أ. $\|A\|_2 = [\rho(A^t A)]^{1/2}$

ب. $\rho(A) \leq \|A\|$، لأي معيار طبيعي $\|\cdot\|$. ■

البرهان إن برهان الفقرة (أ) يتطلب معلومات تتعلق بالقيم المميزة أكثر مما هو متوفر لدينا حاليًا. أما التفصيلات المتعلقة بالبرهان فانظر [Or2, p. 21].

ولبرهنة الفقرة (ب)؛ افترض λ قيمة مميزة لـ A مع متجه مميز $\mathbf{x}$، وأن $\|\mathbf{x}\| = 1$. (يضمن التمرين (10) وجود مثل هذا المتجه المبين). وبما أن $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ فإن

$$|\lambda| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| = \|A\|$$

ومن ثم فإن

$$\rho(A) = \max |\lambda| \leq \|A\|$$ ■ ■ ■

إن الفقرة (أ) من المبرهنة (15.7) تؤدي إلى أنه إذا كان A متماثلًا، فإن $\|A\|_2 = \rho(A)$. (انظر التمرين 14).

ثمة نتيجة مهمة ومفيدة مماثلة للفقرة (ب) من المبرهنة (15.7)، وهي أنه لأي مصفوفة A وأي $\varepsilon > 0$، يوجد معيار طبيعي $\|\cdot\|$ في الخاصية $\rho(A) < \|A\| < \rho(A) + \varepsilon$. ونتيجة لذلك فإن $\rho(A)$ هي أعظم حدٍّ سفلي للمعايير الطبيعية على A. وإن برهان هذه النتيجة يمكن إيجاده في [Or2, p. 23].

مثال 3 إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ولحساب $\rho(A^t A)$، نحتاج إلى القيم المميزة لـ $A^t A$. وإذا كان

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A^t A - \lambda I) \\ &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 42\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 42) \end{aligned}$$

فإن

$$\lambda = 7 \pm \sqrt{7} \text{ أو } \lambda = 0$$

ومن ثم

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} = \sqrt{\max\{0, 7-\sqrt{7}, 7+\sqrt{7}\}} = \sqrt{7+\sqrt{7}} \approx 3.106$$ ■

ويمكن تطبيق العمليات في مثال (2) أيضًا باستخدام مكتبة LinearAlgebra في Maple مع

```
>with(LinearAlgebra);
>A:=Matrix([[1,1,0],[1,2,1],[-1,1,2]]);
>B:=Transpose(A);
>C:=A.B;
>evalf(Eigenvalues(C));
```

التي تعطي المتجه

$$[0.109767846510^{-8}, 4.354248690, 9.645751311]^t$$

ولأن $\sqrt{\rho(C)} = \sqrt{\rho(A^tA)} = \|A\|_2$. يكون لدينا

$$\|A\|_2 = \sqrt{9.645751311} = 3.105760987$$

وكذلك تحسب مابل Maple هذه القيمة مباشرةً بالأمر

```
>evalf(Norm(A,2));
```

ولتحديد المعيار l_∞ لـ A، استبدل الأمر الأخير بـ

```
>evalf(Norm(A,infinity));
```

في دراسة أساليب المصفوفة التكرارية، يكون مهمًا معرفة متى تصبح قوة المصفوفة صغيرة (بمعنى متى تقترب العناصر جميعها من الصفر؟). يقال لصفوفات من هذا النوع "متقاربة *convergent*"

تعريف 16.7 نقول: إن المصفوفة A بحجم $n \times n$ متقاربة إذا كان

$$\lim_{k\to\infty} (A^k)_{ij} = 0 \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{و} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$ ■

مثال 4

ليكن

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ولحساب قوى A، نستخرج

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

وعمومًا

$$A^k = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^k & 0 \\ \frac{k}{2^{k+1}} & (\frac{1}{2})^k \end{bmatrix}$$

ولأن

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = 0$$

فإن A مصفوفة متقاربة. ■

انظر: المصفوفة المتقاربة A في مثال (3) لها $\rho(A) = \frac{1}{2}$؛ لكون $\frac{1}{2}$ هي القيمة المميزة الوحيدة لـ A.

هذا يوضح أهمية الربط بين spectral radius للمصفوفة وتقارب المصفوفة. كما هو مفصل في نتيجة المبرهنة الآتية.

مبـرهنة 17.7

العبارات الآتية متكافئة:

أ. A عبارة عن مصفوفة متقاربة.

ب. $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ لعيار طبيعي معين.

ج. $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ للمعايير الطبيعية جميعها.

د. $\rho(A) < 1$

هـ. $\lim_{n\to\infty} A^n \mathrm{x} = 0$ لكل x. ■

يمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في [IK, p. 14].

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 2.7

1. احسب القيم المميزة للمصفوفات الآتية والمتجهات المميزة المقترنة بها:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

هـ. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ و. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. احسب القيم المميزة للمصفوفات الآتية والمتجهات المميزة المقترنة بها:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

هـ. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ و. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. أوجد spectral radius لكل مصفوفة في التمرين (1).

4. أوجد spectral radius لكل مصفوفة في التمرين (2).

5. أي من المصفوفات في التمرين (1) متقاربة؟

6. أي من المصفوفات في التمرين (2) متقاربة؟

7. أوجد المعيار $\|\cdot\|_2$ للمصفوفات في التمرين (1).

8. أوجد المعيار $\|\cdot\|_2$ للمصفوفات في التمرين (2).

9. ليكن $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$، أثبت أن A_1 غير متقاربة، ولكن A_2 متقاربة.

10. أثبت أنه إذا كانت λ قيمة مميزة للمصفوفة A، وأن $\|\cdot\|$ معيار طبيعي، فإن متجهًا مميزًا x مقترن بـ λ وموجود مع $\|\mathrm{x}\| = 1$.

11. أثبت أن كثيرة حدود المميزة $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ للمصفوفة A بحجم $n \times n$ هي كثيرة حدود من الرتبة n. [إرشاد: وسّع $\det(A - \lambda I)$ على طول الصف الأول، واستخدم الاستنتاج الرياضي على n.]

12. أ. أثبت أنه إذا كان A مصفوفة بحجم $n \times n$ فإن $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$، حيث إن $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ هي القيم المميزة لـ A. [إرشاد: خذ $p(0)$ في الحسبان].

