بما أن $\tilde{T}_n(x)$ عبارة عن مضاعف لـ $T_n(x)$. فإن مبرهنة (9.8) تتضمّن أصفارًا $\tilde{T}_n(x)$ تقع أيضا عند

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

لكلّ $k = 1, 2, \ldots, n$، وإن القيم القصوى لـ $\tilde{T}_n(x)$ لكلّ $n \geq 1$. تحدث عند

$$\tilde{T}_n(\bar{x}'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \quad \text{مع} \quad \bar{x}'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \tag{13.8}$$

لكلّ $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

لتعبر $\tilde{\prod}_n$ عن مجموعة كثيرات الحدود الأحادية جميعها (monic) من الرتبة n.

إن العلاقة المعبّر عنها بالمعادلة (13.8) تؤدي إلى خاصية تصغير مهمة تميز $\tilde{T}_n(x)$ عن عناصر $\tilde{\prod}_n$ الأخرى.

مبرهنة 10.8 إن كثيرات الحدود على الصيغة $\tilde{T}_n(x)$. عندما $n \geq 1$ لها الخاصية الآتية

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \quad \text{لـ} \quad P_n(x) \in \tilde{\prod}_n \quad \text{جميعًا}$$

وبالإضافة إلى ذلك تتحقق المساواة فقط إذا كان $P_n = \tilde{T}_n$. ■

البرهان افترض أن $P_n(x) \in \tilde{\prod}_n$. وأن

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)|$$

افترض $Q = \tilde{T}_n - P_n$. بما أن كلًا من $\tilde{T}_n(x)$ و $P_n(x)$ كثيرة حدود أحادية بدرجة n. فإن $Q(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $(n-1)$ على الأكثر.

بالإضافة إلى ذلك. وعلى النقاط القصوى لـ $\tilde{T}_n(x)$ يكون

$$Q(\bar{x}'_k) = \tilde{T}_n(\bar{x}'_k) - P_n(\bar{x}'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P_n(\bar{x}'_k)$$

بما أن $|P_n(\bar{x}'_k)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ لكلّ $k = 0, 1, \ldots, n$ نحصل على

$Q(\bar{x}'_k) \leq 0$ عندما يكون k فرديًا. و $Q(\bar{x}'_k) \geq 0$ عندما يكون k زوجيًا

بما أن Q متصل. فإن مبرهنة القيمة الوسيطية تتضمّن أن كثيرة الحدود $Q(x)$ لها صفر واحد على الأقل من بين $\bar{x}'_j$ و $\bar{x}'_{j+1}$. لكلّ $j = 0, 1, \ldots, n-1$. وهكذا لـ Q n من الأصفار على الأقل في الفترة $[-1, 1]$.

ولكن رتبة $Q(x)$ أقل من n. ولذلك $Q \equiv 0$. وهذا يعني أن $P_n \equiv \tilde{T}_n$. ■ ■ ■

يمكن استخدام مبرهنة (10.8) للإجابة عن التساؤل: أين نعيّن نقاط الاستكمال الداخلي لكي نجعل خطأ استكمال لاكرانج أصغر ما يمكن؟

إن تطبيق مبرهنة (3.3) على الفترة [-1,1] ينص على أنه إذا كانت $x_0, \ldots, x_n$ أعدادًا متميزة في الفترة [-1,1]. وإذا كان $C^{n+1}[-1, 1]$ فإنه لكلِّ $x \in [-1, 1]$ يوجد عدد $\xi(x)$ في (-1,1) بحيث

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

حيث $P(x)$ كثيرة حدود لاكرانج للاستكمال الداخلي. وعمومًا لا يوجد تحكم في $\xi(x)$، ولذلك كي نجعل الخطأ أصغر ما يمكن بتحديد ذكي للنقاط $x_0, \ldots, x_n$، نجد النقاط $x_0, \ldots, x_n$ التي تجعل

$$|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$$

أصغر ما يمكن على مدى الفترة $[-1, 1]$.

وبما أن $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ كثيرة حدود أحادية monic من الرتبة $(n + 1)$، فإننا قد رأينا أن القيمة الصغرى تحدث عندما

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = \tilde{T}_{n+1}(x)$$

إن القيمة العظمى لـ $|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$ تكون أصغر ما يمكن عندما نختار x_k ليكون الصفر عدد $(k + 1)$ لـ $\tilde{T}_{n+1}$ لكل $k = 0, 1, \ldots, n$، أي عندما تكون x_k مساوية لـ

$$\bar{x}_{k+1} = \cos \frac{2k + 1}{2(n + 1)}\pi$$

بما أن $\max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_{n+1}(x)| = 2^{-n}$ فإن هذا أيضًا يعني أن

$$\frac{1}{2^n} = \max_{x\in[-1,1]} |(x - \bar{x}_1) \cdots (x - \bar{x}_{n+1})| \leq \max_{x\in[-1,1]} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|$$

لكل اختيار للنقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ في الفترة $[-1, 1]$. التمهيدية التالية تأتي من المناقشة السابقة.

تمهيدية 11.8 إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة n على الأكثر بنقاط على جذور $T_{n+1}(x)$ فإن

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2^n(n + 1)!} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|$$

لكل $f \in C^{n+1}[-1, 1]$. ■

من الممكن تعميم هذه الطريقة لاختيار النقاط التي تجعل خطأ الاستكمال أصغر ما يمكن، بحيث تطبّق على فترة عامة مغلقة $[a , b]$، وذلك باستخدام تحويل الوسيطات

$$\tilde{x} = \tfrac{1}{2}[(b - a)x + a + b]$$

وذلك لتحويل الأعداد $\bar{x}_k$ في الفترة $[-1, 1]$ إلى ما يقابلها من أعداد $\tilde{x}_k$ في الفترة $[a , b]$ كما هو موضح في المثال (1).

مثال 1 ليكن $f(x) = xe^x$ على $[0, 1.5]$. سنبني اثنتين من كثيرات حدود الاستكمال الداخلي من ثلاث درجات على الأكثر.

