$

$$(PA)_{pq} = \begin{cases} a_{pq} & \text{إذا كان } p \neq i, j \\ (\cos\theta)a_{jq} - (\sin\theta)a_{iq} & \text{إذا كان } p = j \\ (\sin\theta)a_{jq} + (\cos\theta)a_{iq} & \text{إذا كان } p = i \end{cases}$$

9. أثبت أن حاصل ضرب مصفوفة مثلثية عليا (من اليسار) في مصفوفة upper-Hessenberg ينتج مصفوفة upper-Hessenber.

10. لتمثل P_k مصفوفة تدوير بالصيغة المعطاة في المعادلة (16.9):

أ. أثبت أنه غالبًا ما تختلف $P_2^t P_3^t$ عن مصفوفة مثلثية عليا في الموقعين $(2, 1)$ و $(3, 2)$ فقط.

ب. افترض أنه غالبًا ما تختلف $P_2^t P_3^t \cdots P_k^t$ عن مصفوفة مثلثية عليا في المواقع $(2, 1), (3, 2), \ldots, (k, k-1)$ فقط. أثبت أنه غالبًا ما تختلف $P_2^t P_3^t \cdots P_k^t P_{k+1}^t$ عن مصفوفة مثلثية عليا فقط في المواقع $(2, 1), (3, 2), \ldots, (k, k-1), (k+1, k)$.

ج. أثبت أن المصفوفة $P_2^t P_3^t \cdots P_n^t$ هي upper Hessenberg.

11. تتضح طريقة جاكوبي Jacobi's method لمصفوفة متماثلة A عمومًا من خلال

$$A_{i+1} = P_i A_i P_i^t \text{ و } A_2 = P_1 A_1 P_1^t \text{ ، } A_1 = A$$

تتجه المصفوفة A_{i+1} إلى مصفوفة قطرية. إذ تُختار مصفوفة تدوير لتقليص عنصر لاقطري كبير في A_i. افترض أن $a_{j,k}$ و $a_{k,j}$ قد وُضعا في اتجاه الصفر. حيث $j \neq k$. فإذا كان $a_{jj} \neq a_{kk}$ فإن

$$(P_i)_{jj} = (P_i)_{kk} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}}\right)}, \quad (P_i)_{kj} = \frac{c}{2(P_i)_{jj}\sqrt{c^2 + b^2}} = -(P_i)_{jk}$$

حيث إن

$$b = |a_{jj} - a_{kk}| \text{ و } c = 2a_{jk}\operatorname{sgn}(a_{jj} - a_{kk})$$

أو إذا كان $a_{jj} = a_{kk}$ فإن

$$(P_i)_{kj} = -(P_i)_{jk} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } (P_i)_{jj} = (P_i)_{kk} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

طوّر خوارزمية لتنفيذ طريقة جاكوبي من خلال وضع $a_{21} = 0$، وبعد ذلك ضع

$$a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, \ldots, a_{n,1}, \ldots, a_{n,n-1}$$

لتكون بدورها صفرًا. ويُكرّر هذا حتى تُحسب المصفوفة A مع

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}^{(k)}|$$

صغيرة بما يكفي. ويمكن تقريب القيم المميزة لِـ A من خلال العناصر القطرية لِـ A_k.

12. كرّر التمرين (3) مستخدمًا طريقة جاكوبي.

13. في المثال الذي تصدر هذا الفصل. يجب حلُّ النظام الخطي $A\mathbf{w} = -0.04(\rho/p)\lambda\mathbf{w}$ بالنسبة إلى $\mathbf{w}$ و λ.

ولتقريب القيم المميزة λ_i لنظام Sturm-Liouville:

أ. أوجد القيم المميزة الأربع جميعها $\mu_1, \ldots, \mu_4$ للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ضمن 10^{-5}.

ب. قرّب القيم المميزة $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ للنظام بدلالة ρ و p.