ب. أثبت أن A مفردة إذا وفقط إذا كانت $\lambda = 0$ هي قيمة مميزة لـ A.

13. لتكن λ قيمة مميزة للمصفوفة A بحجم $n \times n$، وأن $\mathbf{x} \neq 0$ هو المتجه المميز المقابل لها:

أ . أثبت أن λ هي قيمة مميزة لـ A^t أيضًا.

ب. أثبت أن λ^k هي قيمة مميزة لـ A^k مع متجه مميز $\mathbf{x}$ لأي عدد صحيح $k \geq 1$.

ج . أثبت أنه إذا كانت A^{-1} موجودة فإن $1/\lambda$ قيمة مميزة لـ A^{-1} مع متجه مميز $\mathbf{x}$.

د . ضع تعميمًا للفقرتين (ب) و(ج) لـ $(A^{-1})^k$ ولعدد صحيح $k \geq 2$.

هـ. لنفترض وجود كثيرة حدود $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k$، وتعريف $q(A)$ بأنها المصفوفة $q(A) = q_0 I + q_1 A + \cdots + q_k A^k$. أثبت أن $q(\lambda)$ هي قيمة مميزة لـ $q(A)$ مع متجه مميز $\mathbf{x}$.

و. افترض وجود $\alpha \neq \lambda$. أثبت أنه إذا كانت $A - \alpha I$ غير مفردة، فإن $1/(\lambda - \alpha)$ قيمة مميزة لـ $(A - \alpha I)^{-1}$ مع متجه مميز $\mathbf{x}$.

14. أثبت أنه إذا كانت A متماثلة، فإن $\|A\|_2 = \rho(A)$.

15. افترضنا في التمرين (11) من الفصل (3.6) أن مساهمة أنثى الخنفساء من نوع معين للسنوات المستقبلية يمكن وضعها بصيغة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

حيث يمثِّل العنصر في الصف i، والعمود j المساهمة المحتملة للخنفساء في عمر j في تعداد مجتمع إناث الخنافس في عمر i في السنة التالية.

أ. هل هناك أي قيم مميزة حقيقية للمصفوفة A؟ إذا كانت كذلك فحدِّدها مع ما يقابلها من متجهات مميزة.

ب. إذا احتجنا إلى عينة من هذا النوع لأغراض فحوصات مخبرية تتضمن نسبة ثابتة في كل فئة عمرية من سنة إلى أخرى. فما المعيار الذي يمكن استخدامه مع المجتمع الابتدائي لضمان تحقق هذه المتطلبات؟

16. أوجد مصفوفتين A و B بحيث $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$. (هذا يثبت أن $\rho(A)$ لا يمكن أن يكون معيار مصفوفة.)

17. أثبت أنه إذا كان $\|\cdot\|$ أي معيار طبيعي فإن $(1/\|A^{-1}\|) \leq |\lambda| \leq \|A\|$ لأي قيمة مميزة λ لمصفوفة غير مفردة A.

3.7 استخدام الطرق التكرارية لحلّ أنظمة خطية
Itreative Techniques For Solving Linear Systems

سنوضِّح في هذا الفصل طرائق Jacobi و Gauss–Seidel للتكرار، وهي طرائق كلاسيكية تعود إلى القرن الثامن عشر. ومن النادر استخدام أساليب التكرر في حلِّ أنظمة خطية صغيرة الأبعاد، لأن الوقت المستغرق للحصول على الدقة المطلوبة يفوق ما تتطلبه أساليب أخرى مثل أسلوب تقليص (حذف) Gaussian. وفي الأنظمة الكبيرة مع نسبة عالية من العناصر الصفرية، فهذه الأساليب

كافية من حيث تخزين الحاسوب والحسابات. وتبرز أنظمة من هذا النوع غالبًا في تحليل الدوائر. وفي الحل العددي لمسائل قيمة الحدود والمعادلات التفاضلية الجزئية.

إن أسلوب التكرار لحلِّ نظام خطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بحجم $n \times n$ يبدأ مع تقريب ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$ للحل $\mathbf{x}$ وتوليد متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ التي تتقارب إلى $\mathbf{x}$. وتتضمن أساليب التكرار عملية تحويل النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ إلى نظام يعادله بالصيغة $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ لمصفوفة ثابتة T ومتجه $\mathbf{c}$.

وبعد اختيار المتجه الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$ تتولّد متتالية متجهات الحل التقريبي من خلال حساب

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c} \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

وتذكرنا النتيجة هذه بتكرار النقطة الثابتة التي دُرست في الباب الثاني.

مثال 1 النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{aligned}
E_1: &\quad 10x_1 - x_2 + 2x_3 \phantom{{}+3x_4} = 6\\
E_2: &\quad -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25\\
E_3: &\quad 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11\\
E_4: &\quad 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15
\end{aligned}$$

له حلٌّ وحيد، وهو $\mathbf{x} = (1, 2, -1, 1)^t$. ولقلب $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ إلى الصيغة $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$، حُلَّ المعادلة E_i لـ x_i ولكل $i = 1, 2, 3, 4$ لإيجاد

$$\begin{aligned}
x_1 &= \phantom{-\tfrac{1}{5}x_1 +{}} \tfrac{1}{10}x_2 - \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{3}{5}\\
x_2 &= \tfrac{1}{11}x_1 + \tfrac{1}{11}x_3 - \tfrac{3}{11}x_4 + \tfrac{25}{11}\\
x_3 &= -\tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{1}{10}x_2 + \tfrac{1}{10}x_4 - \tfrac{11}{10}\\
x_4 &= -\tfrac{3}{8}x_2 + \tfrac{1}{8}x_3 + \tfrac{15}{8}
\end{aligned}$$

ولذلك يمكن تكرار كتابة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بالصيغة $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ مع

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0\\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10}\\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\\ \frac{25}{11}\\ -\frac{11}{10}\\ \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

ولتقريب ابتدائي، نضع $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$. ومن ثم فإن $\mathbf{x}^{(1)}$ يُعطى من خلال

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \tfrac{1}{10}x_2^{(0)} - \tfrac{1}{5}x_3^{(0)} + \tfrac{3}{5} = 0.6000\\
x_2^{(1)} &= \tfrac{1}{11}x_1^{(0)} + \tfrac{1}{11}x_3^{(0)} - \tfrac{3}{11}x_4^{(0)} + \tfrac{25}{11} = 2.2727\\
x_3^{(1)} &= -\tfrac{1}{5}x_1^{(0)} + \tfrac{1}{10}x_2^{(0)} + \tfrac{1}{10}x_4^{(0)} - \tfrac{11}{10} = -1.1000\\
x_4^{(1)} &= -\tfrac{3}{8}x_2^{(0)} + \tfrac{1}{8}x_3^{(0)} + \tfrac{15}{8} = 1.8750
\end{aligned}$$

تتولَّد تكرارات إضافية مثل $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)})^t$ بالأسلوب نفسه، وهي معروضة في جدول (1.7).

