واحسب $K_\infty(H^{(5)})$.

ج. حُلّ النظام الخطي

$$H^{(4)}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مستخدمًا حساب تدوير من 5 خانات. وقارن الخطأ الحقيقي بالمقدر في المعادلة (24.7)

12. استخدم حساب تدوير من 4 خانات لحساب المعكوس H^{-1} لمصفوفة هلبرت H بحجم 3×3، ومن ثم احسب $\hat{H} = (H^{-1})^{-1}$. حدّد $\|H - \hat{H}\|_\infty$.

5.7 طريقة الميل المرافق
The Conjugate Gradient Method

ماكنس هستنس (1906 – 1991) Magnus Hastens وإدوارد ستيفل Edward Stiefel نشرا الورقة الأصلية لطريقة التدرج المتقارن عام 1952 عندما كانا يعملان في معهد التحليل العددي بجامعة كاليفورنيا / لوس أنجلس UCLA.

إن طريقة الميل المرافق المنسوبة إلى Hestenes and Stiefel [HS] تطوّرت في الأصل، لكونها طريقة مباشرة مصمّمة لحلّ نظام خطي إيجابي واضح بحجم $n \times n$. وبطريقة مباشرة فإنها عمومًا بخانة أدنى من تقليص جاوس مع تمحور لكون كلا الطريقتين تتطلب n من الخطوات لتحديد الحل. وإن خطوات طريقة الميل المرافق ذات تكلفة حسابية أكثر من تلك التي في طريقة جاوس للحذف.

ومع ذلك فإن طريقة الميل المرافق مفيدة جدًا عند استخدامها بوصفها طريقة تقريب بالتكرار لحلّ أنظمة كبيرة متفرعة مع عناصر غير صفرية تظهر في أنماط تنبؤية. وعندما يعاد اشتراط المصفوفة لجعل الحسابات أكثر فاعلية، فإن نتائج جيدة تظهر خلال $\sqrt{n}$ من الخطوات تقريبًا. وإن تطبيق هذه الطريقة بهذا الأسلوب يجعلها مفضلة على طريقة تقليص جاوس للحدف وطرائق التكرار التي سبق مناقشتها.

وخلال هذا الفصل نفترض أن المصفوفة A موجبة التحديد. وسوف نستخدم تعبير الضرب الداخلي

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t \mathbf{y} \qquad (25.7)$$

حيث إن x و y متجهان بحجم n. وسنحتاج إلى نتائج معيارية من الجبر الخطي أيضًا. وإن مراجعة هذه المادة موجودة في الفصل (1.9).

سنحصل على النتيجة الآتية من خلال خصائص المنقولات. (انظر التمرين 12).

مبرهنة 30.7 لأي متجهات x، y و z وأي عدد حقيقي يكون لدينا

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

(ii) $\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

(iii) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$

(iv) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$

(v) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ إذا وفقط إذا $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ■

وعندما تكون A موجبة التحديد، فإن $\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} > 0$ ما لم يكن $\mathbf{x} = 0$ وحيث إن A متماثلة. يكون لدينا $\mathbf{x}^t A \mathbf{y} = \mathbf{x}^t A^t \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^t \mathbf{y}$، ومن ثم فبالإضافة إلى النتائج في المبرهنة (30.7)، سيكون لدينا لكل x و y

$$\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle \tag{26.7}$$

والنتيجة الآتية هي أداة رئيسة في تطوير طريقة الميل المرافق.

مبرهنة 31.7

يكون المتجه x^* حلًا للنظام الخطي الإيجابي الواضح $Ax = b$ إذا وفقط إذا كانت القيمة الصغرى للدالة $g(x) = \langle x, Ax\rangle - 2\langle x, b\rangle$ تتحقق عند x^*. ■

البرهان

ليكن x و $v \neq 0$ متجهين ثابتين، والمتغير t عددًا حقيقيًا. ولدينا

$$\begin{aligned} g(x + tv) &= \langle x + tv, Ax + tAv\rangle - 2\langle x + tv, b\rangle \\ &= \langle x, Ax\rangle + t\langle v, Ax\rangle + t\langle x, Av\rangle + t^2\langle v, Av\rangle - 2\langle x, b\rangle - 2t\langle v, b\rangle \\ &= \langle x, Ax\rangle - 2\langle x, b\rangle + 2t\langle v, Ax\rangle - 2t\langle v, b\rangle + t^2\langle v, Av\rangle \end{aligned}$$

ولذلك فإن

$$g(x + tv) = g(x) + 2t\langle v, Ax - b\rangle + t^2\langle v, Av\rangle \tag{7.27}$$

وبما أن x و v ثابتان، يمكننا تعريف الدالة التربيعية h في t من خلال

$$h(t) = g(x + tv)$$

ومن ثم يفترض أن يكون h أقل قيمة عندما $h'(t) = 0$، لكون معامل t^2 أي $\langle v, Av\rangle$ موجبًا. وحيث إن

$$h'(t) = 2\langle v, Ax - b\rangle + 2t\langle v, Av\rangle$$

فإن القيمة الصغرى تحصل عندما

$$\hat{t} = -\frac{\langle v, Ax - b\rangle}{\langle v, Av\rangle} = \frac{\langle v, b - Ax\rangle}{\langle v, Av\rangle}$$

ومن المعادلة (27.7) يكون

$$\begin{aligned} h(\hat{t}) &= g(x) - 2\frac{\langle v, b - Ax\rangle}{\langle v, Av\rangle}\langle v, b - Ax\rangle + \left(\frac{\langle v, b - Ax\rangle}{\langle v, Av\rangle}\right)^2\langle v, Av\rangle \\ &= g(x) - \frac{\langle v, b - Ax\rangle^2}{\langle v, Av\rangle} \end{aligned}$$

ولذلك لأي متجه $v \neq 0$، يكون لدينا $g(x + \hat{t}v) < g(x)$ ما لم يكن $\langle v, b - Ax\rangle = 0$، وبهذه الحالة يكون $g(x) = g(x + \hat{t}v)$. هذه هي النتيجة الرئيسة التي نحتاج إليها لبرهنة المبرهنة (31.7).

افترض أن x^* تحقق $Ax^* = b$. لذلك $\langle v, b - Ax^*\rangle = 0$ لأي متجه v. ولا يمكن جعل $g(x)$ أصغر من $g(x^*)$. ومن ثم فإن x^* تقلل من g.

افترض من جانب آخر أن x^* هو متجه يحقق القيمة الصغرى للدالة g، لذا لأي متجه v يكون لدينا $g(x^* + \hat{t}v) \geq g(x^*)$. ولذلك فإن $\langle v, b - Ax^*\rangle = 0$. وهذا يؤدي إلى أن $b - Ax^* = 0$ والنتيجة أن $Ax^* = b$. ■ ■ ■

وللبدء بطريقة الميل المرافق، نختار x الذي هو حلٌ تقريبي إلى $Ax^* = b$ وأن $v \neq 0$

الذي يعطي اتجاها بحثيًا اتجاه الابتعاد عن x لتحسين التقريب. ليكن $r = b - Ax$ هو متجه البواقي مع x وأن

$$t = \frac{\langle v, b - Ax \rangle}{\langle v, Av \rangle} = \frac{\langle v, r \rangle}{\langle v, Av \rangle}$$

فإذا كان $r \neq 0$. و v و r ليسا متعامدين. فإن $x + tv$ تعطي قيمة أقل لـ g مما هي لـ (x). وإنها افتراضيًا أقرب إلى x^* مما هي إلى x. وهذا يؤدي إلى اقتراح الطريقة الآتية

ليكن $x^{(0)}$ تقريبًا ابتدائيًا إلى x^*. وليكن $v^{(1)} \neq 0$ متجه بحث ابتدائيًا. ولكل $k = 1, 2, 3, \ldots$ نحسب

$$t_k = \frac{\langle v^{(k)}, b - Ax^{(k-1)} \rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + t_k v^{(k)}$$

ونختار اتجاه بحث جديد $v^{(k+1)}$. والهدف أن يؤدي هذا الاختيار إلى أن تتقارب متتالية التقريبات $\{x^{(k)}\}$ بسرعة إلى x^*.

ولاختيار اتجاهات البحث، نفترض g دالة لمركبات $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$، ومن ثم

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \langle x, Ax \rangle - 2\langle x, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

وبأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى متغيرات المركبات x_k نحصل على

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i - 2b_k$$

ولذلك فإن تدرج (ميل) g يكون

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \right)^t = 2(Ax - b) = -2r$$

حيث إن المتجه r هو متجه البواقي إلى x.

ومن حسابات التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات، نعرف أن اتجاه النقصان الأكبر في قيمة $g(x)$ هو الاتجاه المعطى من خلال $-\nabla g(x)$، يعني أنه في اتجاه الباقي r.

تسمى الطريقة التي تختار

$$v^{(k+1)} = r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

طريقة النزول الأعمق *steepest descent*. وعلى الرغم من أننا سنرى في الفصل 4.10، أن هذه الطريقة جديرة بالأنظمة اللاخطية وبمسائل التحسين، إلا أنها لا تُستخدم في الأنظمة الخطية نتيجة تباطؤ التقارب.

وتستخدم الطريقة البديلة مجموعة من متجهات الاتجاه اللاصفرية $\{v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}\}$ التي تحقق

$$\langle v^{(i)}, Av^{(j)} \rangle = 0 \quad \text{إذا} \quad i \neq j$$

وهذا يُسمى "شرط التعامد $A-$ A-orthogonality condition". وإن مجموعة المتجهات $\{v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}\}$ تُسمى "تعامد $A-$ A-orthogonal". وليس من الصعب إثبات أن متجهات

تعامد $-A$ المرتبطة بالمصفوفة الإيجابية الواضحة A مستقلة خطيًا. (انظر التمرين 13 - أ) هذه المجموعة من اتجاهات البحث تعطي

$$t_k = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}$$

و $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k \mathbf{v}^{(k)}$.

وتثبت المبرهنة الآتية أن اختيار اتجاهات البحث تعطي تقاربًا في n من الخطوات بوصفها حدًا أعلى، ولذلك فإنها تعطي الحلَّ الصحيح بوصفها طريقة مباشرة. مفترضين أن الحسابات صحيحة.

مبرهنة 32.7

لتكن $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ مجموعة متعامدة من المتجهات غير الصفرية بالنسبة إلى A مرتبطة بالمصفوفة الإيجابية الواضحة A. ولتكن $\mathbf{x}^{(0)}$ عشوائية. نعرف

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k \mathbf{v}^{(k)} \quad \text{و} \quad t_k = \frac{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}$$

لكل $k = 1, 2, \ldots, n$. ولذلك على افتراض أن الحسابات صحيحة، فإن $A\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{b}$. ■

البرهان

بما أنه لكل $k = 1, 2, \ldots, n$، نجد أن $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k \mathbf{v}^{(k)}$. فإنه يكون لدينا

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x}^{(n)} &= A\mathbf{x}^{(n-1)} + t_n A\mathbf{v}^{(n)} \\
&= (A\mathbf{x}^{(n-2)} + t_{n-1} A\mathbf{v}^{(n-1)}) + t_n A\mathbf{v}^{(n)} \\
&\;\;\vdots \\
&= A\mathbf{x}^{(0)} + t_1 A\mathbf{v}^{(1)} + t_2 A\mathbf{v}^{(2)} + \cdots + t_n A\mathbf{v}^{(n)}
\end{aligned}$$

وبطرح $\mathbf{b}$ من هذه النتيجة نحصل على

$$A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b} = A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b} + t_1 A\mathbf{v}^{(1)} + t_2 A\mathbf{v}^{(2)} + \cdots + t_n A\mathbf{v}^{(n)}$$

والآن نأخذ الضرب الداخلي لطرفي المعادلة أعلاه بالمتجه $\mathbf{v}^{(k)}$، ونستخدم خواص الضرب الداخلي وحقيقة كون A متماثلة لإيجاد

$$\begin{aligned}
\langle A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle &= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + t_1 \langle A\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + \cdots + t_n \langle A\mathbf{v}^{(n)}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle \\
&= \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + t_1 \langle \mathbf{v}^{(1)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle + \cdots + t_n \langle \mathbf{v}^{(n)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle
\end{aligned}$$

إن خاصية تعامد$-A$ تعطينا لكل k

$$\langle A\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle = \langle A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{v}^{(k)} \rangle + t_k \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle \qquad (28.7)$$

وعلى أي حال فإن

$$t_k = \frac{\langle v^{(k)}, b - Ax^{(k-1)}\rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle}$$

