الاهتزازات. ولقد بُحث في هذه المسألة من قبل جيين دي ألمبرت Jean d'Alembert ثم من قبل أشهر رياضي في ذلك العصر، ليونارد أويلر Leonhard Euler. ولكن الفضل الأول يعود إلى دانيال بيرنوللي Daniel Bernoulli الذي دعا إلى استخدام المجاميع اللانهائية للجيوب وجيوب التمام بوصفها حلًّا للمسألة. وقد باتت هذه المجاميع الآن تعرف بسلاسل فورييه Fourier series في أوائل القرن التاسع عشر. وقد استخدم جيين بابتست جوزف فورييه هذه السلاسل لدراسة انتقال الحرارة، وطوّر مبرهنة شبه تامة في هذا الموضوع.

إن أولى الملاحظات في تطوير سلاسل فورييه تكمن في أن: لكل عدد صحيح موجب n تكون مجموعة الدّوال $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ متعامدة على $[-\pi, \pi]$ بالنسبة إلى دالة الوزن $w(x) \equiv 1$ حيث

$$\phi_0(x) = \tfrac{1}{2}, \quad \phi_k(x) = \cos kx \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

و

$$\phi_{n+k}(x) = \sin kx \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

إن التعامدية هذه تأتي من حقيقة أن: لكل عدد صحيح j تكون تكاملات $w(x) \equiv 1$ و $\cos jx$ على $[-\pi, \pi]$ مساوية للصفر، ويمكننا إعادة كتابة دوال الجيب وجيب التمام على صيغ مجاميع باستخدام المتطابقات المثلثية.

$$\sin t_1 \sin t_2 = \tfrac{1}{2}[\cos(t_1 - t_2) - \cos(t_1 + t_2)]$$

$$\cos t_1 \cos t_2 = \tfrac{1}{2}[\cos(t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2)]$$

$$\sin t_1 \cos t_2 = \tfrac{1}{2}[\sin(t_1 - t_2) + \sin(t_1 + t_2)] \tag{19.8}$$

ضع $\mathcal{T}_n$ لتعبر عن مجموعة توليفات الدّوال $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}$ جميعها، وتسمى هذه المجموعة مجموعة كثيرات الحدود المثلثية (trigonometric polynomials) من رتبة تساوي n و أقل.

نشر جوزف فورييه
Josef Fourier (1768 - 1830)
نظريته عن السلاسل المثلثية في
Théorie analytique de la chaleur
وذلك لحلّ مسألة التوزيع الحراري
بحالة الاستقرار في المجسم

(تضيف بعض المصادر دالة إضافيًا إلى المجموعة هو $\phi_{2n}(x) = \sin nx$) إن غرضنا هو إيجاد تقريب لأي دالة $f \in C[-\pi, \pi]$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة باستخدام الدّوال في $\mathcal{T}_n$ على الصيغة

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

بما أن مجموعة الدّوال $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ متعامدة في الفترة $[-\pi, \pi]$ بالنسبة إلى $w(x) \equiv 1$ فإن الاختيار المناسب للمعادلات هو

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

و

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

تسمى النهاية لـ $S_n(x)$ عندما $n \to \infty$ سلسلة فورييه Fourier series للدالة f.

وإن سلاسل فورييه تستخدم لوصف حل المعادلات التفاضلية والمعادلات التفاضلية الجزئية التي تظهر في أحوال فيزيائية.

مثال 1 لتحديد كثيرة الحدود المثلثية في $\mathcal{T}_n$ التي تقرب

$$f(x) = |x|, \quad \text{لكل} \quad -\pi < x < \pi$$

ينبغي إيجاد

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]$$

لكل $k = 1, 2, \ldots, n$،

و $$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin kx\,dx = 0 \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

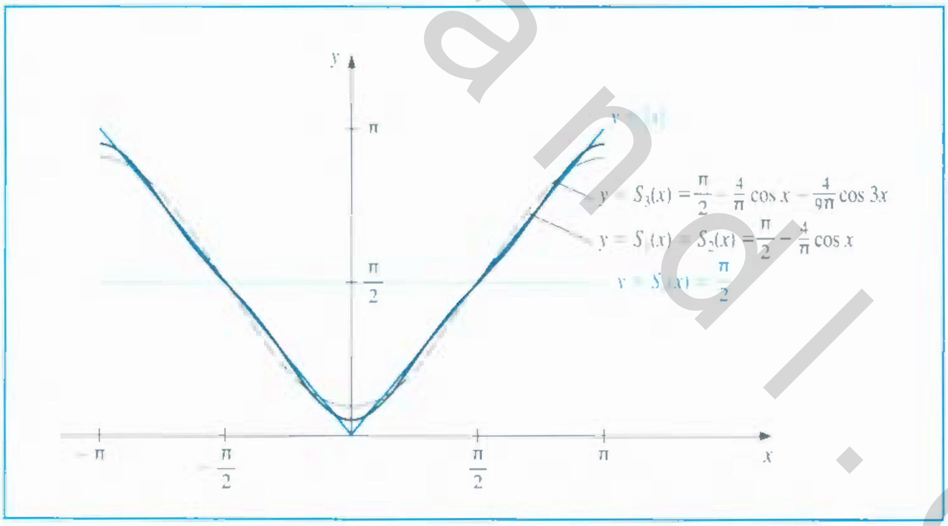
إن كون b_k جميعًا أصفارا ينبع من حقيقة أن $g(x) = |x|\sin kx$ هو دالة فردي لكل k. وتكامل أي دالة فردي على أي فترة من النوع $[-a, a]$ هو صفر. (انظر التمرينين 13 و 14)

ومن ثم فإن كثيرة الحدود المثلثية من T_n التي تعطي التقريب للدالة f هي

$$S_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx$$

إن بعض كثيرات الحدود المثلثية للدالة $f(x) = |x|$ تظهر في شكل (13.8).

شكل 13.8



إن سلسلة فورييه للدالة f هي

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx$$

بما أن $|\cos kx| \leq 1$، فإن السلسلة تتقارب (converges). ويكون $S(x)$ موجودا لقيم x و k جميعها الحقيقية. ■

يوجد تعبير منفصل مماثل لما شُرح، وهو مفيد لحالة التقريب باستخدام المربعات الصغرى المنفصلة (discrete) وعملية الاستكمال الداخلي للكميات الكبيرة من البيانات.

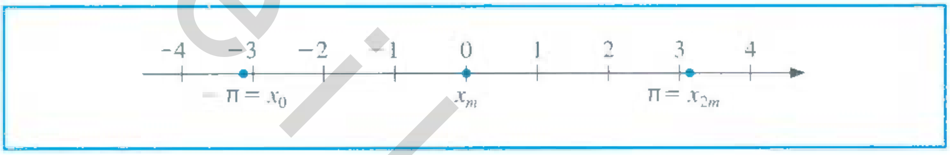
افترض أن لديك $2m$ من نقاط البيانات المزدوجة $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$، إذ تعطي العناصر الأولى في الازدواج تجزئة متساوية لفترة مغلقة.

وللتبسيط، نفترض أن الفترة هي $[-\pi, \pi]$، وعليه كما يظهر في شكل 14.8 يكون

$$x_j = -\pi + \left(\frac{j}{m}\right)\pi \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, 2m-1 \qquad (20.8)$$

إذا لم تكن الفترة هي $[-\pi, \pi]$ يمكن تحويل البيانات إلى هذه الصيغة، باستخدام تحويل خطي بسيط.

شكل 14.8



إن الهدف في الحالة المنفصلة هو تحديد كثيرة حدود مثلثية $S_n(x)$ في $\mathcal{T}_n$ بحيث نجعل المقدار

$$E(S_n) = \sum_{j=0}^{2m-1} [y_j - S_n(x_j)]^2$$

أصغر ما يمكن. ولعمل ذلك، نحتاج إلى اختيار الثوابت $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ بحيث يكون

$$E(S_n) = \sum_{j=0}^{2m-1} \left\{ y_j - \left[\frac{a_0}{2} + a_n \cos nx_j + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx_j + b_k \sin kx_j) \right] \right\}^2 \qquad (21.8)$$

أصغر ما يمكن.

إن تحديد الثوابت يمكن تبسيطه من حقيقة أن $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}\}$ متعامدة بالنسبة إلى عملية الجمع على النقاط المتساوية في البعد $\{x_j\}_{j=0}^{2m-1}$ في الفترة $[-\pi, \pi]$.

إننا نعني بهذا أنه لكل $k \neq l$ يكون

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \phi_k(x_j)\phi_l(x_j) = 0 \qquad (22.8)$$

ولبرهان التعامد، نستخدم التمهيدية الآتية:

تمهيدية 12.8 إذا لم يكن العدد الصحيح r أحد مضاعفات $2m$ فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = 0$$

وبالإضافة، إلى ذلك إذا لم يكن r أحد مضاعفات m، فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos rx_j)^2 = m \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} (\sin rx_j)^2 = m$$

■

لقد استخدم أويلر الرمز i لأول مرّة ليمثل $\sqrt{-1}$ في كتابه De Formulis Differentialibus Angularibus

البرهان إن معادلة أويلر (Euler's Formula) تنص على أنه إذا كان $i^2 = -1$ فإنه يكون لكل عدد حقيقي z

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{23.8}$$

إن تطبيق هذه التمهيدية يعطي

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j + i \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = \sum_{j=0}^{2m-1} (\cos rx_j + i \sin rx_j) = \sum_{j=0}^{2m-1} e^{irx_j}$$

ولكن

$$e^{irx_j} = e^{ir(-\pi + j\pi/m)} = e^{-ir\pi} \cdot e^{irj\pi/m}$$

لذلك فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j + i \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = e^{-ir\pi} \sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m}$$

بما أن $\sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m}$ سلسلة هندسية حدّها الأول أو نسبتها $e^{ir\pi/m} \neq 1$ نحصل على

$$\sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m} = \frac{1 - (e^{ir\pi/m})^{2m}}{1 - e^{ir\pi/m}} = \frac{1 - e^{2ir\pi}}{1 - e^{ir\pi/m}}$$

ولكن $e^{2ir\pi} = \cos 2r\pi + i \sin 2r\pi = 1$

لذلك $1 - e^{2ir\pi} = 0$

و

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j + i \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = e^{-ir\pi} \sum_{j=0}^{2m-1} e^{irj\pi/m} = 0$$

إن هذا يتضمّن أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = 0$$

إذا لم يكن r أحد مضاعفات m فإن هذه المجاميع تتضمن أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos rx_j)^2 = \sum_{j=0}^{2m-1} \frac{1}{2}(1 + \cos 2rx_j)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{2m-1} 1 + \sum_{j=0}^{2m-1} \cos 2rx_j\right] = \frac{1}{2}(2m + 0) = m$$

وبالمثل فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\sin rx_j)^2 = m$$

■ ■ ■

والآن يمكننا برهنة التعامد المنصوص عليه في المعادلة (22.8).