أولاً: سنستخدم النقاط المتساوية الأبعاد $x_0 = 0$، $x_1 = 0.5$، $x_2 = 1$ و $x_3 = 1.5$ لنحصل على

$$L_0(x) = -1.3333x^3 + 4.0000x^2 - 3.6667x + 1$$

$$L_1(x) = 4.0000x^3 - 10.000x^2 + 6.0000x$$

$$L_2(x) = -4.0000x^3 + 8.0000x^2 - 3.0000x$$

$$L_3(x) = 1.3333x^3 - 2.000x^2 + 0.66667x$$

القيم المعروضة في العمودين الابتدائيين في جدول (7.8). وإن كثيرة الحدود الأولى تُعطى بالصيغة

$$P_3(x) = 1.3875x^3 + 0.057570x^2 + 1.2730x$$

جدول 7.8

x	$f(x) = xe^x$	$\tilde{x}$	$f(\tilde{x}) = xe^x$
$x_0 = 0.0$	0.00000	$\tilde{x}_0 = 1.44291$	6.10783
$x_1 = 0.5$	0.824361	$\tilde{x}_1 = 1.03701$	2.92517
$x_2 = 1.0$	2.71828	$\tilde{x}_2 = 0.46299$	0.73560
$x_3 = 1.5$	6.72253	$\tilde{x}_3 = 0.05709$	0.060444

للحصول على كثيرة الحدود الثانية للاستكمال، حرّك الأصفار $\bar{x}_k = \cos((2k+1)/8)\pi$ لكل من $k = 0, 1, 2, 3$ الخاصة بـ $\tilde{T}_4$ من $[-1, 1]$ إلى $[0, 1.5]$. باستخدام التحويل الخطي

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2}[(1.5-0)\bar{x}_k + (1.5+0)] = 0.75 + 0.75\bar{x}_k$$

لنحصل على

$\tilde{x}_0 = 1.44291$، $\tilde{x}_1 = 1.03701$، $\tilde{x}_2 = 0.46299$ و $\tilde{x}_3 = 0.05709$

بعد ذلك تحسب كثيرات حدود لاكرانج لهذه المجموعة من النقاط بما يلي:

$$\tilde{L}_0(x) = 1.8142x^3 - 2.8249x^2 + 1.0264x - 0.049728$$

$$\tilde{L}_1(x) = -4.3799x^3 + 8.5977x^2 - 3.4026x + 0.16705$$

$$\tilde{L}_2(x) = 4.3799x^3 - 11.112x^2 + 7.1738x - 0.37415$$

$$\tilde{L}_3(x) = -1.8142x^3 + 5.3390x^2 - 4.7976x + 1.2568$$

إن القيم الدالية اللازمة لكثيرات الحدود هذه موجودة في العمودين الأخيرين من جدول (7.8). إن كثيرة حدود الاستكمال من الرتبة الثالثة على الأكثر

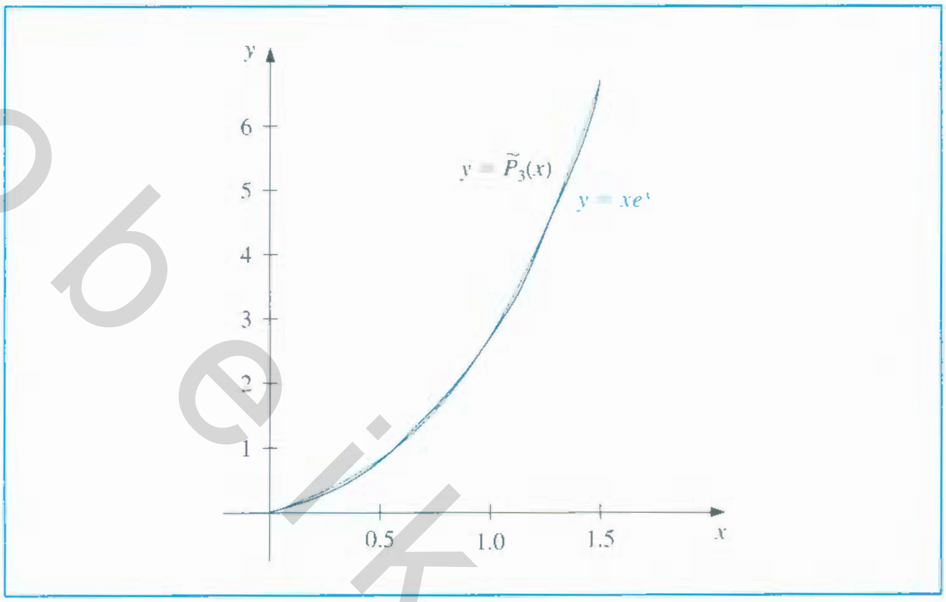
$$\tilde{P}_3(x) = 1.3811x^3 + 0.044652x^2 + 1.3031x - 0.014352$$

وللمقارنة، يعرض جدول (8.8) قيم x المختلفة مع قيم $f(x)$، $P_3(x)$ و $\tilde{P}_3(x)$. ويمكن أن نستنتج من هذا جدول أنه على الرغم من أن الخطأ باستخدام $P_3(x)$ أقل منه باستخدام $\tilde{P}_3(x)$ قريبًا من منتصف جدول، فإن القيمة القصوى للخطأ باستخدام $\tilde{P}_3(x)$ هي 0.0180 (انظر شكل 12.8). ■

جدول 8.8

x	$f(x) = xe^x$	$P_3(x)$	$\lvert xe^x - P_3(x)\rvert$	$\tilde{P}_3(x)$	$\lvert xe^x - \tilde{P}_3(x)\rvert$
0.15	0.1743	0.1969	0.0226	0.1868	0.0125
0.25	0.3210	0.3435	0.0225	0.3358	0.0148
0.35	0.4967	0.5121	0.0154	0.5064	0.0097
0.65	1.245	1.233	0.012	1.231	0.014
0.75	1.588	1.572	0.016	1.571	0.017
0.85	1.989	1.976	0.013	1.974	0.015
1.15	3.632	3.650	0.018	3.644	0.012
1.25	4.363	4.391	0.028	4.382	0.019
1.35	5.208	5.237	0.029	5.224	0.016

شكل 12.8



يمكن استخدام كثيرات حدود تشبيشف لتقليل رتبة كثيرة الحدود المستخدمة بخسارة في دقة حدها الأدنى. وبما أن كثيرات حدود تشبيشف تحقّق القيمة الصغرى للقيمة العظمى المطلقة التي تتوزّع بالتجانس على الفترة. يمكن استخدامها لتقليل رتبة كثيرة الحدود المستخدمة في التقريب دون تخطي الخطأ المسموح به.

افترض تقريب أي كثيرة حدود من الرتبة n

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

على الفترة $[-1, 1]$ باستخدام كثيرة حدود من الرتبة $n - 1$ على الأكثر.

إن الغرض هو اختيار $P_{n-1}(x)$ في $\prod_{n-1}$ بحيث يكون

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x) - P_{n-1}(x)|$$

أصغر ما يمكن.

نلاحظ أولاً أن $(P_n(x) - P_{n-1}(x))/a_n$ كثيرة حدود أحادية (monic) من الرتبة n. ولذلك فإن تطبيق مبرهنة (10.8) يعطي

$$\max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{1}{a_n}(P_n(x) - P_{n-1}(x)) \right| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

تحدث المساواة بالضبط عندما

$$\frac{1}{a_n}(P_n(x) - P_{n-1}(x)) = \tilde{T}_n(x)$$

وهذا يعني أنه يجب أن نختار

$$P_{n-1}(x) = P_n(x) - a_n \tilde{T}_n(x)$$

وبهذا الاختيار نحصل على القيمة الصغرى لـ

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x) - P_{n-1}(x)| = |a_n| \max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{1}{a_n}(P_n(x) - P_{n-1}(x)) \right| = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

مثال 2 لقد قُرِّبت الدالة $f(x) = e^x$ على الفترة $[-1, 1]$ في كثيرة حدود ماكلورين الرابعة

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24},$$

التي لها خطأ القطع

$$|R_4(x)| = \frac{|f^{(5)}(\xi(x))||x^5|}{120} \le \frac{e}{120} \approx 0.023$$

لكل $-1 \le x \le 1$.