14. المصفوفة $(m-1) \times (m-1)$ ثلاثية الأقطار

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha & 1-2\alpha \end{bmatrix}$$

داخلة ضمن طريقة الفرق الأمامي لحلّ معادلة الحرارة. (انظر الفصل 2.2) ولاستقرار الطريقة فإننا نحتاج إلى $\rho(A) < 1$. ومع $m = 11$، قرب القيم المميزة لـ A لكل مما يلي

أ. $\alpha = \frac{1}{4}$ ب. $\alpha = \frac{1}{2}$ ج. $\alpha = \frac{3}{4}$

متى تكون الطريقة مستقرة؟

15. القيم المميزة للمصفوفة A في التمرين (14) هي

$$\lambda_i = 1 - 4\alpha\left(\sin\frac{\pi i}{2m}\right)^2 \quad \text{عند} \quad i = 1, \ldots, m-1$$

قارن التقريبات في التمرين (14) بالقيم المميزة الحقيقية. ومرة أخرى متى تكون الطريقة مستقرة؟

5.9 مسح الطرائق والبرمجيات Survey Of Methods And Software

ناقشنا في هذا الباب تقريب القيم المميزة والمتجهات المميزة. وإن دوائر Geršgorin Circles تعطي تقريبًا خشنًا لموقع القيم المميزة لمصفوفة. ويمكن استخدام طريقة القوة لإيجاد القيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقابل لها لمصفوفة A. فإذا كانت A متماثلة فإن طريقة القوة المتماثلة تعطي تقاربًا أسرع للقيمة المميزة المهيمنة والمتجه المميز المقابل لها. ستحدد طريقة القوة المتماثلة القيمة المميزة الأقرب إلى القيمة المعطاة والمتجه المميز المقابل لها. وتُستخدم هذه الطريقة غالبًا في تنقية تقريب القيمة المميزة التي وُجدت بأساليب أخرى.

تعطي طرائق الانكماش، مثل Wielandt deflation قيمًا مميزة أخرى في حال معرفة القيمة المميزة المهيمنة. وتُستخدم هذه الطرائق في حال كون المطلوب هو عددًا قليلًا فقط من القيم المميزة، لكونها معرضة لخطأ تقريب. ويجب استخدام طريقة معكوس القوة لتحسين دقة تقريب القيم المميزة المستخرجة بأسلوب الانكماش.

وتُستخدم الطرائق المستندة إلى تحويلات التشابه، مثل طريقة هاوسهولدر Householder في قلب المصفوفة المتماثلة إلى مصفوفة مماثلة ثلاثية الأقطار (أو إلى upper-Hessenberg إذا لم تكن المصفوفة متماثلة). ويمكن عندئذٍ تطبيق أساليب مثل طريقة QR على مصفوفة ثلاثية الأقطار (أو upper-Hessenberg) لإيجاد تقريبات للقيم المميزة جميعها. ويمكن إيجاد المتجهات المميزة المقابلة لها باستخدام طريقة التكرار، مثل طريقة معكوس القوة أو بتعديل طريقة QR لتتضمن تقريب المتجهات المميزة. لقد اقتصرت دراستنا على المصفوفات المتماثلة وعرضنا طريقة QR فقط عند حساب القيم المميزة لحالة التماثل.

وتستند البرمجيات في مكتبات IMSL و NAG إلى تلك التي ضمن الحزم EISPACK و LAPACK والتي نُوقشت في الفصل (4.1). وتحوّل البرمجيات المصفوفة إلى صيغة مناسبة لطريقة QR أو أحد تعديلاتها مثل طريقة QL. وتقرب البرمجيات للقيم المميزة جميعها، ويمكنها تقريب المتجه المميز لكل قيمة مميزة. وهناك برمجيات خاصة لإيجاد للقيم المميزة جميعها ضمن فترة أو منطقة معينة أو هناك قيمة مميزة أكبر أو أصغر. والبرمجيات متاحة أيضًا لتحديد دقة تقريب القيمة المميزة وحساسية العملية تجاه خطأ تقريب.