ولذلك فإن

$$t_k\langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle = \langle v^{(k)}, b - Ax^{(k-1)}\rangle$$
$$= \langle v^{(k)}, b - Ax^{(0)} + Ax^{(0)} - Ax^{(1)} + \cdots - Ax^{(k-2)} + Ax^{(k-2)} - Ax^{(k-1)}\rangle$$
$$= \langle v^{(k)}, b - Ax^{(0)}\rangle + \langle v^{(k)}, Ax^{(0)} - Ax^{(1)}\rangle + \cdots + \langle v^{(k)}, Ax^{(k-2)} - Ax^{(k-1)}\rangle$$

ولكن لأي i نجد أن

$$Ax^{(i)} = Ax^{(i-1)} + t_i Av^{(i)} \quad \text{و} \quad x^{(i)} = x^{(i-1)} + t_i v^{(i)}$$

لذلك فإن

$$Ax^{(i-1)} - Ax^{(i)} = -t_i Av^{(i)}$$

ومن ثم يكون

$$t_k\langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle = \langle v^{(k)}, b - Ax^{(0)}\rangle - t_1\langle v^{(k)}, Av^{(1)}\rangle - \cdots - t_{k-1}\langle v^{(k)}, Av^{(k-1)}\rangle$$

وبسبب تعامد $A-$، فإن $\langle v^{(k)}, Av^{(i)}\rangle = 0$ لكل $i \neq k$، ولذلك فإن

$$\langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle t_k = \langle v^{(k)}, b - Ax^{(0)}\rangle$$

ومن المعادلة (28.7) نجد أن

$$\langle Ax^{(n)} - b, v^{(k)}\rangle = \langle Ax^{(0)} - b, v^{(k)}\rangle + \langle v^{(k)}, b - Ax^{(0)}\rangle$$
$$= \langle Ax^{(0)} - b, v^{(k)}\rangle + \langle b - Ax^{(0)}, v^{(k)}\rangle$$
$$= \langle Ax^{(0)} - b, v^{(k)}\rangle - \langle Ax^{(0)} - b, v^{(k)}\rangle$$
$$= 0$$

يكون المتجه $Ax^{(n)} - b$ متعامداً مع مجموعة متجهات تعامد $A-$، $\{v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}\}$. ومن هنا سيكون $Ax^{(n)} - b = 0$. (انظر التمرين 13– ب). ■ ■ ■

مثال 1

افترض المصفوفة موجبة التحديد

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

وليكن $v^{(1)} = (1, 0, 0)^t, v^{(2)} = (-\frac{3}{4}, 1, 0)^t$ و $v^{(3)} = (-\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 1)^t$. وبالحساب المباشر نجد

$$\langle v^{(1)}, Av^{(2)}\rangle = v^{(1)t}Av^{(2)} = (1, 0, 0)\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\langle v^{(1)}, Av^{(3)}\rangle = (1, 0, 0)\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

و

$$\langle v^{(2)}, Av^{(3)}\rangle = \left(-\frac{3}{4}, 1, 0\right)\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

لذلك فإن $\{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\}$ هي مجموعة تعامد $-A$.

إن النظام الخطي

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

له حلٌّ صحيح هو $x^* = (3, 4, -5)'$. ولتقريب هذا الحلّ، افترض أن $x^{(0)} = (0, 0, 0)'$. ولأن $b = (24, 30, -24)'$، يكون لدينا

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = b = (24, 30, -24)'$$

ولذلك فإن

$$\langle v^{(1)}, r^{(0)}\rangle = v^{(1)\prime} r^{(0)} = 24 \text{ ، } \langle v^{(1)}, Av^{(1)}\rangle = 4 \text{ و } t_0 = \tfrac{24}{4} = 6$$

ومن ثم فإن

$$x^{(1)} = x^{(0)} + t_0 v^{(1)} = (0, 0, 0)' + 6(1, 0, 0)' = (6, 0, 0)'$$

وبالاستمرار على هذا النحو، يكون لدينا

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = (0, 12, -24)'; \quad t_1 = \frac{\langle v^{(2)}, r^{(1)}\rangle}{\langle v^{(2)}, Av^{(2)}\rangle} = \frac{12}{7/4} = \frac{48}{7}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + t_1 v^{(2)} = (6, 0, 0)' + \frac{48}{7}\left(-\frac{3}{4}, 1, 0\right)' = \left(\frac{6}{7}, \frac{48}{7}, 0\right)'$$

$$r^{(2)} = b - Ax^{(2)} = \left(0, 0, -\frac{120}{7}\right); \quad t_2 = \frac{\langle v^{(3)}, r^{(2)}\rangle}{\langle v^{(3)}, Av^{(3)}\rangle} = \frac{-120/7}{24/7} = -5$$

و

$$x^{(3)} = x^{(2)} + t_2 v^{(3)} = \left(\tfrac{6}{7}, \tfrac{48}{7}, 0\right)' + (-5)\left(-\tfrac{3}{7}, \tfrac{4}{7}, 1\right)' = (3, 4, -5)'$$

ولأننا طبّقنا الأسلوب ثلاث مرات ($n = 3$)، فإن هذا يعدّ حلًّا حقيقيًّا. ■

وقبل مناقشة كيفية تحديد مجموعة تعامد $-A$، سنستمر في التطوير. إن استخدام مجموعة تعامد $-A$ $\{v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}\}$ لمتجهات الاتجاه تعطينا ما نسمّيه طريقة الاتجاه المرافق *conjugate direction*. تثبت المبرهنة الآتية تعامدية متجهات البواقي $r^{(k)}$ ومتجهات الاتجاه $v^{(j)}$. وقد أخذ في الحسبان برهان هذه النتيجة باستخدام الاستقراء الرياضي في التمرين (14).

مبرهنة 7.33

إن متجهات البواقي $r^{(k)}$، حيث $k = 1, 2, \ldots, n$. لطريقة الميل المرافقة تحقق المعادلات

$$\langle r^{(k)}, v^{(j)}\rangle = 0 \quad \text{لكل} \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

لكل ■

إن طريقة الميل المرافق لهستنس وستيفل تختار اتجاهات البحث $\{v^{(k)}\}$ خلال عملية التكرار. لذلك فإن متجهات البواقي $\{r^{(k)}\}$ متعامدة تبادليًّا. ولإنشاء متجهات الاتجاه $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots\}$

والتقريبات $\{x^{(1)}, x^{(2)},\ldots\}$، فإننا نبدأ بتقريب ابتدائي $x^{(0)}$، ومن ثم نستخدم اتجاه النزول الأعمق $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ حيث أول اتجاه بحث $v^{(1)}$.

افترض أن الميول المرافقة $v^{(1)},\ldots, v^{(k-1)}$ والتقريبات $x^{(1)},\ldots, x^{(k-1)}$ حُسبت مع

$$x^{(k-1)} = x^{(k-2)} + t_{k-1}v^{(k-1)}$$

حيث إن

$$\langle v^{(i)}, Av^{(j)}\rangle = 0 \text{ و } \langle r^{(i)}, r^{(j)}\rangle = 0 \text{ لكل } i \neq j$$

وإذا كان $x^{(k-1)}$ هو الحلُّ لـ $Ax = b$ فقد وصلنا إلى النهاية. وبعكس ذلك، يكون $r^{(k-1)} = b - Ax^{(k-1)} \neq 0$ وتؤدي المبرهنة (33.7) إلى أن $\langle r^{(k-1)}, v^{(i)}\rangle = 0$ لكل $i = 1, 2,\ldots, k-1$. عندئذ نستخدم $r^{(k-1)}$ لتوليد $v^{(k)}$ بوضع

$$v^{(k)} = r^{(k-1)} + s_{k-1}v^{(k-1)}$$

ونريد اختيار s_{k-1} بحيث يكون

$$\langle v^{(k-1)}, Av^{(k)}\rangle = 0$$

وحيث إن

$$Av^{(k)} = Ar^{(k-1)} + s_{k-1}Av^{(k-1)}$$

و

$$\langle v^{(k-1)}, Av^{(k)}\rangle = \langle v^{(k-1)}, Ar^{(k-1)}\rangle + s_{k-1}\langle v^{(k-1)}, Av^{(k-1)}\rangle$$

سيكون لدينا $\langle v^{(k-1)}, Av^{(k)}\rangle = 0$ عندما

$$s_{k-1} = -\frac{\langle v^{(k-1)}, Ar^{(k-1)}\rangle}{\langle v^{(k-1)}, Av^{(k-1)}\rangle}$$

وبالإمكان أيضًا إثبات أنه مع هذا الاختيار لـ s_{k-1} يكون لدينا $\langle v^{(k)}, Av^{(i)}\rangle = 0$ لكل $i = 1, 2,\ldots, k-2$ (انظر [Lu, p. 245]). ولذلك فإن $\{v^{(1)},\ldots, v^{(k)}\}$ هي مجموعة تعامد $-A$.

وباختيارنا $v^{(k)}$ نحسب

$$t_k = \frac{\langle v^{(k)}, r^{(k-1)}\rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle} = \frac{\langle r^{(k-1)} + s_{k-1}v^{(k-1)}, r^{(k-1)}\rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle}$$

$$= \frac{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)}\rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle} + s_{k-1}\frac{\langle v^{(k-1)}, r^{(k-1)}\rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle}$$

ومن خلال المبرهنة (33.7) يكون لدينا $\langle v^{(k-1)}, r^{(k-1)}\rangle = 0$. ولذلك فإن

$$t_k = \frac{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)}\rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle} \tag{29.7}$$

ومن ثم فإن

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + t_k v^{(k)}$$

ولحساب $r^{(k)}$، نضرب في A، ونطرح b لنحصل على

$$\mathrm{r}^{(k)} = \mathrm{r}^{(k-1)} - t_k A\mathrm{v}^{(k)} \quad \text{أو} \quad A\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{b} = A\mathrm{x}^{(k-1)} - \mathrm{b} + t_k A\mathrm{v}^{(k)}$$

ومن ثم فإن

$$\langle \mathrm{r}^{(k)}, \mathrm{r}^{(k)} \rangle = \langle \mathrm{r}^{(k-1)}, \mathrm{r}^{(k)} \rangle - t_k \langle A\mathrm{v}^{(k)}, \mathrm{r}^{(k)} \rangle = -t_k \langle \mathrm{r}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle$$

والأكثر من ذلك، فإننا نحصل من المعادلة (29.7) على

$$\langle \mathrm{r}^{(k-1)}, \mathrm{r}^{(k-1)} \rangle = t_k \langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle$$

ولذلك فإن

$$\begin{aligned} s_k &= -\frac{\langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle} = -\frac{\langle \mathrm{r}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle}{\langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle} \\ &= \frac{(1/t_k)\langle \mathrm{r}^{(k)}, \mathrm{r}^{(k)} \rangle}{(1/t_k)\langle \mathrm{r}^{(k-1)}, \mathrm{r}^{(k-1)} \rangle} = \frac{\langle \mathrm{r}^{(k)}, \mathrm{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathrm{r}^{(k-1)}, \mathrm{r}^{(k-1)} \rangle} \end{aligned}$$

وباختصار لدينا الصيغ

$$\mathrm{r}^{(0)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(0)}; \quad \mathrm{v}^{(1)} = \mathrm{r}^{(0)}$$

وعند $k = 1, 2, \ldots, n$، يكون لدينا

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{\langle \mathrm{r}^{(k-1)}, \mathrm{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathrm{v}^{(k)}, A\mathrm{v}^{(k)} \rangle} \\ \mathrm{x}^{(k)} &= \mathrm{x}^{(k-1)} + t_k \mathrm{v}^{(k)} \\ \mathrm{r}^{(k)} &= \mathrm{r}^{(k-1)} - t_k A\mathrm{v}^{(k)} \\ s_k &= \frac{\langle \mathrm{r}^{(k)}, \mathrm{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathrm{r}^{(k-1)}, \mathrm{r}^{(k-1)} \rangle} \\ \mathrm{v}^{(k+1)} &= \mathrm{r}^{(k)} + s_k \mathrm{v}^{(k)} \end{aligned} \tag{30.7}$$

وبدلاً من عرض خوارزمية لطريقة الميل المرافق مستخدمين هذه الصيغ، سنوسّع الطريقة لتشمل الاشتراط المسبق *preconditioning*. فإذا كانت المصفوفة A معلولة الاشتراط فإن طريقة الميل المرافق تكون معرضة لأخطاء تقريب بصورة كبيرة. وعلى الرغم من وجوب الحصول على الإجابة الصحيحة في n من الخطوات، فإن ذلك لم يعد هو الحالة. ولأنها طريقة مباشرة، فإن طريقة الميل المرافق ليست بجودة تقليص جاوس مع التمحور. وإن الاستخدام الرئيس لطريقة التدرج المتقارن هو طريقة تكرار تُطبّق على نظام مشروط بصورة أحسن. وفي هذه الحالة سنحصل غالبا على حلٍّ تقريبي مقبول خلال $\sqrt{n}$ من الخطوات.