جدول 1.7

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^{(k)}$	0.0000	0.6000	1.0473	0.9326	1.0152	0.9890	1.0032	0.9981	1.0006	0.9997	1.0001
$x_2^{(k)}$	0.0000	2.2727	1.7159	2.053	1.9537	2.0114	1.9922	2.0023	1.9987	2.0004	1.9998
$x_3^{(k)}$	0.0000	−1.1000	−0.8052	−1.0493	−0.9681	−1.0103	−0.9945	−1.0020	−0.9990	−1.0004	−0.9998
$x_4^{(k)}$	0.0000	1.8750	0.8852	1.1309	0.9739	1.0214	0.9944	1.0036	0.9989	1.0006	0.9998

وقد كان القرار بالتوقف بعد عشر إعادات مبنيًّا على المعيار

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(10)} - \mathbf{x}^{(9)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(10)}\|_\infty} = \frac{8.0 \times 10^{-4}}{1.9998} < 10^{-3}$$

في الواقع $\|\mathbf{x}^{(10)} - \mathbf{x}\|_\infty = 0.0002$. ■

تسمى طريقة مثال (1) بطريقة جاكوبي للتكرار Jacobi iterative method. وتتضمن حلَّ المعادلة (i) في $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ لـ x_i (بشرط $a_{ii} \neq 0$) لإيجاد

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij} x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

وتوليد كل $x_i^{(k)}$ من مركبات $\mathbf{x}^{(k-1)}$ لـ $k \geq 1$ من خلال

$$x_i^{(k)} = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) + b_i}{a_{ii}} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.7}$$

الطريقة مكتوبة بصيغة $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ بشطر A إلى جزئيها القطري وخارجه. ولكي نرى ذلك؛ افترض المصفوفة القطرية D، وعناصرها القطرية تلك التي في A، ويمثِّل $-L$ جزء مثلث العناصر السفلي من A. أما $-U$ فيمثِّل جزء مثلث العناصر العلوي من A. ووفقًا لذلك فإن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

تنشطر إلى

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= D - L - U$$

والمعادلة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ أو $(D - L - U)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بعدئذٍ تتحول إلى

$$D\mathbf{x} = (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

وإذا كان D^{-1} موجودًا. بمعنى أنه إذا كان $a_{ii} \neq 0$ لكل i فإن

$$\mathbf{x} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}$$

إن هذه النتائج التي بصيغة مصفوفات أسلوب تكرار جاكوبي هي

$$\mathbf{x}^{(k)} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{b}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5.7}$$

كان كارول جوستاف جاكوب جاكوبي (1804-1851)
Carl Gustav Jacob Jacobi
قد اشتهر في البداية بعمله في المبرهنة الأعداد ودوال بيضاوية ولكن اهتمامه وقابلياته الرياضية كانت واسعة. وكان لشخصيته القوية تأثير في تأسيس اتجاهات كثيرة كانت بمثابة النواة لتطور الرياضيات في الجامعات الألمانية في القرن التاسع عشر.

وبوضع $T_j = D^{-1}(L+U)$ و $c_j = D^{-1}b$، فإن أسلوب جاكوبي له الصيغة

$$x^{(k)} = T_j x^{(k-1)} + c_j \qquad (6.7)$$

وتستخدم المعادلة (4.7) عند تطبيق الحسابات، والمعادلة (6.7) لأغراض المبرهنة.

تنفذ خوارزمية (1.7) أسلوب تكرار جاكوبي.

ALGORITHM
الخوارزمية
1.7

تكرار جاكوبي Jacobi Iterative

لحلّ $Ax = b$ بوجود تقريب ابتدائي $x^{(0)}$.

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n، العناصر a_{ij} $1 \le i\ j \le n$ للمصفوفة A، العناصر b_i، $1 \le i \le n$ لـ b، العناصر XO_i، $1 \le i \le n$ لـ $XO = x^{(0)}$. حد السماح TOL، وأكبر عدد من التكرار N.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$.
2	ما دام $(k \le N)$ فطبق الخطوات 3 – 6.
3	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $x_i = \dfrac{-\sum_{j=1, j\ne i}^{n}(a_{ij}XO_j) + b_i}{a_{ii}}$
4	إذا كان $\lVert x - XO \rVert < TOL$ فإن المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$. (العملية كانت ناجحة). توقف.
5	ضع $k = k + 1$.
6	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $XO_i = x_i$.
7	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

تتطلب الخطوة (3) من الخوارزمية كون $a_{ii} \ne 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. وإذا كان واحد من العناصر a_{ii} صفرًا، والنظام ليس مفردًا، فإنه بالإمكان تكرار ترتيب المعادلات بحيث لا نجد فيها $a_{ii} = 0$. ولتعجيل التقارب، يجب ترتيب المعادلات بحيث تكون a_{ii} أكبر ما يمكن. سيْناقَش هذا الموضوع بتفاصيل أكثر في آخر هذا الفصل.

وهناك معيار آخر محتمل للتوقف في الخطوة (4)، وذلك باستمرار التكرار حتى يكون

$$\frac{\lVert x^{(k)} - x^{(k-1)} \rVert}{\lVert x^{(k)} \rVert}$$

أصغر من حدّ السماح المثبت. ولهذا الغرض، يمكن استخدام أي معيار مناسب، وهو عادة معيار l_∞.

