ويمكننا إيجاد هذه المعلومة من خلال افتراض معايير المصفوفة A ومعكوسها.

مبرهنة 27.7 افترض أن $\tilde{x}$ هو تقريب لحل $Ax = b$. A مصفوفة غير مفردة و r هو متجه البواقي إلى $\tilde{x}$. ومن ثم فإنه لأي معيار طبيعي ينتج $\|x - \tilde{x}\| \leq \|r\| \cdot \|A^{-1}\|$. وإذا كان $x \neq 0$ و $b \neq 0$ فإن

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|} \tag{19.7}$$

■

البرهان بما أن $r = b - A\tilde{x} = Ax - A\tilde{x}$ و A غير مفردة، فإن $x - \tilde{x} = A^{-1}r$. تؤدي المبرهنة (11.7) في الفصل (1.7) إلى أن $\|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\|$.

والأكثر من ذلك، بما أن $b = Ax$. يكون لدينا $\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. ولذلك فإن $1/\|x\| \leq \|A\|/\|b\|$

و

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{\|b\|} \|r\|$$

■ ■ ■

تؤدي المتباينات في المبرهنة (27.7) إلى أن $\|A^{-1}\|$ و $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ توفران مؤشرًا للربط بين متجه البواقي ودقة التقريب. وإن الخطأ النسبي $\|x - \tilde{x}\|/\|x\|$ ذو أهمية كبيرة عمومًا. ومن خلال المتباينة (19.7) يكون هذا الخطأ منتهيًا بمقدار ضرب $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ في الخطأ النسبي لهذا التقريب $\|r\|/\|b\|$. ويمكن استخدام أي معيار مناسب لهذا التقريب. وإن المتطلب الوحيد هو استخدامه حتى النهاية باستمرار.

مبرهنة 28.7 العدد الشرطي للمصفوفة غير المفردة A بالنسبة إلى معيار ما $\|\cdot\|$ هو

$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

■

وباستخدام هذا الترميز. فإن المتباينات في المبرهنة (27.7) تصبح

$$\|x - \tilde{x}\| \leq K(A) \frac{\|r\|}{\|A\|} \quad \text{و} \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

ولأي مصفوفة غير مفردة A ومعيار طبيعي $\|\cdot\|$، فإن

$$1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = K(A)$$

المصفوفة A جيدة الاشتراط well-conditioned إذا كانت $K(A)$ قريبة من الواحد. وتكون معلولة الاشتراط عندما تزيد $K(A)$ على الواحد معنويًا. ووفقًا لذلك، يشير الاشتراط في هذا الموضوع إلى الاطمئنان نسبيًا بأن متجه بواقٍ صغيرًا يؤدي إلى حل تقريبي دقيق.

مثال 2 مصفوفة النظام المعتمد في مثال (1) كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$$

التي لها $\|A\|_\infty = 3.0001$. وهنا المعيار لا يعد كبيرا. وعلى أي حال

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 5000.5 & -5000 \end{bmatrix} \text{ ومن ثم } \|A^{-1}\|_\infty = 20000$$

وإن $K(A) = (20000)(3.0001) = 60002$ بالنسبة إلى معيار غير محدود. وإن حجم العدد الشرطي لهذا مثال يجب أن يبعدنا عن اتخاذ قرارات متسرعة مبنية على باقي التقريب بالتأكيد.

■

يمكن حساب العدد الشرطي K_∞ في مابل Maple كما يلي:

```
>with(LinearAlgebra);
>A := Matrix([[1,2],[1.0001,2]]);
>ConditionNumber(A);
```

$$60002.00000$$

وعلى الرغم من أن العدد الشرطي لمصفوفة ما يعتمد كليًّا على معايير المصفوفة ومعكوسها فإنه عند التطبيق يكون حساب المعكوس مرتبطا بخطأ تقريب ومعتمدًا على الدقة التي تُجرى الحسابات وفقًا لها. وإذا كانت العمليات تتضمن حسابات مع دقة ذات t من الخانات، فإن تقريب العدد الشرطي للمصفوفة A هو معيار المصفوفة مضروبًا في معيار التقريب لمعكوسها، الذي وُجد باستخدام حسابات ذات t من الخانات. ويعتمد هذا العدد الشرطي في الحقيقة على الطريقة المستخدمة لحساب معكوس A أيضا.