ولتطبيق الطريقة على نظام جيد الاشتراط، نريد اختيار مصفوفة اشتراطية غير مفردة C بحيث يكون

$$\tilde{A} = C^{-1}A(C^{-1})^t$$

جيد الاشتراط. ولتبسيط الترميز، سنستخدم المصفوفة C^{-t} لترمز إلى $(C^{-1})^t$.

افترض النظام الخطي $\tilde{A}\tilde{\mathrm{x}} = \tilde{\mathrm{b}}$, حيث $\tilde{\mathrm{x}} = C^t\mathrm{x}$ و $\tilde{\mathrm{b}} = C^{-1}\mathrm{b}$. لذلك فإن

$$\tilde{A}\tilde{x} = (C^{-1}AC^{-t})(C^t x) = C^{-1}Ax$$

ولذلك فإنه يمكننا حل $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ لـ $\tilde{x}$ ومن ثم إيجاد x من خلال الضرب في C^{-t}. وعلى أي حال فبدلًا من تكرار كتابة المعادلة (30.7) مستخدمين $\tilde{x}^{(k)}, \tilde{t}_k, \tilde{v}^{(k)}, \tilde{r}^{(k)}$، و $\tilde{s}_k$ سندمج الاشتراط المسبق.

وحيث إن

$$\tilde{x}^{(k)} = C^t x^{(k)}$$

يكون لدينا

$$\tilde{r}^{(k)} = \tilde{b} - \tilde{A}\tilde{x}^{(k)} = C^{-1}b - (C^{-1}AC^{-t})C^t x^{(k)} = C^{-1}(b - Ax^{(k)}) = C^{-1}r^{(k)}$$

ليكن $\tilde{v}^{(k)} = C^t v^{(k)}$ و $w^{(k)} = C^{-1}r^{(k)}$، لذا فإن

$$\tilde{s}_k = \frac{\langle \tilde{r}^{(k)}, \tilde{r}^{(k)}\rangle}{\langle \tilde{r}^{(k-1)}, \tilde{r}^{(k-1)}\rangle} = \frac{\langle C^{-1}r^{(k)}, C^{-1}r^{(k)}\rangle}{\langle C^{-1}r^{(k-1)}, C^{-1}r^{(k-1)}\rangle}$$

وبذلك فإن

$$\tilde{s}_k = \frac{\langle w^{(k)}, w^{(k)}\rangle}{\langle w^{(k-1)}, w^{(k-1)}\rangle} \tag{31.7}$$

ومن ثم فإن

$$\tilde{t}_k = \frac{\langle \tilde{r}^{(k-1)}, \tilde{r}^{(k-1)}\rangle}{\langle \tilde{v}^{(k)}, \tilde{A}\tilde{v}^{(k)}\rangle} = \frac{\langle C^{-1}r^{(k-1)}, C^{-1}r^{(k-1)}\rangle}{\langle C^t v^{(k)}, C^{-1}AC^{-t}C^t v^{(k)}\rangle} = \frac{\langle w^{(k-1)}, w^{(k-1)}\rangle}{\langle C^t v^{(k)}, C^{-1}Av^{(k)}\rangle}$$

ولكون

$$\begin{aligned}\langle C^t v^{(k)}, C^{-1}Av^{(k)}\rangle &= [C^t v^{(k)}]^t C^{-1}Av^{(k)} \\ &= [v^{(k)}]^t CC^{-1}Av^{(k)} = [v^{(k)}]^t Av^{(k)} = \langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle\end{aligned}$$

يكون لدينا

$$\tilde{t}_k = \frac{\langle w^{(k-1)}, w^{(k-1)}\rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)}\rangle} \tag{32.7}$$

والأكثر من ذلك، فإن

$\tilde{x}^{(k)} = \tilde{x}^{(k-1)} + \tilde{t}_k\tilde{v}^{(k)}$ لذلك فإن $C^t x^{(k)} = C^t x^{(k-1)} + \tilde{t}_k C^t v^{(k)}$

و

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \tilde{t}_k v^{(k)} \tag{33.7}$$

وبالاستمرار سيكون

$$\tilde{r}^{(k)} = \tilde{r}^{(k-1)} - \tilde{t}_k \tilde{A}\tilde{v}^{(k)}$$

ولذلك فإن

$$C^{-1}r^{(k)} = C^{-1}r^{(k-1)} - \tilde{t}_k C^{-1}AC^{-t}\tilde{v}^{(k)}, \qquad r^{(k)} = r^{(k-1)} - \tilde{t}_k AC^{-t}C^t v^{(k)}$$

و

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} - \tilde{t}_k Av^{(k)} \tag{34.7}$$

الاشتراط المسبق يستبدل النظام المعطى بآخر له الحلول نفسها. ولكن بسمات تقريبية أفضل.

وفي النهاية إن

$$C^t \mathrm{v}^{(k+1)} = C^{-1}\mathrm{r}^{(k)} + \tilde{s}_k C^t \mathrm{v}^{(k)} \quad \text{و} \quad \tilde{\mathrm{v}}^{(k+1)} = \tilde{\mathrm{r}}^{(k)} + \tilde{s}_k \tilde{\mathrm{v}}^{(k)}$$

ولذلك فإن

$$\mathrm{v}^{(k+1)} = C^{-t}C^{-1}\mathrm{r}^{(k)} + \tilde{s}_k \mathrm{v}^{(k)} = C^{-t}\mathrm{w}^{(k)} + \tilde{s}_k \mathrm{v}^{(k)} \tag{35.7}$$

إن طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط تستند إلى استخدام المعادلات (31.7) — (35.7) بالترتيب (32.7)، (33.7)، (34.7)، (31.7) ثم (35.7). وتنفذ الخوارزمية (5.7) هذه العملية.

ALGORITHM
الخوارزمية
5.7

طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط

Preconditioned Conjugate Gradient Method

لحلّ $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ آخذين في الحسبان المصفوفة مسبقة الاشتراط C^{-1} والتقريب الابتدائي $\mathrm{x}^{(0)}$؛

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n. العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر $b_j, 1 \le j \le n$ للمتجه b، العناصر $\gamma_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة مسبقة الاشتراط C^{-1}، العناصر $x_i, 1 \le i \le n$ للتقريب الابتدائي $\mathrm{x} = \mathrm{x}^{(0)}$ وأكبر عدد من الإعادات N، حد السماح TOL.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1, \dots, x_n$ والباقي $r_1, \dots, r_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $\mathrm{r} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}$ (احسب $\mathrm{r}^{(0)}$). $\mathrm{w} = C^{-1}\mathrm{r}$ (إرشاد: $\mathrm{w} = \mathrm{w}^{(0)}$). $\mathrm{v} = C^{-t}\mathrm{w}$ (إرشاد: $\mathrm{v} = \mathrm{v}^{(1)}$). $\alpha = \sum_{j=1}^{n} w_j^2$
2	ضع $k = 1$.
3	ما دام $(k \le N)$ فطبّق الخطوات 4 — 7.
4	إذا كان $\lVert\mathrm{v}\rVert < TOL$. المخرجات (متجه الحل $x_1, \dots, x_n$). المخرجات (مع الباقي $r_1, \dots, r_n$). (العملية كانت ناجحة). توقف.
5	ضع $\mathrm{u} = A\mathrm{v}$ (إرشاد: $\mathrm{u} = A\mathrm{v}^{(k)}$). $t = \dfrac{\alpha}{\sum_{j=1}^{n} v_j u_j}$ (إرشاد: $t = t_k$). $\mathrm{x} = \mathrm{x} + t\mathrm{v}$ (إرشاد: $\mathrm{x} = \mathrm{x}^{(k)}$). $\mathrm{r} = \mathrm{r} - t\mathrm{u}$ (إرشاد: $\mathrm{r} = \mathrm{r}^{(k)}$). $\mathrm{w} = C^{-1}\mathrm{r}$ (إرشاد: $\mathrm{w} = \mathrm{w}^{(k)}$). $\beta = \sum_{j=1}^{n} w_j^2$ (إرشاد: $\beta = \langle \mathrm{w}^{(k)}, \mathrm{w}^{(k)} \rangle$).

6	إذا كان $\|\beta\| < TOL$ فإنه إذا كان $\|\mathbf{r}\| < TOL$ فإنه المخرجات (متجه الحل $x_1,\dots,\ x_n$). المخرجات (مع الباقي $r_1,\dots,\ r_n$). (العملية كانت ناجحة). توقف.
7	ضع $\quad s = \beta/\alpha \quad (s = s_k)$ $\mathrm{v} = C^{-t}\mathrm{w} + s\mathrm{v}$ (إرشاد: $\mathrm{v} = \mathrm{v}^{(k+1)}$). $\alpha = \beta$ (تحديث α). $k = k + 1$
8	إذا كان $(k > n)$ فإن المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت غير ناجحة). توقف.

■

يوضح المثال الآتي الحسابات في مسألة سهلة.

مثال 2 النظام الخطي $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ - x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

له حلّ $(3, 4, -5)^t$. وقد تناولناه في مثال (3) من الفصل (3.7). وقد استُخدم في ذلك المثال طريقتا جاوس – سيدل و SOR. وسنستخدم طريقة الميل المرافق دون اشتراط مسبق. ولذلك فإن $C = C^{-1} = I$. ليكن $\mathrm{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$، ومن ثم فإن

$$\mathrm{r}^{(0)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(0)} = \mathrm{b} = (24, 30, -24)^t$$
$$\mathrm{w} = C^{-1}\mathrm{r}^{(0)} = (24, 30, -24)^t$$
$$\mathrm{v}^{(1)} = C^{-t}\mathrm{w} = (24, 30, -24)^t$$
$$\alpha = \langle \mathrm{w}, \mathrm{w} \rangle = 2052$$

سنبدأ أول تكرار مع $k = 1$. لذا فإن

$$\mathrm{u} = A\mathrm{v}^{(1)} = (186.0, 216.0, -126.0)^t$$
$$t_1 = \frac{\alpha}{\langle \mathrm{v}^{(1)}, \mathrm{u} \rangle} = 0.1469072165$$
$$\mathrm{x}^{(1)} = \mathrm{x}^{(0)} + t_1\mathrm{v}^{(1)} = (3.525773196, 4.407216495, -3.525773196)^t$$
$$\mathrm{r}^{(1)} = \mathrm{r}^{(0)} - t_1\mathrm{u} = (-3.32474227, -1.73195876, -5.48969072)^t$$
$$\mathrm{w} = C^{-1}\mathrm{r}^{(1)} = \mathrm{r}^{(1)}$$
$$\beta = \langle \mathrm{w}, \mathrm{w} \rangle = 44.19029651$$
$$s_1 = \frac{\beta}{\alpha} = 0.02153523222$$
$$\mathrm{v}^{(2)} = C^{-t}\mathrm{w} + s_1\mathrm{v}^{(1)} = (-2.807896697, -1.085901793, -6.006536293)^t$$

ضع $\alpha = \beta = 44.19029651$.

ونحن الآن على استعداد للبدء بالتكرار الثاني. فيكون لدينا

$$
\begin{aligned}
\mathrm{u} &= A\mathrm{v}^{(2)} = (-14.48929217, -6.760760967, -22.94024338)^t \\
t_2 &= 0.2378157558 \\
\mathrm{x}^{(2)} &= (2.858011121, 4.148971939, -4.954222164)^t \\
\mathrm{r}^{(2)} &= (0.121039698, -0.124143281, -0.034139402)^t \\
\mathrm{w} &= C^{-1}\mathrm{r}^{(2)} = \mathrm{r}^{(2)} \\
\beta &= 0.03122766148 \\
s_2 &= 0.0007066633163 \\
\mathrm{v}^{(3)} &= (0.1190554504, -0.1249106480, -0.03838400086)^t
\end{aligned}
$$

ضع $\alpha = \beta = 0.03122766148$

وأخيرًا تعطينا التكرار الثالثة

$$
\begin{aligned}
\mathrm{u} &= A\mathrm{v}^{(3)} = (0.1014898976, -0.1040922099, -0.0286253554)^t \\
t_3 &= 1.192628008 \\
\mathrm{x}^{(3)} &= (2.999999998, 4.000000002, -4.999999998)^t \\
\mathrm{r}^{(3)} &= (0.36 \times 10^{-8}, 0.39 \times 10^{-8}, -0.141 \times 10^{-8})^t
\end{aligned}
$$

ولأن $\mathrm{x}^{(3)}$ هو الحلُّ الصحيح تقريبًا، فإن خطأ تقريب لا يؤثّر معنويًا في النتيجة. وفي المثال (3) من الفصل (3.7) تطلبت طريقة جاوس–سيدل 34 تكرارًا. أما طريقة SOR، مع $\omega = 1.25$، فقد تطلبت 14 تكرارًا فقط لدقة بحدود 10^{-7}. ومن الجدير ملاحظة أننا نقارن في هذا المثال بين طريقة مباشرة وطرائق تكرار. ■

ويعرض مثال الآتي تأثير الاشتراط المسبق في مصفوفة ضعيفة الاشتراط. ونستخدم في هذا مثال وما بعده $D^{-1/2}$ ليمثل المصفوفة القطرية، التي عناصرها عبارة عن مقلوب الجذور التربيعية للعناصر القطرية لمصفوفة المعاملات A.