خذ على سبيل المثال الحالة

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \phi_k(x_j)\,\phi_{n+l}(x_j) = \sum_{j=0}^{2m-1} (\cos kx_j)(\sin lx_j)$$

بما أن

$$\cos kx_j \sin lx_j = \tfrac{1}{2}[\sin(l+k)x_j + \sin(l-k)x_j]$$

و $(l+k)$ و $(l-k)$ كليهما أعداد صحيحة ليست من مضاعفات $2m$. فإن تمهيدية (12.8) تضمن أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos kx_j)(\sin lx_j) = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{2m-1} \sin(l+k)x_j + \sum_{j=0}^{2m-1} \sin(l-k)x_j\right] = \frac{1}{2}(0+0) = 0$$

تستخدم هذه الطريقة لبرهنة أن حالة التعامد متحققة لأي زوج من الدّوال، وللحصول على مبرهنة الآتية:

مبرهنة 13.8

إن الثوابت في المجموع

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

التي تجعل مجموع المربعات الصغرى

$$E(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - S_n(x_j))^2$$

أصغر ما يمكن هي

$$a_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

و

$$b_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$ ■

تُبرهَن هذه الطريقة بوضع المشتقات الجزئية للمقدار E بالنسبة إلى كل a_k و كل b_k مساوية للصفر. كما حدث في البندين (1.8) و (2.8). ثم يستخدم التعامد لتبسيط المعادلات. وعلى سبيل المثال

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b_k} = 2\sum_{j=0}^{2m-1} [y_j - S_n(x_j)](-\sin kx_j)$$

ومن ثم

$$0 = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j - \sum_{j=0}^{2m-1} S_n(x_j)\sin kx_j$$

$$= \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j - \frac{a_0}{2}\sum_{j=0}^{2m-1}\sin kx_j - a_n\sum_{j=0}^{2m-1}\sin kx_j\cos nx_j$$

$$- \sum_{l=1}^{n-1} a_l \sum_{j=0}^{2m-1}\sin kx_j\cos lx_j - \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1} b_l\sum_{j=0}^{2m-1}\sin kx_j\sin lx_j - b_k\sum_{j=0}^{2m-1}(\sin kx_j)^2$$

إن التعامد يتضّمن أن المجاميع جميعها في الطرف الأيمن، عدا المجموع الأول والمجموع الأخير كلها أصفار. وتنص تمهيدية (12.8) على أن المجموع النهائي يساوي m.

ولذلك يكون

$$b_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j$$

مثال 2 ليكن $f(x) = 2x^2 - 9$ لـ x جميعها في $[-\pi, \pi]$. سنجد $S_2(x)$ كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة 2 بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة.

إذا أخذنا $m = 3$ فإن النقاط تكون

$$x_j = \pi + \frac{j}{m}\pi \quad \text{و} \quad y_j = f(x_j) = 2x_j^2 - 9 \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

إن كثيرة الحدود المثلثية هي

$$S_2(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_2\cos 2x + (a_1\cos x + b_1\sin x)$$

حيث

$$a_k = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{5} y_j\cos kx_j \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, 2$$

وتكون المعاملات

$$a_0 = \frac{1}{3}\left(f(-\pi) + f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -4.10944566$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\left(f(-\pi)\cos(-\pi) + f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f(0)\cos 0\right.$$
$$\left. + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -8.77298169$$

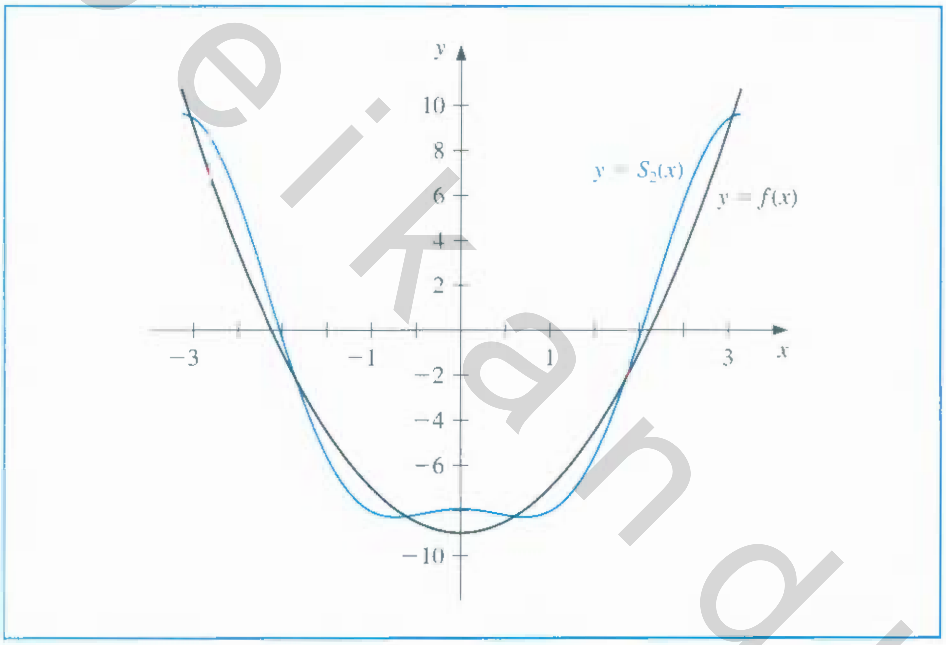
$$a_2 = \frac{1}{3}\left(f(-\pi)\cos(-2\pi) + f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + f(0)\cos 0\right.$$
$$\left. + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2.92432723$$

و
$$b_1 = \frac{1}{3}\left(f(-\pi)\sin(-\pi) + f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f(0)\sin 0\right.$$
$$\left. + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 0$$

وهكذا يكون
$$S_2(x) = \frac{1}{2}(-4.10944566) - 8.77298169\cos x + 2.92432723\cos 2x$$

يظهر شكل (12.8) الدالة $f(x)$ وكثيرة الحدود المثلثية بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة $S_2(x)$.

شكل 15.8



يوضح المثال الآتي إيجاد التقريب بالمربعات الصغرى لدالة معرفة على أي فترة مغلقة.

مثال 3 ليكن $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - \tan x(x-2)$. إن إيجاد التقريب $S_3(x)$ للبيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{9}$، حيث $x_j = j/5$ و $y_j = f(x_j)$ بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة يتطلب أولاً التحويل من $[0, 2]$ إلى $[-\pi, \pi]$. إن هذا التحويل الخطي هو $z_j = \pi(x_j - 1)$ وتصبح البيانات بعد التحويل بالصيغة

$$\left\{\left(z_j, f\left(1 + \frac{z_j}{\pi}\right)\right)\right\}_{j=0}^{9}$$

ومن ثم تكون كثيرة الحدود المثلثية بطريقة المربعات الصغرى

$$S_3(z) = \frac{a_0}{2} + a_3\cos 3z + \sum_{k=1}^{2}(a_k\cos kz + b_k\sin kz),$$

حيث $a_k = \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{9} f\left(1 + \frac{z_j}{\pi}\right)\cos kz_j$ لكل $k = 0, 1, 2, 3$

و

$b_k = \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{9} f\left(1 + \frac{z_j}{\pi}\right)\sin kz_j$ لكل $k = 1, 2$

إن إيجاد قيم هذه المجاميع يعطي التقريب

$$S_3(z) = 0.76201 + 0.77177\cos z + 0.017423\cos 2z + 0.0065673\cos 3z - 0.38676\sin z + 0.047806\sin 2z$$

وبالتحويل إلى المتغير x نحصل على

$$S_3(x) = 0.76201 + 0.77177\cos\pi(x-1) + 0.017423\cos 2\pi(x-1) + 0.0065673\cos 3\pi(x-1) - 0.38676\sin\pi(x-1) + 0.047806\sin 2\pi(x-1)$$

يعرض جدول (12.8) قيم $f(x)$ و $S_3(x)$. ■

جدول 12.8

$\lvert f(x) - S_3(x)\rvert$	$S_3(x)$	$f(x)$	x
2.38×10^{-2}	0.24060	0.26440	0.125
1.07×10^{-2}	0.85154	0.84081	0.375
9.74×10^{-4}	1.36248	1.36150	0.625
8.75×10^{-3}	1.60406	1.61282	0.875
8.94×10^{-3}	1.37566	1.36672	1.125
1.52×10^{-3}	0.71545	0.71697	1.375
9.80×10^{-3}	0.06929	0.07909	1.625
2.27×10^{-2}	−0.12302	−0.14576	1.875

EXERCISE SET
مجموعة التمارين 5.8

1. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_2(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدالة $f(x) = x^2$ on $[-\pi, \pi]$.

2. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدالة $f(x) = x$ on $[-\pi, \pi]$.

3. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_3(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال $f(x) = e^x$ on $[-\pi, \pi]$.

4. أوجد كثيرة الحدود المثلثية العامة $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال $f(x) = e^x$ on $[-\pi, \pi]$.

5. أوجد كثيرة الحدود المثلثية العامة $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{إذا كان } 0 < x < \pi \end{cases}$$

6. أوجد كثيرة الحدود المثلثية العامة $S_n(x)$ بطريقة المربعات الصغرى المتصلة للدوال

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{إذا كان } -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{إذا كان } 0 < x < \pi \end{cases}$$

7. أوجد بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة الكثيرة الحدود المثلثية $S_n(x)$ على الفترة $[-\pi, \pi]$ للدوال الآتية. باستخدام القيم m و n المحدّدة:

أ. $f(x) = \cos 2x$، $m = 4, n = 2$ ب. $f(x) = \cos 3x$، $m = 4, n = 2$

ج. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x + 2\cos \frac{1}{3}x$، $m = 6, n = 3$ د. $f(x) = x^2 \cos x$، $m = 6, n = 3$

8. احسب الخطأ $E(S_n)$ لكل الدّوال في التمرين (7).

9. أوجد بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة كثيرة الحدود المثلثية $S_3(x)$ باستخدام $m = 4$ للدالة $f(x) = e^x \cos 2x$ على الفترة $[-\pi, \pi]$. احسب الخطأ $E(S_3)$.