افترض أنه يمكن السماح بخطأ مقداره 0.05. وأننا نرغب في تقليل رتبة كثيرة الحدود المستخدمة في التقدير. حيث نبقى ضمن حدود الخطأ.

إن كثيرة الحدود من الرتبة الثالثة أو أقل التي تعطي أفضل تقريب متجانس لـ $P_4(x)$ على الفترة $[-1, 1]$ هي

$$P_3(x) = P_4(x) - a_4\tilde{T}_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{24}\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

ونحصل بهذا الاختبار على

$$|P_4(x) - P_3(x)| = |a_4\tilde{T}_4(x)| \le \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{192} \le 0.0053$$

إن جمع حد الخطأ هذا إلى حد خطأ قطع ماكلورين يعطي

$$0.023 + 0.0053 = 0.0283$$

الذي لا يزال ضمن الخطأ المسموح به 0.05.

إن كثيرة الحدود من الرتبة الثانية أو أقل التي تعطي أفضل تقريب متجانس لـ $P_3(x)$ على $[-1, 1]$ هي

$$P_2(x) = P_3(x) - \frac{1}{6}\tilde{T}_3(x)$$

$$= \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) = \frac{191}{192} + \frac{9}{8}x + \frac{13}{24}x^2$$

على كل حال. إن

$$|P_3(x) - P_2(x)| = \left|\frac{1}{6}\tilde{T}_3(x)\right| = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{24} \approx 0.042$$

الذي – عند جمعه مع الخطأ المجتمع 0.0283 – يتخطى الخطأ المسموح به 0.05. ومن ثم فإن كثيرة الحدود الأقل رتبة. التي تقرب e^x تقريبًا أفضل على $[-1, 1]$ وبحد خطأ أقل من 0.05 هي

$$P_3(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

يظهر جدول (9.8) قيم الدالة وكثيرات الحدود المستخدمة لتقريبه على نقاط متعددة في $[-1, 1]$.
انظر إلى مدخلات الجدول الخاصة بـ P_2 تقع ضمن الحد المسموح به 0.05 جيدا على الرغم من أن حد الخطأ لـ $P_2(x)$ يزيد على الحد المسموح به. ■

جدول 9.8

x	e^x	$P_4(x)$	$P_3(x)$	$P_2(x)$	$\lvert e^x - P_2(x)\rvert$
-0.75	0.47237	0.47412	0.47917	0.45573	0.01664
-0.25	0.77880	0.77881	0.77604	0.74740	0.03140
0.00	1.00000	1.00000	0.99479	0.99479	0.00521
0.25	1.28403	1.28402	1.28125	1.30990	0.02587
0.75	2.11700	2.11475	2.11979	2.14323	0.02623

مجموعة التمارين 3.8 EXERCISE SET

1. استخدم أصفار $\tilde{T}_3$ لإنشاء كثيرة حدود من الرتبة الثانية لاستكمال الدّوال الآتية على الفترة $[-1, 1]$:

أ. $f(x) = e^x$ ب. $f(x) = \sin x$ ج. $f(x) = \ln(x + 2)$ د. $f(x) = x^4$

2. استخدم أصفار $\tilde{T}_4$ لإنشاء كثيرة حدود من الرتبة الثالثة لاستكمال الدّوال في التمرين (1).

3. أوجد حدًّا للقيمة العظمى لخطأ التقريب في التمرين 1 على الفترة $[-1, 1]$.

4. كرّر التمرين 3 للتقريبات المحسوبة في التمرين (2).

5. استخدم أصفار $\tilde{T}_3$ والتحويلات للفترة المعطاة، لكي تبني كثيرة حدود من الرتبة الثانية لاستكمال الدّوال الآتية:

أ. $f(x) = \frac{1}{x}$، $[1, 3]$ ب. $f(x) = e^{-x}$، $[0, 2]$

ج. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}\sin 2x$، $[0, 1]$ د. $f(x) = x\ln x$، $[1, 3]$

6. أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة السادسة للدالة xe^x، واستخدم كثيرات حدود تشبيشف؛ للحصول على كثيرة حدود من رتبة أقل تستخدم للتقريب، بحيث تحافظ على إبقاء الخطأ أقل من 0.01 على $[-1, 1]$.

7. أوجد كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة السادسة للدالة $\sin x$. واستخدم كثيرات حدود تشبيشف للحصول على كثيرة حدود من رتبة أقل تستخدم للتقريب، بحيث تحافظ على إبقاء الخطأ أقل من 0.01 على $[-1, 1]$.

8. برهن أنه لأي عددين صحيحين i و j حيث $i > j$، نحصل على

$$T_i(x)T_j(x) = \frac{1}{2}[T_{i+j}(x) + T_{i-j}(x)]$$

9. برهن أنه لكلّ كثيرة حدود تشبيشف $T_n(x)$ نحصل على

$$\int_{-1}^{1} \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

4.8 تقريب الدّوال النسبية Rational Function Approximation

يتمتع صف كثيرات الحدود الجبرية ببعض المزايا لاستعمال التقريب:

- يوجد عدد كافٍ من كثيرات الحدود لتقريب أي دّالة متصلة على فترة مغلقة ضمن أي خطأ مسموح به.
- يمكن إيجاد قيم كثيرات الحدود على أي قيم مهما اتفق.
- إن مشتقات كثيرات الحدود وتكاملاتها موجودة وسهلة التحديد.

إن السلبية في استخدام كثيرات الحدود للتقريب تكمن في ميلها إلى الاهتزاز. وهذا غالبًا ما يسبب زيادة حدود الخطأ في استخدام كثيرات الحدود للتقريب من معدل خطأ التقريب؛ لأن حدود الخطأ تتعين بقيمة أعلى من خطأ التقريب.

والآن سنفترض توزيع طرائق خطأ التقريب على فترة التقريب على نحو منجانس. إن هذه الطرائق تعتمد على استخدام الدّوال النسبية.

إن الدالة النسبية r من الرتبة N (rational function r) يكون على الصيغة

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث $p(x)$ و $q(x)$ كثيرتا حدود مجموع درجتيهما N.

وبما أن كل كثيرة حدود هي دالة نسبي [ضع $q(x) \equiv 1$ ببساطة]. فإن التقريب بالدوال النسبية يعطي نتائج ليست أسوأ من تلك الناتجة عن طريق التقريب في كثيرات الحدود. على كل حال، فإن الدّوال النسبية التي لبسطها ومقامها الرتبة نفسها تقريبًا، تعطي نتائج تقريب أفضل عمومًا مما تعطيه طرائق كثيرات الحدود باستخدام المقدار نفسه من الجهد في الحساب. (إن هذه العبارة مبنية على افتراض أن مقدار الجهد في الحساب اللازم لعمليات القسمة هو نفسه تقريبًا اللازم لعمليات الضرب). وللدوال النسبية مزية إضافية. وهي السماح بتقريب كفوير للدوال التي لا نهاية لها من نقاط الانفصال (عدم الاتصال) بالقرب من فترة التقريب وليس خارجها. فالتقريب في كثيرات الحدود غير مقبول عمومًا في هذه الأحوال.