مثال 3 النظام الخطي $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ مع

$$
A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 60 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 700 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

له حل

$\mathbf{x}^* = (7.859713071, 0.4229264082, -0.07359223906, -0.5406430164, 0.01062616286)^t$

المصفوفة A متماثلة وموجبة التحديد، لكنها معلولة الاشتراط مع عدد الشرط $K_\infty(A) = 13961.71$. سنستخدم حد سماح 0.01 ونقارن النتائج التي ظهرت من الطرائق (جاكوبي)، (جاوس – سيدل) (SOR للتكرار مع $\omega = 1.25$) و(التدرج المتقارن) بـ $C^{-1} = I$. وبعد ذلك فإننا نكون قد نفذنا اشتراطًا مسبقًا من خلال اختيار C^{-1} بمنزلة المصفوفة القطرية $D^{-1/2}$ التي عناصرها القطرية عبارة عن معكوس الجذور التربيعية الموجبة للعناصر القطرية في المصفوفة الإيجابية الواضحة A. النتائج مبينة في جدول (5.7). إن طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط تعطي التقريب الأدق مع أصغر عدد من مرات التكرار.

جدول 5.7

الطريقة		عدد مرات الإعادة	$\mathbf{x}^{(k)}$	$\lVert \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)} \rVert_\infty$
جاكوبي	Jacobi	49	$(7.86277141, 0.42320802, -0.07348669$ $-0.53975964, 0.01062847)^t$	0.0[illegible]305834
جاوس – سيدل	Gauss–Seidel	15	$(7.83525748, 0.42257868, -0.07319124$ $-0.53753055, 0.01060903)^t$	0.0[illegible]2445559
	SOR ($\omega = 1.25$)	7	$(7.85152706, 0.42277371, -0.07348303$ $-0.53978369, 0.01062286)^t$	0.0[illegible]818607
التدرج المتقارن	Conjugate Gradient	5	$(7.85341523, 0.42298677, -0.07347963$ $-0.53987920, 0.008628916)^t$	0.0[illegible]629785
مسبق الاشتراط	Conjugate Gradient (Preconditioned)	4	$(7.85968827, 0.42288329, -0.07359878$ $-0.54063200, 0.01064344)^t$	0.0[illegible]009312

إن طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط conjugate gradient غالبًا ما تستخدم في حلّ أنظمة خطية كبيرة تكون فيها المصفوفة متشعبة وإيجابية واضحة. ويجب حلُّ هذه الأنظمة لتقريب حلول مسائل القيمة الحدية في معادلات تفاضلية اعتيادية (الفصول 3.11، 4.11، 5.11). وكلما كان النظام كبيرًا أصبحت طريقة الميل المرافق لافتة للإعجاب؛ لأنها تقلص عدد مرات التكرار المطلوبة معنويًا. ونجد في هذه الأنظمة أن المصفوفة مسبقة الاشتراط C تكون مساوية تقريبًا لـ L في تحليل شولسكي العاملي LL^t للمصفوفة A. وعمومًا يتم تجاهل العناصر الصغيرة في A وتطبّق طريقة شولسكي لإيجاد ما يدعى تحليلًا عامليًا غير مكتمل LL^t للمصفوفة A. ولذلك فإن $C^{-t}C^{-1} \approx A^{-1}$ وقد وُجِد تقريب جيد. ويمكن إيجاد المزيد من المعلومات حول طريقة الميل المرافق في [Kelley].

مجموعة التمارين 5.7 EXERCISE SET

1. النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 &= \tfrac{5}{21} \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 &= \tfrac{11}{84} \end{aligned}$$

له حل $(x_1, x_2)^t = (\frac{1}{6}, \frac{1}{7})^t$.

أ. حُلَّ النظام الخطي مستخدمًا تقليص جاوس مع حساب تدويري بمرتبتين.

ب. حُلَّ النظام الخطي مستخدمًا طريقة الميل المرافق ($C = C^{-1} = I$) مع حساب تدويري بمرتبتين.

ج. أي الطريقتين تعطي نتيجة أفضل؟

د. اختر $C^{-1} = D^{-1/2}$. هل هذا الاختيار يحسّن طريقة الميل المرافق؟

2. النظام الخطي

$$0.1x_1 + 0.2x_2 = 0.3$$
$$0.2x_1 + 113x_2 = 113.2$$

له حلّ $(x_1, x_2)^t = (1, 1)^t$. كرر توجيهات التمرين (1) لهذا النظام الخطي.

3. النظام الخطي

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 = \tfrac{5}{6}$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 = \tfrac{5}{12}$$
$$\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 = \tfrac{17}{60}$$

له حل $(1, -1, 1)^t$.

أ. حُلَّ النظام الخطي مستخدمًا تقليص جاوس مع حساب تدويري بثلاث خانات.

ب. حُلَّ النظام الخطي مستخدمًا طريقة الميل المرافق مع حساب تدويري بثلاث خانات.

ج. هل التمحور يحسّن النتيجة في (أ)؟

د. كرّر الفقرة (ب) مستخدمًا $C^{-1} = D^{-1/2}$. هل هذا يحسّن النتيجة في (ب)؟

4. كرر التمرين (3) مستخدمًا حسابًا أحادي الدقة على جهاز حاسوب.

5. نفّذ خطوتين فقط من طريقة الميل المرافق مع $C = C^{-1} = I$ على كل من الأنظمة الخطية الآتية. وقارن النتائج في الفقرتين (ب) و (ج) بتلك التي وُجدت في التمارين (1 و 3 و 9) من الفصل (3.7):

أ.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 \quad &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25 \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ -x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

هـ.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_1 - x_3 + \quad + 4x_5 &= 6 \end{aligned}$$

و.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 &= 5 \\ -x_2 + 4x_3 - x_6 &= 0 \\ -x_1 + 4x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2 \\ -x_3 - x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

6. كرر التمرين (5) مستخدمًا $C^{-1} = D^{-1/2}$.

7. كرر التمرين (5) مع $TOL = 10^{-3}$ في المعيار l_∞. قارن النتائج في الفقرتين (ب) و (ج) بتلك التي وُجدت في التمارين (5 و 7 و 13) من الفصل (3.7).

8. كرر التمرين (7) مستخدمًا $C^{-1} = D^{-1/2}$.

9. قرّب حلول الأنظمة الخطية الآتية $Ax = b$ ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞:

(i)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4, & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 16 \\ -1, & \text{حيث } \begin{cases} j = i+1 \text{ و } i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15 \\ j = i-1 \text{ و } i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16 \\ j = i+4 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 12 \\ j = i-4 \text{ و } i = 5, 6, \ldots, 16 \end{cases} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و

$$b = (1.902207, 1.051143, 1.175689, 3.480083, 0.819600, -0.264419, -0.412789, 1.175689, 0.913337, -0.150209, -0.264419, 1.051143, 1.966694, 0.913337, 0.819600, 1.902207)^t$$

(ii)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4, & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 25 \\ -1, & \text{حيث } \begin{cases} j = i+1 \text{ و } i = \begin{cases} 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 \\ 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, \end{cases} \\ j = i-1 \text{ و } i = \begin{cases} 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15 \\ 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25 \end{cases} \\ j = i+5 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 20 \\ j = i-5 \text{ و } i = 6, 7, \ldots, 25 \end{cases} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و $b = (1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2)^t$

(iii)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 40 \\ -1, & \text{حيث } \begin{cases} j = i+1 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 39 \\ j = i-1 \text{ و } i = 2, 3, \ldots, 40 \end{cases} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و $b_i = 1.5i - 6$ لكل $i = 1, 2, \ldots, 40$

أ. استخدم طريقة جاكوبي.

ب. استخدم طريقة جاوس – سيدل.

ج. استخدم طريقة SOR مع $\omega = 1.3$ في (i) و $\omega = 1.2$ في (ii) و $\omega = 1.1$ في (iii).

د. استخدم طريقة الميل المرافق واشتراطا مسبقًا مع $C^{-1} = D^{-1/2}$.

10. حُلّ النظام الخطي في التمرين (24 (ب)) من مجموعة التمارين (3.7) مستخدمًا طريقة الميل المرافق مع $C^{-1} = I$.

11. افترض

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومن مصفوفة A بحجم 16×16 بالصيغة المجزأة

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -I & O & O \\ -I & A_1 & -I & O \\ O & -I & A_1 & -I \\ O & O & -I & A_1 \end{bmatrix}$$

افترض $\mathbf{b} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)^t$.

أ. حُلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مستخدمًا طريقة الميل المرافق مع حد سماح 0.05.

ب. حُلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ مستخدمًا طريقة الميل المرافق مسبقة الاشتراط مع $C^{-1} = D^{-1/2}$ وحد سماح 0.05.

ج. هل هناك أي حد سماح تتطلب فيه الطريقتان (أ) و (ب) عددًا مختلفا من التكرار؟

12. استخدم خصائص المنقول المعطى في المبرهنة (13.6) لبرهنة المبرهنة (30.7).

13. أ. أثبت أن مجموعة متعامد-A لتجهات لاصفرية مرتبطة بمصفوفة إيجابية واضحة تكون مستقلة خطيًا.

ب. أثبت أنه إذا كانت $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ عبارة عن مجموعة متعامد-A لتجهات لاصفرية في $\mathbb{R}$، وأن $\mathbf{z}^t\mathbf{v}^{(i)} = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإن $\mathbf{z} = 0$.

14. برهن المبرهنة (33.7) مستخدمًا الاستنتاج الرياضي وفق الآتي:

أ. أثبت أن $\langle \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle = 0$.

ب. افترض أن $\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$ لكل $k \le l$ و $j = 1, 2, \ldots, k$. وأثبت أن هذا يؤدي إلى أن $\langle \mathbf{r}^{(l+1)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$ لكل $j = 1, 2, \ldots, l$.

ج. أثبت أن $\langle \mathbf{r}^{(l+1)}, \mathbf{v}^{(l+1)} \rangle = 0$.

6.7 مسح للطرائق والبرمجيات Survey of Methods and Software

درسنا في هذا الباب أساليب تكرار لتقريب حل الأنظمة الخطية. وبدأنا بطريقة جاكوبي وطريقة جاوس – سيدل لتقديم طرائق التكرار. وتتطلب كلتا الطريقتين تقريبا ابتدائيًا عشوائيًا $\mathbf{x}^{(0)}$ وتوليد متتالية من المتجهات $\mathbf{x}^{(i+1)}$ مستخدمين معادلة بالصيغة

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = T\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{c}$$

ولقد لُوحظ أن الطريقة ستتقارب إذا وفقط إذا كان نصف القطر الطبيعي لمصفوفة التكرار $\rho(T) < 1$، وكلما كان نصف القطر الطبيعي أصغر كان التقارب أسرع. وإن تحليل متجهات البواقي لأسلوب جاوس–سيدل أدّى إلى طريقة SOR للتكرار، التي تتضمن المتغيرة ω لتسريع التقارب. إن طرائق التكرار وتعديلاتها هذه تُستخدم بصورة واسعة في حلول الأنظمة الخطية التي تبرز في الحلول العددية لمسائل قيمة الحد والمعادلات التفاضلية الجزئية (انظر البابين 11 و 12). وغالبًا ما تكون هذه الأنظمة كبيرة جدًا. حيث تعد 10,000 معادلة في 10,000 من

عمل الكسي نيكولفج كريلوف (1863-1945) Aleksey Nikolayevich Krylov في الرياضيات التطبيقية وخصوصًا في مجال مسائل القيمة الحدية. تسريع تقارب سلاسل فورير Fourier ووسائل كلاسيكية مختلفة تتضمن نظمًا رياضية. وخلال بداية الـ 1930 كان مديرًا لمعهد الرياضيات الفيزيائية التابع لأكاديمية العلوم السوفيتية

المجاهيل ومتشعبة بعناصرها اللاصفرية في مواقع قابلة للتنبؤ. وإن طرائق التكرار مفيدة أيضًا في أنظمة متشعبة وأخرى كبيرة. ومن السهولة تبنيها لاستخدامها جيدًا في الحسابات المتوازية.