10. كرّر التمرين (9) باستخدام $m = 8$. قارن قيم كثيرات الحدود المستخدمة في التقريب بقيم f عند النقاط $\xi_j = -\pi + 0.2j\pi$ لكل $0 \le j \le 10$ فأي تقريب هو الأفضل؟

11. ليكن $f(x) = 2\tan x - \sec 2x$ لكل $2 \le x \le 4$ بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة. أوجد كثيرات الحدود المثلثية $S_n(x)$ باستخدام قيم n و m كما يأتي. ثم احسب الخطأ في كل حالة:

أ. $n = 3, \quad m = 6$ ب. $n = 4, \quad m = 6$

12. أ. بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_4(x)$، باستخدام $m = 16$ للدالة $f(x) = x^2 \sin x$ على الفترة $[0,1]$.

ب. احسب $\int_0^1 S_4(x)\,dx$. ج. قارن التكامل في (ب) بـ $\int_0^1 x^2 \sin x\,dx$.

13. برهن أنه لكل دّالة فردية متصلة f معرفة على $[-a, a]$ يكون $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

14. برهن أنه لكل دّالة زوجية متصلة f معرفة على الفترة $[-a, a]$ يكون.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$$

15. برهن أن الدّوال

$$\phi_0(x) = \frac{1}{2}, \phi_1(x) = \cos x, \dots, \phi_n(x) = \cos nx, \phi_{n+1}(x) = \sin x, \dots, \phi_{2n-1}(x) = \sin(n-1)x$$

متعامدة على الفترة $[-\pi, \pi]$ بالنسبة إلى دّالة الوزن $w(x) \equiv 1$.

16. حُدّد في التمرين (1) سلسلة فورييه للدالة $f(x) = |x|$. استخدم هذه السلسلة وافترض أنها تمثّل f عند الصفر لكي تجد قيمة السلسلة اللانهائية المتقاربة

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1/(2k+1)^2)$$

6.8 تحويلات فورييه السريعة Fast Fourier Transforms

وجدنا في النصف الثاني من الفصل (5.8) بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة صيغة كثيرة الحدود من الرتبة n على نقاط البيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$ التي عددها $2m-1$ حيث إن $x_j = -\pi + (j/m)\pi$ لكل $j = 0, 1, \dots, 2m-1$.

إن كثيرة الحدود المثلثية للاستكمال الداخلي (interpolatory) في $\mathcal{T}_m$ على نقط البيانات هذه التي عددها $2m$ هي تقريبا كثيرة الحدود بالمربعات الصغرى نفسها؛ لأن كثيرة الحدود المثلثية

بطريقة المربعات الصغرى تجعل حد الخطأ

$$E(S_m) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - S_m(x_j))^2$$

أصغر ما يمكن، وهذا الخطأ لكثيرة الحدود المثلثية للاستكمال يساوي صفرًا. ومن ثم فقد حصلنا على أصغر ما يمكن من الخطأ عندما يكون

$$S_m(x_j) = y_j \text{ لكل } j = 0, 1, \ldots, 2m-1$$

وعلى كل حال هناك حاجة إلى تعديل صيغة كثيرة الحدود إذا ما أردنا أن تتخذ المعاملات الصيغة نفسها كما في حالة المربعات الصغرى.

لقد وجدنا في تمهيدية (12.8) أنه إذا لم يكن r أحد مضاعفات m فإن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos rx_j)^2 = m$$

إن الاستكمال الداخلي يتطلب بدلًا من ذلك حساب

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos mx_j)^2$$

الذي يأخذ القيمة $2m$. (انظر التمرين 8)

ويتطلب هذا أن تكتب كثيرة الحدود الاستيفانية على الصيغة

$$S_m(x) = \frac{a_0 + a_m \cos mx}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (24.8)$$

إذا أردنا أن تتفق الصيغتان a_k و b_k مع صيغ كثيرة الحدود بطريقة المربعات الصغرى، أي حيثما

$$a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j \text{ لكل } k = 0, 1, \ldots, m \qquad (25.8)$$

و

$$b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j \text{ لكل } k = 1, 2, \ldots, m-1 \qquad (26.8)$$

وفي حالة وجود مقادير كبيرة من البيانات المتساوية البعد، يكون الاستكمال عن طريق كثيرات الحدود المثلثية قادرًا على إعطاء نتائج دقيقة جدًا.

إنها طريقة التقريب المناسبة في حقول تتضمن ترشيحات عددية، مثل نماذج الهوائيات الميكانيكا الكمية، البصريات، والكثير من مسائل المحاكاة.

وعلى كل حال حتى في أواسط الستينيات من القرن العشرين، لم تكن هذه الطريقة تحت التطبيق الشائع؛ بسبب العمليات الحسابية اللازمة لتحديد الثوابت في التقريب.

إن الاستكمال في بيانات مؤلفة من $2m$ من النقاط باستخدام تقنية الحساب المباشر تتطلب $(2m)^2$ من عمليات الضرب و $(2m)^2$ من عمليات الجمع. وإن تقريب عدة آلاف من نقاط البيانات أمر شائع في الحقول التي تتطلب الاستكمال المثلثي. ولذلك فإن الطرائق المباشرة لإيجاد قيم الثوابت تتطلب عمليات ضرب وجمع تصل إلى الملايين.

إن خطأ التدوير المرتبط بهذا العدد من الحسابات يفوق التقريب عمومًا.

في عام 1965 ظهرت ورقة بحثية للمؤلفين كولي وتيوكي J.W.Cooley و J.W.Tukey في مجلة Mathematics of Computation[CT] شرحت طريقة مختلفة لحساب الثوابت في كثيرات الحدود المثلثية للاستكمال .

وإن هذه الطريقة تتطلب $O(m \log_2 m)$ فقط من عمليات الضرب و $O(m \log_2 m)$ من عمليات الجمع ، على أن تختار m بطريقة مناسبة.

إن هذا ينقص عدد العمليات من الملايين إلى الآلاف في أي عملية تحتوي على الآلاف من نقاط البيانات. وقد اكتشفت هذه الطريقة في الحقيقة منذ عدة سنوات قبل ظهور بحث كولي وتيوكي ، ولكنه مرّ دون التنبه إليه.

إن [Brigh,pp.8-9] يحتوي ملخصا تاريخيًا قصيرًا، إلا أنه مثير للاهتمام بهذه الطريقة.

تعرف طريقة كولي وتيوكي بواحد من الاسمين خوارزمية كولي – تيوكي (Cooley - Tukey algorithm) أو خوارزمية تحويل فورييه السريع Fast Fourier transform(FFT)algorithm وقد أدت إلى ثورة في استخدام كثيرات الحدود المثلثية في الاستكمال.

تتألف الطريقة بتنظيم المسألة، إذ يمكن تحليل عدد نقاط البيانات بسهولة على قوى العدد اثنين خصوصًا.

وبدلًا من إيجاد قيم الثابتين a_k و b_k مباشرة فإن طريقة تحويل فورييه السريع تحسب المعاملات المركبة c_k في

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k e^{ikx} \tag{27.8}$$

حيث

$$c_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, 2m-1 \tag{28.8}$$

وبمجرد تحديد الثوابت c_k فإنه يمكن استرجاع a_k و b_k. ولعمل ذلك، نستخدم معادلة أويلر $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ لكل $k = 0, 1, \ldots, m$ يكون

$$\frac{1}{m}c_k(-1)^k = \frac{1}{m}c_k e^{-i\pi k} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} e^{-i\pi k} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik(-\pi+(\pi j/m))}$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \left(\cos k\left(-\pi + \frac{\pi j}{m}\right) + i \sin k\left(-\pi + \frac{\pi j}{m}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j (\cos kx_j + i \sin kx_j)$$

لذلك

$$a_k + i b_k = \frac{(-1)^k}{m} c_k \tag{29.8}$$

ولسهولة التعبير، يُضاف b_0 و b_m إلى المجموعة، ولكنهما يساويان صفرًا، ولا يساهمان في المجموع الناتج.

إن خاصية تقليل العمليات في تحويل فورييه السريع ناتجة عن حساب المعاملات c_k في عناقيد. واستعمال علاقة رئيسة تنص على أنه لأي عدد صحيح n يكون

$$e^{n\pi i} = \cos n\pi + i \sin n\pi = (-1)^n$$

افترض $m = 2^p$ لعدد صحيح موجب p. لكل $k = 0, 1, \ldots, m-1$ يكون

$$c_k + c_{m+k} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} + \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{i(m+k)\pi j/m} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}(1 + e^{\pi ij})$$

ولكن

$$1 + e^{i\pi j} = \begin{cases} 2, & \text{إذا كان } n \text{ عددا زوجيًا} \\ 0, & \text{إذا كان } n \text{ عددا فرديًا} \end{cases}$$

لذلك يوجد m فقط من الحدود غير الصفرية في عملية الجمع.

إذا وضعنا $2j$ بدلاً من j في مؤشر الجمع أمكننا كتابة المجموع على الصيغة

$$c_k + c_{m+k} = 2\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi(2j)/m}$$

أي أن

$$c_k + c_{m+k} = 2\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi j/(m/2)} \tag{30.8}$$

وبطريقة مماثلة

$$c_k - c_{m+k} = 2e^{ik\pi/m} \sum_{j=0}^{m-1} y_{2j+1} e^{ik\pi j/(m/2)} \tag{31.8}$$

وبما أنه يمكن استرجاع كل من c_k و c_{m+k} من المعادلتين (30.8) و (31.8). فإن هذه العلاقات تحدد المعاملات c_k جميعها.

يتضح أن المجاميع في المعادلتين (30.8) و (31.8) أيضا لها الصيغة نفسها كالمجموع في المعادلة (28.8). باستثناء وضع المؤشر $m/2$ بدلًا من m.

يوجد $2m$ من المعادلات $c_0, c_1, \ldots, c_{2m-1}$ الواجب حسابها.

إن استخدام المعادلة الرئيسة (28.8) يتطلب $2m$ من عمليات الضرب المركبة لكل معامل. وبما مجموعه $(2m)^2$ من العمليات.

تتطلب المعادلة (30.8) m من عمليات الضرب المركبة لكل $k = 0, 1, \ldots, m-1$. أما المعادلة (31.8) فتتطلب $m + 1$ من عمليات الضرب المركبة لكل $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

وإن استخدام هذه المعادلات لحساب $c_0, c_1, \ldots, c_{2m-1}$ يخفّض عمليات الضرب المركبة من $(2m)^2 = 4m^2$ إلى $m \cdot m + m(m+1) = 2m^2 + m$.