افترض أن r دالة نسبية درجتهما $N = n + m$ على الصيغة

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n}{q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m}$$

وأنه استخدم لتقريب دالة f على فترة مغلقة I تحتوي الصفر. ولكي يكون r معرفًا على الصف يتطلب أن $q_0 \neq 0$. ويمكننا في الحقيقة افتراض $q_0 = 1$، لأنه إذا لم تكن كذلك فإننا نضع $q(x)/q_0$ و $p(x)/q_0$ بدلًا من $q(x)$ و $p(x)$. ومن ثم يوجد $N + 1$ من البرامترات (الوسيطات) $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ، $p_0, p_1, \ldots, p_n$ متاحة لتقريب f في الدالة r.

طريقة بادي للتقريب (The Pade' approximation) وهي تعميم لكثيرة حدود تايلور لتقريب الدالة النسبي، تختار $N + 1$ من البرامترات بحيث $f^{(k)}(0) = r^{(k)}(0)$ لكل $k = 0, 1, \ldots, N$ وعندما يكون $N = n$ و $m = 0$، فإن طريقة بادي للتقريب تكون كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة N.

افترض الفرق

$$f(x) - r(x) = f(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)q(x) - p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)\sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{q(x)}$$

وافترض أن f يتمتع تمديد سلسلة ماكلورين $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ إذًا

$$f(x) - r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{q(x)} \qquad (14.8)$$

إن الهدف هو اختيار الثوابت $q_1, q_2, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$ بحيث

$$f^{(k)}(0) - r^{(k)}(0) = 0 \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

وجدنا في الفصل (2.4) (انظر التمرين (12) خصوصًا) أن هذا يكافئ $f - r$ وله صفر بمضاعف $N + 1$ عند $x = 0$. وتمهيدية لذلك نختار

(15.8) $q_1, q_2, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$. بسط الطرف الأيمن للمعادلة (14.8) أي

$$(a_0 + a_1 x + \cdots)(1 + q_1 x + \cdots + q_m x^m) - (p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n)$$

لا يحتوي على حدود من رتبة تساوي N أو أقل.

هنري بادي (1863 - 1953) قدم أول دراسة منهجية لما أصبح يعرف بتقريبات بيدي وذلك من خلال أطروحته لنيل شهادة الدكتوراة عام 1892 لقد برهن نتائج وفق تركيبها العددي وكما يبين بوضوح العلاقة بين تقريبات بادي والكسور غير المنتهية وقد درس دانيال بيرلوني هذه الأفكار وغيرها في وقت مبكر يعود إلى عام 1730 وقدم جيمس ستيرلنغ منهجا مماثلا في كتاب مناهج التفاضل Methodus differentialis الذي نشر في السنة نفسها. كما استخدم يولير تقريبات بيدي لحساب مجموع السلسلة

ولتبسيط الرموز، نعرّف

$$q_{m+1} = q_{m+2} = \cdots = q_N = 0 \quad و \quad p_{n+1} = p_{n+2} = \cdots = p_N = 0$$

ويمكننا بعد ذلك التعبير عن x^k في التعبير (15.8) على الصيغة

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i}\right) - p_k$$

ولذلك فإن الدالة النسبية لتقريب بادي ينتج من حلّ $N + 1$ من المعادلات الخطية

$$\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

في $N + 1$ من المجاهيل $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ، $p_0, p_1, \ldots, p_n$.

مثال 1 إن سلسلة ماكلورين للدالة e^{-x} هي

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^i$$

إن إيجاد تقريب بادي من الرتبة الخامسة للدالة e^{-x} حيث $n = 3$ و $m = 2$ يتطلب اختيار p_0, p_1, p_2, p_3, q_1 و q_2 بحيث تكون معاملات x^k لكل $k = 0, 1, \ldots, 5$ أصفرًا في التعبير

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)(1 + q_1 x + q_2 x^2) - (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3)$$

وبفك هذا المقدار، وتجميع الحدود نحصل على

$$\begin{aligned}
&x^5: \quad -\tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{24}q_1 - \tfrac{1}{6}q_2 = 0; \qquad && x^2: \quad \tfrac{1}{2} - q_1 + q_2 = p_2 \\
&x^4: \quad \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{6}q_1 + \tfrac{1}{2}q_2 = 0; && x^1: \quad -1 + q_1 = p_1 \\
&x^3: \quad -\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}q_1 - q_2 = p_3; && x^0: \quad 1 = p_0
\end{aligned}$$

ولحلّ هذا النظام في Maple، نستخدم الأوامر الآتية:

```
>eq1:=-1+q1=p1;
>eq2:=1/2-q1-q2=p2;
>eq3:=-1/6+1/2*q1-q2=p3;
>eq4:=1/24-1/6*q1+1/2*q2=0;
>eq5:=-1/120+1/24*q1-1/6*q2=0;
>solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5},{q1,q2,p1,p2,p3});
```

التي تعطي

$$q_2 = \frac{1}{20} \quad و \quad p_0 = 1,\ p_1 = -\frac{3}{5},\ p_2 = \frac{3}{20},\ p_3 = -\frac{1}{60},\ q_1 = \frac{2}{5}$$

ولذلك فإن تقريب بادي يكون

$$r(x) = \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2}$$

يعرض جدول (10.8) قيم $r(x)$ وقيم كثيرة حدود ماكلورين $P_5(x)$. ومن الواضح في المثال أن تقريب بادي مميز. ■

جدول 10.8

x	e^{-x}	$P_5(x)$	$\lvert e^{-x} - P_5(x)\rvert$	$r(x)$	$\lvert e^{-x} - r(x)\rvert$
0.2	0.81873075	0.81873067	8.64×10^{-8}	0.81873075	7.55×10^{-9}
0.4	0.67032005	0.67031467	5.38×10^{-6}	0.67031963	4.11×10^{-7}
0.6	0.54881164	0.54875200	5.96×10^{-5}	0.54880763	4.00×10^{-6}
0.8	0.44932896	0.44900267	3.26×10^{-4}	0.44930966	1.93×10^{-5}
1.0	0.36787944	0.36666667	1.21×10^{-3}	0.36781609	6.33×10^{-5}

ويمكن أيضًا استخدام مابل Maple مباشرة لحساب تقريب بادي.

نحسب أولًا سلسلة ماكلورين بالأمر

```
>series(exp(-x),x);
```

لنحصل على

$$1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + O(x^6)$$

يحسب تقريب بادي بأخذ $n = 3$ و $m = 2$ باستخدام الأمر

```
>g:=convert(%,ratpo y,3,2);
```

حيث تشير % إلى تمهيدية الحساب السابق، أي السلسلة

$$g := \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2}$$

ثم يمكن حساب $g(0.8)$ على سبيل المثال عن طريق إدخال

```
>evalf(subs(x=0.8,g));
```

لنحصل على 0.4493096647.