إن البرمجيات السائدة جميعها التجارية والعامة التي تتضمن طرائق تكرار لحلّ النظم الخطي لمعادلات ما غالبًا ما تتطلب اشتراطا مسبقا لاستخدامها مع تلك الطرائق. وغالبًا ما يمكن تحقيق تقارب أسرع لأدوات حل التكرار من خلال استخدام اشتراط مسبق. فالاشتراط المسبق ينتج نظاما مكافئًا من المعادلات التي من المؤمل أن تساهم في خصائص تقارب أفضل مما هو في النظام الأصلي. وإن مكتبة IMSL تتضمن البرنامج الفرعي PCGRC الذي هو طريقة الميل المرافق مسبق الاشتراط. وتتضمن مكتبة NAG برامج فرعية متعددة هي prefixed F11 لحلّ التكرار لأنظمة خطية.

تستند البرمجيات الفرعية كلها إلى طرائق فضاءات Krylov الجزئية. يحتوي المرجع Saad [Sa2] وصفًا مفصلًا لطرائق فضاء Krylov الجزئي. وتتضمن برامج LINPACK و LAPACK الطرائق المباشرة لحلّ الأنظمة الخطية فقط. وعلى الرغم من ذلك فإن البرمجيات هذه تتضمن العديد من البرامج الفرعية التي تستخدم قبل حل التكرار. إن البرمجيات السائدة العامة IML++, ITPACK, SLAP، والقوالب تتضمن طرائق تكرار. وإن MATLAB يتضمن طرائق تكرار متعددة تستند أيضًا إلى فضاءات Krylov الجزئية. وعلى سبيل المثال، فإن الأمر $x = \text{PCG}(A, b)$ ينفذ طريقة الميل المرافق المسبق الاشتراط لحلّ النظام الخطي $Ax = b$. بعض المتغيرات المدخلة الاختيارية لـ PCG هي TOL حد السماح للتقارب، أكبر عدد من مرات التكرار MAXIT والاشتراط المسبق M.

تناولنا مفاهيم العدد الشرطي والمصفوفات الضعيفة الاشتراط في الفصل (7.4). ويتضمن العديد من البرامج الفرعية لحلّ النظام الخطي أو لتحليل مصفوفة إلى العوامل LU فحوصًا للمصفوفات معلولة الاشتراط، وتعطي تقديرًا للعدد الشرطي كذلك.

ويحلّل البرنامج الفرعي SGETRF في LAPACK عامليًا المصفوفة الحقيقية A إلى العوامل LU ويعطي ترتيب الصف لمصفوفة التباديل P. حيث إن $PA = LU$. والبرنامج الفرعي SGECON يعطي مقلوب العدد الشرطي لـ A. مستخدمًا العوامل LU والمحسوبة من خلال SGETRF. يتضمن LAPACK كذلك برامج فرعية لتقدير العدد الشرطي لمصفوفات خاصة. وعلى سبيل المثال ينفذ SPOTRF عوامل شولسكي لمصفوفة إيجابية واضحة A، وإن SPOCON يقدّر مقلوب العدد الشرطي مستخدمًا عوامل شولسكي المحسوبة من خلال SPOTRF.

إن مكتبة IMSL تتضمن برامج فرعية لتقدير العدد الشرطي. وعلى سبيل المثال يحسب LFCRG عاملية LU. $PA = LU$ للمصفوفة A، ويعطي تقدير العدد الشرطي أيضًا. ومكتبة NAG تتضمن برامج فرعية مماثلة. تتضمن LAPACK, LINPACK، مكتبة IMSL ومكتبة NAG برامج فرعية تحسّن حلّ النظام الخطي ذي الاشتراط الضعيف. وتختبر البرامج الفرعية العدد الشرطي، ثم تستخدم تنقية التكرار لإيجاد أدقّ الحلول المحتملة وفق الدقة المنتهية للحاسبة.

ويمكن إيجاد معلومات أكثر حول استخدام طرائق التكرار لحلّ أنظمة خطية في Varga [Var1], Young [Y], Hageman and Young [HY].

وكذلك في كتاب حديث لـ Axelsson [Ax]. تناقش طرائق التكرار لأنظمة كبيرة متفرعة في Barrett et al.[Barr], Hackbusch [Hac], Kelley [Kelley] و Saad [Sa2].

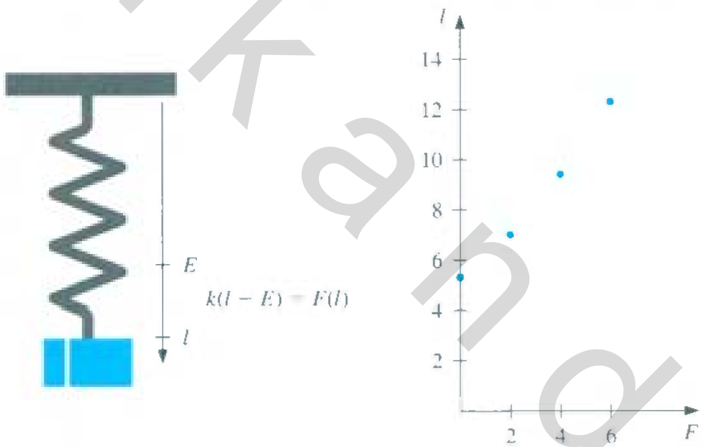
الباب 8

نظرية التقريب

Approximation Theory

مقدمة

ينص قانون هوك (Hooke) على أنه إذا خضع (زنبرك) نابض مصنوع من مادة متجانسة لقوة فإن طول النابض يكون دالة خطية في تلك القوة. ويمكننا كتابة الدالة الخطية بالصيغة $F(l) = k(l - E)$ حيث تمثل $F(l)$ القوة اللازمة لمدّ النابض l من الوحدات. أما الثابت E فيمثل طول النابض قبل تطبيق القوة عليه. والثابت k هو ثابت النابض.



افترض أننا نريد تحديد ثابت النابض لنابض طوله الابتدائي 5.3 in. نطبّق عليه القوى 2، 4 و 6 باوندات، ونجد أن طوله ازداد إلى 7.0 ، 9.4 و 12.3 إنشًا على التوالي. ويظهر بعد التفحص السريع أن النقاط (0,5.3) ، (2,7.0) ، (4,9.4) و (6,12.3) لا تقع بالضبط على خط مستقيم.

وعلى الرغم من إمكانية استخدام زوج عشوائي من نقاط البيانات لتقريب ثابت النابض ببساطة. فقد تبين أنه من المعقول أكثر أن الخط الذي يقرّب نقاط البيانات جميعها لتحديد الثابت هو الأفضل. إن هذا النوع من التقريب هو ما سيُناقَش في هذا الباب. وإن تطبيق النابض هذا موجود في التمرين (7) من الفصل (1.8).

إن دراسة مبرهنة التقريب تنطوي على نوعين عامين من المسائل؛ واحدة من هذه المسائل تظهر عندما يعطى الدالة (الدالّة) صراحة. ولكننا نود لنوجد الدالة المعطاة. نوعًا أبسط من الدوال مثل كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتحديد قيم تقريبية للدالة المعطاة. وتعنى المسألة

الأخرى في مبرهنة التقريب بمطابقة دالة لبيانات معلومة، وإيجاد أحسن دّالة في فئة محددة ليمثّل البيانات.

ولقد تناولنا هاتين المسألتين في الباب (3). إن كثيرة حدود تايلور من الرتبة n حول العدد x_0 هي التقريب المتميز للدالة f القابل للاشتقاق $(n+1)$ مرّة في جوار صغير لقيمة x_0.

لقد بُحثت كثيرات حدود لاجرنج أو كثيرات الحدود عمومًا بوصفها كثيرات حدود للتقريب، وكثيرات حدود تستخدم لمطابقة بيانات محددة. وكذلك بحث في الشريحة لمكعب في تلك الباب. وفي هذه الباب ستُناقش التحديدات على هذه الطرائق، وسنتطرق إلى جوانب أخرى كذلك.

1.8 تقريب المربعات الصغرى المنفصلة
Discrete Least Squares Approximation

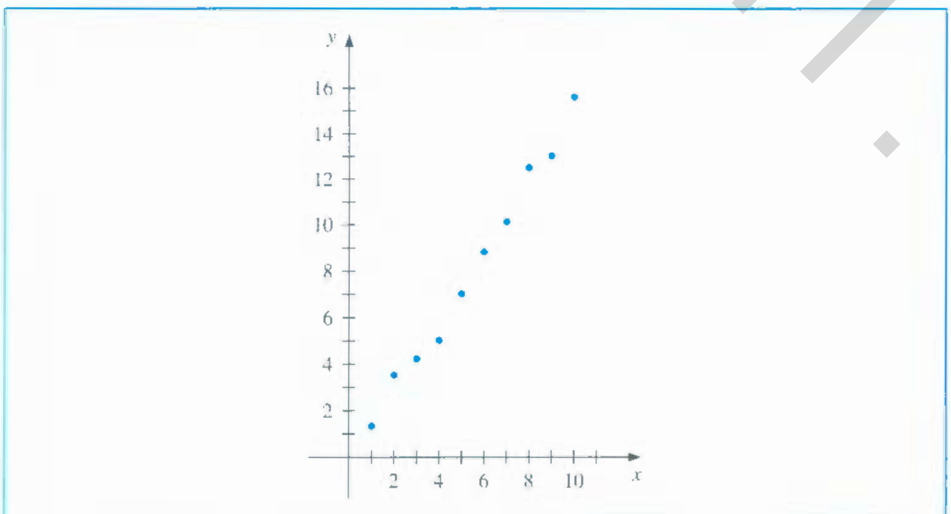
افترض مسألة تقدير قيم دّالة (دّالة) عند نقاط غير مجدولة إذا أعطيت البيانات التجريبية في جدول (1.8).

جدول 1.8

x_i	y_i	x_i	y_i
1	1.3	6	8.8
2	3.5	7	10.1
3	4.2	8	12.5
4	5.0	9	13.0
5	7.0	10	15.6

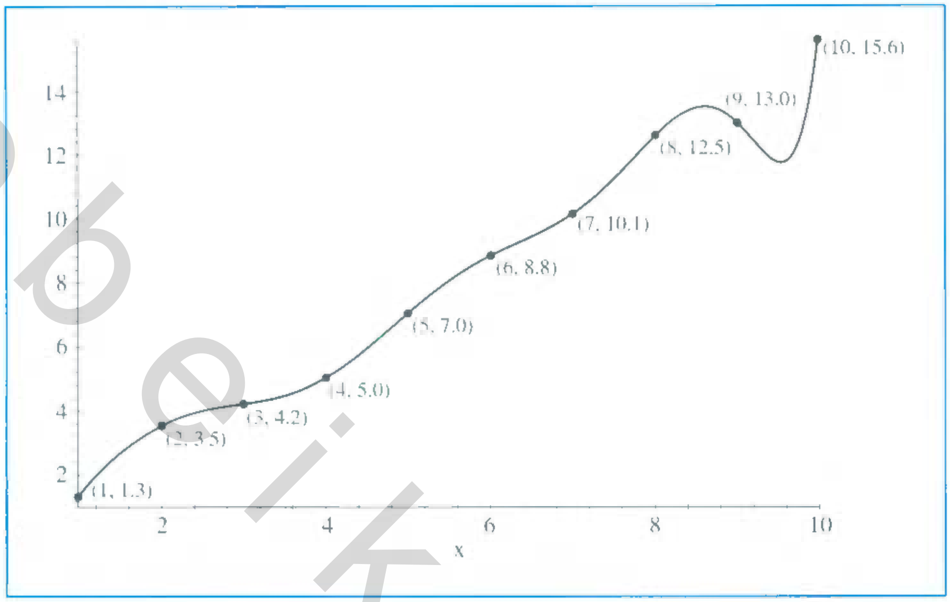
يظهر في شكل (1.8) الرسم البياني للقيم في جدول (1.8)، ويظهر من هذا الرسم أن العلاقة بين x و y خطية. ومن المحتمل أن عدم وقوع النقاط على خط مستقيم بالضبط يرجع إلى وجود أخطاء في البيانات. ولذلك فليس من المعقول أن نطلب موافقة دالة التقريب للبيانات بالضبط. وفي الحقيقة إن مثل هذا الدالة سيدخل ترددات لم تكن موجودة في الأصل. فعلى سبيل المثال، وُجدت كثيرة حدود من الرتبة التاسعة المرسومة في شكل (2.8) لوصف البيانات في جدول (1.8) دون محددات من Maple باستخدام الأوامر

```
>p:=interp([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],
    [1.3,3.5,4.2,5.0,7.0,8.8,10.1,12.5,13.0,15.6],x);
>plot({p},x=1..10);
```



شكل 1.8

شكل 2.8



إن كثيرة الحدود هذه متنبأ ضعيف للمعلومات بين عدد من نقاط البيانات A. وتكون الطريقة الفضلى بإيجاد الخط الأفضل (بجانب معين) للتقريب، حتى لو لم ينطبق تماما مع البيانات عند أي نقطة.