بما أن المجاميع في المعادلة (30.8) و (31.8) لها الصيغة نفسها الرئيسة والعدد m هو على صيغة قوى 2. فإنه يمكن إعادة تطبيق عملية التخفيض في المعادلتين (30.8) و (31.8).

ويوضع بدلًا منهما مجموعان من $j = 0$ إلى $j = (m/2) - 1$. إن هذا يخفض الفقرة $2m^2$ في المجموع إلى

$$2\left[\frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m}{2} + 1\right)\right] = m^2 + m$$

ومن ثم يكون المجموع الكلي $(m^2 + m) + m = m^2 + 2m$ من عمليات الضرب المركبة التي نحتاج إليها.

إن تطبيق الطريقة مرة أخرى يعطينا أربعة مجاميع في كل منها $m/4$ من الحدود، ويخفض الفقرة m^2 من هذا المجموع إلى

$$4\left[\left(\frac{m}{4}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{m}{4} + 1\right)\right] = \frac{m^2}{2} + m$$

الذي يؤدي إلى مجموع جديد يساوي $(m^2/2) + 3m$ من عمليات الضرب المركبة، وبتكرار العملية r مرّة يخفض العدد الكلي من عمليات الضرب المركبة اللازمة إلى

$$\frac{m^2}{2^{r-2}} + mr$$

وتكتمل العملية عندما $r = p + 1$، لأن $m = 2^p$ و $2m = 2^{p+1}$.

وهكذا بعد $r = p + 1$ من تخفيضات هذا النوع فإن عدد عمليات الضرب المركبة ينخفض إلى

$$\frac{(2^p)^2}{2^{p-1}} + m(p+1) = 2m + pm + m = 3m + m\log_2 m = O(m\log_2 m)$$

وبسبب طريقة ترتيب الحسابات، فإن عدد عمليات الجمع المركبة يمكن رصدها ومقارنتها. ولشرح أهمية هذا التخفيض، افترض أن لدينا $m = 2^{10} = 1024$
وعند الحساب المباشر يتطلب

$$(2m)^2 = (2048)^2 \approx 4{,}200{,}000$$

من عمليات الحساب. أما طريقة تحويل فورييه السريع فتخفض عدد الحسابات إلى

$$3(1024) + 1024\log_2 1024 \approx 13{,}300$$

مثال 1 افترض تطبيق طريقة تحويل فورييه السريع لنقاط البيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{7}$ التي عددها $8 = 2^3$ حيث $x_j = -\pi + j\pi/4$ لكل $j = 0, 1, \ldots, 7$.

في هذه الحالة $2m = 8$. ولذلك $m = 4 = 2^2$ و $p = 2$.

من المعادلة (24.8) نحصل على

$$S_4(x) = \frac{a_0 + a_4\cos 4x}{2} + \sum_{k=1}^{3}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

حيث

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} y_j\cos kx_j \quad \text{و} \quad b_k = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} y_j\sin kx_j \quad \text{لكل } k = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ عرّف}$$

$$F(x) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} c_k e^{ikx}$$

حيث

$$c_k = \sum_{j=0}^{7} y_j e^{ik\pi j/4} \quad \text{لكل } k = 0, 1, \ldots, 7$$

ثم نحصل من المعادلة (29.8) لكل $k = 0, 1, 2, 3, 4$ على $\frac{1}{4}c_k e^{-ik\pi} = a_k + ib_k$.

بالحساب المباشر، تعطي الثوابت المركبة ما يلي:

$$c_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$

$$c_1 = y_0 + ((i+1)/\sqrt{2})y_1 + iy_2 + ((i-1)/\sqrt{2})y_3 - y_4 - ((i+1)/\sqrt{2})y_5 - iy_6 - ((i-1)/\sqrt{2})y_7$$

$$c_2 = y_0 + iy_1 - y_2 - iy_3 + y_4 + iy_5 - y_6 - iy_7$$

$$c_3 = y_0 + ((i-1)/\sqrt{2})y_1 - iy_2 + ((i+1)/\sqrt{2})y_3 - y_4 - ((i-1)/\sqrt{2})y_5 + iy_6 - ((i+1)/\sqrt{2})y_7$$

$$c_4 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7;$$

$$c_5 = y_0 - ((i+1)/\sqrt{2})y_1 + iy_2 - ((i-1)/\sqrt{2})y_3 - y_4 + ((i+1)/\sqrt{2})y_5 - iy_6 + ((i-1)/\sqrt{2})y_7$$

$$c_6 = y_0 - iy_1 - y_2 + iy_3 + y_4 - iy_5 - y_6 + iy_7$$

$$c_7 = y_0 - ((i-1)/\sqrt{2})y_1 - iy_2 - ((i+1)/\sqrt{2})y_3 - y_4 + ((i-1)/\sqrt{2})y_5 + iy_6 + ((i+1)/\sqrt{2})y_7$$

بالتمهيد للحجم الصغير لمجموعة نقاط البيانات، فإن كثيراً من معاملات y_j في هذه المعادلات تكون 1 أو -1 . وسيقل هذا التكرار في التطبيقات الكبرى. ولكي نعد عدداً من عمليات الحساب بدقة، فسندخل عمليات الضرب في 1 أو -1 في حسابنا على الرغم من أن ذلك غير ضروري في مثالنا هذا. ومع أخذ هذا الفهم في الحسبان، نجد أن 64 عملية ضرب/ قسمة. و56 عملية جمع/ طرح هي عدد العمليات اللازمة للحساب المباشر للثوابت $c_0, c_1, \ldots, c_7$.

لتطبيق تحويل فورييه السريع بأخذ $r = 1$، نعرّف أولاً:

$$d_0 = \tfrac{1}{2}(c_0 + c_4) = y_0 + y_2 + y_4 + y_6$$

$$d_1 = \tfrac{1}{2}(c_0 - c_4) = y_1 + y_3 + y_5 + y_7$$

$$d_2 = \tfrac{1}{2}(c_1 + c_5) = y_0 + iy_2 - y_4 - iy_6$$

$$d_3 = \tfrac{1}{2}(c_1 - c_5) = ((i+1)/\sqrt{2})(y_1 + iy_3 - y_5 - iy_7)$$

$$d_4 = \tfrac{1}{2}(c_2 + c_6) = y_0 - y_2 + y_4 - y_6;$$

$$d_5 = \tfrac{1}{2}(c_2 - c_6) = i(y_1 - y_3 + y_5 - y_7)$$

$$d_6 = \tfrac{1}{2}(c_3 + c_7) = y_0 - iy_2 - y_4 + iy_6$$

$$d_7 = \tfrac{1}{2}(c_3 - c_7) = ((i-1)/\sqrt{2})(y_1 - iy_3 - y_5 + iy_7)$$

ثم نعرّف القيمة $r = 2$.

$$e_0 = \tfrac{1}{2}(d_0 + d_4) = y_0 + y_4$$

$$e_1 = \tfrac{1}{2}(d_0 - d_4) = y_2 + y_6$$

$$e_2 = \tfrac{1}{2}(id_1 + d_5) = i(y_1 + y_5)$$

$$e_2 = \tfrac{1}{2}(id_1 + d_5) = i(y_1 + y_5)$$
$$e_3 = \tfrac{1}{2}(id_1 - d_5) = i(y_3 + y_7)$$
$$e_4 = \tfrac{1}{2}(d_2 + d_6) = y_0 - y_4$$
$$e_5 = \tfrac{1}{2}(d_2 - d_6) = i(y_2 - y_6)$$
$$e_6 = \tfrac{1}{2}(id_3 + d_7) = ((i-1)/\sqrt{2})(y_1 - y_5)$$
$$e_7 = \tfrac{1}{2}(id_3 - d_7) = i((i-1)/\sqrt{2})(y_3 - y_7)$$

وأخيرًا نعرّف القيمة $r = p + 1 = 3$

$$f_0 = \tfrac{1}{2}(e_0 + e_4) = y_0$$
$$f_1 = \tfrac{1}{2}(e_0 - e_4) = y_4$$
$$f_2 = \tfrac{1}{2}(ie_1 + e_5) = iy_2$$
$$f_3 = \tfrac{1}{2}(ie_1 - e_5) = iy_6$$
$$f_4 = \tfrac{1}{2}(((i+1)/\sqrt{2})e_2 + e_6) = ((i-1)/\sqrt{2})y_1$$
$$f_5 = \tfrac{1}{2}(((i+1)/\sqrt{2})e_2 - e_6) = ((i-1)/\sqrt{2})y_5$$
$$f_6 = \tfrac{1}{2}(((i-1)/\sqrt{2})e_3 + e_7) = (-(i+1)/\sqrt{2})y_3$$
$$f_7 = \tfrac{1}{2}(((i-1)/\sqrt{2})e_3 - e_7) = (-(i+1)/\sqrt{2})y_7$$

إن $e_0, \ldots, e_7$ ،$d_0, \ldots, d_7$ ،$c_0, \ldots, c_7$ و $f_0, \ldots, f_7$ مستقلة عن نقاط البيانات الخاصة. وتعتمد على حقيقة أن $m = 4$ فقط. لكل m مجموعة ثوابت وحيدة

$$\{f_k\}_{k=0}^{2m-1} \text{ و } \{c_k\}_{k=0}^{2m-1}, \{d_k\}_{k=0}^{2m-1}, \{e_k\}_{k=0}^{2m-1}$$

إن هذه الفقرة من التطبيق لا حاجة إليها في التطبيق الخاص. إن الحسابات المطلوبة هي الآتية فقط:

1. $f_0 = y_0;\quad f_1 = y_4;\quad f_2 = iy_2;\quad f_3 = iy_6;$
   $f_4 = ((i-1)/\sqrt{2})y_1;\quad f_5 = ((i-1)/\sqrt{2})y_5;\quad f_6 = (-(i+1)/\sqrt{2})y_3$
   $f_7 = (-(i+1)/\sqrt{2})y_7.$
2. $e_0 = f_0 + f_1;\quad e_1 = -i(f_2 + f_3);\quad e_2 = ((-i+1)/\sqrt{2})(f_4 + f_5)$
   $e_3 = ((-i-1)/\sqrt{2})(f_6 + f_7);\quad e_4 = f_0 - f_1;\quad e_5 = f_2 - f_3;$
   $e_6 = f_4 - f_5;\quad e_7 = f_6 - f_7$
3. $d_0 = e_0 + e_1;\quad d_1 = -i(e_2 + e_3);\quad d_2 = e_4 + e_5;\quad d_3 = -i(e_6 + e_7)$
   $d_4 = e_0 - e_1;\quad d_5 = e_2 - e_3;\quad d_6 = e_4 - e_5;\quad d_7 = e_6 - e_7$
4. $c_0 = d_0 + d_1;\quad c_1 = d_2 + d_3;\quad c_2 = d_4 + d_5;\quad c_3 = d_6 + d_7$
   $c_4 = d_0 - d_1;\quad c_5 = d_2 - d_3;\quad c_6 = d_4 - d_5;\quad c_7 = d_6 - d_7$

إن حساب الثوابت $c_0, c_1, \ldots, c_7$ بهذه الطريقة يتطلب عدد العمليات التي تظهر في جدول (13.8). يتضح مرة ثانية أن الضرب في 1 أو 1- قد أدخل في العد على الرغم من أن هذا لا يتطلب جهدًا في الحسابات.