ويمكن مشاهدة التطوير الممكن للخوارزمية (1.7) عند تكرار النظر في المعادلة (4.7). إن مركبات $\mathbf{x}^{(k-1)}$ تُستخدم في حساب $x_i^{(k)}$، وحيث إن $x_1^{(k)},\ldots,x_{i-1}^{(k)}$ عند $i>1$ قد حُسبت، وربما توجد تقريبات أحسن للحلول الحقيقية $x_1,\ldots,x_{i-1}$ مقارنة بـ $x_1^{(k-1)},\ldots,x_{i-1}^{(k-1)}$، ويبدو لنا أنه من المنطق حساب $x_i^{(k)}$ مستخدمين أحدث هذه القيم المحسوبة. أي أنه يمكننا استخدام

$$x_i^{(k)}=\frac{-\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}x_j^{(k)})-\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}x_j^{(k-1)})+b_i}{a_{ii}} \tag{7.7}$$

لكلٍّ من $i=1,2,\ldots,n$ بدلاً من المعادلة (4.7). ويسمى هذا التعديل بأسلوب تكرار جاوس – سيدل Gauss-Seidel iterative technique ويتضح في مثال الآتي:

مثال 2

النظام الخطي المعطى من خلال

$$\begin{aligned}10x_1-x_2+2x_3\quad&=6\\-x_1+11x_2-x_3+3x_4&=25\\2x_1-x_2+10x_3-x_4&=-11\\3x_2-x_3+8x_4&=15\end{aligned}$$

قد حُلّ في مثال (1) بطريقة تكرار جاكوبي. وبدمج المعادلة (7.7) ضمن الخوارزمية (1.7) نحصل على المعادلات التي تُستخدم لكل من $k=1,2,\ldots$، وهي

$$\begin{aligned}x_1^{(k)}&=\frac{1}{10}x_2^{(k-1)}-\frac{1}{5}x_3^{(k-1)}+\frac{3}{5}\\x_2^{(k)}&=\frac{1}{11}x_1^{(k)}+\frac{1}{11}x_3^{(k-1)}-\frac{3}{11}x_4^{(k-1)}+\frac{25}{11}\\x_3^{(k)}&=-\frac{1}{5}x_1^{(k)}+\frac{1}{10}x_2^{(k)}+\frac{1}{10}x_4^{(k-1)}-\frac{11}{10}\\x_4^{(k)}&=-\frac{3}{8}x_2^{(k)}+\frac{1}{8}x_3^{(k)}+\frac{15}{8}\end{aligned}$$

وبوضع $\mathbf{x}^{(0)}=(0,0,0,0)^t$، يمكننا توليد التكرارات في جدول (2.7).

عمل فيليب لودوك فون سيدل (1821-1896) Philip Ludwig von seidel كمساعد لجاكوبي. يقوم بحلّ مسائل فينظم معادلات خطية ناتجة عن عمل غاوس Gause في المربعات الصغرى. هذه المعادلات عموما لها عناصر خارج القطر كانت أصغر كثيرا من تلك القطرية. وبالتالي كانت طرق التكرار ذات فاعلية بشكل خاص. إن أسلوبي التكرار المعروفين حاليا بجاكوبي وغاوس – سيدل كانا معروفين بغاوس قبل تطبيقهما على هذه الحالة. ولكن نتائج غاوس لم تكن متداولة بكثرة

جدول 2.7

k	0	1	3	2	4	5
$x_1^{(k)}$	0.0000	0.6000	1.0065	1.030	1.0009	1.0001
$x_2^{(k)}$	0.0000	2.3272	2.0036	2.037	2.0003	2.0000
$x_3^{(k)}$	0.0000	−0.9873	−1.0025	−1.014	−1.0003	−1.0000
$x_4^{(k)}$	0.0000	0.8789	0.9983	0.9844	0.9999	1.0000

ولأن

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(5)}-\mathbf{x}^{(4)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(5)}\|_\infty}=\frac{0.0008}{2.000}=4\times10^{-4}$$

فإن $\mathbf{x}^{(5)}$ قُبلت بوصفها تقريباً معقولاً للحل. انظر إلى طريقة جاكوبي في مثال ( ) تطلبت ضعف عدد مرات التكرار وبالدقة نفسها. ■

ولكتابة طريقة جاوس – سيدل Gauss–Seidel بصيغة المصفوفة، اضرب طرفي المعادلة (7.7) في المقدار a_{ii}. ومن ثم اجمع كل حدود التكرار في الرتبة k لتحصل على

$$a_{i1}x_1^{(k)} + a_{i2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{ii}x_i^{(k)} = -a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k-1)} + b_i$$

لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, n$. وبكتابة المعادلات جميعها وعددها n نحصل على

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1^{(k)} \qquad\qquad\qquad &= -a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1\\
a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} \qquad &= \qquad\qquad - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(k)} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_n
\end{aligned}$$

ومع تعريفات D, L, U المعطاة سابقاً، يكون لدينا طريقة Gauss–Seidel المثلّة من خلال

$$(D - L)\mathrm{x}^{(k)} = U\mathrm{x}^{(k-1)} + \mathrm{b}$$

أو

$$\mathrm{x}^{(k)} = (D - L)^{-1}U\mathrm{x}^{(k-1)} + (D - L)^{-1}\mathrm{b} \quad \text{لكل} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{8.7}$$

وبوضع $T_g = (D - L)^{-1}U$ و $\mathrm{c}_g = (D - L)^{-1}\mathrm{b}$، فإن صيغة أسلوب Gauss–Seidel تصبح

$$\mathrm{x}^{(k)} = T_g\mathrm{x}^{(k-1)} + \mathrm{c}_g \tag{9.7}$$

وكي لا تكون مصفوفة المثلث الأدني $D - L$ ($D - L$ lower-triangle) مفردة، يتحتم بالضرورة كون $a_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

تنفذ خوارزمية (2.7) طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel.

ALGORITHM
الخوارزمية
2.7

تكرار جاوس – سيدل Gauss–Seidel Iterative

لحلّ $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ بوجود تقريب ابتدائي $\mathrm{x}^{(0)}$.