افترض أن $a_1x_i + a_0$ يمثّل القيمة ذات العدد i على خط التقريب، وتمثّل y_i قيمة y الفعلية ذات العدد i.

إن مسألة إيجاد معادلة أحسن تقريب خطي بالمعنى المطلق تتطلب إيجاد القيمتين a_0 و a_1 اللتين تجعلان

$$E_\infty(a_0, a_1) = \max_{1 \le i \le 10} \{|y_i - (a_1x_i + a_0)|\}$$

أصغر ما يمكن.

وعادة ما تُعرف هذه بمسألة أصغر العظميات (minimax problem)، ولا تعالج بالطرائق الابتدائية.

وهناك طريقة أخرى لتحديد أحسن تقريب خطي. وهي التي تتطلب إيجاد القيمتين a_0 و a_1 اللتين تجعلان

$$E_1(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10} |y_i - (a_1x_i + a_0)|$$

أصغر ما يمكن.

إن هذا المقدار يُسمى الانحراف المطلق (absolute deviation) لإيجاد القيمة الصغرى لدالة في متغيرين. ونحتاج إلى إيجاد المشتقات الجزئية له، ونضع كلاًّ منهما مساويًا للصفر. ثم نحل المعادلتين الآتيتين الناتجتين.

في حالة الانحراف المطلق، نحتاج إلى إيجاد a_0 و a_1 بحيث

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1}\sum_{i=1}^{10}|y_i - (a_1x_i + a_0)| \quad \text{و} \quad 0 = \frac{\partial}{\partial a_0}\sum_{i=1}^{10}|y_i - (a_1x_i + a_0)|$$

وتكمن الصعوبة هنا في عدم قابلية دالة القيمة المطلقة للاشتقاق عند الصفر، ومن الممكن ألا نتمكن من إيجاد حل لهاتين المعادلتين.

إن طريقة المربعات الصغرى (least squares) لهذه المسألة تتطلب إيجاد أفضل خط للتقريب عندما يكون الخطأ مساويًا لمجموع مربعات الفروق بين قيم y المعطاة وقيم y على خط التقريب. ومن ثم يجب إيجاد الثابتين a_0 و a_1 اللذين يجعلان خطأ المربعات الصغرى

$$E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10}[y_i - (a_1x_i + a_0)]^2$$

أصغر ما يمكن.

إن طريقة المربعات الصغرى تعد الطريقة الفضلى لتحديد أفضل تقريبات خطية. بالإضافة إلى أن افتراضات مبرهنة تفضّل هذه الطريقة أيضًا.

إن طريقة أصغر العظميات عادة ما تعين وزنًا كبيرا جدًا، حيث لا تعطي طريقة لانحراف المطلق وزنًا كافيًا للنقطة التي تكون بعيدة جدًّا عن خط التقريب.

وإن طريقة المربعات الصغرى تعطي وزنًا أكبر للنقطة التي تكون خارج الخط مع البيانات الأخرى، ولكنها لا تسمح لتلك النقطة بأن تطغى على التقريب كليًا.

وهناك سبب آخر لاعتماد طريقة المربعات الصغرى، وهو دراسة التوزيع الإحصائي للخطأ. (انظر Lar, pp. 463–481)

إن المسألة العامة لطابقة أحسن خط مستقيم بطريقة المربعات الصغرى لمجموعة من البيانات $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{m}$ تتطلب تصغير الخطأ التام

$$E \equiv E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{m}[y_i - (a_1x_i + a_0)]^2$$

بالنسبة إلى الوسيطات (البرامترات) a_0 و a_1.

وللحصول على القيمة الصغرى، نحتاج إلى

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_0}\sum_{i=1}^{m}[(y_i - (a_1x_i - a_0)]^2 = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_1x_i - a_0)(-1)$$

و

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1}\sum_{i=1}^{m}[y_i - (a_1x_i + a_0)]^2 = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_1x_i - a_0)(-x_i)$$

ويمكن تبسيط هاتين المعادلتين للحصول على المعادلتين القانونيتين (normal equations)

$$a_0\sum_{i=1}^{m}x_i + a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^2 = \sum_{i=1}^{m}x_iy_i \quad \text{و} \quad a_0\cdot m + a_1\sum_{i=1}^{m}x_i = \sum_{i=1}^{m}y_i$$

إن كلمة Normal مستخدمة هنا تعني تعامد. ويمكن إيجاد معادلات متعددة عن طريق إيجاد اتجاهات متعددة [illegible] متعدد الأبعاد

إن حل هذا النظام من المعادلات هو

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m}x_i^2\sum_{i=1}^{m}y_i - \sum_{i=1}^{m}x_iy_i\sum_{i=1}^{m}x_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2} \tag{1.8}$$

و

$$a_1 = \frac{m\sum_{i=1}^{m}x_iy_i - \sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{i=1}^{m}y_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2} \tag{2.8}$$

مثال 1

لديك البيانات في جدول (1.8). ولإيجاد خط التقريب لهذه البيانات بطريقة المربعات الصغرى أكمل جدولاً. واجمع العمودين الثالث والرابع كما في جدول (2.8).

جدول 2.8

$P(x_i) = 1.538x_i - 0.360$	$x_i y_i$	x_i^2	y_i	x_i
1.18	1.3	1	1.3	1
2.72	7.0	4	3.5	2
4.25	12.6	9	4.2	3
5.79	20.0	16	5.0	4
7.33	35.0	25	7.0	5
8.87	52.8	36	8.8	6
10.41	70.7	49	10.1	7
11.94	100.0	64	12.5	8
13.48	117.0	81	13.0	9
15.02	156.0	100	15.6	10
$E_2 = \sum_{i=1}^{10}(y_i - P(x_i))^2 \approx 2.34$	572.4	385	81.0	55

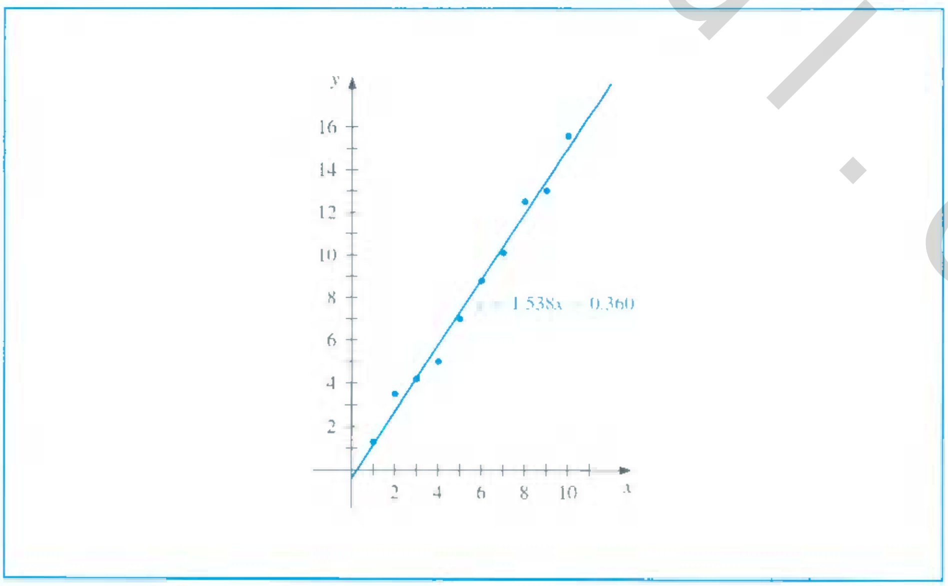
إن المعادلتين القانونيتين (1.8) و (2.8) تعطيان

$$a_1 = \frac{10(572.4) - 55(81)}{10(385) - (55)^2} = 1.538 \quad \text{و} \quad a_0 = \frac{385(81) - 55(572.4)}{10(385) - (55)^2} = -0.360$$

ولذلك $P(x) = 1.538x - 0.360$

إن رسم هذا الخط المستقيم ونقاط البيانات تظهر في شكل (3.8). ■

شكل 3.8



تُعرض القيم التقريبية المقابلة لنقاط البيانات التي نحصل عليها بطريقة المربعات الصغرى في جدول (2.8).

تعالج المسألة العامة لتقريب مجموعة من البيانات $\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$ في كثيرة حدود جبرية

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

من الرتبة $n < m - 1$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى بطريقة مماثلة نختار $a_0, a_1, \ldots, a_n$ لجعل خطأ المربعات الصغرى الآتية أصغر ما يمكن:

$$E_2 = \sum_{i=1}^{m}(y_i - P_n(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} P_n(x_i) y_i + \sum_{i=1}^{m}(P_n(x_i))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right) y_i + \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j\left(\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j\right) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}\right)$$

وكما هو الأمر في الحالة الخطية. لجعل E_2 أصغر ما يمكن يكون من الضروري وضع $\partial E_2/\partial a_j = 0$ لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ وهكذا. لكل j يكون

$$0 = \frac{\partial E_2}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}$$

إن هذا يعطي $n+1$ من المعادلات القانونية بمجاهيل a_j عددها $n+1$.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, n \tag{3.8}$$

ومن المفيد أن نكتب المعادلات كما يلي:

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^n = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n$$

يوجد لهذه المعادلات القانونية حلٌّ وحيد. إلا أن المجاهيل x_i متميزة ومختلفة بعضها عن بعض. (انظر تمرين 14).

جدول 3.8

i	x_i	y_i
1	0	1.0000
2	0.25	1.2840
3	0.50	1.6487
4	0.75	2.1170
5	1.00	2.7183

مثال 2 طبّق كثيرة الحدود المنفصلة من الرتبة الثانية على البيانات في جدول (3.8) باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

من الواضح في هذه المسألة أن $n = 2, m = 5$. والمعادلات القانونية الثلاث هي

$$5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 = 8.7680$$

$$2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 = 5.4514$$

$$1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 = 4.4015$$

ويمكننا أيضا حلُّ هذا النظام باستخدام CAS في Maple. فنعرِّف أولا المعادلات

```
>eq1:=5*a0+2.5*a1+1.875*a2=8.7680;
>eq2:=2.5*a0+1.875*a1+1.5625*a2=5.4514;
>eq3:=1.875*a0+1.5625*a1+1.3828*a2=4.4015;
```

لحلِّ هذا النظام، ندخل

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{a0,a1,a2});
```

الذي يعطي باستخدام Digits:=5

$$a_2 = 0.84316 \text{ و } a_1 = 0.86468\,,\ a_0 = 1.0051$$

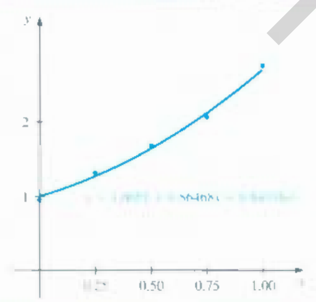
وهكذا فإن كثيرة الحدود من الرتبة 2 الناتجة بطريقة المربعات الصغرى المنطبقة على البيانات السابقة هي $P_2(x) = 1.0051 + 0.86468x + 0.84316x^2$ ويظهر رسمه البياني (منحناه) في شكل (4.8). إن القيم التقريبية المقابلة للقيم x_i تظهر في جدول (4.8).

إن الخطأ التام

$$E_2 = \sum_{i=1}^{5}(y_i - P(x_i))^2 = 2.74 \times 10^{-4}$$

هو أصغر ما يمكن الحصول عليه باستخدام كثيرة حدود من الرتبة 2 على الأكثر. ■

شكل 4.8



جدول 4.8

5	4	3	2	1	i
1.00	0.75	0.50	0.25	0	x_i
2.7183	2.1170	1.6487	1.2840	1.0000	y_i
2.7129	2.1279	1.6482	1.2740	1.0051	$P(x_i)$
0.0054	−0.0109	0.0004	0.0100	−0.0051	$y_i - P(x_i)$

ويوجد في Maple دالّة تسمى fit في مكتبة الإحصاء stats library لحساب التقريبات المنفصلة بطريقة المربعات الصغرى.

ويمكننا حساب التقريب في مثال (2) باستخدام Maple code (كود مابل) ومكتبة الإحصاء stats library بالأوامر

```
>with(stats)
>xvals:=[0,0.25,0.5,0.75,1];
>yvals:=[1,1.284,1.6487,2.117,2.7183];
>z:=fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^2 + b*x + c, {a,b,c}]]
        ([xvals,yvals]);
```

تعطي Maple تمهيدية

$$z := y = .8436571429x^2 + .8641828571x + 1.005137143.$$

وللحصول على التقريب $y(1.7)$، ندخل