جدول 13.8

الخطوة	ضرب/قسمة	جمع/طرح
(1)	8	0
(2)	8	8
(3)	8	8
(4)	0	8
مجموع	24	24

إن عدم وجود عمليات الضرب/ القسمة في الخطوة 4 يعكس حقيقة أنه لكل m تُحسب المعاملات $\{c_k\}_{k=0}^{2m-1}$ من $\{d_k\}_{k=0}^{2m-1}$ بالطريقة نفسها

$$c_k = d_{2k} + d_{2k+1} \text{ و } c_{k+m} = d_{2k} - d_{2k+1} \text{ لكل } k = 0, 1, \ldots, m-1$$

ولذلك لا توجد عمليات ضرب مركبة.

والخلاصة أن الحساب المباشر لمعاملات $c_0, c_1, \ldots, c_7$ يتطلب 64 عملية ضرب/ قسمة و56 عملية جمع/طرح. وإن طريقة تحويل فورييه السريع يخفض الحسابات إلى 24 عملية ضرب/ قسمة و24 عملية جمع/ طرح.

تنفذ الخوارزمية (3.8) تحويل فورييه السريع عندما $m = 2^p$ حيث p عدد صحيح موجب. يمكن إجراء تعديلات على هذه الطريقة عندما يأخذ m صيغاً أخرى.

تحويل فورييه السريع Fast Fourier Transform

لحساب المعاملات في المجموع

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k e^{ikx} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k(\cos kx + i \sin kx)$$ حيث $i = \sqrt{-1}$ الخاص بالبيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$ حيث $m = 2^p$ و $x_j = -\pi + j\pi/m$ لكل $j = 0, 1, \ldots, 2m-1$.

المدخلات: $m, p; y_0, y_1, \ldots, y_{2m-1}$

المخرجات: الأعداد المركبة $c_0, \ldots, c_{2m-1}$

الأعداد الحقيقية $a_0, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{m-1}$

الخطوة	المضمون
1	ضع $M = m$ $q = p$ $\zeta = e^{\pi i/m}$
2	لكل $j = 0, 1, \ldots, 2m-1$ ضع $c_j = y_j$.
3	لكل $j = 1, 2, \ldots, M$ ضع $\xi_j = \zeta^j$ $\xi_{j+M} = -\xi_j$
4	ضع $K = 0$ $\xi_0 = 1$
5	لكل $L = 1, 2, \ldots, p+1$ نفّذ الخطوات 6 – 12.
6	ما دام $K < 2m-1$ فنفّذ الخطوات 7 – 11.

7	لكل $j = 1, 2, \ldots, M$ نفذ الخطوات 8 – 10.
8	ضع $K = k_p \cdot 2^p + k_{p-1} \cdot 2^{p-1} + \cdots + k_1 \cdot 2 + k_0$. (حلّل k.) ضع $K_1 = K/2^q = k_p \cdot 2^{p-q} + \cdots + k_{q+1} \cdot 2 + k_q$ $K_2 = k_q \cdot 2^p + k_{q+1} \cdot 2^{p-1} + \cdots + k_p \cdot 2^q$
9	ضع $\eta = c_{K+M}\xi_{K_2}$ $c_{K+M} = c_K - \eta$ $c_K = c_K + \eta$
10	ضع $K = K + 1$.
11	ضع $K = K + M$.
12	ضع $K = 0$ $M = M/2$ $q = q - 1$
13	ما دام $K < 2m - 1$ فنفّذ الخطوات 14 – 16.
14	ضع $K = k_p \cdot 2^p + k_{p-1} \cdot 2^{p-1} + \cdots + k_1 \cdot 2 + k_0$ (تحليل k) ضع $j = k_0 \cdot 2^p + k_1 \cdot 2^{p-1} + \cdots + k_{p-1} \cdot 2 + k_p$
15	إذا كان $j > K$ بدل c_j بـ c_k.
16	ضع $K = K + 1$.
17	ضع $a_0 = c_0/m$ $a_m = \mathrm{Re}(e^{-i\pi m}c_m/m)$
18	لكل $j = 1, \ldots, m-1$ ضع $a_j = \mathrm{Re}(e^{-i\pi j}c_j/m)$ $b_j = \mathrm{Im}(e^{-i\pi j}c_j/m)$
19	المخرجات $(c_0, \ldots, c_{2m-1}; a_0, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{m-1})$. توقف.

■

مثال 2 وجدنا في مثال (2) من الفصل (5.8) كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الثانية طريقة المربعات الصغرى المنفصلة إلى $f(x) = 2x^2 - 9$ على $[-\pi, \pi]$.

والآن سنجد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الثانية لاستكمال البيانات $\{(x_j, f(x_j))\}_{j=0}^{3}$ حيث

$$a_k = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} f(x_j)\cos(kx_j) \quad \text{لكل } k = 0, 1, 2 \quad \text{و} \quad b_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} f(x_j)\sin(x_j)$$

إن هذا يعطي

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -3.19559339,$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi)\cos(-\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f(0)\cos 0 + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= -9.86960441$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi)\cos(-2\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\pi) + f(0)\cos 0 + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi)\right)$$
$$= 4.93480220$$

و

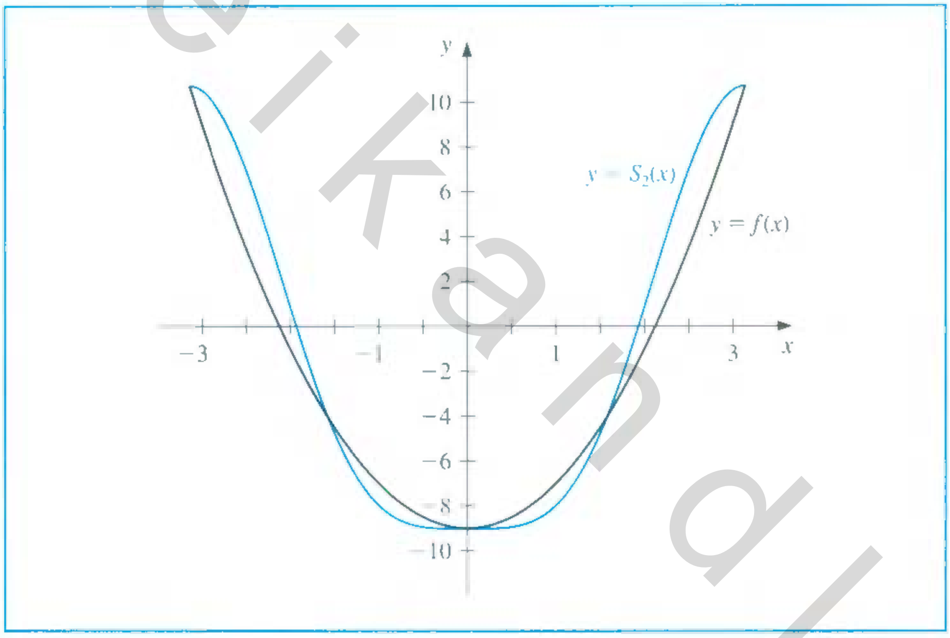
$$b_1 = \frac{1}{2}\left(f(-\pi)\sin(-\pi) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f(0)\sin 0 + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

لذلك

$$S_2(x) = \tfrac{1}{2}(-3.19559339 + 4.93480220\cos 2x) - 9.86960441\cos x.$$

يظهر شكل (16.8) الدالة $f(x)$ وكثيرة الحدود المثلثية للاستكمال $S_2(x)$. ■

شكل 16.8



يشرح المثال الآتي إيجاد كثيرة الحدود لاستكمال دالة معرفة على أي فترة مغلقة.

مثال 3 ليكن $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - \tan x(x-2)$. إن إيجاد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة لاستكمال البيانات $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{7}$ حيث $x_j = j/4$ و $y_j = f(x_j)$ يتطلب تحويل الفترة $[0, 2]$ إلى $[-\pi, \pi]$.

وإن هذا التحويل يعطى بالمعادلة

$$z_j = \pi(x_j - 1)$$

ولذلك فإن مدخلات البيانات في الخوارزمية (3.8) هي

$$\left\{z_j, f\left(1 + \frac{z_j}{\pi}\right)\right\}_{j=0}^{7}$$

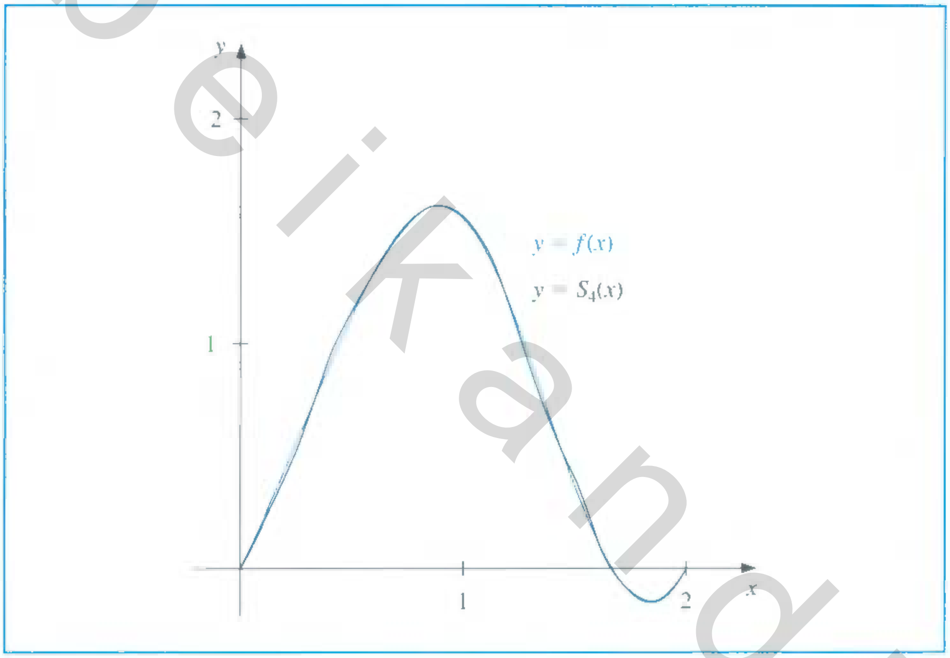
إن كثيرة حدود الاستكمال بدلالة z هي

$$S_4(z) = 0.761979 + 0.771841\cos z + 0.0173037\cos 2z + 0.00686304\cos 3z$$
$$- 0.000578545\cos 4z - 0.386374\sin z + 0.0468750\sin 2z - 0.0113738\sin 3z$$

نجد كثيرة الحدود المثلثية $S_4(x)$ على $[0, 2]$ بتعويض $z = \pi(x-1)$ في $S_4(z)$. ■

يظهر شكل (17.8) الرسم البياني لكل من $y = f(x)$ و $y = S_4(x)$. تظهر قيم $f(x)$ و $S_4(x)$ في جدول (14.8).

