إن الحالة التي شرحت في مثال (2) تتحقق في حالة وضع أعم. لتكن $\prod_n$ تمثل مجموعة جميع كثيرات الحدود من الرتبة n على الأكثر.

إن التمهيدية الآتية تستخدم على نحو واسع في كثير من تطبيقات الجبر الخطي المطلوب برهانها في التمرين (13).

مبرهنة 3.8 إذا كانت $\phi_0(x)$ ، $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ مجموعة من كثيرات الحدود المستقلة خطيًا في $\prod_n$ فإن أي كثيرة حدود في $\prod_n$ يمكن كتابتها بطريقة وحيدة كترتيب خطي للدوال $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$

إن البحث في تقريب الدالة يتطلب عمومًا تقديم مفاهيم دوال الوزن والتعامد ■

تعريف 4.8 تسمى أي دالة قابل للتكامل w دالة وزن (Weight function) على الفترة I إذا كان $w(x) \geq 0$ لـ x جميعها في I. ولكن $w(x) \not\equiv 0$ على أي فترة جزئية من I.

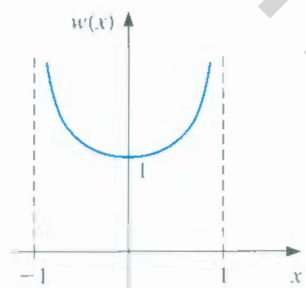
إن الهدف من دالة الوزن هو تعيين درجات مختلفة لأهمية التقريبات على جزء محدّد من الفترة. ■

فعلى سبيل المثال، فإن دالة الوزن

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

يضع تركيزا أقل بالقرب من مركز الفترة (1,1-) وتركيزًا أكبر عندما تكون $|x|$ قريبة من 1. (انظر شكل 8.8) وستستعمل دالة الوزن هذه في الفصل الآتي:

شكل 7.8



افترض أن $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ مجموعة من الدّوال المستقلة خطيًا على $[a, b]$، w دالة وزن على $[a, b]$، ولكل $f \in C[a, b]$ وعلينا أن نبحث عن التوليفة الخطية

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$

التي تجعل الخطأ أصغر ما يمكن

$$E(a_0, \ldots, a_n) = \int_a^b w(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x) \right]^2 dx$$

إن هذه المسألة تختزل إلى الحالة التي افترضناها في بداية هذا الفصل حالة خاصة عندما $w(x) \equiv 1$
و $\phi_k(x) = x^k$ لكل $k = 0, 1, \ldots, n$.

تشتق المعادلات القانونية المرتبطة بهذه المسألة من حقيقة أن لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ يكون

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_j} = 2\int_a^b w(x)\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x)\right]\phi_j(x)\,dx$$

يمكن كتابة نظام المعادلات القانونية على الصيغة

$$\int_a^b w(x)f(x)\phi_j(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k\int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx \quad \text{لكل } j = 0, 1, \ldots, n$$

إذا أمكن اختيار الدّوال $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ بحيث

$$\int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} 0 & j \neq k \text{ عندما} \\ \alpha_j > 0 & j = k \text{ عندما} \end{array}\right. \tag{7.8}$$

فإن المعادلات القانونية تختزل إلى

$$\int_a^b w(x)f(x)\phi_j(x)\,dx = a_j\int_a^b w(x)[\phi_j(x)]^2\,dx = a_j\alpha_j$$

لكل $j = 0, 1, \ldots, n$، وتكون سهلة الحل لتعطي

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j}\int_a^b w(x)f(x)\phi_j(x)\,dx$$

إذن تُبسّط مسألة التقريب بالمربعات الصغرى على نحو كبير عند اختيار الدّوال $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ بحيث تحقق شرط التعامد في المعادلة (7.8) (orthogonality condition). وسنخصص بقية هذا الفصل لدراسة تجمعات هذا النوع.

إن كلمة "متعامدة" تعني ذات زاوية قائمة. وبمعنى آخر كل اقتران متعامد عمودي على الآخر

تعريف 5.8

تقول: إن مجموعة الدوال $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ متعامدة (orthogonal set of functions) على الفترة $[a, b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w إذا كان

$$\int_a^b w(x)\phi_j(x)\phi_k(x)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} 0, & j \neq k \text{ عندما} \\ \alpha_k > 0 & j = k \text{ عندما} \end{array}\right.$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كان $\alpha_k = 1$ لكل $k = 0, 1, \ldots, n$ فإن المجموعة تسمى متعامدة قانونية (orthonormal). ■

إن هذا التعريف مع الملاحظات السابقة يعطي مبرهنة الآتية.