تنفذ طريقة بادي للتقريب في الخوارزمية (1.8).

تقريب بادي النسبي Pade' Rational Approximation

ALGORITHM
الخوارزمية
1.8

للحصول على التقريب النسبي

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} q_j x^j}$$

لدالة مفترض $f(x)$:

المدخلات: أعداد صحيحة غير سالبة m و n.

المخرجات: المعاملات $q_0, q_1, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $N = m + n$.
2	لكل $i = 0, 1, \ldots, N$ ضع $a_i = f^{(i)}(0)/i!$. (إن معاملات كثيرة حدود ماكلورين هي $a_0, \ldots, a_N$ التي يمكن أن تكون في المدخلات بدلًا من حسابها).
3	ضع $q_0 = 1$ $p_0 = a_0$

4	لكل $i = 1, 2, \ldots, N$ نفّذ الخطوات 5-10. (أنشئ نظاما خطيًا في مصفوفة B.) (أنشئ نظاما خطيًا في مصفوفة B.)
5	لكل $j = 1, 2, \ldots, i - 1$، إذا كان $j \le n$ فضع $b_{i,j} = 0$.
6	إذا كان $i \le n$ فضع $b_{i,i} = 1$.
7	لكل $j = i + 1, i + 2, \ldots, N$ ضع $b_{i,j} = 0$.
8	لكل $j = 1, 2, \ldots, i$ إذا كان $j \le m$ فضع $b_{i,n+j} = -a_{i-j}$
9	لكل $j = n + i + 1, n + i + 2, \ldots, N$ ضع $b_{i,j} = 0$.
10	ضع $b_{i,N+1} = a_i$. (تنفّذ الخطوات 11 – 22 النظام الخطي باستخدام الدوران الجزئي).
11	لكل $i = n + 1, n + 2, \ldots, N - 1$ نفّذ الخطوات 12 – 18.
12	افرض k أصغر عدد صحيح بحيث $i \le k \le N$ و $\lvert b_{k,i} \rvert = \max_{i \le j \le N} \lvert b_{j,i} \rvert$ (جد عنصر الدوران).
13	إذا كان $b_{k,i} = 0$ فعندئذ تكون المخرجات ("النظام المنفرد"). توقف.
14	إذا كان $i \ne k$ (فعندئذ بدّل الصف i والصف k). لكل $j = i, i + 1, \ldots, N + 1$ ضع $b_{COPY} = b_{i,j}$ $b_{i,j} = b_{k,j}$ $b_{k,j} = b_{COPY}$
15	لكل $j = i + 1, i + 2, \ldots, N$ نفّذ الخطوات 16 – 18. (نفّذ عملية لحذف).
16	ضع $xm = b_{j,i}/b_{i,i}$.
17	لكل $k = i + 1, i + 2, \ldots, N + 1$ ضع $b_{j,k} = b_{j,k} - xm \cdot b_{i,k}$.
18	ضع $b_{j,i} = 0$.
19	إذا كان $b_{N,N} = 0$ ("النظام منفرد") توقف.
20	إذا كان $m > 0$ فضع $q_m = b_{N,N+1}/b_{N,N}$. (ابدأ بالتعويض الإرجاعي).
21	لكل $i = N - 1, N - 2, \ldots, n + 1$ ضع $q_{i-n} = \dfrac{b_{i,N+1} - \sum_{j=i+1}^{N} b_{i,j} q_{j-n}}{b_{i,i}}$
22	لكل $i = n, n - 1, \ldots, 1$ ضع $p_i = b_{i,N+1} - \sum_{j=n+1}^{N} b_{i,j} q_{j-n}$.
23	المخرجات $(q_0, q_1, \ldots, q_m, p_0, p_1, \ldots, p_n)$ (العملية ناجحة). توقف. ■

إنه لمن الممتع أن نقارن بين عدد العمليات الحسابية اللازمة لحساب $P_5(x)$ و $r(x)$ في مثال (1). باستخدام الضرب المتداخل بين الأقواس. نجد أنه يمكن التعبير عن $P_5(x)$ بالصيغة

$$P_5(x) = \left(\left(\left(\left(-\tfrac{1}{120}x + \tfrac{1}{24}\right)x - \tfrac{1}{6}\right)x + \tfrac{1}{2}\right)x - 1\right)x + 1$$

بافتراض أن معاملات $1, x, x^2, x^3, x^4$ و x^5 مكتوبة على صورة كسور عشرية، فإن أي عملية منفردة لحساب $P_5(x)$ بالضرب المتداخل تتطلب خمس عمليات ضرب وخمس عمليات جمع/ طرح.

وباستخدام الضرب المتداخل يمكن التعبير عن $r(x)$ بالصيغة

$$r(x) = \frac{\left(\left(-\tfrac{1}{60}x + \tfrac{3}{20}\right)x - \tfrac{3}{5}\right)x + 1}{\left(\tfrac{1}{20}x + \tfrac{2}{5}\right)x + 1}$$

ولذلك فإن أي عملية منفردة لحساب $r(x)$ تتطلب خمس عمليات ضرب وخمس عمليات جمع/ طرح وعملية قسمة واحدة. يظهر إذن أن جهد الحساب يكون لصالح تقريب كثيرة الحدود. ولكن على كل حال. عند إعادة التعبير عن $r(x)$ بالقسمة المتصلة. يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 12x + 20}{x^2 + 8x + 20} \\ &= -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{\left(-\frac{152}{3}x - \frac{280}{3}\right)}{x^2 + 8x + 20} \\ &= -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{-\frac{152}{3}}{\left(\frac{x^2+8x+20}{x+(35/19)}\right)} \end{aligned}$$

أو

$$r(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} + \frac{-\frac{152}{3}}{\left(x + \frac{117}{19} + \frac{3125/361}{(x+(35/19))}\right)} \tag{16.8}$$

وعند استخدام هذا التعبير. فإن العملية المنفردة لحساب $r(x)$ تتطلب عملية ضرب واحدة وخمس عمليات جمع/ طرح وعمليتي قسمة.

إذا كان مقدار الحساب اللازم للقسمة مساويًا تقريبًا لذلك المطلوب للضرب. فإن جهد الحساب المطلوب للتقييم $P_5(x)$ يزيد على ذلك المطلوب على نحو ملحوظ لإيجاد قيمة $r(x)$.

إن التعبير عن الدالة النسبية للتقريب بصيغة المعادلة (16.8) يسمى التقريب بالكسر المتصل (Continued – fraction).

إن استخدام الكسور المتصلة للتقريب النسبي هو موضوع تعود جذوره إلى كلافيوس [Christopher Clavius 1537 - 1612] ولقد استخدمت في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر على سبيل المثال. من قبل أويلر. لاكرانج وهرمايت

هنـاك اهتمـام فـي الوقت الحاضـر بطريقة التقريب الكلاسـيكية هذه، بسـبب فاعلية حسـاب هـذا التمثيـل. وإنها علـى كل حال طريقـة خاصة. ولن نخوض فـي البحث فيها أكثـر من ذلك. وإن البحـث المسـتفيض فـي هـذا الموضـوع والتقريـب النسـبي عمومًـا يمكـن الرجـوع إليه في [RR,pp.285 - 322]. وعلى الرغم من أن تقريب الدوال النسـبية في مثال 1 قد أعطى نتائج أفضل من التقريب بكثيرة الحدود من الرتبة نفسها. إلا أن دقته تتغير بصورة واسعة جدًا.