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n. العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر $b_i, 1 \le i \le n$ لـ b. العناصر $XO_i, 1 \le i \le n$ لـ $\mathrm{XO} = \mathrm{x}^{(0)}$. حد السماح TOL، وأكبر عدد من التكرار N.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار N قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$
2	ما دام $(k \le N)$ فطبّق الخطوات 3 – 6.
3	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $x_i = \dfrac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}XO_j + b_i}{a_{ii}}$

4	إذا كان $\|\|x - XO\|\| < TOL$ فإن المخرجات $(x_1, \ldots , x_n)$. (العملية كانت ناجحة). توقف
5	ضع $k = k + 1$.
6	عند $i = 1, \ldots , n$ ضع $XO_i = x_i$.
7	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت ناجحة). توقف.

■

تُطبّق التعليقات التي تتضمنها الخوارزمية (1.7) والمتعلّقة بتكرار الأمر ومعيار التوقف على خوارزمية Gauss–Seidel (2.7).

إن نتائج مثالين (1) و (2) تشير إلى أن طريقة جاوس – سيدل Gauss–Seidel متفوقة على طريقة جاكوبي، وهذا صحيح دائمًا، ولكن هناك أنظمة خطية نجد معها أن طريقة جاكوبي تتقارب، أما طريقة Gauss–Seidel فليست كذلك. (انظر التمرينين 17 و 18). لدراسة تقارب أساليب التكرار عمومًا، دعنا نفترض الصيغة

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$$ لكل $k = 1, 2, \ldots$ حيث إن $x^{(0)}$ عشوائية.

مبرهنة 18.7 إذا كان $\rho(T)$ يحقّق $\rho(T) < 1$، فإن $(I - T)^{-1}$ موجود وإن

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$$

■

البرهان بما أن $Tx = \lambda x$ صحيحة عندما تكون λ قيمة مميزة لـ T بالتحديد وعندما تكون $1 - \lambda$ تحديدًا قيمة مميزة لـ $(I - T)$، ولكن $|\lambda| \le \rho(T) < 1$ فإن $\lambda = 1$ ليست قيمة مميزة لـ T، ولا يمكن أن يكون 0 قيمة مميزة لـ $I - T$. ولذلك فإن $(I - T)^{-1}$ موجودة.

ليكن $S_m = I + T + T^2 + \cdots + T^m$. لذلك

$$(I - T)S_m = (1 + T + T^2 + \cdots + T^m) - (T + T^2 + \cdots + T^{m+1}) = I - T^{m+1}$$

ولأن T متقاربة، فإن النتيجة في نهاية الفصل (2.7) تؤدي إلى

$$\lim_{m\to\infty} (I - T)S_m = \lim_{m\to\infty} (I - T^{m+1}) = I$$

ولذلك

$$(I - T)^{-1} = \lim_{m\to\infty} S_m = I + T + T^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$$

■ ■ ■

مبرهنة 19.7 لأي $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$، فإن المتتالية $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفة من خلال

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c \quad (\text{لكل } k \ge 1) \tag{10.7}$$

تتقارب إلى الحل الوحيد $x = Tx + c$ إذا وفقط إذا كان $\rho(T) < 1$.

■

البرهان لنفترض أولاً $\rho(T) < 1$، ومن ثم

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= Tx^{(k-1)} + c \\ &= T(Tx^{(k-2)} + c) + c \\ &= T^2x^{(k-2)} + (T + I)c \\ &\vdots \\ &= T^kx^{(0)} + (T^{k-1} + \cdots + T + I)c. \end{aligned}$$

ولأن $\rho(T) < 1$، فإن المصفوفة T متقاربة و

$$\lim_{k\to\infty} T^kx^{(0)} = 0$$

تؤدي المبرهنة 18.7 إلى أن

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} T^kx^{(0)} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right)c = 0 + (I - T)^{-1}c = (I - T)^{-1}c$$

ولذلك فإن المتتالية $\{x^{(k)}\}$ تتقارب إلى المتجه $x \equiv (I - T)^{-1}c$ و $x = Tx + c$.

ولبرهنة الاتجاه العكسي؛ نثبت أنه لأي $z \in \mathbb{R}^n$ لدينا $\lim_{k\to\infty} T^kz = 0$. ووفقاً للامبرهنة (17.7)؛ فإن هذا مكافئ لـ $\rho(T) < 1$.

ليكـن z متجهـاً عشـوائيًا و x حـلاً وحيـداً لـ $x = Tx + c$. عـرف $x^{(0)} = x - z$. وأن $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$، لكل $k \geq 1$. ولذلك فإن $\{x^{(k)}\}$ تتقارب إلى x. وأيضًا

$$x - x^{(k)} = (Tx + c) - (Tx^{(k-1)} + c) = T(x - x^{(k-1)})$$

لذلك

$$x - x^{(k)} = T(x - x^{(k-1)}) = T^2(x - x^{(k-2)}) = \cdots = T^k(x - x^{(0)}) = T^kz$$

والنتيجة أن $\lim_{k\to\infty} T^kz = \lim_{k\to\infty} T^k(x - x^{(0)}) = \lim_{k\to\infty}(x - x^{(k)}) = 0$ ولأن $z \in \mathbb{R}^n$ كان عشوائيًا، فإن هذا يؤدي إلى كون T مصفوفة متقاربة وأن $\rho(T) < 1$. ■ ■ ■

برهان التمهيدية التالية يشبه البراهين التي استعملت في التمهيدية 4.2. وقد أخذت بعين الاعتبار في التمرين 21.

تمهيدية 20.7 إذا كان $\|T\| < 1$ لأي معيـار مصفوفة طبيعية، و c متجهًا معلومًا فإن المتتالية $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفة مـن خلال $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ تتقـارب – لأي $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ – إلى متجـه $x \in \mathbb{R}^n$ وإن حدود الخطأ الآتية تحقق:

أ. $\|x - x^{(k)}\| \leq \|T\|^k\|x^{(0)} - x\|$

ب. $\|x - x^{(k)}\| \leq \dfrac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$. ■

لقد لاحظنا أن أسلوبي جاكوبي و Gauss–Seidel للتكرار يمكن كتابتهما بالصيغة

$$x^{(k)} = T_gx^{(k-1)} + c_g \quad \text{و} \quad x^{(k)} = T_jx^{(k-1)} + c_j$$

باستخدام المصفوفتين

$T_g = (D - L)^{-1}U$ و $T_j = D^{-1}(L + U)$.