```
>evalf(subs(x = 1.7,z))
```

لنحصل على $y = 4.912417143$

يكون من المناسب أحيانًا افتراض أن البيانات مرتبطة أسيًّا. إن هذا يتطلب أن تكون دالة التقريب على الصيغة

$$y = be^{ax} \tag{4.8}$$

أو

$$y = bx^a \tag{5.8}$$

للثابتين a و b.

إن الصعوبة في تطبيق طريقة المربعات الصغرى في أحوال هذا النوع تأتي من محاولة جعل الأخطاء الآتية أصغر ما يمكن:

$$E = \sum_{i=1}^{m}(y_i - be^{ax_i})^2$$ في حالة المعادلة (4.8)

أو

$$E = \sum_{i=1}^{m}(y_i - bx_i^a)^2$$ في حالة المعادلة (5.8)

إن المعادلات القانونية المرتبطة بهذه الطرائق نحصل عليها من

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - be^{ax_i})(-e^{ax_i}) \quad \text{و} \quad 0 = \frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - be^{ax_i})(-bx_ie^{ax_i})$$

في حالة المعادلة (4.8)

أو من المعادلتين

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - bx_i^a)(-x_i^a) \quad \text{و} \quad 0 = \frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - bx_i^a)(-b(\ln x_i)x_i^a)$$

في حالة المعادلة (5.8).

ولا يوجد حل صحيح لأي من هذين النظامين في a و b.

عندما يظن أن البيانات مرتبطة أسيًّا، فإن الطريقة الشائعة الاستخدام تكون باستخدام اللوغارتمات للمعادلة التقريبية

$\ln y = \ln b + ax$ في حالة المعادلة (4.8)

و $\ln y = \ln b + a \ln x$ في حالة المعادلة (5.8).

تظهر الآن مسألة خطية في كلا الحالتين، ويمكن الحصول على الحل لكل من $\ln b$ و a عن طريق تعديل المعادلتين القانونيتين (1.8) و (2.8) بصورة مناسبة.

على كل حال، فالتقريب الناتج عن هذه الطريقة ليس تقريبًا بطريقة المربعات الصغرى للمسألة الأصلية، وهو يختلف عن التقريب بطريقة المربعات الصغرى للمسألة الأصلية اختلافًا جذريًّا. ويشرح التطبيق في التمرين (13) مسألة من هذا النوع.

سيُرجع إلى هذا التطبيق في التمرين (14) من الفصل (3.10)، حيث يقرّب الحل الصحيح لمسألة المربعات الصغرى الأسيّة باستخدام طرائق ملائمة لحل أنظمة المعادلات غير الخطية.

مثال 3 لديك مجموعة البيانات في الأعمدة الثلاثة الأولى من اليسار في جدول (5.8).

جدول 5.8

i	x_i	y_i	$\ln y_i$	x_i^2	$x_i \ln y_i$
1	1.00	5.10	1.629	1.0000	1.629
2	1.25	5.79	1.756	1.5625	2.195
3	1.50	6.53	1.876	2.2500	2.814
4	1.75	7.45	2.008	3.0625	3.514
5	2.00	8.46	2.135	4.0000	4.270
	7.50		9.404	11.875	14.422

لو رسمنا x_i مع $\ln y_i$ لأظهرت البيانات علاقة خطية بينها، ولذلك فمن المعقول افتراض تقريب على الصيغة

$$\ln y = \ln b + ax \quad \text{أو} \quad y = be^{ax}$$

وباكمال جدول وجمع الأعمدة المناسبة، نحصل على البيانات المتبقية في جدول (5.8). باستخدام المعادلات القانونية (1.8) و (2.8) نحصل على

$$a = \frac{(5)(14.422) - (7.5)(9.404)}{(5)(11.875) - (7.5)^2} = 0.5056$$

و

$$\ln b = \frac{(11.875)(9.404) - (14.422)(7.5)}{(5)(11.875) - (7.5)^2} = 1.122$$

بما أن $b = e^{1.122} = 3.071$ فإن التقريب يأخذ الصيغة

$$y = 3.071e^{0.5056x}$$

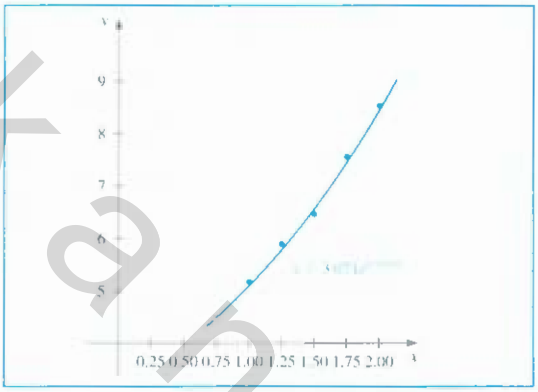
الذي يعطي القيم المقابلة لنقاط البيانات كما في جدول (6.8) ■

(انظر شكل 5.8)

جدول 6.8

$3.071e^{0.5056x_i}$	y_i	x_i	i
5.09	5.10	1.00	1
5.78	5.79	1.25	2
6.56	6.53	1.50	3
7.44	7.45	1.75	4
8.44	8.46	2.00	5

شكل 5.8



EXERCISE SET

مجموعة التمارين 1.8

1. احسب كثيرة حدود خطية ذات مربعات صغرى للبيانات في مثال (2).
2. احسب كثيرة الحدود من الرتبة 2 ذات المربعات الصغرى للبيانات في مثال (1). وقارن الخطأ التام لكلتا كثيرتي الحدود.
3. أوجد كثيرات الحدود ذات المربعات الصغرى ومن الدرجات 1، 2 و 3 للبينات في جدول الآتي:

2.1	1.9	1.5	1.3	1.1	1.0	x_i
3.18	2.94	2.45	2.21	1.96	1.84	y_i

احسب الخطأ في كل حالة. وارسم شكل انتشار البيانات كثيرات الحدود جميعها.

4. أوجد كثيرات الحدود ذات المربعات الصغرى من الدرجات 1، 2 و 3 للبيانات في جدول الآتي:

x_i	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
y_i	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	1.422

احسب الخطأ في كل حالة. وارسم شكل انتشار البيانات. وكثيرات الحدود.

5. لديك البيانات

x_i	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y_i	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

أ. أوجد كثيرة الحدود ذات المربعات الصغرى من الرتبة 1، واحسب الخطأ.

ب. أوجد كثيرة الحدود ذات المربعات الصغرى من الرتبة 2. واحسب الخطأ.

ج. أوجد كثيرة الحدود ذات المربعات الصغرى من الرتبة 3. واحسب الخطأ.

د. أوجد التقريب بالمربعات الصغرى على الصيغة be^{ax}. واحسب الخطأ.

هـ. أوجد التقريب بالمربعات الصغرى على الصيغة bx^a. واحسب الخطأ.

6. كرِّر التمرين 5 للبيانات الآتية:

x_i	0.2	0.3	0.6	0.9	1.1	1.3	1.4	1.6
y_i	0.050446	0.098426	0.33277	0.72660	1.0972	1.5697	1.8487	2.5015

7. وُصفت تجربة في المثال في مقدمة هذا الفصل. لتحديد ثابت النابض k في قانون هوك

$$F(l) = k(l - E)$$

الدالة F هي القوة اللازمة لمد النابض l من الوحدات. حيث إن الثابت $E = 5.3$ إنشات هو طول النابض قبل المد.

أ. افترض أن القياسات أخذت لطول النابض l إنشا، وفق الأوزان المستخدمة $F(l)$ باوند كما في جدول الآتي:

(l)F	2	4	6
1	7.0	9.4	12.3

أوجد تقريب المربعات الصغرى للثابت k.

ب. أخذت قياسات أخرى، وأُعطيت البيانات الإضافية

$F(l)$	3	5	8	10
l	8.3	11.3	14.4	15.9

احسب تقريب المربعات الصغرى الجديد للثابت k. أي من الإجابات في (أ) أو (ب) تعطي المطابقة الفضلى للبيانات الكلية للتجربة؟

8. تحتوي القائمة الآتية درجات الواجب ودرجات الامتحان النهائي لثلاثين طالبا من

التحليل العددي. أوجد معادلة الخط المستقيم بالمربعات الصغرى لهذه البيانات، واستخدم هذا الخط لإيجاد رتبة الواجب Homework اللازمة للتنبؤ بأقل رتبة. نحصل على الرتبة A (90%) والدرجة D (60%) في الامتحان النهائي Final.

الواجب المنزلي	النهائي	الواجب المنزلي	النهائي
302	45	323	83
325	72	337	99
285	54	337	70
339	54	304	62
334	79	319	66
322	65	234	51
331	99	337	53
279	63	351	100
316	65	339	67
347	99	343	83
343	83	314	42
290	74	344	79
326	76	185	59
233	57	340	75
254	45	316	45

9. يبين الجدول الآتي المعدل بالنقاط (Grade-point average) للتخصصين: الرياضيات والحاسوب مع علامات هؤلاء الطلبة لجزء الرياضيات من امتحان ACT (American College Testing) عندما كانوا في المدرسة الثانوية. ارسم شكل انتشار هذه البيانات. وأوجد معادلة خط المربعات الصغرى الذي ينطبق على البيانات.

نتيجة الاختبار الأمريكي للقبول الجامعي (ACT)	المعدل بالنقاط	نتيجة الاختبار الأمريكي للقبول الجامعي (ACT)	المعدل بالنقاط
28	3.84	29	3.75
25	3.21	28	3.65
28	3.23	27	3.87
27	3.63	29	3.75
28	3.75	21	1.66
33	3.20	28	3.12
28	3.41	28	2.96
29	3.38	26	2.92
23	3.53	30	3.10
27	2.03	24	2.81

10. البيانات الآتية قدّمت إلى لجنة عدم الثقة في مجلس النواب (Senate Antitrust Subcommittee) مؤشرات تفادي السيارات للحوادث بحسب نوع السيارة.
أوجد خط المربعات الصغرى الذي ينطبق على هذه البيانات أو يقرّبها. (إنه جدول يعطي النسبة المئوية لتورط السيارات في الحوادث التي كان أخطر نتائجها الوفاة أو الجروح البليغة).

النوع	متوسط الوزن	نسبة الحدوث
1. محلي عادي فخم	4800 lb	3.1
2. محلي عادي متوسط	3700 lb	4.0
3. محلي عادي اقتصادي	3400 lb	5.2
4. محلي صغير	2800 lb	6.4
5. أجنبي صغير	1900 lb	9.6

11. لتحديد العلاقة بين عدد السمك وعدد أنواعه، أُخذت عيّنات من Great Barrier Reef وطبّق P.Sale & R.Dybdahl [SD] كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى لمجموعة البيانات الآتية التي جُمعت على مدى سنتين. افترض أن x تمثّل عدد العينة وy تمثّل عدد الأنواع في العينة.

x	y	x	y	x	y
13	11	29	12	60	14
15	10	30	14	62	21
16	11	31	16	64	21
21	12	36	17	70	24
22	12	40	13	72	17
23	13	42	14	100	23
25	13	55	22	130	34

حدِّد كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى التي تنطبق على هذه البيانات.

12. لتحديد العلاقة الدالية بين معامل التخفيف attenuation coefficient والكثافة Thickness لعينة من سمك تاكونايت، طبّق V.P.Singh[Si] مجموعة من البيانات باستخدام كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى، وقد أخذت مجموعة البيانات الآتية من إحدى رسوم ذلك البحث. أوجد كثيرة حدود خطية بطريقة المربعات الصغرى المطابقة لهذه البيانات.

السمك بالسنتمتر(cm)	معامل الترقيق(dB/cm)
0.040	26.5
0.041	28.1
0.055	25.2
0.056	26.0
0.062	24.0
0.071	25.0
0.071	26.4
0.078	27.2
0.082	25.6
0.090	25.0
0.092	26.8
0.100	24.8
0.105	27.0
0.120	25.0
0.123	27.3
0.130	26.9
0.140	26.2

13. في بحث حول كفاءة استخدام يرقة العث من نوع موديست سفنكس (Pachysphinx modesta) للطاقة. استخدم L.Schroeder [Schr 1] شرويدر البيانات الآتية: W وزن اليرقة الحية بالجرام وR استهلاك اليرقة من الأكسجين بالمللتر/ الساعة لافتراضات بيولوجية. افترض وجود علاقة بين W و R على الصيغة $R = bW^a$.

أ. أوجد كثيرة الحدود اللوغارتمية بطريقة المربعات الصغرى باستخدام

$$\ln R = \ln b + a \ln W$$

ب. احسب الخطأ المرتبط بالتقريب في الفقرة (أ)