شكل 17.8



جدول 14.8

x	$f(x)$	$S_4(x)$	$\lvert f(x) - S_4(x)\rvert$
0.125	0.26440	0.25001	1.44×10^{-2}
0.375	0.84081	0.84647	5.66×10^{-3}
0.625	1.36150	1.35824	3.27×10^{-3}
0.875	1.61282	1.61515	2.33×10^{-3}
1.125	1.36672	1.36471	2.02×10^{-3}
1.375	0.71697	0.71931	2.33×10^{-3}
1.625	0.07909	0.07496	4.14×10^{-3}
1.875	−0.14576	−0.13301	1.27×10^{-2}

لمزيد من التفاصيل عن التحقق من صدق طريقة تحويل فورييه السريع يمكن الرجوع إلى [Ham] الذي يعرض الطريقة من منحى رياضي، أو الرجوع إلى [Brac] حيث تبنى الطريقة على جوانب أكثر ما تكون مألوفة لدى المهندسين.

إن [AHU, pp. 252–269] مرجع جيد للبحث في جوانب حساب هذه الطريقة

إن التعديل على الطريقة في الحالة التي لا يكون فيها m على صيغة قوى (2) موجود في [Win].

إن عرض الطرائق والمادة المتعلقة بها من وجهة نظر الجبر المجرد التطبيقي موجود في [Lau, pp. 438–465].

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 6.8

1. أوجد كثيرة الحدود المثلثية $S_2(x)$ من الرتبة 2 على الفترة $[-\pi,\pi]$ لاستكمال الدوال الآتية، وارسم $f(x) - S_2(x)$:

أ. $f(x) = \pi(x - \pi)$ ب. $f(x) = x(\pi - x)$

ج. $f(x) = |x|$ د. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

2. أوجد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة لاستكمال الدالة $f(x) = x(\pi - x)$ على الفترة $[-\pi,\pi]$ باستخدام:

أ. الحساب المباشر

ب. خوارزمية تحويل فورييه السريع

3. استخدم خوارزمية تحويل فورييه السريع لحساب كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة لاستكمال الدوال الآتية على $[-\pi,\pi]$:

أ. $f(x) = \pi(x - \pi)$ ب. $f(x) = |x|$

ج. $f(x) = \cos \pi x - 2\sin \pi x$ د. $f(x) = x\cos x^2 + e^x \cos e^x$

4. أ. أوجد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة $S_4(x)$ لاستكمال $f(x) = x^2 \sin x$ على الفترة $[0, 1]$.

ب. احسب $\int_0^1 S_4(x)\,dx$.

ج. قارن التكامل في (b) بـ $\int_0^1 x^2 \sin x\,dx$.

5. استخدم التقريبات التي حصلت عليها في التمرين (3) لتقريب التكاملات الآتية، وقارن نتائجك بالقيم الفعلية:

أ. $\int_{-\pi}^{\pi} \pi(x - \pi)\,dx$ ب. $\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx$

ج. $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \pi x - 2\sin \pi x)\,dx$ د. $\int_{-\pi}^{\pi} (x\cos x^2 + e^x \cos e^x)\,dx$

6. استخدم خوارزمية تحويل فورييه السريع لإيجاد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة السادسة عشرة للدالة $f(x) = x^2 \cos x$ على $[-\pi,\pi]$.

7. استخدم خوارزمية تحويل فورييه السريع لإيجاد كثيرة الحدود المثلثية من الرتبة الرابعة والستين للدالة $f(x) = x^2 \cos x$ على $[-\pi,\pi]$.

8. استخدم متطابقة مثلثية لبرهنة أن

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos m x_j)^2 = 2m$$

9. برهن أن $c_0, \ldots, c_{2m-1}$ في الخوارزمية (3.8) معطاة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \cdots & \zeta^{2m-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \cdots & \zeta^{4m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta^{2m-1} & \zeta^{4m-2} & \cdots & \zeta^{(2m-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2m-1} \end{bmatrix}$$

حيث $\zeta = e^{\pi i/m}$.

10. في المناقشة السابقة للخوارزمية (3.8) شرح مثال فيه $m = 4$.

عرّف المتجهات c , d , e , f كما يلي :

$$c = (c_0, c_1, \ldots, c_7)^t$$
$$d = (d_0, d_1, \ldots, d_7)^t$$
$$e = (e_0, e_1, \ldots, e_7)^t$$
$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_7)^t$$
$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_7)^t$$

أوجد مصفوفات A, B, C, D بحيث $c = Ad$, $d = Be$, $e = Cf$ و $f = Dy$.

7.8 مسح الطرائق والبرمجيات Survey Methods & Software

لقد شرحنا في هذا الباب تقريب البيانات والدوال باستخدام دوال ابتدائية (elementary). ولكن هذه الدّوال الابتدائية التي استخدمت كانت كثيرات حدود، وكانت الدّوال النسبية كثيرات حدود مثلثية. وافترضنا نوعين من التقريبات: المنفصل والمتصل. وتبرز التقريبات المنفصلة عند تقريب مجموعة منتهية من البيانات بدالة ابتدائية، وتستخدم التقريبات المتصلة عندما تكون الدالة المطلوب تقريبها معلومة.

وينصح باستخدام طرائق المربعات الصغرى المنفصلة عندما تكون الدالة محدّدة بمجموعة من البيانات التي من الممكن ألا تمثّلها تمامًا. فإن مطابقة البيانات بطريقة المربعات الصغرى قد تأخذ صيغة خطية أو تقريبًا بكثيرة حدود أخرى أو حتى صيغة أسيّة. وتحسب هذه التقريبات بحلّ مجموعات من المعادلات القانونية كما مرَّ في الفصل (1.8).

وإذا كانت البيانات دورية فإن مطابقة المربعات الصغرى المثلثية قد تكون مناسبة. بسبب التعامدية القانونية لقاعدة الدّوال المثلثية. فإن التقريب المثلثي بطريقة المربعات الصغرى لا يتطلب حلَّ نظام خطي. وفي المقادير الكبيرة من البيانات الدورية، يكون الاستكمال بكثيرات الحدود المثلثية محبّبًا أيضًا.

إن إحدى الطرائق الفاعلة في حساب كثيرات الحدود المثلثية للاستكمال هي تحويل فورييه السريع. وعندما يكون الدالة المطلوب تقريبها قابلة للتقييم عند أي قيمة فإن التقريبات تعني أن يكون التكامل أصغر ما يمكن بدلًا من المجموع.

لقد نُوقشت التقريبات بكثيرات الحدود بطريقة المربعات الصغرى المتصلة في الفصل (2.8) وإن الحساب الفعال لكثيرات الحدود بطريقة المربعات الصغرى يؤدي إلى مجموعات كثيرات الحدود المتعامدة قانونيًا، مثل كثيرات حدود ليجندر وتشيبيشف.

تمت دراسة التقريب بالدوال النسبية في الفصل (4.8)، حيث عرض تقريب بادي بوصفه تعميمًا لكثيرة حدود ماكلورين وامتداده لتقريب تشيبيشف بالدالة النسبية. وتسمح كلتا الطريقتين بعملية

تقريب أكثر تجانسًا من كثيرات الحدود.

إن التقريب بطريقة المربعات الصغرى عن طريق الدّوال المثلثية قد تمت دراسـته في الفصل (5.8) وخصوصًا ارتباطه بسلاسل فورييه.

تقدم مكتبة IMSL عددًا من البرمجيات للتقريب. ويعطي البرنامج RLINE خطًّا توفيقيًا لمجموعة من النقاط بطريقة المربعات الصغرى، ومقاييس إحصائية كالوسيطيات الحسابية والتباينات.

إن البرنامج FNLSQ يحسب التقريب بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة وفق اختيار المستخدم لدوال الأساس، وأما BSLSQ فيحسب تقريب الشريحة بطريقة المربعات الصغرى.

ويحسب البرنامج RATCH تقريب تشبيشف النسبي الموزون للدوال المتصل على $[a, b]$، ويحسب FFTCB تحويل فورييه السريع لمجموعة من البيانات بطريقة مماثلة للخوارزمية (3.8).

تحوي مكتبة NAG كثيرًا من البرامج لتقريب الدّوال. والتقريب بكثيرات الحدود بطريقة المربعات الصغرى موجود في البرنامج E02ADF. إن هذا البرنامج متعدد الاتجاهات؛ إذ يحسب بطريقة المربعات الصغرى كثيرات الحدود بدرجات متعددة، ويقدّم أخطاءها بالمربعات الصغرى.

إنه يستخدم كثيرات حدود تشبيشف لتصغير خطأ التدوير لأدنى حد وتحسين الدقة.

يمكن استخدام البرنامج E02AEF لتقييم التقريب الناتج من E02ADF. ويعطي NAG البرنامج E02BAF أيضًا لحساب توفيق الشريحة التكعيبي بطريقة المربعات الصغرى، كما يقدِّم E02GAF حسابًا أفضل لتوفيق خطي L_1، ويعطي E02GCF حسابًا أحسن لتوفيق L_∞. وإن البرنامج E02RAF يحسب تقريب بادي. وتحتوي مكتبة NAG برمجيات كثيرة أيضًا لتحويلات فورييه السريعة، إحداها C06ECF. إن مكتبة نتلب (netlib) تحتوي البرامج polfit.f في حقيبة slatec لحساب تقريب كثيرة الحدود لمجموعة من النقاط المنفصلة بطريقة المربعات الصغرى. ويمكن استخدام البرنامج pvalue.f لإيجاد قيم كثيرة الحدود من polfit.f وأي من مشتقاته عند أي نقطة. للمزيد من المعلومات حول مبرهنة العامة لمبرهنة التقريب ينصح بالرجوع إلى Cheney [Ch] أو Davis [Da]، Powell[Po]. وهناك مرجع جيد لطرائق المربعات الصغرى، ألا وهو Lawson & Hanson [LH]. أما للمعلومات عن تحويلات فورييه فيمكن الرجوع إلى Briggs & Hanson [BH] و Van Loan [Van].