وإن التقريـب عند 0.2 ذو دقـة ضمن 8×10^{-9}. أما التقريب عند 1.0 فيتطابق مع الدالة فقط ضمن 7×10^{-9}.

إن هـذا التغييـر في الدقة متوقع ، لأن تقريب بادي يعتمد على تمثيل كثيرة حدود تايلور للدالة e^{-x}. ولتمثيل تايلور تغير واسع في الدقة في الفترة $[0.2, 1.0]$.

وللحصول على تقريبات بالدوال النسبية ذات دقة أكثر تجانسًا، نستخدم كثيرات حدود تشبيشف، وهي مجموعة تظهر سلوكًا أكثر تجانسًا.

إن طريقة تشبيشف العامة للتقريب النسبي بالدالة تسير بالنمط نفسه الذي حصلنا به على تقريب بادي، ما عدا استعمالنا لكثيرة حدود تشبيشف من الرتبة k، أي $T_k(x)$ بدلاً من كل x^k المستخدمة في تقريب بادي.

افترض أننا نرغب في تقريب نسبي للدالة f بدالة من الرتبة N، نعبّر عنه بالصيغة

$$r(x)=\frac{\sum_{k=0}^{n}p_kT_k(x)}{\sum_{k=0}^{m}q_kT_k(x)} \quad \text{حيث} \quad N=n+m \quad \text{و} \quad q_0=1$$

إن كتابة $f(x)$ بسلسلة عناصر كثيرات حدود تشبيشف على الصيغة

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kT_k(x)$$

تعطي

$$f(x)-r(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kT_k(x)-\frac{\sum_{k=0}^{n}p_kT_k(x)}{\sum_{k=0}^{m}q_kT_k(x)}$$

أو

$$f(x)-r(x)=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}a_kT_k(x)\sum_{k=0}^{m}q_kT_k(x)-\sum_{k=0}^{n}p_kT_k(x)}{\sum_{k=0}^{m}q_kT_k(x)} \tag{17.8}$$

تُختار المعاملات $q_1, q_2, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$ بحيث تكون معاملات $T_k(x)$ أصفارًا في بسط الطرف الأيمن للمعادلة عندما $k=0, 1, \ldots, N$.

وإن هذا يتطلب عدم احتواء السلسلة

$$(a_0T_0(x)+a_1T_1(x)+\cdots)(T_0(x)+q_1T_1(x)+\cdots+q_mT_m(x))$$
$$-(p_0T_0(x)+p_1T_1(x)+\cdots+p_nT_n(x))$$

على أي حدود من رتبة تساوي N أو أقل. وتظهر مشكلتان في عملية تشبيشف تجعلان تطبيقها أصعب من طريقة بادي، وتظهر واحدة منهما، لأن حاصل ضرب $q(x)$ في سلسلة تمثل $f(x)$ يتطلب ضرب كثيرات حدود تشبيشف. ويمكن حلُّ هذه المشكلة بالاستفادة من العلاقة

$$T_i(x)T_j(x)=\tfrac{1}{2}[T_{i+j}(x)+T_{|i-j|}(x)] \tag{18.8}$$

(انظر التمرين (8) في الفصل 3.8)

أما حلُّ المشكلة الثانية فيعدُّ أصعب، ويتطلب حساب سلسلة تشبيشف للدالة $f(x)$. وهذا ليس صعبًا نظريًّا، لأنه إذا كان

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kT_k(x)$$

فإن تعامدية كثيرات حدود تشبيشف تتضمن

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{و} \quad a_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{حيث} \quad k\ge 1$$

أما من حيث التطبيق فمن النادر إمكانية تقييم هذه التكاملات بصيغة مغلقة، ويتطلب الأمر استخدام طريقة تكامل عددية لإيجاد كل قيمة.

مثال 2 الحدود الخمسة الأولى في سلسلة تشبيشف للدالة e^{-x} هي

$$\tilde{P}_5(x) = 1.266066T_0(x) - 1.130318T_1(x) + 0.271495T_2(x) - 0.044337T_3(x) + 0.005474T_4(x) - 0.000543T_5(x)$$

إن إيجاد تقريب تشبيشف النسبي من الرتبة الخامسة حيث $n = 3$ و $m = 2$ يتطلب اختيار p_0, p_1, p_2, p_3, q_1 و q_2 لكل $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ حيث تكون معاملات $T_k(x)$ أصفارًا في السلسلة

$$\tilde{P}_5(x)[T_0(x) + q_1T_1(x) + q_2T_2(x)] - [p_0T_0(x) + p_1T_1(x) + p_2T_2(x) + p_3T_3(x)]$$

وإن استخدام العلاقة (18.8) وتجميع الحدود يعطيان المعادلات

$$\begin{aligned}
T_0:&\quad 1.266066 - 0.565159q_1 + 0.1357485q_2 = p_0\\
T_1:&\quad -1.130318 + 1.401814q_1 - 0.587328q_2 = p_1\\
T_2:&\quad 0.271495 - 0.587328q_1 + 1.268803q_2 = p_2\\
T_3:&\quad -0.044337 + 0.138485q_1 - 0.565431q_2 = p_3\\
T_4:&\quad 0.005474 - 0.022440q_1 + 0.135748q_2 = 0\\
T_5:&\quad -0.000543 + 0.002737q_1 - 0.022169q_2 = 0
\end{aligned}$$

إن حلّ هذا النظام يعطي تقريب الدالة النسبي

$$r_T(x) = \frac{1.055265T_0(x) - 0.613016T_1(x) + 0.077478T_2(x) - 0.004506T_3(x)}{T_0(x) + 0.378331T_1(x) + 0.022216T_2(x)}$$

ولقد وجدنا في بداية الفصل (3.8) أن

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

وإن استخدام هذه القيم لتحويل الدالة النسبي إلى التعبير بقوى x يعطي

$$r_T(x) = \frac{0.977787 - 0.599499x + 0.154956x^2 - 0.018022x^3}{0.977784 + 0.378331x + 0.044432x^2}$$

يظهر جدول (11.8) قيم $r_T(x)$ وقيم $r(x)$ التي حصلنا عليها في مثال (1) لغرض المقارنة. يتضح أن التقريب بالدالة $r(x)$ يفوق ذاك بالدالة $r_T(x)$ للقيمتين 0.4 , 0.2 = X، ولكن قيمة الخطأ القصوى لـ $r(x)$ هي 6.33×10^{-5} مقارنة بالقيمة 9.13×10^{-6} للدالة $r_T(x)$. ■

جدول 11.8

x	e^{-x}	$r(x)$	$\lvert e^{-x} - r(x)\rvert$	$r_T(x)$	$\lvert e^{-x} - r_T(x)\rvert$
0.2	0.81873075	0.81873075	7.55×10^{-9}	0.81872510	5.66×10^{-6}
0.4	0.67032005	0.67031963	4.11×10^{-7}	0.67031310	6.95×10^{-6}
0.6	0.54881164	0.54880763	4.00×10^{-6}	0.54881292	1.28×10^{-6}
0.8	0.44932896	0.44930966	1.93×10^{-5}	0.44933809	9.13×10^{-6}
1.0	0.36787944	0.36781609	6.33×10^{-5}	0.36787155	7.89×10^{-6}

يمكن توليد تقريب تشبيشف باستخدام الخوارزمية (2.8).