وإذا كانت $\rho(T_j)$ أو $\rho(T_g)$ أقل من 1 فإن المتتالية المقابلة $\{\mathrm{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ ستتقارب لحلٍّ x إلى $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. وعلى سبيل المثال فإن منهجية جاكوبي فيها

$$\mathrm{x}^{(k)} = D^{-1}(L + U)\mathrm{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathrm{b}$$

وإذا كانت $\{\mathrm{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تتقارب إلى x فإن

$$\mathrm{x} = D^{-1}(L + U)\mathrm{x} + D^{-1}\mathrm{b}$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$D\mathrm{x} = (L + U)\mathrm{x} + \mathrm{b} \quad \text{و} \quad (D - L - U)\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

ولأن $D - L - U = A$، فإن الحل x يحقق $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$.

ويمكننا الآن إعطاء شروط وافية وسهلة التحقق لتقارب طريقتي جاكوبي و Gauss-Seidel. (ولبرهنة التقارب في منهجية جاكوبي، انظر التمرين 22 ولمنهجية Gauss-Seidel انظر [Or2, p. 120].)

مبرهنة 21.7 إذا كانت A تتصف حصريًّا بالقطرية فإن كلتا الطريقتين جاكوبي و Gauss-Seidel تعطيان – مقبل أي اختيار لـ $\mathrm{x}^{(0)}$ – متتالية $\{\mathrm{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تتقارب إلى الحل الوحيد لـ $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. ■

إن علاقة التقارب المتسارع بنصف القطر الطيفي لمصفوفة التكرار T يمكن ملاحظتها من خلال النتيجة (20.7)، وبسبب تحقق المتباينات لأي معيار مصفوفة طبيعية، فإننا نستنتج من العبارة ما بعد المبرهنة (15.7) أن

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \approx \rho(T)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\| \tag{11.7}$$

ولذلك، يفضل اختيار أسلوب التكرار المتصف بأدنى $\rho(T) < 1$ لنظام منته $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. ونظرًا لعدم ظهور نتائج عامة، فليس بوسعنا تحديد أي الأسلوبين جاكوبي أو جاوس–سيدل Gauss–Seidel الأكثر نجاحًا لنظام خطي عشوائي. وفي حالات خاصة يكون الجواب معروفًا كما تناولنا في المبرهنة الآتية. إن برهان هذه النتيجة يمكن إيجاده في [Y, pp. 120–127].

مبرهنة 22.7 ستين – روزنبرغ Stein–Rosenberg

إذا كان $a_{ik} \le 0$ لكل $i \neq k$ و $a_{ii} > 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإن واحدة وواحدة فقط من العبارات الآتية تتحقق

أ. $0 \le \rho(T_g) < \rho(T_j) < 1$

ب. $1 < \rho(T_j) < \rho(T_g)$

ج. $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 0$

د. $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 1$ ■

أما الحالة الخاصة التي وُضِّحت في المبرهنة (22.7)، فبالنظر إلى العبارة (أ) أنه عندما تعطي إحدى الطرائق تقاربًا، فإن كلتيهما تعطيان تقاربًا، وأن طريقة Gauss–Seidel تتقارب أسرع من طريقة جاكوبي. وتشير العبارة (ب) إلى أنه عندما تتباعد إحدى الطريقتين فإن كلتيهما

تتباعدان. وأن التباعد يكون أكثر وضوحًا في طريقة Gauss–Seidel.

ولما كان معدل التقارب لعملية ما يعتمد على نصف القطر الطيفي للمصفوفة المرتبطة بالطريقة. فإن هناك طريقًا واحدًا لاختيار عملية تسريع التقارب. وهو اختيار طريقة يكون للمصفوفة المرتبطة بها نصف قطر طيفي. وقبل الدخول في شرح عملية ما لاختيار مثل هذه الطريقة نحتاج إلى تقديم وسائل جديدة لقياس حجم الاختلاف ما بين تقريب الحل لنظام خطي والحل الصحيح للنظام. تستخدم الطريقة المتجه الموضح في تعريف الآتي.

تعريف 23.7 افترض $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ عبارة عن تقريب لحلِّ النظام الخطي المعرف من خلال $Ax = b$. إن متجه البواقي residual vecto لـ $\tilde{x}$ بالنسبة إلى هذا النظام هو $r = b - A\tilde{x}$. ■

الباقي يعني ما تم تركه. وهو اسم مناسب لهذا المتجه

وفي أساليب مثل طريقة جاكوبي أو Gauss–Seidel. يكون متجه البواقي مرتبطًا بكل عملية حساب لمركبة تقريب إلى متجه الحل. والهدف هو توليد متتالية للتقريبات التي تقرب متجهات البواقي أسرع نحو الصفر. ولنفترض أن

$$r_i^{(k)} = (r_{1i}^{(k)}, r_{2i}^{(k)}, \ldots, r_{ni}^{(k)})^t$$

يمثل متجه البواقي لطريقة Gauss–Seidel المقترن بمتجه الحل التقريبي $x_i^{(k)}$ المعرف من خلال

$$x_i^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})^t$$

إن المركبة من رتبة m لـ $r_i^{(k)}$ هي

$$r_{mi}^{(k)} = b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{mj} x_j^{(k-1)} \tag{12.7}$$

أو بما يساويها

$$r_{mi}^{(k)} = b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{mj} x_j^{(k-1)} - a_{mi} x_i^{(k-1)}$$

لكل $m = 1, 2, \ldots, n$.

فإن مركبة $r_i^{(k)}$ من رتبة i خصوصًا تكون

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} - a_{ii} x_i^{(k-1)}$$

وبذلك فإن

$$a_{ii} x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \tag{13.7}$$

تذكر أنه في طريقة Gauss–Seidel يُختار $x_i^{(k)}$ ليكون

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right] \tag{17.4}$$

ولذلك يمكن تكرار كتابة المعادلة (13.7) بالصيغة

$$a_{ii}x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = a_{ii}x_i^{(k)}$$

والنتيجة أن طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel يمكن تمييزها باختيار $x_i^{(k)}$ لتحقيق

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \tag{15.7}$$

وبالإمكان اشتقاق رابط آخر بين متجهات البواقي وأسلوب جاوس–سيدل Gauss–Seidel.
لنفترض أن متجه البواقي $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ مرتبط بالمتجه $\mathbf{x}_{i+1}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})^t$.
ووفقًا للمعادلة (12.7)، فإن المركبة من رتبة i لـ $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ هي

$$r_{i,i+1}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k)}$$

تؤدي المعادلة (14.7) إلى أن $r_{i,i+1}^{(k)} = 0$، بمعنى أن أسلوب Gauss–Seidel يتميز باختيار $x_{i+1}^{(k)}$ بطريقة تكون فيها مركبة $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$ من رتبة i صفرًا.