فإذا افترضنا أن الحلَّ التقريبي للنظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يتحدَّد باستخدام حسابات ذات t من الخانات وتقليص جاوس. فمن الممكن إثبات (انظر [FM.pp. 45–47]) أن متجه البواقي $\mathbf{r}$ للتقريب $\tilde{\mathbf{x}}$ يكون له

$$\|\mathbf{r}\| \approx 10^{-t}\|A\| \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}\| \qquad (20.7)$$

ويمكن من هذا التقريب إيجاد تقدير للعدد الشرطي الفاعل ضمن حسابات ذات t من الخانات، ودون الحاجة إلى عكس المصفوفة A. وفي الواقع يفترض هذا التقريب كون العمليات الحسابية جميعها في أسلوب تقليص جاوس منفذة باستخدام حساب t من الخانات. ولكن العمليات التي نحن بحاجة إليها لتحديد الباقي تنفذ بدقة مضاعفة. (أي حساب $2t$ من الخانات). ولا يضيف هذا الأسلوب جهدا حسابيًّا إضافيًّا. ويتقلص الكثير من فاقد الدقة المحسوبة مع خصم ما يقارب الأعداد نفسها التي تظهر في حساب الباقي.

التقريب إلى العدد الشرطي $K(A)$ ذي t من الخانات يأتي من افتراض النظام لخطي

$$A\mathbf{y} = \mathbf{r}$$

ويمكن تقريب حلِّ هذا النظام مباشرة؛ لأن عوامل الضرب لطريقة تقليص جاوس قد حُسبت. وفي الحقيقة $\tilde{\mathbf{y}}$ إن الحل التقريبي إلى $A\mathbf{y} = \mathbf{r}$ يحقق

$$\tilde{\mathbf{y}} \approx A^{-1}\mathbf{r} = A^{-1}(\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}) = A^{-1}\mathbf{b} - A^{-1}A\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}; \qquad (21.7)$$

و

$$x \approx \tilde{x} + \tilde{y}$$

ولذلك فإن $\tilde{y}$ هو تقدير للخطأ الناتج عندما يقرب $\tilde{x}$ الحل x للنظام الأصلي. وتؤدي المعادلتان (20.7) و (21.7) إلى

$$\|\tilde{y}\| \approx \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|r\| \approx \|A^{-1}\| \left(10^{-t}\|A\| \cdot \|\tilde{x}\|\right) = 10^{-t}\|\tilde{x}\| K(A)$$

إن هذا يعطي تقريبًا للعدد الشرطي المصاحب لحلّ النظام $Ax = b$ باستخدام تقليص جاوس وحساب نوع t من الخانات الذي يوضح توًّا

$$K(A) \approx \frac{\|\tilde{y}\|}{\|\tilde{x}\|} 10^{t} \tag{22.7}$$

مثال 3 النظام الخطي الآتي:

$$\begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{bmatrix}$$

له حلٌّ منتهٍ $x = (1, 1, 1)^t$.

يؤدي استخدام تقليص جاوس وحساب تدوير من 5 خانات بشكل متتال إلى الحصول على المصفوفات المزيدة الآتية:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3.3330 & 15920 & -10.333 & 15913 \\ 0 & -10596 & 16.501 & 10580 \\ 0 & -7451.4 & 6.5250 & -7444.9 \end{array}\right]$$

و

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3.3330 & 15920 & -10.333 & 15913 \\ 0 & -10596 & 16.501 & -10580 \\ 0 & 0 & -5.0790 & -4.7000 \end{array}\right]$$

إن الحلّ التقريبي لهذا النظام هو

$$\tilde{x} = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t.$$

إن متجه البواقي المقترن مع $\tilde{x}$ يُحسب بدقة مضاعفة ليكون

$$\begin{aligned} r &= b - A\tilde{x} \\ &= \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4254 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15913.00518 \\ 28.26987086 \\ 8.611560367 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00518 \\ 0.27412914 \\ -0.186160367 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ولذلك فإن

$$\|r\|_\infty = 0.27413$$

إن تقدير العدد الشرطي والمعطى في المناقشة السابقة يوجد من خلال حلّ النظام $Ay = r$ أولًا