مبرهنة 6.8

إذا كانت $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ مجموعة دوال متعامدة على الفترة $[a, b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w فإن تقريب f على الفترة $[a, b]$ بطريقة المربعات الصغرى بالنسبة إلى الوزن w يكون

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$

■

حيث لكل $k=0,1,\ldots,n$ يكون

$$a_k=\frac{\int_a^b w(x)\phi_k(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)[\phi_k(x)]^2\,dx}=\frac{1}{\alpha_k}\int_a^b w(x)\phi_k(x)f(x)\,dx$$

وعلى الرغم من أن كلًا من التعريف (5.8) والمبرهنة (6.8) يسمح باستخدام مجموعات عريضة من الدّوال المتعاقدة، إلا أننا سنقتصر على التعامل مع مجموعات كثيرات الحدود المتعامدة.

مبرهنة 7.8

حصل إرهارد شميدت Erhard Schmidt (1876-1959) على رتبة الدكتوراة تحت إشراف دافيد هلبرت 1905 لحل مسألة حول المعادلات التكاملية. ونشر شميدت بحثا عن المعادلات التكاملية عام 1907 الذي شرح فيه ما يُعرف الآن بعملية جرام – شميدت لإنشاء قاعدة متعامدة قانونية لمجموعة من الدوال. وقد توصل إلى هذه النتائج جورجن بيدرسون جرام Jorgen Pederson Gram (1850-1916) حيث درس هذه المسألة عندما كان يدرس مربعات الصغرى. وعلى كل حال شرح لابلاس Laplace عملية مماثلة قبل جرام وشميدت

إن المبرهنة الآتية المبنية على عملية جرام – شميدت (Gram-Schmidt process) تصف كيفية إنشاء كثيرات الحدود المتعامدة على $[a,b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w.

تكون مجموعة دوال كثيرات الحدود $\{\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ المعرّفة بالطريقة الآتية متعامدةً على $[a,b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w. لكل x في $[a,b]$ يكون $\phi_0(x)\equiv 1$، $\phi_1(x)=x-B_1$ حيث

$$B_1=\frac{\int_a^b x w(x)[\phi_0(x)]^2\,dx}{\int_a^b w(x)[\phi_0(x)]^2\,dx}$$

وعندما تكون $k\geq 2$.

فلكل x في $[a,b]$ يكون $\phi_k(x)=(x-B_k)\phi_{k-1}(x)-C_k\phi_{k-2}(x)$

حيث

$$B_k=\frac{\int_a^b x w(x)[\phi_{k-1}(x)]^2\,dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-1}(x)]^2\,dx}\quad \text{و} \quad C_k=\frac{\int_a^b x w(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)\,dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-2}(x)]^2\,dx}$$

■

تعطي مبرهنة (7.8) عملية إرجاعية لإنشاء مجموعة كثيرات متعامدة. ويتّبع برهان هذه مبرهنة عن طريق تطبيق الاستقراء الرياضي لدرجة كثيرة الحدود $\phi_n(x)$

تمهيدية 8.8

لكل $n>0$ تكون مجموعة دوال كثيرات الحدود $\{\phi_0,\ldots,\phi_n\}$ المعطاة في مبرهنة (7.8) مستقلة خطيًا على $[a,b]$، ويكون

$$\int_a^b w(x)\phi_n(x)Q_k(x)\,dx=0$$

لكل كثيرة حدود $Q_k(x)$ من الرتبة $k<n$.

■

البرهان بما أن $\phi_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n، فإن مبرهنة (2.8) تتضمّن أن $\{\phi_0,\ldots,\phi_n\}$ مجموعة مستقلة خطيًا.

لتكن $Q_k(x)$ كثيرة حدود من الرتبة k. وفق مبرهنة (3.8) توجد أعداد $c_0,\ldots,c_k$ بحيث $Q_k(x)=\sum_{j=0}^{k} c_j\phi_j(x)$ وهكذا يكون

$$\int_a^b w(x)\,Q_k(x)\phi_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{k} c_j \int_a^b w(x)\,\phi_j(x)\phi_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{k} c_j \cdot 0 = 0$$

لأن ϕ_n متعامد مع ϕ_j لكل $j = 0, 1, \ldots, k$.