إن اختيار $x_{i+1}^{(k)}$ بحيث يكون أحد إحداثيات متجه البواقي صفرًا ليس بالطريقة الوافية جدًا لتقليل معيار المتجه $\mathbf{r}_{i+1}^{(k)}$، ولو عدلنا أسلوب جاوس–سيدل Gauss–Seidel كما هو معطى في المعادلة (15.7) ليكون

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega\frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \tag{16.7}$$

إزاء اختيارات منتهية لـ ω موجبة، لاستطعنا تقليل معيار متجه البواقي والوصول إلى تقارب أسرع معنويًا. تسمى الطرائق التي تتضمن المعادلة (16.7) طرائق السكون relaxation methods.

وعند اختيارات ω مع $0 < \omega < 1$، فإن العملية تسمى طرائق ما دون السكون under-relaxation methods. ويمكن استخدامها في إيجاد تقارب لبعض الأنظمة التي ليست متقاربة وفقًا لطريقة Gauss–Seidel. وعند اختيارات ω مع $1 < \omega$، فإن العمليات تسمى طرائق ما فوق السكون over-relaxation وتستخدم في تسريع تقارب أنظمة متقاربة وفقًا لطريقة Gauss–Seidel. ويرمز إلى هذه الطرائق بـ SOR اختصارًا لـ Successive Over-Relaxation. وهي مفيدة خاصة في حل الأنظمة الخطية التي تظهر في الحل العددي لمعادلات تفاضلية جزئية معينة.

وقبل شرح إيجابيات طريقة SOR، نلاحظ انه باستخدام المعادلة (13.7)، فإن المعادلة (16.7) يمكن تكرار صياغتها لأغراض حساب

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$$

ولتحديد مصفوفة طريقة SOR، نعيد كتابة هذه لتكون

$$a_{ii}x_i^{(k)} + \omega\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k-1)} - \omega\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + \omega b_i$$

وبصيغة المصفوفات يكون لدينا

$$(D-\omega L)\mathbf{x}^{(k)}=[(1-\omega)D+\omega U]\mathbf{x}^{(k-1)}+\omega\mathbf{b}$$

أو

$$\mathbf{x}^{(k)}=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]\mathbf{x}^{(k-1)}+\omega(D-\omega L)^{-1}\mathbf{b} \qquad (17.7)$$

وإذا جعلنا $T_\omega=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$ و $\mathbf{c}_\omega=\omega(D-\omega L)^{-1}\mathbf{b}$ فإن صيغة أسلوب SOR هي

$$\mathbf{x}^{(k)}=T_\omega\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{c}_\omega \qquad (18.7)$$

مثال 3 النظام الخطي $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ المعطى من خلال

$$\begin{aligned} 4x_1+3x_2 \quad\quad &= 24\\ 3x_1+4x_2-x_3 &= 30\\ -x_2+4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

له حلّ $(3, 4, -5)^t$. إن طريقة Gauss–Seidel وطريقة SOR مع ω=1.25 سوف تستخدم في حلّ هذا النظام مستخدمين $\mathbf{x}^{(0)}=(1, 1, 1)^t$ لكلتا الطريقتين. ولكل $k=1, 2, \ldots$، فإن معادلات طريقة Gauss–Seidel هي

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= -0.75x_2^{(k-1)}+6\\ x_2^{(k)} &= -0.75x_1^{(k)}+0.25x_3^{(k-1)}+7.5\\ x_3^{(k)} &= 0.25x_2^{(k)}-6 \end{aligned}$$

ومعادلات طريقة SOR مع ω=1.25 هي

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= -0.25x_1^{(k-1)}-0.9375x_2^{(k-1)}+7.5\\ x_2^{(k)} &= -0.9375x_1^{(k)}-0.25x_2^{(k-1)}+0.3125x_3^{(k-1)}+9.375\\ x_3^{(k)} &= 0.3125x_2^{(k)}-0.25x_3^{(k-1)}-7.5 \end{aligned}$$

إن أول سبع إعادات لكل طريقة مدونة في جدولين (3.7) و (4.7). ولكي تكون التكرار دقيقة لسبع خانات عشرية ، فإن طريقة Gauss–Seidel تتطلب 34 تكرار مقابل 14 تكرار لطريقة ما فوق السكون مع ω=1.25 . ■

جدول 3.7 جاوس – سيدل

7	6	5	4	3	2	1	0	k
3.0134110	3.0214577	3.0343323	3.0549316	3.0878906	3.1406250	5.250000	1	$x_1^{(k)}$
3.9888241	3.9821186	3.9713898	3.9542236	3.9267578	3.8828125	3.812500	1	$x_2^{(k)}$
−5.0027940	−5.0044703	−5.0071526	−5.0114441	−5.0183105	−5.0292969	−5.046875	1	$x_3^{(k)}$

جدول 4.7 SOR مع ω =1.25

7	6	5	4	3	2	1	0	k
3.0000498	2.9963276	3.0037211	2.9570512	3.1333027	2.6223145	6.312500	1	$x_1^{(k)}$
4.0002586	4.0009262	4.0029250	4.0074838	4.0102646	3.9585266	3.5195313	1	$x_2^{(k)}$
−5.0003486	−4.9982822	−5.0057135	−4.9734897	−5.0966863	−4.6004238	−6.6501465	1	$x_3^{(k)}$

والسؤال التلقائي هنا: كيف تُختار قيمة ω المناسبة؟ وعلى الرغم من عدم معرفة الجواب الكامل لهذا التساؤل بالنسبة إلى نظام خطي برتبة $n \times n$، فإنه يمكن استخدام المبرهنة الآتية في بعض الحالات.