الباب

9

تقريب القيم المميزة

Approximating Eigenvalues

مقدمة

تتضح الاهتزازات الطولية لقضيب مرن ذي صلابة $p(x)$ وكثافة $\rho(x)$ من خلال المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right]$$

حيث تمثِّل $v(x,t)$ معدل الإزاحة الطولية لجزء من القضيب، يبدأ من موقع توازنه x عند الزمن t. ويمكن كتابة الاهتزازات على صورة مجموع اهتزازات متناسقة

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(x)\cos\sqrt{\lambda_k}(t-t_0)$$

حيث إن

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du_k}{dx}(x)\right] + \lambda_k \rho(x) u_k(x) = 0$$

فإذا كان طول القضيب l ومثبتاً عند طرفيه. فإن هذه المعادلة التفاضلية متحقِّقة عند $0 < x < l$ و $v(0) = v(l) = 0$. ونظام المعادلات التفاضلية هذه يسمى "نظام ستورم – ليوفيل Sturm–Liouville system" والأعداد λ_k هي القيم المميزة مع الدوال المميزة $u_k(x)$ المقابلة لها.

افترض أن القضيب بطول 1m مع صلابة منتظمة $p(x) = p$ وكثافة منتظمة $\rho(x) = \rho$. ولتقريب u و λ، ضع $h = 0.2$. ومن ثم فإن $x_j = 0.2j$ عند $0 \le j \le 5$، وبالإمكان استخدام صيغة الفرق المركزي (5.4) من الفصل (1.4) لتقريب المشتقات الأولى. وهذا يعطي النظام الخطي

$$A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = -0.04\frac{\rho}{p}\lambda \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = -0.04\frac{\rho}{p}\lambda\mathbf{w}$$

في هذا النظام $w_j \approx u(x_j)$ عند $1 \le j \le 4$ و $w_0 = w_5 = 0$. إن القيم المميزة الأربع لـ A تقرب القيم المميزة للنظام *Sturm–Liouville system*، وإنه تقريب للقيم المميزة التي سوف نتناولها في هذا الباب. إن تطبيق Sturm–Liouville يناقَش في التمرين (13) من الفصل (4.9).

1.9 الجبر الخطي والقيم المميزة
Linear Algebra and Eigenvalues

تناولنا القيم المميزة والمتجهات المميزة في الفصل السابع من خلال ربطها بتقارب طرائق التكرار لتقريب الحل لنظام خطي. ولتحديد القيم المميزة لمصفوفة A بحجم $n \times n$، نبني كثيرة حدود الخاصية

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

ومن ثم تحديد أصفاره. إن إيجاد محددة مصفوفة بحجم $n \times n$ مكلف حسابيًا. كما أن إيجاد تقريبات جيدة لجذور $p(\lambda)$ صعب أيضًا. وسنكتشف في هذا الفصل وسائل أخرى لتقريب القيم المميزة للمصفوفة.

وجدنا في الباب السابع أن أسلوب التكرار لحلّ نظام خطي سيتقارب إذا كانت القيم المميزة جميعها المرتبطة بالمسألة تقل عن الواحد. والقيم الحقيقية للقيم المميزة في هذه الحالة ليست ذات ضرورة رئيسة. وإنما هي منطقة المستوى المركب فقط الذي تقع ضمنه.

وحتى عندما نحتاج إلى معرفة القيم المميزة. فإن كون العديد من أساليب تقريبها ذات صفة إعادة يؤدي إلى أن تحديد المناطق التي تقع ضمنها هو الخطوة الأولى في اتجاه تحديد التقريب؛ لأنه يزودنا بالتقريب الابتدائي الذي تحتاج إليه طرائق التكرار.

وقبل تناول نتائج أخرى تتعلق بالقيم المميزة والمتجهات المميزة. فإننا نحتاج إلى بعض التعريفات والنتائج من الجبر الخطي. وكل النتائج العامة التي نحتاج إليها في بقية هذا الفصل معروضة هنا؛ لتسهيل الرجوع إليها بوصفها مصدرًا. ويمكن إيجاد براهين النتائج غير المعطاة في معظم الكتب الرئيسة في الجبر الخطي (انظر على سبيل المثال [ND]). يوازي التعريف الأول تعريف الاستقلالية الخطية للدوال الموضحة في الفصل (2.8).

تعريف 1.9 لتكن $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\}$ مجموعة متجهات. نقول: إن هذه المجموعة مستقلة خطيًا linearly independent إذا كان

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{v}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{v}^{(2)} + \alpha_3 \mathbf{v}^{(3)} + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}^{(k)}$$

يقتضي أن $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 0$. وبخلاف ذلك فإن مجموعة المتجهات تكون مرتبطة خطيًا linearly dependent.

لاحظ أن أي مجموعة متجهات تحتوي المتجه الصفري تكون مرتبطة خطيًا. ■

مبرهنة 2.9 إذا كانت $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ مجموعة من المتجهات المستقلة خطيًا في فضاء المتجهات $\mathbb{R}^n$. وكان $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ فيمكن كتابة $\mathbf{x}$ بطريقة وحيدة كترتيب خطي.

$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{v}^{(1)} + \beta_2 \mathbf{v}^{(2)} + \beta_3 \mathbf{v}^{(3)} + \cdots + \beta_n \mathbf{v}^{(n)}$$

حيث $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}^n$. ■

البرهان افترض أن A مصفوفة أعمدتها المتجهات $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$. لذا فإن المجموعة $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ تكون مستقلة خطيًا إذا وفقط إذا كانت معادلة المصفوفة $A\boldsymbol{\alpha} = 0$ لها حل وحيد هو $\boldsymbol{\alpha} = 0$. ولكن من خلال مبرهنة (16.6) فإن هذا يكافئ كون معادلة المصفوفة $A\mathbf{b} = \mathbf{x}$

لها حلٌّ وحيد لكل متجه $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. ومن ثم يكون مكافئًا للتعبير بأنه لكل $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ فإن

$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{v}^{(1)} + \beta_2 \mathbf{v}^{(2)} + \cdots + \beta_n \mathbf{v}^{(n)}$$

عند مجموعة وحيدة من الثوابت $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$. ■■■

إن أي مجموعة n من المتجهات المستقلة خطيًّا ضمن $\mathbb{R}^n$ تسمى أساسًا basis لـ $\mathbb{R}^n$.

مثال 1 ليكن $\mathrm{v}^{(1)} = (1, 0, 0)^t, \mathrm{v}^{(2)} = (-1, 1, 1)^t, \mathrm{v}^{(3)} = (0, 4, 2)^t$. فإذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ عبارة عن أعداد بحيث

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{v}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{v}^{(2)} + \alpha_3 \mathbf{v}^{(3)}$$

فإن

$$(0, 0, 0)^t = \alpha_1(1, 0, 0)^t + \alpha_2(-1, 1, 1)^t + \alpha_3(0, 4, 2)^t = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3)^t$$

ومن ثم فإن

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

ولأن الحل الوحيد لهذا النظام هو $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$، فإن المجموعة $\{\mathrm{v}^{(1)}, \mathrm{v}^{(2)}, \mathrm{v}^{(3)}\}$ تكون مستقلة خطيًّا ضمن $\mathbb{R}^3$. وهي أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

إن أي متجه $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ ضمن $\mathbb{R}^3$ يمكن كتابته بالصيغة

$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{v}^{(1)} + \beta_2 \mathbf{v}^{(2)} + \beta_3 \mathbf{v}^{(3)}$$

باختيار

$$\beta_1 = x_1 - x_2 + 2x_3, \quad \beta_2 = 2x_3 - x_2, \quad \beta_3 = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_3)$$ ■

ستُستخدم النتيجة الآتية في الفصل الآتي لتطوير الطريقة الفائقة Power method لتقريب القيم المميزة، وقد افترض برهان هذه النتيجة في التمرين (12).

مبرهنة 3.9 إذا كانت A مصفوفة، و $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ قيمًا مميزة مختلفة لـ A تقابل متجهات مميزة $\mathrm{x}^{(1)}, \mathrm{x}^{(2)}, \ldots, \mathrm{x}^{(k)}$ فإن $\{\mathrm{x}^{(1)}, \mathrm{x}^{(2)}, \ldots, \mathrm{x}^{(k)}\}$ مستقلة خطيًّا. ■

مثال 2 انظر المثال (1) من الفصل (2.7) تجد أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

لها كثيرة حدود الخاصية

$$p(\lambda) = p(A - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$$

ولذا فإن القيم المميزة لـ A هي $\lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = 2$. ولقد وُجدت ثلاثة متجهات مميزة مستقلة خطيًّا لـ A. وللقيمة المميزة $\lambda_1 = 3$ متجه مميز $\mathrm{x}_1 = (0, 1, 1)^t$. وللقيمة المميزة $\lambda_2 = 2$ اثنان من المتجهات المميزة والمستقلة خطيًّا هما $\mathrm{x}_2 = (0, 2, 1)^t$ و $\mathrm{x}_3 = (-2, 0, 1)^t$.

افترض أن المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ولهذه المصفوفة أيضا كثيرة حدود الخاصية

$$p(\lambda) = p(B - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$$

لذا فإن القيم المميزة لـ B هي نفسها لـ A. بمعنى أن $\lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = 2$. وليس صعبًا أن نرى أن $\lambda_1 = 3$ لها متجه مميز $x_1 = (0, 0, 1)^t$. ولكن هذا المتجه المميز ليس بذي أهمية خاصة. إنها حالة القيمة المميزة $\lambda_2 = 2$ لـ B التي تختلف عما لـ A.

لتحديد المتجه المميز لـ B عند القيمة المميزة $\lambda_2 = 2$، نحتاج إلى حلّ النظام $(B - 2 \cdot I)x = 0$ لذلك

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وفي هذه الحالة فإن المتجه المميز بحاجة إلى أن يحقّق المعادلتين $x_2 = 0$ و $x_3 = 0$. وإذا قمنا بتطبيع المتجه بجعل $x_1 = 1$ سيكون لدينا الحل الوحيد $x_2 = (1, 0, 0)^t$. لذلك فليس هناك متجهان مميزان مستقلان خطيًّا لـ $\lambda_2 = 2$ و B مثلما هو الحال لـ $\lambda_2 = 2$ و A، وهناك متجهان مميزان فقط مستقلان خطيًّا للمصفوفة B بحجم 3×3. وسنرى أنه عندما لا يكون عدد المتجهات المميزة المستقلة خطيًّا مماثلاً لحجم المصفوفة، ستكون هناك صعوبات في طرق التقريب لإيجاد القيم المميزة. ■

لقد افترضت مجاميع الدوال المتعامدة والمنطبعة في الفصل (2.8). وتعرّف لمتجهات بهذه الخصائص بالأسلوب نفسه.