■ ■ ■

مثال 3

مجموعة كثيرات حدود ليجندر، $\{P_n(x)\}$، متعامدة على $[-1, 1]$ بالنسبة إلى دالة الوزن $w(x) \equiv 1$. إن التعريف الكلاسيكي لكثيرات حدود ليجندر يتطلب أن يكون $P_n(1) = 1$ لكل n، وتستخدم علاقة إرجاعية لتوليد كثيرات الحدود عندما $n \geq 2$.

إن هذا التطبيع لا حاجة إليه في مناقشاتنا. فكثيرات الحدود التقريبية الناتجة بأي من الحالتين هي نفسها أساسًا.

استخدام العملية الإرجاعية في مبرهنة (8.7) ووضع $P_0(x) \equiv 1$ يعطي

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = 0 \quad \text{و} \quad P_1(x) = (x - B_1)\,P_0(x) = x$$

أيضا

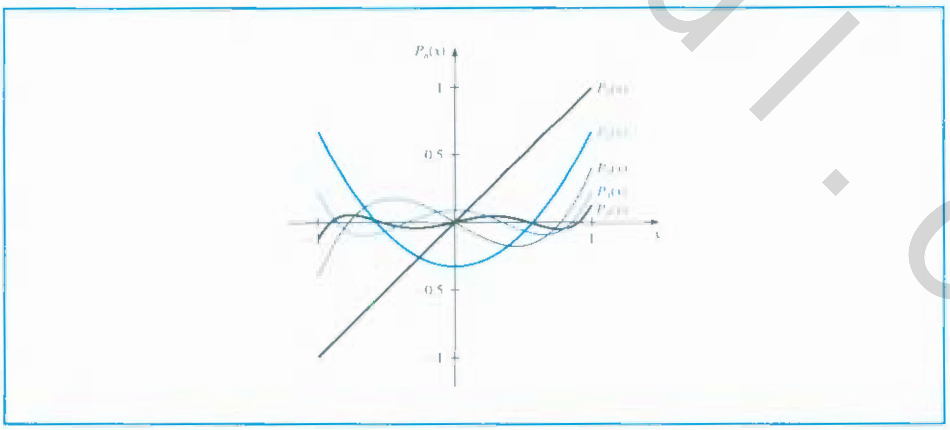
$$B_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = 0 \quad \text{و} \quad C_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \frac{1}{3}$$

ولذلك يكون

$$P_2(x) = (x - B_2)\,P_1(x) - C_2 P_0(x) = (x - 0)x - \frac{1}{3}\cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

لقد حُدِّدت كثيرات حدود ليجندر ذات الدرجات الأعلى بالطريقة ذاتها التي تظهر في شكل (8.9). وعلى الرغم من كون التكامل مضنيًا، إلا أنه ليس صعبا باستخدام CAS.

شكل 8.9



فعلى سبيل المثال أمر مابل (maple)، int. المستخدم لحساب التكاملات B_3 و C_3:

```
>B3:=int(x*(x^2-1/3)^2,x=-1..1)/int((x^2-1/3)^2,x=-1..1);
>C3:=int(x*(x^2-1/3)*x,x=-1..1)/int(x^2,x=-1..1);
```

يعطي $B_3 = 0$ و $C_3 = \frac{4}{15}$. وهكذا

$$P_3(x) = xP_2(x) - \frac{4}{15}P_1(x) = x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{15}x = x^3 - \frac{3}{5}x$$

وتكون كثيرتا حدود ليجندر الآتيتان هما

$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35} \quad و \quad P_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$ ■

ولقد ذُكرت كثيرات حدود ليجندر في الفصل (4.7)، حيث استخدمت جذورها لكونها نقاطا في عملية جاوس للتكامل.

2.8 مجموعة التمارين EXERCISE SET

1. أوجد كثيرة الحدود الخطية التي تقرّب الدالة $f(x)$ على الفترة المشار إليها بطريقة المربعات الصغرى إذا كان

أ. $f(x) = x^2 + 3x + 2$، $[0, 1]$ ب. $f(x) = x^3$، $[0, 2]$ ج. $f(x) = \frac{1}{x}$، $[1, 3]$

د. $f(x) = e^x$، $[0, 2]$ هـ. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}\sin 2x$، $[0, 1]$ ز. $f(x) = x\ln x$، $[1, 3]$

2. أوجد كثيرة الحدود التي تقرّب بطريقة المربعات الصغرى كل دّالة مما يلي على الفترة [-1,1].