ALGORITHM
الخوارزمية
2.8

تقريب تشيبشف النسبي Chebyshev Rational Approximation

للحصول على التقريب النسبي

$$r_T(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)}$$

للدوال المعلوم $f(x)$:

المدخلات: أعداد صحيحة غير سالبة m و n.

المخرجات: المعاملات $q_0, q_1, \ldots, q_m$ و $p_0, p_1, \ldots, p_n$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $N = m + n$.
2	ضع $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, d\theta$ (يُضاعف a_0 للحصول على فاعلية في الحسب). لكل $k = 1, 2, \ldots, N + m$ ضع $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta\, d\theta$ (يمكن إيجاد قيم التكاملات باستخدام طريقة عددية للتكامل. أو أن توضع المعاملات مباشرة).
3	ضع $q_0 = 1$.
4	لكل $i = 0, 1, \ldots, N$ نفّذ الخطوات 5 – 9. (أنشئ نظاما خطيًا بالمصفوفة B).
5	لكل $j = 0, 1, \ldots, i$، إذا كان $j \le n$ فضع $b_{i,j} = 0$.
6	إذا كان $i \le n$ فضع $b_{i,i} = 1$.
7	لكل $j = i + 1, i + 2, \ldots, n$ ضع $b_{i,j} = 0$.
8	لكل $j = n + 1, n + 2, \ldots, N$ إذا كان $i \ne 0$ فضع $b_{i,j} = -\frac{1}{2}(a_{i+j-n} + a_{\lvert i-j+n\rvert})$. وإلا فضع $b_{i,j} = -\frac{1}{2}a_{j-n}$.
9	إذا كان $i \ne 0$ فضع $b_{i,N+1} = a_i$. وإلا فضع $b_{i,N+1} = \frac{1}{2}a_i$ (تنفذ الخطوات 10 – 21 النظام الخطي باستخدام الدوران الجزئي).
10	لكل $i = n + 1, n + 2, \ldots, N - 1$ نفّذ الخطوات 11 – 17.
11	افترض k أصغر عدد صحيح بحيث $i \le k \le N$ و $\lvert b_{k,i}\rvert = \max_{i \le j \le N} \lvert b_{j,i}\rvert$ (أوجد عنصر الدوران).
12	إذا كان $b_{k,i} = 0$ فعندئذ تكون المخرجات ("النظام المنفرد"). توقف.

13	إذا كان $k \neq i$ فبدّل الصف i والصف k . لكل $j = i, i+1, \ldots, N+1$ ضع $b_{COPY} = b_{i,j}$ $b_{i,j} = b_{k,j}$ $b_{k,j} = b_{COPY}$
14	لكل $j = i+1, i+2, \ldots, N$ نفّذ الخطوات 15 – 17. (أجر الحذف).
15	ضع $xm = \dfrac{b_{j,i}}{b_{i,i}}$
16	لكل $k = i+1, i+2, \ldots, N+1$ ضع $b_{j,k} = b_{j,k} - xm \cdot b_{i,k}$.
17	ضع $b_{j,i} = 0$.
18	إذا كان $b_{N,N} = 0$ فعندئذ تكون المخرجات ("النظام منفرد"). توقف.
19	إذا كان $m > 0$ فضع $q_m = \dfrac{b_{N,N+1}}{b_{N,N}}$. (ابدأ بالتعويض الإرجاعي).
20	لكل $i = N-1, N-2, \ldots, n+1$ ضع $q_{i-n} = \dfrac{b_{i,N+1} - \sum_{j=i+1}^{N} b_{i,j}q_{j-n}}{b_{i,i}}$
21	لكل $i = n, n-1, \ldots, 0$ ضع $p_i = b_{i,N+1} - \sum_{j=i+1}^{N} b_{i,j}q_{j-n}$.
22	المخرجات $(q_0, q_1, \ldots, q_m, p_0, p_1, \ldots, p_n)$ (العملية ناجحة). توقف.

يمكننا الحصول على كل من امتداد سلسلة تشبيشف وتقريب تشبيشف النسبي باستخدام CAS. فعلى سبيل المثال: لجعل كثيرات حدود تشبيشف متاحة في مابل Maple باستخدام مكتبة كثيرات الحدود المتعامدة Orthopoly library : ندخل الأمر

```
>with(orthopoly,T);
```

إن عملية حساب سلسلة تشبيشف بوصفها تقريبا تكون

```
>g:=numapprox[chebyshev](exp(-x),x,0.000001);
```

حيث إن البارامتر الثالث يحدّد الدقة المطلوبة. والتمهيدية هي

$$g := 1.266065878\,T(0,x) - 1.130318208\,T(1,x) + .2714953396\,T(2,x)$$
$$- .04433684985\,T(3,x) + .005474240442\,T(4,x)$$
$$- .0005429263119\,T(5,x) + .00004497732296\,T(6,x)$$
$$- .3198436462\,10^{-5}\,T(7,x)$$

ونستطيع إيجاد قيمة $g(0.8)$ باستخدام

```
>evalf(subs(x=0.8,g));
```

لنحصل على 4493288893.

للحصول على تقريب تشبيشف النسبي؛ نبدأ مرة أخرى بسلسلة تشبيشف كالسابق، ثم ندخل

```
>restart;
>numapprox[chebyshev](exp(-x),x,0.000001);
>g:=convert(%,ratpoly,3,2);
```

لينتج

$$g := (1.050531166\, T(0, x) - .6016362122\, T(1, x) + .07417897149\, T(2, x) - .004109558353\, T(3, x)) / (T(0, x) + .3870509565\, T(1, x) + .02365167312\, T(2, x))$$

وبما أننا مسحنا ذاكرة Maple، نحتاج إلى تنزيل مكتبة كثيرات الحدود المتعامدة orthopoly بالأمر

```
>with(orthopoly,T);
```

ومن ثم يمكننا إيجاد قيمة $g(0.8)$ بالأمر

```
>evalf(subs(x=0.8,g));
```

لنحصل على 4493317579.

إن طريقة تشبيشف لا تعطي أفضل تقريب نسبي بالدالة. أي التقريب الذي تكون فيه القيمة العظمى لخطأ التقريب أصغر ما يمكن. ولكن يمكن استخدام الطريقة؛ إذ إنها نقطة بداية لطريقة إرجاعية تعرف بخوارزمية رميز الثانية (second Remez algorithm) التي تتقارب إلى أفضل تمثيل. وللمزيد حول هذه الطريقة والخوارزمية يمكنك الرجوع إلى المرجع [RR,pp292 - 305] أو [Po,pp.90 - 92].