لـ $\tilde{y}$

$$\begin{bmatrix} 3.3330 & 15920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00518 \\ 0.27413 \\ -0.18616 \end{bmatrix}$$

وهذا يؤدي إلى أن $\tilde{y} = (-0.20008, 8.9987 \times 10^{-5}, 0.074607)^t$. واستحداء التقدير في المعادلة (22.7) يعطي

$$K(A) \approx 10^5 \frac{\|\tilde{y}\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty} = \frac{10^5(0.20008)}{1.2001} = 16672 \qquad (23.7)$$

ولتحديد العدد الشرطي الصحيح لـ A، يجب علينا أولاً إنشاء A^{-1}. وباستخدام حساب تدوير من 5 خانات للحسابات نحصل على التقريب

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1.1701 \times 10^{-4} & -1.4983 \times 10^{-1} & 8.5416 \times 10^{-1} \\ 6.2782 \times 10^{-5} & 1.2124 \times 10^{-4} & -3.0662 \times 10^{-4} \\ -8.6631 \times 10^{-5} & 1.3846 \times 10^{-1} & -1.9689 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

تؤدي المبرهنة (11.7) إلى $\|A^{-1}\|_\infty = 1.0041$ و $\|A\|_\infty = 15934$.

وإنشاءً على ذلك. فإن المصفوفة المعلولة الاشتراط A يكون لها

$$K(A) = (1.0041)(15934) = 15999$$

والتقدير في المعادلة (23.7) متقارب إلى حدٍّ ما مع $K(A)$. ويتطلب مجهودًا حسابيًا أقل كثيرًا. ولما كان الحل الحقيقي $x = (1, 1, 1)^t$ لهذا النظام معروفًا. فباستطاعتنا حساب كل من

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty = 0.2001 \quad \text{و} \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{0.2001}{1} = 0.2001$$

حدود الخطأ المعطى في المبرهنة (27.7) لهذه القيم هي

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \le K(A) \frac{\|r\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{(15999)(0.27413)}{15934} = 0.27525$$

و

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le K(A) \frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{(15999)(0.27413)}{15913} = 0.27561$$

■

استخدمنا في المعادلة (21.7) التقدير $\tilde{y} \approx x - \tilde{x}$، حيث إن $\tilde{y}$ هو الحلُّ التقريبي للنظام $Ay = r$. وعمومًا فإن $\tilde{x} + \tilde{y}$ هو تقريب أدقُّ لحلّ النظام الخطي $Ax = b$ مقارنة بالتقريب الأصلي $\tilde{x}$. وتسمى الطريقة التي تستخدم هذا الافتراض التنقية المعادة أو التطوير المعاد، وتتضمن تنفذ تكرارات على النظام الذي يكون طرفه الأيمن متجه البواقي لتقريبات متتالية إلى أن نحصل على دقة مقبولة. فإذا طبِّقت العملية باستخدام حساب من t من الخانات، وإذا كان $K_\infty(A) \approx 10^q$ فإنه بعد k من تكرارات التنقية المعادة يكون للحل تقريب أصغر بين t و $k(t-q)$ من الخانات الصحيحة فإذا كان النظام جيد الاشتراط فإن تكرار واحدة أو اثنتين ستشير إلى أن الحل دقيق. وهناك احتمال لتحسين معنوي على الأنظمة معلولة الاشتراط ما لم تكن المصفوفة A معلولة الاشتراط

لرتبة أن $K_\infty(A) > 10^t$. ويجب في تلك الحالة استخدام الدقة العالية بالحسابات. تعرض الخوارزمية (4.7) أسلوب التنقية المعادة.

ALGORITHM
الخوارزمية
4.7

التنقية الإرجاعية Iterative Refinement

لتقريب حلِّ النظام الخطي $Ax = b$:

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n، العناصر a_{ij}، $1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر b_i، $1 \le i \le n$ لـ b. وأكبر عدد من التكرار N، حد السماح TOL. عدد خانات الدقة t.

المخرجات: الحل التقريبي $xx = (xx_i, \ldots, xx_n)^t$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار تم تجاوزه. وتقريب $COND$ إلى $K_\infty(A)$.