أ. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ب. $f(x) = x^3$ ج. $f(x) = 1/x + 2$

د. $f(x) = e^x$ هـ. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}\sin 2x$ ز. $f(x) = \ln(x + 2)$

3. أوجد كثيرة الحدود من الرتبة الثانية التي تقرب بطريقة المربعات الصغرى كل دالة في التمرين (1) على الفترة المشار إليها.

4. أوجد كثيرة الحدود من الرتبة الثانية بطريقة المربعات الصغرى لتقريب الدّوال في التمرين 2 على الفترة [-1,1].

5. حسب الخطأ E للتقريبات في التمرين (3).

6. احسب الخطأ E للتقريبات في التمرين (4).

7. استخدم طريقة جرام – شميدت لإنشاء $\phi_0(x)$، $\phi_1(x)$، $\phi_2(x)$ و $\phi_3(x)$ للفترات الآتية:

أ. $[0, 1]$ ب. $[0, 2]$ ج. $[1, 3]$

8. كرِّر التمرين (1) باستخدام نتائج التمرين (7).

9. أوجد كثيرة الحدود من الرتبة الثالثة بطريقة المربعات الصغرى لتقريب الدّوال في التمرين (1) باستخدام نتائج التمرين (7).

10. كرِّر التمرين (3) باستخدام نتائج التمرين (7).

11. استخدم طريقة جرام – شميدت لحساب L_1، L_2 و L_3 حيث $\{L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)\}$ مجموعة كثيرات الحدود المتعامدة على $(0, \infty)$ بالنسبة إلى دّالة الوزن $w(x) = e^{-x}$ و $L_0(x) \equiv 1$ إن كثيرات الحدود التي نحصل عليها بهذه الطريقة تُسمى كثيرات حدود لاغور (Laguerre polynomials).

12. استخدم كثيرات حدود لاغور التي حُسبت في التمرين (11) لتحسب كثيرات الحدود من الرتبة الأولى والثانية والثالثة بطريقة المربعات الصغرى على الفترة $(0, \infty)$ بالنسبة إلى دالة

الوزن $w(x) = e^{-x}$ للدوال الآتية:

أ. $f(x) = x^2$ ب. $f(x) = e^{-x}$ ج. $f(x) = x^3$ د. $f(x) = e^{-2x}$

١٣. لتكن $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ أي مجموعة مستقلة خطيًّا في $\prod_n$. برهن أنه لكل عنصر $Q \in \prod_n$ توجد ثوابت وحيدة $c_0, c_1, \dots, c_n$ بحيث

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x)$$

14. برهن أنه إذا كان $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ مجموعة دوال متعامدة على $[a, b]$ بالنسبة إلى دالة الوزن w. فإن $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ مجموعة مستقلة خطيًّا.

15. برهن أن المعادلات القانونية (6.8) تملك حلًّا وحيدًا.

[إضاءة: برهن أن الحل الوحيد للدالة $f(x) \equiv 0$ هو $a_j = 0, j = 0, 1, \dots, n$.

اضرب المعادلة (6.8) في العدد a_j، واجمع فوق كل j. بدل إشارة التكامل بإشارة الجمع لتحصل على $\int_a^b [P(x)]^2 dx = 0$، وهكذا يكون $P(x) \equiv 0$ ومن ثم فإن $a_j = 0$ لكل $j = 0, \dots, n$. إذن تكون مصفوفة المعاملات غير منفردة، ويوجد حل وحيد للمعادلة (6.8).

3.8 كثيرات حدود تشبيشف وترشيد سلسلة القوة
Chebyshev Polynomials and Economization of Power Series

(1821-1894)

Pafnuty Lvovich Chebyshev

عمل تشبيشف أعمالا رياضية رائعة في كثير من الحقول بما فيها الرياضيات التطبيقية، مبرهنة الأعداد، مبرهنة التقرب والاحتمالات

وفي عام 1852 سافر من سانت بيترسبرج لزيارة علماء رياضيات في فرنسا وإنجلترا وألمانيا ودرس كل من لاكراج وليجندر مجموعات منفردة من كثيرات الحدود المتعامدة. ولكن كان تشبيشف أول من رأى النتائج المهمة عموماً لدراسة مبرهنة. وطوّر كثيرات حدود تشبيشف لدراسة التقريبات عن طريق المربعات الصغرى والاحتمالات. وبعد ذلك طبّق نتائجه على الاستكمال الداخلي، وطرائق التكامل التقريبية، ومجالات أخرى

كثيرات حدود تشبيشف $\{T_n(x)\}$ متعامدة على (1,1-) بالنسبة إلى دالة الوزن $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. وعلى الرغم من إمكانية اشتقاق كثيرات الحدود هذه بطريقة الفصل السابق، فمن الأسهل إعطاء تعريف لها، ثم برهنة أنها تحقق خواص التعامد المطلوبة.