تعريف 4.9 تسمى مجموعة المتجهات $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}\}$ متعامدة orthogonal إذا كانت $(v^{(i)})^t v^{(j)} = 0$ لكل $i \neq j$. وإذا كان $(v^{(i)})^t v^{(i)} = 1$ أيضًا لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ فإن المجموعة حيادية التعامد orthonormal. ■

ولأن $x^t x = \|x\|_2^2$، فإن مجموعة المتجهات المتعامدة $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}\}$ تكون طبيعية التعامد إذا وفقط إذا كان $\|v^{(i)}\|_2 = 1$ لكل من $i = 1, 2, \ldots, n$.

مثال 3 المتجهات $v^{(1)} = (0, 4, 2)^t$, $v^{(2)} = (-1, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5})^t$, $v^{(3)} = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3})^t$ تشكل مجموعة متعامدة. ومعايير l_2 لهذه المتجهات هي

$$\|v^{(1)}\|_2 = 2\sqrt{5}, \quad \|v^{(2)}\|_2 = \frac{\sqrt{30}}{5}, \quad \|v^{(3)}\|_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

والنتيجة أن المتجهات

$$u^{(1)} = \frac{v^{(1)}}{\|v^{(1)}\|_2} = \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^t$$

$$u^{(2)} = \frac{v^{(2)}}{\|v^{(2)}\|_2} = \left(-\frac{\sqrt{30}}{6}, -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}\right)^t$$

$$u^{(3)} = \frac{v^{(3)}}{\|v^{(3)}\|_2} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^t$$

تشكل مجموعة متعامدة، لأنها ترث التعامدية من $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$. وبالإضافة إلى ذلك فإن

$$\|u^{(1)}\|_2 = \|u^{(2)}\|_2 = \|u^{(3)}\|_2 = 1$$ ■

وقد أخذ برهان النتيجة الآتية في الحسبان في التمرين (9).

مبرهنة 5.9 مجموعة المتجهات المتعامدة اللاصفرية تكون مستقلة خطياً.

والمصطلحات في التعريف الآتي ناتجة عن حقيقة كون أعمدة المصفوفة المتعامدة ستشكل مجموعة متجهات متعامدة. (انظر التمرين(10)

تعريف 6.9 يقال للمصفوفة Q: إنها مصفوفة متعامدة orthogonal إذا كان $Q^{-1} = Q^t$. ■

من الأفضل تسمية هذه المصفوفات بالحقيقية التعامد Orthonormal، لأن الأعمدة تشكل مجاميع طبيعية متعامدة من المتجهات

مصفوفات التبديلات التي نوقشت في الفصل (5.6) لها هذه الخاصية، لذلك فهي متعامدة. ■

مثال 4 ظهرت المصفوفة المتعامدة Q المتشكلة عن مجموعة متجهات متعامدة في مثال (2)، وهي

$$Q = [u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

انظر

$$QQ^t = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{30}}{6} & -\frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويكون $Q^tQ = I$ صحيحًا أيضًا. لذلك $Q^t = Q^{-1}$. ■

تعريف 7.9 المصفوفتان A و B متماثلتان similar إذا كانت هناك مصفوفة غير مفردة S مع $A = S^{-1}BS$. ■

للمصفوفات المتماثلة صفة مهمة وهي أن لها القيم المميزة نفسها.

مبرهنة 8.9 افترض أن A و B مصفوفتان متماثلتان مع $A = S^{-1}BS$. وأن λ قيمة مميزة لـ A مع متجه مميز x. لذلك فإن λ قيمة مميزة لـ B مع متجه مميز Sx. ■

البرهان افترض أن $x \neq 0$ بحيث

$$S^{-1}BSx = Ax = \lambda x$$

وبالضرب من اليسار في المصفوفة S نحصل على

$$BSx = \lambda Sx$$

ولأن $x \neq 0$ و S غير مفردة، فإن $Sx \neq 0$. لذلك فإن Sx هي متجه مميز لـ B مقترنة بقيمتها المميزة λ. ■ ■ ■

إن أمر IsSimilar(A,B) .Maple في مكتبة الجبر الخطي LinearAlgebra نعطي "صحيحة *true* " إذا كانت A و B متماثلتين، وتعطي " خطأ *false* " فيما عدا ذلك.

إن تحديد القيم المميزة يكون سهلاً لمصفوفة مثلثية A، لأنه في هذه الحالة تكون λ حلًّا للمعادلة

$$0 = \det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda)$$

إذا وفقط إذا كانت $\lambda = a_{ii}$ عند قيمة ما i. وتوضح النتيجة الآتية علاقة تسمى "تحويلاً تماثليًا similarity transformation " بين مصفوفات معينة ومصفوفات مثلثية.

مبرهنة 9.9 schur

لتكن A مصفوفة عندئذٍ. توجد مصفوفة قابلة للعكس U تحقق الخاصية $T = U^{-1}AU$ حيث مصفوفة مثلثية علوية عناصر قطرها قيم مميزة للمصفوفة A ■

عساي شور (1875–1941) Issai Schur مشهور أيضًا بسبب أبحاثه في مبرهنة الزمر، ولكنه بحث في مبرهنة الأعداد، والتحليل، وحقول أخرى. بعد نشر عدد 1909 ما هو معروف الآن بمبرهنة شور

تحقق المصفوفة U التي وجودها مضمون في مبرهنة (9.9) الشرط $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ لأي متجه x. وإن مصفوفات بهذه الصفة تسمى "وحدانية unitary ". وعلى الرغم من أننا لن نستخدم خاصية المعيار هذه، إلا أنها تزيد من تطبيق مبرهنة شور Schur's Theorem.

مبرهنة (9.9) هي مبرهنة موجودة، وتضمن وجود مصفوفة مثلثية T، ولكنها لا تعطي وسائل إنشاء لإيجاد T، لكونها تتطلب معلومات حول القيم المميزة لـ A. ونجد في أغلب الحالات أنه من الصعوبة تحديد مصفوفة التحويل التماثلي U. يقلّل الشرط الآتي التعقيد في مبرهنة (9.9) للمصفوفات المتماثلة، لأن مصفوفة التحويل في هذه الحالة تكون متعامدة.

إن المعيار لمصفوفة الباب هو 1 وذلك لها قيمة ...

مبرهنة 10.9 إذا كانت A مصفوفة متماثلة وD مصفوفة مثلثية عناصرها القطرية القيم المميزة لـ A. فإنه توجد مصفوفة متعامدة Q بحيث تكون $D = Q^{-1}AQ = Q^{t}AQ$. ■

توضح النتائج الآتية للمبرهنة (10.9) بعض الخصائص المفيدة للمصفوفات المتماثلة.

تمهيدية 11.9 لتكن A مصفوفة متماثلة من الدرجة $n \times n$. عندئذ يوجد n من القيم المميزة للمصفوفة A تكون مجموعة عيارية متعامدة، وأن القيم المميزة للمصفوفة A أعداد حقيقية. ■

البرهان إذا كانت $Q = (q_{ij})$ و $D = (d_{ij})$ تمثِّل المصفوفات المنوه بها في مبرهنة (10.9) فإن $D = Q^{-1}AQ$ تؤدي إلى $AQ = QD$.

ليكن $1 \le i \le n$ و $\mathbf{v}_i = (q_{1i}, q_{2i}, \ldots, q_{ni})^t$ عبارة عن العمود i في Q. لذلك فإن

$$A\mathbf{v}_i = d_{ii}\mathbf{v}_i$$

حيث إن d_{ii} عبارة عن قيمة مميزة لـِ A مع متجه مميز $\mathbf{v}_i$ يقابلها. ويمثِّل العمود i في Q. ولأن أعمدة Q متعامدة، فإن المتجهات المميزة لـ A متعامدة.

وبضرب هذه المعادلة من اليسار في المقدار $\mathbf{v}_i^t$ نحصل على

$$\mathbf{v}_i^t A\mathbf{v}_i = d_{ii}\mathbf{v}_i^t\mathbf{v}_i$$

ولأن $\mathbf{v}_i^t A\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_i^t\mathbf{v}_i$ عددان حقيقيان و $\mathbf{v}_i^t\mathbf{v}_i = 1$، فإن القيمة المميزة $d_{ii} = \mathbf{v}_i^t A\mathbf{v}_i$ عدد حقيقي لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. ■ ■ ■

تذكر من الفصل (6.6) أن المصفوفة المتماثلة A تسمى موجبة التحديد positive definite في حال وجود $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ عند كل المتجهات اللاصفرية $\mathbf{x}$. تشخص مبرهنة الآتية مصفوفات موجبة التحديد من حيث القيم المميزة. وتجعل هذه الخاصية المتعلقة بالقيمة المميزة المصفوفات موجبة التحديد ضرورية في التطبيقات.

تمهيدية 12.9 المصفوفة المتماثلة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا كانت القيم المميزة جميعها لـِ A موجبة. ■

البرهان افترض أولاً أن A موجبة التحديد، وأن λ عبارة عن قيمة مميزة لـِ A مع متجه مميز يقابلها $\mathbf{x}$. لذا فإن

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^t\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|_2^2$$

ومن ثم $\lambda > 0$. لذلك فإن أي قيمة مميزة لمصفوفة موجبة التحديد تكون موجبة.

ولإثبات العكس، افترض أن A متماثلة مع قيم مميزة موجبة. ومن خلال النتيجة (11.9) فإن A لها n من المتجهات المميزة $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$، وتشكل مجموعة متعامدة ومستقلة خطيًّا من خلال مبرهنة (5.9). وبذلك فعند أي $\mathbf{x} \neq 0$ يجب وجود مجموعة وحيدة من الثوابت اللاصفرية $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ بحيث يكون

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}^{(i)}$$

وبالضرب في المقدار $\mathbf{x}^t A$ نحصل على

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \mathbf{x}^t\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i A\mathbf{v}^{(i)}\right) = \mathbf{x}^t\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i \mathbf{v}^{(i)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_j\beta_i\lambda_i (\mathbf{v}^{(j)})^t\mathbf{v}^{(i)}$$