الخطوة	المضمون
0	حلّ النظام $Ax = b$ لـ $x_1, \ldots, x_n$ بطريقة تقليص جاوس وحفظ عوامل الضرب m_{ji}، $j = i+1, i+2, \ldots, n$، $i = 1, 2, \ldots, n-1$ وملاحظة تبديلات الصفوف.
1	ضع $k = 1$.
2	ما دام $(k \le N)$ فطبق الخطوات 3 − 9.
3	عند $i = 1, 2, \ldots, n$ (احسب r) ضع $r_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ (نفِّذ الحسابات بعملية مضاعف الدقة).
4	حلّ النظام $Ay = r$ لـ $y_1, \ldots, y_n$ بطريقة تقليص جاوس وبنفس الترتيب كما في الخطوة 0
5	لكل $i = 1, \ldots, n$ ضع $xx_i = x_i + y_i$.
6	إذا كان $k = 1$ فضع $COND = \frac{\\|y\\|_\infty}{\\|xx\\|_\infty} 10^t$
7	إذا كان $\\|x - xx\\|_\infty < TOL$ فإن المخرجات (xx). المخرجات $(COND)$. (العملية كانت ناجحة). توقف.
8	ضع $k = k + 1$.
9	عند $i = 1, \ldots, n$، ضع $x_i = xx_i$.
10	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). المخرجات $(COND)$ (العملية كانت ناجحة). توقف.

إذا استُخدم حساب ذو t من الخانات فإن عملية التوقف المقترحة في الخطوة (7) تكون لاستمرار التكرار إلى أن يكون $|y_i^{(k)}| \le 10^{-t}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

مثال 4 وجدنا في مثال (3) تقريب المسألة التي تناولناها مستخدمين حسابًا من 5 خانات وتقليص جاوس ليكون

$$\tilde{x}^{(1)} = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t$$

وإن حلّ $A\mathrm{y} = \mathrm{r}^{(1)}$ هو

$$\tilde{y}^{(1)} = (-0.20008, 8.9987 \times 10^{-5}, 0.074607)^t$$

ومن خلال الخطوة (5) في هذه الخوارزمية يكون

$$\tilde{x}^{(2)} = \tilde{x}^{(1)} + \tilde{y}^{(1)} = (1.0000, 1.0000, 0.99999)^t$$

وإن الخطأ الحقيقي في هذا التقريب هو

$$\|\mathrm{x} - \tilde{x}^{(2)}\|_\infty = 1 \times 10^{-5}.$$

مستخدمين أسلوب التوقف المقترح للخوارزمية، نحسب $\mathrm{r}^{(2)} = \mathrm{b} - A\tilde{x}^{(2)}$ ونحلّ النظام $A\mathrm{y}^{(2)} = \mathrm{r}^{(2)}$ الذي يعطي

$$\tilde{y}^{(2)} = (1.5002 \times 10^{-9}, 2.0951 \times 10^{-10}, 1.0000 \times 10^{-5})^t$$

وحيث $\|\tilde{y}^{(2)}\|_\infty \le 10^{-5}$ نستنتج بأن

$$\tilde{x}^{(3)} = \tilde{x}^{(2)} + \tilde{y}^{(2)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000)^t$$

صحيح ودقيق بما يكفي. ■

وقد افترضنا في هذا الفصل إمكانية تمثيل A و b في النظام الخطي $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ بالضبط. وفي الحقيقة إن العناصر a_{ij} و b_j ستُبدَل أو تشوّش بالمقدارين δa_{ij} و δb_j مسببين حلًا للنظام الخطي $(A + \delta A)\mathrm{x} = \mathrm{b} + \delta\mathrm{b}$ بدلًا من $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. ومن الطبيعي أنه إذا كانت $\|\delta A\|$ و $\|\delta\mathrm{b}\|$ صغيرتين (على الترتيب 10^{-t}). فإن حسابًا ذا t من الخانات سيعطي حلًا $\tilde{x}$، حيث إن $\|\mathrm{x} - \tilde{x}\|$ صغيرة في المقابل.

على أي حال فقد لاحظنا في حالة الأنظمة معلولة الاشتراط أنه حتى و مُثّلت A و b تمثيلًا صحيحًا. فإن أخطاء تقريب يمكن أن تتسبب في كون $\|\mathrm{x} - \tilde{x}\|$ كبيرًا وتنسب المبرهنة التالية تشويشات الأنظمة الخطية إلى العدد الشرطي للمصفوفة. ويمكن إيجاد برهان هذه النتيجة في [Or2, p. 33].