طوّر إيفغني رميز (Evgeny Remez (1896 - 1975)) في عام 1930 طرائق عامة لحساب تقريبات تشبيشف لكثيرات الحدود. ثم طوّر خوارزمية مشابهة صالحة لتقريب الدّوال المتصلة المعرفة على الفترة بالتقريب بالدوال النسبية بدرجة محددة من الدقة شمل عمله حقولا مختلفة من مبرهنة التقريب. بالإضافة إلى طرائق تقريب حلول المعادلات التفاضلية

مجموعة التمارين 4.8 EXERCISE SET

1. أوجد تقريبات بادي Padé جميعها من الرتبة الثانية للدالة $f(x) = e^{2x}$. قارن النتائج بالقيم الفعلية للدالة $f(x_i)$ عند النقاط $x_i = 0.2i$ لكل $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
2. أوجد تقريبات بادي Padé جميعها من الرتبة الثالثة لتقريب $f(x) = x \ln(x + 1)$. قارن النتائج بالقيم الفعلية للدالة $f(x_i)$ عند النقاط $x_i = 0.2i$ لـ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ جميعًا.
3. أوجد تقريب بادي Padé من الرتبة الخامسة حيث $n = 2$ و $m = 3$ للدالة $f(x) = e^x$. قارن النتائج بتلك التي تحصل عليها من كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة الخمسة عند النقاط $x_i = 0.2i$ لكل $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
4. كرِّر التمرين 3 باستخدام تقريب بادي من الرتبة الخامسة حيث $n = 3$ و $m = 2$. قارن النتائج لكل x_i بتلك في التمرين (3).
5. أوجد تقريب بادي من الرتبة السادسة، حيث $n = m = 3$ للدالة $f(x) = \sin x$. قارن النتائج بكلٍّ من النتائج الصحيحة والنتائج التي توصَّلت إليها من كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة السادسة، وذلك عند النقاط $x_i = 0.1i$ لـ $i = 0, 1, \ldots, 5$ جميعًا.
6. أوجد تقريب بادي من الرتبة السادسة، حيث (أ) $n = 2, m = 4$ (ب) $n = 4, m = 2$ للدالة $f(x) = \sin x$ قارن النتائج عند كل x_i بتلك التي حصلت عليها في التمرين (5).
7. يعرض جدول (10.8) نتائج تقريب بادي من الرتبة الخامسة بأخذ $n = 3$ و $m = 2$ ونتائج كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة الخامسة، والقيم الصحيحة للدالة $f(x) = e^{-x}$ عندما $x_i = 0.2i$ لكل $i = 1, 2, 3, 4$ و 5.

قارن هذه النتائج بتلك التي نحصل عليها من تقريبات بادي الأخرى في الحالات
أ. $n = 0, m = 5$ ب. $n = 1, m = 4$ جـ. $n = 3, m = 2$ د. $n = 4, m = 1$

8. عبّر عن الدّوال النسبية الآتية بصيغة الكسر المتصل

أ. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x + 1}$ ب. $\dfrac{4x^2 + 3x - 7}{2x^3 + x^2 - x + 5}$

ج. $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{x^2 + 2x + 4}$ د. $\dfrac{2x^3 + x^2 - x + 3}{3x^3 + 2x^2 - x + 1}$

9. أوجد تقريبات تشبيشف النسبية من الرتبة الثانية للدالة $f(x) = e^{-x}$. أيُّها يعطي أحسن التقريبات عند $f(x) = e^{-x}$ at $x = 0.25, 0.5$ و 1 ؟

10. أوجد تقريبات تشبيشف النسبية من الرتبة الثالثة للدالة $f(x) = \cos x$.
أيّها يعطي أفضل التقريبات للدالة $f(x) = \cos x$ عند $x = \pi/4$ و $\pi/3$ ؟

11. أوجد تقريب تشبيشف النسبي من الرتبة الرابعة حيث $n = m = 2$ لـ $f(x) = \sin x$.
قارن النتائج التي تحصل عليها بتلك التي وجدتها في التمرين 5 باستخدام تقريب بادي من الرتبة السادسة، وذلك عند النقاط $x_i = 0.1i$ لـ $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ جميعًا.

12. أوجد جميع تقريبات تشبيشف النسبية من الرتبة الخامسة للدالة $f(x) = e^x$.
قارن نتائجك بتلك التي حصلت عليها في التمرين 3 و 4، وذلك عند النقاط $x_i = 0.2i$ لـ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ جميعا.

13. لتقريب $f(x) = e^x$ تقريبًا دقيقًا بغرض تضمينه في مكتبة رياضية؛ نحدّد أولا مجال تعريف الدالة f. وإذا أعطيت عددا حقيقيًا x فاقسم على $\ln \sqrt{10}$ لتحصل على العلاقة

$$x = M \cdot \ln \sqrt{10} + s$$

حيث M عدد صحيح، و S عدد حقيقي يحقق $|s| \le \frac{1}{2} \ln \sqrt{10}$

أ. برهن أن $e^x = e^s \cdot 10^{M/2}$.

ب. أنشئ تقريب الدوال النسبية للدالة e^s مستخدما $n = m = 3$.
قدّر الخطأ عندما يكون $0 \le |s| \le \frac{1}{2} \ln \sqrt{10}$.

جـ. صمّم طريقة تنفيذ e^x مستخدمًا نتائج (أ) و(ب) والتقريبات

$$\frac{1}{\ln \sqrt{10}} = 0.8685889638 \quad \text{و} \quad \sqrt{10} = 3.162277660$$

14. لتقريب $\sin x$ و $\cos x$ تقريبًا دقيقًا بغرض تضمينهما في مكتبة رياضية؛ نحدّد أولا مجال التعريف لكل منهما. لكل عدد حقيقي x، اقسم على π لتحصل على العلاقة $|x| = M\pi + s$
حيث M عدد صحيح و $|s| \le \frac{\pi}{2}$.

أ. برهن أن $\sin x = \operatorname{sgn}(x) \cdot (-1)^M \cdot \sin s$.

ب. أنشئ تقريبًا نسبيًا للدالة $\sin s$ باستخدام $n = m = 4$.
قدّر الخطأ عندما يكون $0 \le |s| \le \pi/2$.

جـ. صمّم طريقة تنفيذ (تقييم) $\sin x$ باستخدام الفقرتين (أ) و (ب).

د. كرّر الفقرة (جـ) للدالة $\cos x$ مستخدمًا حقيقة أن $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.

5.8 التقريب بكثيرة الحدود المثلثية
Trigonometric Polynomial Approximation

إن استخدام سلاسل دالة الجيب sine وجيب التمام cosine لتمثيل الدّوال كان قد عُرف في بدايات الخمسينيات من القرن الثامن عشر. وكان ذلك بدراسة حركة الزنبرك ذي