إن برنامج LAPACK routine SGEBAL يهيئ مصفوفة غير متماثلة حقيقية A لعمليات أخرى. إنه يحاول استخدام مصفوفات التباديل لتحويل A إلى صيغة قاطع مثلثي علوي مماثل. وتُستخدم

تحويلات التشابه لموازنة الصفوف والأعمدة في معيار. ويمكن عندئذ استخدام البرنامج SGEHRD لقلب A إلى مصفوفة upper-Hessenberg مماثلة H. وتتقلص المصفوفة H بعدئذ عبر SHSEQR إلى صيغة Schur وهي STS^t. حيث S متعامدة ويتضمّن قطر T القيم المميزة لـ A. ويمكن عندئذٍ استخدام STREVC لإيجاد المتجهات المميزة المقابلة.

يستخدم البرنامج LAPACK routine SSYTRD لتقليص مصفوفة متماثلة حقيقية A لمصفوفة مثلثية مماثلة عبر طريقة هاوسهولدر Householder's. ويستخدم البرنامج SSTEQR خوارزمية QR المتنقلة ذاتيًا لإيجاد للقيم المميزة جميعها والمتجهات المميزة لـ A.

تعطي البرمجية IMSL subroutine EVLRG القيم المميزة كلها لـ A بترتيب متصاعد للقيم. وهذه البرمجية توازن أولًا المصفوفة A باستخدام نسخة معدلة من برنامج EISPACK routine BALANC بحيث تكون مجاميع قيم العناصر في كل صف وفي كل عمود متساوية تقريبًا. ويؤدي هذا إلى استقرار أكثر للعمليات الحسابية الآتية.

وأخيرًا ينفذ EVLRG تحويلات التشابه. كما في طريقة هاوسهولدر لتقليص A إلى مصفوفة upper-Hessenberg مماثلة. هذا الفقرة مماثل لبرمجية EISPACK subroutine ORTHES. وأخيرًا فإن خوارزمية QR المتنقلة تنفّذ لإيجاد للقيم المميزة جميعها. وهذا الفقرة مماثل للبرمجية HQR في EIS-PACK. البرمجية IMSL subroutine EVCRG هي نفس البرمجية EVLRG إلا أنه قد حُسبت المتجهات المميزة المقابلة. وإن البرمجية EVLSF تحسب القيم المميزة لمصفوفة متماثلة حقيقية A. وتتقلص المصفوفة A أولًا إلى صيغة ثلاثية الأقطار باستخدام تعديل برنامج EISPACK routine TRED2 الذي هو انحراف عن طريقة QR. وتسمى طريقة QL الضمنية. البرمجية EVCSF هي نفسها البرمجية EVLSF إلا أن المتجهات المميزة المقابلة تُحسب أيضًا. وأخيرًا EVLRH و EVCRH يحسبان للقيم المميزة جميعها لمصفوفة upper-Hessenberg A بالإضافة إلى أن EVCRH تحسب المتجهات المميزة. وتستند هذه البرمجيات إلى البرمجيات HQR و HQR2 على التوالي. في EISPACK. إن مكتبة NAG فيها برمجيات مماثلة تستند إلى برنامج EISPACK. وتحسب البرمجية F02EBF القيم المميزة لمصفوفة حقيقية المتجهات المميزة اختياريًّا. ويجب أن تتوازن المصفوفة أولاً. ثم تتقلص إلى صيغة upper-Hessenberg لطريقة QR فإذا كان المطلوب هو القيم المميزة فقط فإن الخوارزمية تستخدم طريقة Hessenberg QR لحساب القيم المميزة. وإذا كان المطلوب أيضًا حساب المتجهات المميزة، فعندئذٍ يُستخدم تحليل Schur. تُستخدم البرمجية F02FAF على مصفوفة متماثلة حقيقية لحساب القيم المميزة بترتيب تصاعدي بالنسبة إلى القيم. وكذلك حساب المتجهات المميزة اختياريًّا. تقلّص البرمجية المصفوفة أولاً إلى صيغة ثلاثية الأقطار مستخدمة طريقة هاوسهولدر Householder. وتُحسَب بعدئذ القيم المميزة باستخدام تحريف لخوارزمية QR ثلاثية الأقطار المتماثلة. تنفذ البرمجية F08FEF خوارزمية هاوسهولدر Householder مباشرةً لمصفوفة متماثلة لإعطاء مصفوفة متماثلة ثلاثية الأقطار مماثلة. تتوفر البرامج أيضًا في مكتبة NAG لموازنة مصفوفة حقيقية موازنة مباشرة، واستعادة المتجهات المميزة إذا توازنت المصفوفة أولا. ومن ثم تنفيذ عمليات أخرى على أنواع خاصة من المصفوفات.