مبرهنة 29.7 لتكن A ليست مفردة، وليكن

$$\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

عندئذ، إن الحلَّ $\tilde{x}$ لـ $(A + \delta A)\tilde{x} = b + \delta b$ يقرب الحل x لـ $Ax = b$ مع تقدير للخطأ

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \le \frac{K(A)\|A\|}{\|A\| - K(A)\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right) \qquad (24.7)$$

■

كان جيمس هاردي ولكنسون (1919 - 1986) James Hardy Wilkinson معروفاً بعمله الواسع في الطرائق العددية لحلّ نظم المعادلات الخطية ومسائل القيم المميزة وقد طور أيضاً أسلوب الجبر لخطي العددي لتحليل الخطأ الإرجاعي

والتقدير في المتباينة (24.7) ينص على أنه إذا كانت المصفوفة A جيدة الاشتراط (بمعنى أن $K(A)$ ليست كبيرة جداً) فإن تغييرات صغيرة في A و b تنتج في المقابل تغييرات صغيرة في الحل x. ومن ناحيةٍ أخرى إذا كانت المصفوفة A معلولة الاشتراط فإن تغييرات صغيرة في A و b قد تنتج تغييرات كبيرة في x.

المبرهنة مستقلة عن العملية العددية المنتهية التي استخدمت في حلِّ $Ax = b$. ويمكن من خلال وسائل تحليل الخطأ الإرجاعي (انظر [Wil1] أو [Wil2]) إثبات أنه إذا استُخدم تقليص جاوس مع تمحور لحل $Ax = b$ في حساب t من الخانات فإن الحلَّ العددي $\tilde{x}$ هو الحلُّ الحقيقي للنظام الخطي

$$(A + \delta A)\tilde{x} = b \quad \text{عندما} \quad \|\delta A\|_\infty \le f(n)10^{1-t}\max_{i,j,k}|a_{ij}^{(k)}|$$

وجد ولكنسون عند التطبيق أن $f(n) \approx n$، وفي أسوأ الأحوال $f(n) \le 1.01(n^3 + 3n^2)$.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 4.7

1. احسب الأعداد الشرطية للمصفوفات الآتية بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$:

أ. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1.003 & 58.09 \\ 5.550 & 321.8 \end{bmatrix}$

2. احسب الأعداد الشرطية للمصفوفات الآتية بالنسبة إلى $\|\cdot\|_\infty$:

أ. $\begin{bmatrix} 0.03 & 58.9 \\ 5.31 & -6.10 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 58.9 & 0.03 \\ -6.10 & 5.31 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 0.04 & 0.01 & -0.01 \\ 0.2 & 0.5 & -0.2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

3. للأنظمة الخطية الآتية $Ax = b$ حلٌّ حقيقي x وحلّ تقريبي $\tilde{x}$. مستخدماً نتائج التمرين (1) احسب:

$\|x - \tilde{x}\|_\infty$ و $K_\infty(A)\dfrac{\|b - A\tilde{x}\|_\infty}{\|A\|_\infty}$

أ.
$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 = \tfrac{1}{63}$$
$$\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 = \tfrac{1}{168}$$
$$x = \left(\tfrac{1}{7}, -\tfrac{1}{6}\right)^t$$
$$\tilde{x} = (0.142, -0.166)^t$$

ب.
$$3.9x_1 + 1.6x_2 = 5.5$$
$$6.8x_1 + 2.9x_2 = 9.7$$
$$x = (1, 1)^t$$
$$\tilde{x} = (0.98, 1.1)^t$$

ج.
$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$1.0001x_1 + 2x_2 = 3.0001$$
$$\mathbf{x} = (1, 1)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.96, 1.02)^t$$

د.
$$1.003x_1 + 58.09x_2 = 68.12$$
$$5.550x_1 + 321.8x_2 = 377.3$$
$$\mathbf{x} = (10, 1)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-10, 1)^t$$

4. للأنظمة الخطية الآتية $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ حلّ حقيقي $\mathbf{x}$ وحلّ تقريبي $\tilde{\mathbf{x}}$، مستخدمًا نتائج التمرين (2) احسب:

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty \quad \text{و} \quad K_\infty(A)\frac{\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|A\|_\infty}$$

أ.
$$58.9x_1 + 0.03x_2 = 59.2$$
$$-6.10x_1 + 5.31x_2 = 47.0$$
$$\mathbf{x} = (1, 10)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (1.02, 9.98)^t$$

ب.
$$0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2$$
$$5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0$$
$$\mathbf{x} = (10, 1)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (30.0, 0.990)^t$$

ج.
$$0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.06$$
$$0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 0.3$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$$
$$\mathbf{x} = (1.827586, 0.6551724, 1.965517)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (1.8, 0.64, 1.9)^t$$

د.
$$x_1 - x_2 - x_3 = 2\pi$$
$$x_2 - x_3 = 0$$
$$-x_3 = \pi$$
$$\mathbf{x} = (0, -\pi, -\pi)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.1, -3.15, -3.14)^t$$

5. (i) أولًا: استخدم تقليص جاوس وحساب تدوير من 3 خانات لتقريب حلول الأنظمة الخطية الآتية، (ii) ثم استخدم تكرار واحدة من التنقية المعادة لتحسين التقريب، وقارن التقريبات بالحلول الحقيقية:

أ.
$$0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2$$
$$5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0$$
الحل الحقيقي $(10, 1)^t$

ب.
$$3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 = 7953$$
$$2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 0.965$$
$$-1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 = 2.714$$
الحل الحقيقي $(1, 0.5, -1)^t$

ج.
$$1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + x_4 = 1.12$$
$$14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - x_4 = 3.44$$
$$100x_2 - 99.9x_3 + x_4 = 2.15$$
$$15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - x_4 = 4.16$$
الحل الحقيقي $(0.17682530, 0.01269269, -0.02065405, -1.18260870)^t$

د.
$$\pi x_1 - ex_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 = \sqrt{11}$$
$$\pi^2 x_1 + ex_2 - e^2 x_3 + \tfrac{3}{7}x_4 = 0$$
$$\sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_4 = \pi$$
$$\pi^3 x_1 + e^2 x_2 - \sqrt{7}x_3 + \tfrac{1}{9}x_4 = \sqrt{2}$$
الحل الحقيقي $(0.78839378, -3.12541367, 0.16759660, 4.55700252)^t$

6. كرر التمرين (5) مستخدمًا حساب تدوير من 4 خانات.

7. النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

له حل $(1, 1)^t$. غيّر A قليلاً إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}$$

وافترض النظام الخطي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

احسب الحلّ الجديد مستخدمًا حساب تدوير من 5 خانات، وقارن الخطأ الحقيقي بالتقدير (24.7). هل A معلولة الاشتراط؟

8. النظام الخطي $Ax = b$ المعطى من خلال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.00001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.00001 \end{bmatrix}$$

له حلّ $(1, 1)^t$. استخدم حساب تدوير من 7 خانات لإيجاد حلّ النظام المشوش

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.000011 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.00001 \\ 3.00003 \end{bmatrix}$$

وقارن الخطأ الحقيقي بالتقدير (24.7). هل A معلولة الاشتراط؟

9. أثبت أنه إذا كانت B مفردة فإن

$$\frac{1}{K(A)} \le \frac{\|A - B\|}{\|A\|}$$

[تلميح: ينبغي وجود متجه مع $\|x\| = 1$، بحيث $Bx = 0$. اشتق التقدير مستخدمًا $\|Ax\| \ge \|x\|/\|A^{-1}\|$.]

10. مستخدمًا التمرين (9)، قدِّر الأرقام الشرطية للمصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix}$

11. إن مصفوفة هلبرت $n \times n$ *Hilbert matrix* $H^{(n)}$ تعرف من خلال

$$H_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i + j - 1}, \quad 1 \le i, j \le n$$

هي مصفوفة معلولة الاشتراط تظهر عند حلّ المعادلات الطبيعية لمعاملات كثيرة حدود المربعات الصغرى. (انظر مثال (1) في الفصل 2.8)

أ. أثبت أن

$$[H^{(4)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}$$

واحسب $K_\infty(H^{(4)})$.

ب. أثبت أن

$$[H^{(5)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600 \\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{bmatrix}$$