لكلِّ $x \in [-1, 1]$، ولكلِّ $n \geq 0$ عرِّف

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x] \tag{8.8}$$

ليس واضحًا في هذا التعريف أن لكلِّ n تكون $T_n(x)$ كثيرة حدود في x، ولكننا سنبرهن ذلك الآن. انظر أولاً أن $T_0(x) = \cos 0 = 1$ و $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$

لكلِّ $n \geq 1$. نقدم التعويض $\theta = \arccos x$ لتغيير هذه المعادلة إلى

$$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta) \quad \text{حيث} \quad \theta \in [0, \pi]$$

نشتق علاقة إرجاعية بملاحظة أن

$$T_{n+1}(\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta$$

و

$$T_{n-1}(\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta$$

وبجمع هاتين المعادلتين نحصل على $T_{n+1}(\theta) = 2\cos(n\theta)\cos\theta - T_{n-1}(\theta)$

وبالرجوع إلى المتغير x، نحصل لكلِّ $n \geq 1$ على

$$T_{n+1}(x) = 2x\cos(n \arccos x) - T_{n-1}(x)$$

أو

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{9.8}$$

وبما أن $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = x$، فإن العلاقة الإرجاعية تعني أن $T_n(x)$ كثير: حدود من الرتبة n بمعامل أول 2^{n-1} عندما $n \geq 1$.

إن كثيرات حدود تشبيشف الثلاث الآتية هي

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

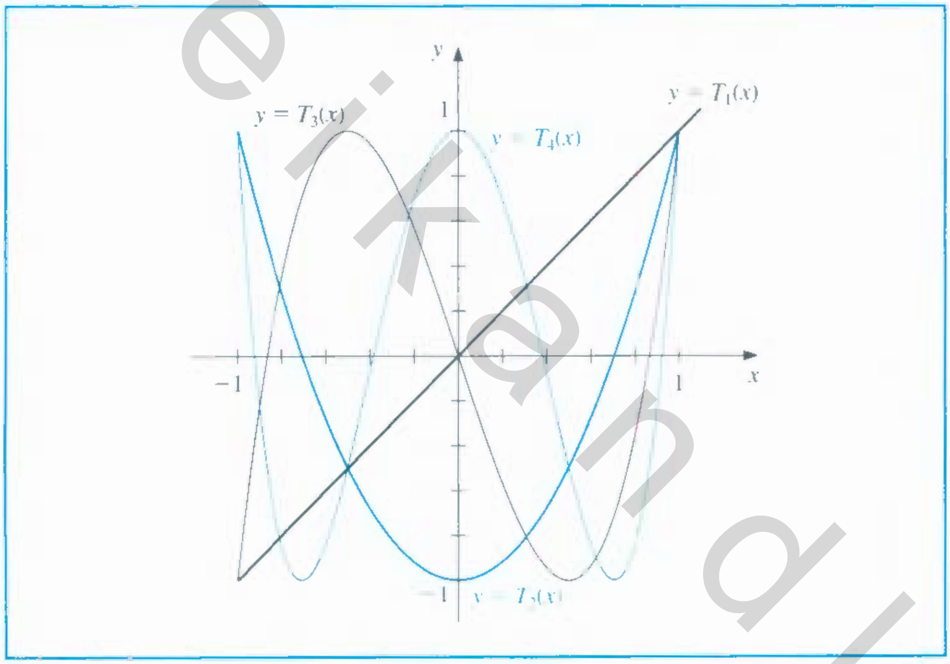
$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

و

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

يظهر الرسم البياني لكثيرات الحدود T_1, T_2, T_3 ، T_4 في شكل (10.8).