إن عمليتي Maple، Eigenvalues(A) تحسبان القيم المميزة لـ A بموازنتها أولاً. ثم تحويلها إلى صيغة upper-Hessenberg. بعدئذ تطبّق طريقة QR لإيجاد للقيم المميزة جميعها والمتجهات المميزة.

وتستخدم صيغة ثلاثية الأقطار، كما في الخوارزمية (6.9) في مصفوفة متماثلة.

إن عمليتي MATLAB، eig تحسبان القيم المميزة لـ A، وكذلك حساب المتجهات المميزة اختياريًا من خلال استخدام البرنامج EISPACK. وانها تستخدم BALANC لموازنة المصفوفة. وإن عملية eig في MATLAB تحسب القيم لتحويل المصفوفة إلى هسنبرج العليا (Hessenberg) أي أن Maple eig خطأ، ويجب وضع eig في MATLAB بدلاً منها. وفي النهاية يُستخدم برنامج HQR2 المعدل لإيجاد القيم المميزة، وكذلك حساب المتجهات المميزة اختياريًا لمصفوفة upper-Hessenberg حقيقية بطريقة QR. لـ MATLAB عملية eigs أيضًا. ويحسب عددًا مختارًا من القيم المميزة والمتجهات المميزة. وإن عملية eigs تستند إلى طريقة Arnoldi التي تتضمن إعادة البدء من قبل Sorensen [So]. ويستند البرنامج ضمن ARPACK لحل مسائل كثيرة التفرع للقيم المميزة إلى طريقة Arnoldi التي تتضمن إعادة البدء أيضًا. إن الطريقة هذه هي طريقة الفضاء الجزئي Krylov subspace التي تعطي متتالية الفضاءات الجزئية Krylov subspace، وتتقارب إلى فضاء جزئي يتضمن القيم المميزة.

إن كتابي [Wil2] Wilkinson و[WR] Wilkinson and Reinsch تقليديان في دراسة مسائل القيمة المميزة. إن [Stew2] Stewart هو مصدر جيد أيضًا لمعلومات حول المسألة العامة، وإن [Par] Parlett يأخذ في الحسبان مسألة التماثل، وإن دراسة مسألة اللاتماثل يمكن إيجادها في [Sa1] Saad.

الباب

10

الحلول العددية لأنظمة المعادلات غير الخطية

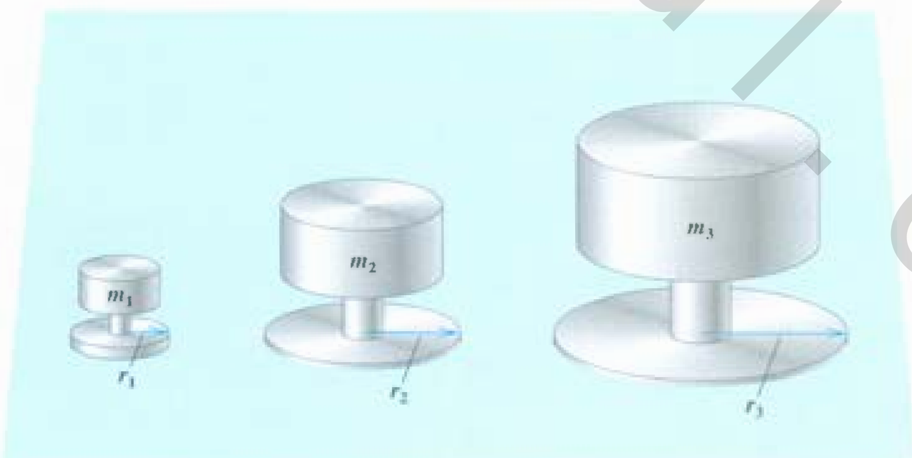
Numerical Solutions of Nonlinear Systems of Equations