$$E_2 = \sum_{i=1}^{37} (R_i - bW_i^a)^2$$

ج. عدّل المعادلة اللوغارتمية بطريقة المربعات الصغرى بإضافة الحد التربيعي $c(\ln W_i)^2$، وأوجد كثيرة الحدود اللوغارتمية التربيعية بطريقة المربعات الصغرى.

د. حدّد معادلة الخطأ المرتبطة بالتقريب في الفقرة (جـ)، واحسب قيمته.

R	W	R	W	R	W	R	W	R	W
0.234	0.025	0.180	0.020	0.181	0.020	0.23	0.025	0.154	0.017
0.537	0.253	0.299	0.119	0.260	0.085	0.357	0.111	0.296	0.087
1.47	0.783	0.428	0.210	0.334	0.171	0.366	0.211	0.363	0.174
2.48	1.35	1.15	1.32	0.87	1.29	0.771	0.999	0.531	1.11
1.44	1.69	2.83	3.34	3.59	3.04	2.01	3.02	2.23	1.74
1.84	2.75	4.15	5.48	3.40	4.29	3.28	4.28	3.58	4.09
4.66	4.83			3.88	5.30	2.96	4.58	3.52	5.45
6.94	5.53					5.10	4.68	2.40	5.96

14. برهن أن المعادلات القانونية (3.8) الناتجة عن المربعات الصغرى المنفصـ تعطي مصفوفة متماثلة وغير منفردة، ومن ثم يوجد لها حل وحيد.

[إضاءة: ضع $A = (a_{ij})$ حيث $a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} x_k^{i+j-2}$ و $x_1, x_2, \ldots, x_m$ متميزة حيث $n < m - 1$ افترض أن A منفردة، وأن $c \neq 0$ بحيث $c^t A c = 0$. برهن أن كثيرة حدود من الرتبة n التي معاملاتها هي إحداثيات c لها أكثر من n من الجذور. واستخدم هذا البرهان لتحصل على تناقض]

2.8 كثيرات الحدود المتعامدة والتقريب بالمربعات الصغرى
Orthogonal Polynomials and Least Squares Approximation

لقد عالج الفصل السابق موضوع التقريب بالمربعات الصغرى لتطبيق مجموعة من البيانات. ومسألة التقريب الأخرى التي ذكرت في المقدمة تُعنى بتقريب الدّوال.

ليكن $f \in C[a, b]$ والمطلوب: إيجاد كثيرة حدود $P_n(x)$ من الرتبة n على الأكثر، بحيث يجعل الخطأ

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2\,dx$$

أصغر ما يمكن.

ولتحديد كثيرة الحدود التقريبية بطريقة المربعات الصغرى، أي كثيرة الحدود التي تجعل التعبير السابق أصغر ما يمكن.

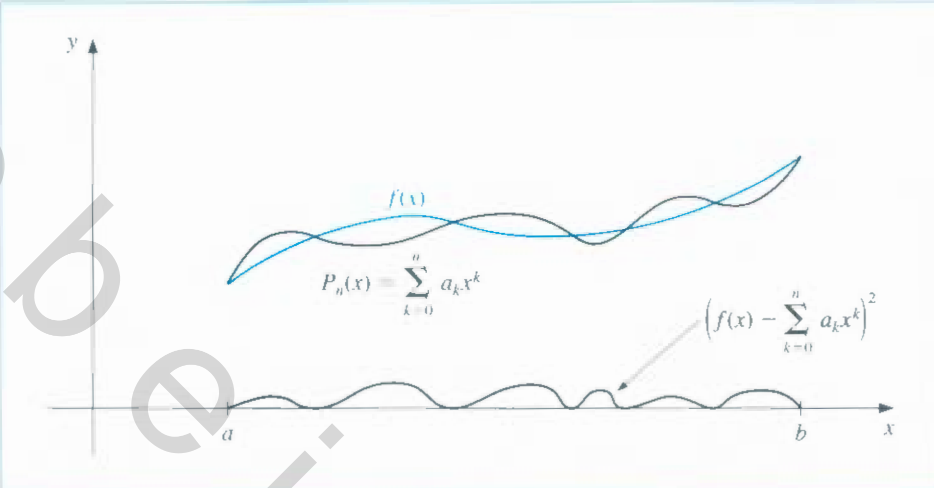
اجعل
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

وعرّف كما يتضح من شكل (6.8)

$$E \equiv E(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 dx$$

وإن المسألة تنحصر في إيجاد المعاملات الحقيقية $a_0, a_1, \ldots, a_n$ التي تجعل E أصغر ما يمكن. إن الشرط الضروري الخاص بالأعداد $a_0, a_1, \ldots, a_n$ لتجعل E أصغر ما يمكن هو

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{لكل} \quad j = 0, 1, \ldots, n$$



شكل 6.8

بما أن

$$E = \int_a^b [f(x)]^2\,dx - 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x)\,dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2 dx$$

فإننا نحصل على

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\int_a^b x^j f(x)\,dx + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}\,dx$$

ولنحصل على $P_n(x)$. يجب حلُّ $(n+1)$ من المعادلات القانونية لإيجاد $(n+1)$ من المجاهيل a_j

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}\,dx = \int_a^b x^j f(x)\,dx \quad \text{لكل } j = 0, 1, \ldots, n \tag{6.8}$$

تمتلك المعادلات القانونية حلًا وحيدًا دائمًا شرط أن تكون $f \in C[a, b]$. (انظر التمرين 15).

مثال 1 أوجد بطريقة المربعات الصغرى كثيرة الحدود من الرتبة الثانية التي تقرّب الدالة $f(x) = \sin \pi x$ على الفترة $[0,1]$.

إن المعادلات القانونية لكثيرة الحدود $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ هي

$$a_0 \int_0^1 1\,dx + a_1 \int_0^1 x\,dx + a_2 \int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 \sin \pi x\,dx$$

$$a_0 \int_0^1 x\,dx + a_1 \int_0^1 x^2\,dx + a_2 \int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 x \sin \pi x\,dx$$

$$a_0 \int_0^1 x^2\,dx + a_1 \int_0^1 x^3\,dx + a_2 \int_0^1 x^4\,dx = \int_0^1 x^2 \sin \pi x\,dx$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{\pi}, \quad \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{\pi}, \quad \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

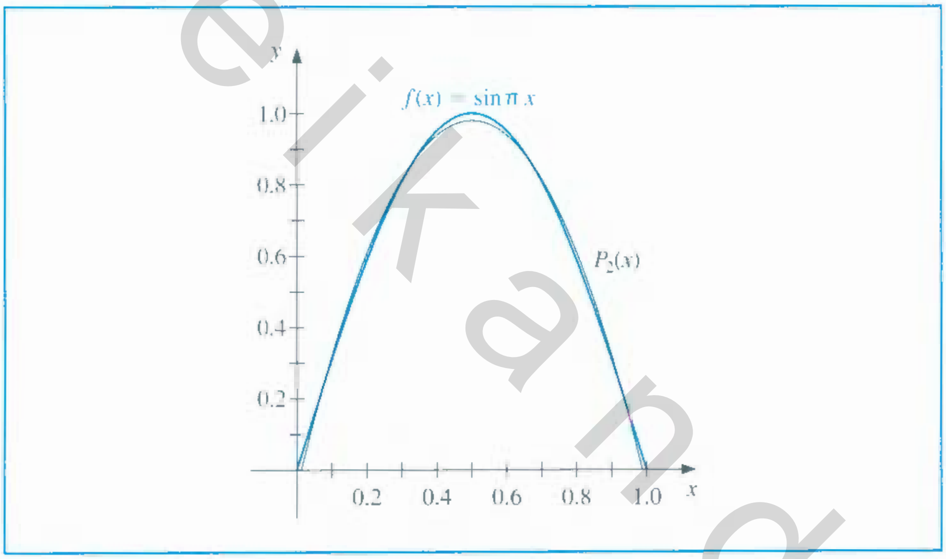
ويمكن حلّ المعادلات الثلاث هذه بمجاهيل ثلاثة لنحصل على

$$a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251 \text{ و } a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0.050465$$

ومن ثم فإن كثيرة الحدود من الرتبة الثانية لتقريب $f(x) = \sin \pi x$ على الفترة $[0, 1]$ هي

$$P_2(x) = -4.12251x^2 + 4.12251x - 0.050465$$ ■

(انظر شكل 7.8).



شكل 7.8

يظهر مثال (1) صعوبة في إيجاد كثيرة الحدود التقريبية بطريقة المربعات الصغرى. ويجب حل النظام الخطي $(n+1) \times (n+1)$ للمجاهيل $a_0, \ldots, a_n$. وإن معاملات النظام الخطي تكون على الصيغة

$$\int_a^b x^{j+k}\,dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

وهي عبارة عن نظام خطي ليس من السهل إيجاد حلٍّ عددي له.

إن المصفوفة في النظام الخطي تعرف بمصفوفة هلبرت Hilbert matrix التي هي مثل كلاسيكي لإظهار الصعوبات في أخطاء التدوير. (انظر التمرين (11) من الفصل 4.7)

وهناك سلبية أخرى تشبه تلك التي واجهتنا عند أول تقديم لكثيرة حدود لاكرانج في الفصل (1.3). فالحسابات التي أُجريت لإيجاد أفضل كثيرة حدود من الرتبة n، $P_n(x)$ لا تقلل من مقدار العمل اللازم للحصول على كثيرة حدود من الرتبة التي تلي n، أي $P_{n+1}(x)$.

سنناقش الآن طريقة مختلفة للحصول على التقريب بالمربعات الصغرى، ولقد ثبت أن هذه الطريقة أكثر كفاءة. وحالما حصلنا على $P_n(x)$، تتحدّد $P_{n+1}(x)$ بسهولة. وليتيسر البحث نحتاج إلى بعض المفاهيم الجديدة.

كان دافيد هلبرت David Hilbert (1862-1943) عالم رياضيات مشهور في بداية القرن العشرين، وإن ذكرى محاضرته شائعة على نحو كبير. أما الكونجرس العالمي للرياضيين في باريس عام 1900 فقد قدّم 23 مسألة شرح عن أهميتها، ووضعها أمام علماء الرياضيات لحلها.

تعريف 1.8 تكون مجموعة الدّوال $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ مستقلة خطيًا linearly independent على $[a, b]$ إذا كان الحل الوحيد للمعادلة $c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$ $.c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$

وإذا لم يكن الأمر كذلك فإن مجموعة الدّوال تكون مرتبطة خطيًا (linearly dependent).

■

مبرهنة 2.8 إذا كانت $\phi_j(x)$ كثيرة حدود من الرتبة لكل $j = 0, 1, \ldots, n$ فإن $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ مستقلة خطيًا على أي فترة $[a, b]$. ■

البرهان افترض أن $c_0, \ldots, c_n$ أعداد حقيقية بحيث

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0$$

لـ $x \in [a, b]$ جميعها

إن كثيرة الحدود $P(x)$ تتلاشى، وتكون قيمتها صفرًا على $[a, b]$. إذن يجب أن تكون كثيرة حدود صفرية، وتكون معاملات قوى x جميعها أصفارًا. ويكون معامل x^n خصوصًا صفرًا. وبما أن $c_n\phi_n(x)$ هو الحد الوحيد الذي يحوي x^n في $P(x)$ جميعها، لذا يجب أن يكون $c_n = 0$، وإن

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j\phi_j(x)$$

في هذه الصيغة لكثيرة الحدود $P(x)$ يكون $c_{n-1}\phi_{n-1}(x)$ هو الحد الوحيد الذي يحوي x^{n-1}،

ولذلك فإن $c_{n-1} = 0$ ويكون $P(x)$ على الصيغة

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-2} c_j\phi_j(x)$$

وبطريقة مماثلة فإن الثوابت المتبقية $c_{n-2}, c_{n-3}, \ldots, c_1, c_0$ كلها تكون أصفارًا، لذا تكون المجموعة $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ مستقلة خطيًا. ■ ■ ■

مثال 2 ليكن $\phi_0(x) = 2, \phi_1(x) = x - 3$ و$\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$. من مبرهنة (2.8) فإن $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ مستقلة خطيًا على أي فترة $[a, b]$.

افترض أن $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ سنبرهن وجود ثوابت c_0, c_1 و c_2 بحيث يكون

$$Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$$

انظر أولًا

$$1 = \tfrac{1}{2}\phi_0(x), \quad x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \tfrac{3}{2}\phi_0(x)$$

و

$$\begin{aligned} x^2 &= \phi_2(x) - 2x - 7 = \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \tfrac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\tfrac{1}{2}\phi_0(x)\right] \\ &= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \tfrac{13}{2}\phi_0(x) \end{aligned}$$

لذلك

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0\left[\tfrac{1}{2}\phi_0(x)\right] + a_1\left[\phi_1(x) + \tfrac{3}{2}\phi_0(x)\right] + a_2\left[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \tfrac{13}{2}\phi_0(x)\right] \\ &= \left(\tfrac{1}{2}a_0 + \tfrac{3}{2}a_1 - \tfrac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) + [a_1 - 2a_2]\,\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) \end{aligned}$$

ولذلك فإن أي كثيرة حدود تربيعية يمكن التعبير عنها بتركيب خطي من $\phi_0(x)$، $\phi_1(x)$ و$\phi_2(x)$.