شكل 10.8



لبرهنة تعامد كثيرات حدود تشبيشف، افترض أن

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos x)\cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

وباستخدام التعويض $\theta = \arccos x$ نحصل على

$$d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

و

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_{\pi}^{0} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta.$$

افترض $n \neq m$. بما أن

$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \tfrac{1}{2}[\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta]$$

نحصل على

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((n+m)\theta)\,d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((n-m)\theta)\,d\theta\\ &= \left[\frac{1}{2(n+m)}\sin((n+m)\theta)+\frac{1}{2(n-m)}\sin((n-m)\theta)\right]_0^{\pi}\\ &= 0.\end{aligned}$$

وبطريقة مماثلة، يمكن برهنة أنه عندما يكون $n = m$ فإن

$$\int_{-1}^{1}\frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{لكل } n \geq 1 \tag{10.8}$$

تستخدم كثيرات حدود تشبيشف لتصغير خطأ التقريب إلى أكبر حدٍّ ممكن.

وسنرى كيف تستخدم لحل مسألتين من هذا النوع:

- تعيين نقاط الاستكمال الداخلي لجعل الخطأ في استكمال لاكرانج الداخلي أصغر ما يمكن.
- تصغير رتبة كثيرة حدود التقريب بحيث تكون الخسارة في الدقة أقل ما يمكن.

مبرهنة 8.9 إن كثيرة حدود تشبيشف $T_n(x)$ من الرتبة $n \geq 1$ لها أصفار بسيطة عددها n في الفترة $[-1, 1]$ عند

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad \text{لكل } k = 1, 2, \ldots, n$$

وبالإضافة إلى ذلك تقع القيم العظمى المطلقة لكثيرة الحدود $T_n(x)$ عند

$$\bar{x}'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ مع } T_n(\bar{x}'_k) = (-1)^k \quad \text{لكل } k = 0, 1, \ldots, n$$

■

البرهان إذا وصفنا

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad \text{لكل } k = 1, 2, \ldots, n$$

فإن

$$T_n(\bar{x}_k) = \cos(n\arccos\bar{x}_k) = \cos\left(n\arccos\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)\right) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0$$

وكل $\bar{x}_k$ هي صفر مميز لـ T_n.

بما أن $T_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n. فإن أصفار $T_n(x)$ جميعها يجب أن تكون على تلك الصيغة.

لبرهنة الفقرة الثانية، نلاحظ أولا

$$T'_n(x) = \frac{d}{dx}[\cos(n\arccos x)] = \frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

وأنه عندما يكون $k = 1, 2, \ldots, n-1$ فإن

$$T_n'(\bar{x}_k') = \frac{n\sin(n\arccos(\cos(k\pi/n)))}{\sqrt{1-[\cos(k\pi/n)]^2}} = \frac{n\sin(k\pi)}{\sin(k\pi/n)} = 0$$

بما أن $T_n(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n، فإن مشتقته $T_n'(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $(n-1)$، وإن جميع أصفار $T_n'(x)$ تحدث على $(n-1)$ من النقاط.

إن الحالات الأخرى الوحيدة الممكنة للنقاط القصوى لـ $T_n(x)$ تحدث على طرفي الفترة $[-1, 1]$ أي عند $\bar{x}_0' = 1$ و $\bar{x}_n' = -1$ وبما أنه لأي n و $k = 0, 1, \ldots, n$، يكون لدينا

$$T_n(\bar{x}_k') = \cos\left(n\arccos\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

وإن القيمة العظمى تقع على كل قيمة زوجية للعدد k والقيمة الصغرى على كل قيمة فردية.

■ ■ ■

نحصل على كثيرات حدود تشبيشف $\tilde{T}_n(x)$ الأحادية (monic) (التي معاملاتها الرئيسة تساوي 1) بقسمة كثيرة حدود تشبيشف $T_n(x)$ على المعامل الرئيس 2^{n-1}.

ومن ثم يكون

$$\tilde{T}_0(x) = 1$$

و

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \qquad \text{(11.8)}$$

لكلّ $n \geq 1$.

إن العلاقة الإرجاعية التي تحقّقها كثيرات حدود تشبيشف تتضمّن

$$\tilde{T}_2(x) = x\tilde{T}_1(x) - \tfrac{1}{2}\tilde{T}_0(x)$$

و

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = x\tilde{T}_n(x) - \tfrac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x) \qquad \text{(12.8)}$$

لكلّ $n \geq 2$. تظهر الرسوم البيانية لـ $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3, \tilde{T}_4$ و $\tilde{T}_5$ في شكل (11.8).

شكل 11.8