مقدمة

يمكن التنبؤ بمقدار الضغط اللازم لإغراق جسم كبير ثقيل في تربة طريّة متجانسة واقعة فوق أرض ذات قاعدة صلبة من خلال مقدار الضغط اللازم لإغراق أجسام أصغر في التربة نفسها. وعلى نحو خاص فإن مقدار الضغط p اللازم لإغراق صفيحة دائرية نصف قطرها r لمسافة d في أرض طرية. حيث يمكن تقدير أرض القاعدة الصلبة التي تقع على مسافة $D > d$ تحت السطح بمعادلة على الصيغة

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$$

حيث k_1, k_2 و k_3 ثوابت تعتمد على d وعلى تجانس التربة، وليس على نصف قطر الصفيحة. ولتحديد أصغر حجم لقرص قابل لتحمل ثقل كبير؛ فقد أُغرقت ثلاثة أقراص ذوات أنصاف أقطار مختلفة إلى المسافة نفسها. وسجّلت الأثقال (الأحمال) المطلوبة لهذا الإغراق كما هو مبين في شكل المرافق.



إن هذا ينتج المعادلات غير الخطية الآتية:

$$m_1 = k_1 e^{k_2 r_1} + k_3 r_1$$
$$m_2 = k_1 e^{k_2 r_2} + k_3 r_2$$
$$m_3 = k_1 e^{k_2 r_3} + k_3 r_3$$

في المجاهيل الثلاثة k_1، k_2 و k_3. وعادة ما يكون هناك حاجة إلى طرائق عددية لتقرب حلّ أنظمة المعادلات عندما تكون المعادلات غير خطية. ويعالج التمرين (12) في الفصل (2.10) تطبيقاً من النوع الموصوف هنا.

إن حلّ النظام من المعادلات الخطية هو مشكلة يجب تجنبها ما أمكن، وعادة ما يحدث ذلك بتقريب النظام غير الخطي بنظام معادلات خطي. وعندما يكون ذلك غير مرضٍ، يجب مجابهة المشكلة مباشرة. إن الطريقة الأكثر مباشرة تكون بتكييف طرائق من الفصل الثاني تقرّب حلول معادلة غير خطية واحدة بمتغير واحد، وتطبّق عندما نواجه مسألة متجه يحتوي على المتغيرات كلها بدلًا من المسألة ذات المتغير الواحد.

إن الأداة الرئيسة في الفصل الثاني كانت طريقة نيوتن، وهي طريقة عادة ما تكون متقاربة تربيعيًا. وإن هذه أول طريقة نعدّها لحلّ أنظمة معادلات غير خطية. وإن طريقة نيوتن عند تعديلها لأنظمة المعادلات مكلفة بالتطبيق، ولذلك سنصف في الفصل (3.10) كيف يمكن استخدام تعديل طريقة القاطع Secant Method للحصول على تقريبات بطريقة أسهل، مع خسارة في سرعة التقارب المذهلة التي تتصف بها طريقة نيوتن.

ويصف الفصل (4.10) طريقة التناقص الأشد انحدارًا Steepest Descent. إن هذه الطريقة متقاربة خطيًا فقط، ولكنها لا تتطلب البدء بالتقريبات الدقيقة اللازمة للطرائق الأسرع في التقارب. وغالبًا ما تستخدم لإيجاد تقريب ابتدائي لطريقة نيوتن أو أي من تعديلاتها.

نعطي في الفصل (5.10) مقدمة لطرائق الاتصال التي تستخدم الوسيط (براميتر) للانتقال من مسألة قابلة للحل بسهولة إلى حلّ للمسألة الأصلية غير الخطية.

لقد حُذفت معظم براهين النتائج مبرهنة؛ لأنها تستخدم طرائق تدرّس عادة في حساب التفاضل والتكامل المتقدم. وإن أحد المراجع الجيدة العامة لهذه المادة هو كتاب أورتيغا (Ortega) بعنوان *A Numerical Analysis—A Second Course* [Or2].

وهناك مرجع آخر أشمل وهو [OR].

1.10 النقاط الثابتة للدوال بمتغيرات متعددة Fixed Points for Functions of Several variables

يكون نظام المعادلات غير الخطية على الصيغة

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (1.10)$$