مبرهنة 24.7 كاهان kahan

إذا كان $a_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، فإن $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$. يؤدي هذا إلى أن طريقة SOR يمكنها التقارب فقط إذا كانت $0 < \omega < 2$.

قد أُخِذ برهان هذه المبرهنة في الحسبان في التمرين (23). وإن برهان النظريتين الآتيتين يمكن إيجاده في [Or2, pp. 123–133]، وسوف يُستخدم في الفصل (12). ■

مبرهنة 25.7 أوستروسكي – ريخ Ostrowski - Reich

إذا كانت A مصفوفة بصفة إيجابي واضح positive definite و $0 < \omega < 2$، فإن طريقة SOR تتقارب لأي اختيار إلى متجه التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$. ■

مبرهنة 26.7

إذا كانت A مصفوفة بصفة إيجابي واضح positive definite ثلاثية الأقطار فإن $\rho(T_g) = [\rho(T_j)]^2 < 1$ والاختيار الأمثل لـ ω لطريقة SOR هو

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}}$$

ومع اختيار ω، يكون لدينا $\rho(T_\omega) = \omega - 1$. ■

مثال 4

المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$ ■

المعطاة في مثال (3)، هي بصفة إيجابي واضح ثلاثية الأقطار. ولذلك فإن لمبرهنة (26.7) تنطبق عليها. وحيث إن

$$T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

يكون لدينا

$$T_j - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -0.75 & 0 \\ -0.75 & -\lambda & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -\lambda \end{bmatrix}$$

ولذلك فإن $\det(T_j - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 0.625)$. ومن ثم

$$\rho(T_j) = \sqrt{0.625} \text{ و } \omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 0.625}} \approx 1.24$$

هذا يوضِّح التقارب السريع الذي وُجد في مثال (1) عند استخدام $\omega = 1.25$. ■

ALGORITHM
الخوارزمية
3.7

نختم هذا الفصل بالخوارزمية 3.7 لطريقة SOR.

SOR

لحلّ $Ax = b$ بوجود المتغيرة ω وتقريب ابتدائي $x^{(0)}$؛

المدخلات: عدد المعادلات والمجاهيل n، العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A، العناصر b_i لـ $1 \le i \le n$، العناصر $XO_i, 1 \le i \le n$ لـ $\mathbf{XO} = \mathbf{x}^{(0)}$، المتغيرة ω، حد السماح TOL، وأكبر عدد من الإعادات N.

المخرجات: الحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ أو عبارة تفيد بأن عدد مرات التكرار قد تم تجاوزه.

الخطوة	المضمون
1	ضع $k = 1$
2	ما دام $(k \le N)$ فطبّق الخطوات 3 – 6.
3	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $x_i = (1-\omega)XO_i + \dfrac{\omega(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}XO_j + b_i)}{a_{ii}}$
4	إذا كان $\lVert \mathbf{x} - \mathbf{XO} \rVert < TOL$ فإن المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$. (العملية كانت ناجحة). توقف.
5	ضع $k = k + 1$
6	عند $i = 1, \ldots, n$ ضع $XO_i = x_i$.
7	المخرجات (أكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزه). (العملية كانت ناجحة). توقف.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 3.7

1. أوجد أول تكرارين لطريقة جاكوبي للأنظمة الخطية الآتية مستخدمًا $x^{(0)} = 0$:

أ.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6, \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25, \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ -x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6 \end{aligned}$$

2. أوجد أول إعادتين لطريقة جاكوبي للأنظمة الخطية الآتية مستخدمًا $x^{(0)} = 0$:

أ. $$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -4 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_2 + 4x_3 &= 0 \\ +4x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2 \\ -x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

3. كرِّر التمرين (1) مستخدمًا طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel.

4. كرِّر التمرين (2) مستخدمًا طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel.

5. استخدم طريقة جاكوبي لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (1)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

6. استخدم طريقة جاكوبي لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (2)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

7. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (1)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

8. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel لحلِّ الأنظمة الخطية في التمرين (2)، مع $TOL = 10^{-3}$ والمعيار l_∞.

9. أوجد أول إعادتين لطريقة SOR مع $\omega = 1.1$ للأنظمة الخطية الآتية مستخدما $x^{(0)} = 0$:

أ. $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25 \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11 \\ -x_3 + 5x_4 &= -11 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6 \end{aligned}$$

10. أوجد أول تكرارين لطريقة SOR مع $\omega = 1.1$ للأنظمة الخطية الآتية مستخدمًا $x^{(0)} = 0$:

أ. $$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -4 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_2 + 4x_3 &= 0 \\ +4x_4 - x_5 &= 6 \\ -x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2 \\ -x_5 + 4x_6 &= 6 \end{aligned}$$

11. كرِّر التمرين (9) مستخدمًا $\omega = 1.3$.

12. كرِّر التمرين (10) مستخدما $\omega = 1.3$.

13. استخدم طريقة SOR مع $\omega = 1.2$ لحلّ الأنظمة الخطية في التمرين (9) بحد سماح $TOL = 10^{-3}$ في المعيار l_∞.

14. استخدم طريقة SOR مع $\omega = 1.2$ لحلّ الأنظمة الخطية في التمرين (10) بحد سماح $TOL = 10^{-3}$ في المعيار l_∞.

15. حدّد أيٌّ من المصفوفات في التمرين (9) بصفة إيجابي واضح ثلاثية الأقطار. كرر التمرين (9) لهذه المصفوفات مستخدما الاختيار الأمثل لـ ω.

16. حدّد أيٌّ من المصفوفات في التمرين (10) بصفة إيجابي واضح ثلاثية الأقطار. كرر التمرين (10) لهذه المصفوفات مستخدما الاختيار الأمثل لـ ω.

17. النظام الخطي

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

له حلّ $(1, 2, -1)^t$.

أ. أثبت أن $\rho(T_j) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

ب. أثبت أن طريقة جاكوبي مع $x^{(0)} = 0$ تفشل في إعطاء تقريب جيد بعد 25 تكرار.

ج. أثبت أن $\rho(T_g) = \frac{1}{2}$.

د. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel مع $x^{(0)} = 0$ لتقريب حلّ النظام الخطي ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞.

18. النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

له حلّ $(1, 2, -1)^t$.

أ. أثبت أن $\rho(T_j) = 0$.

ب. استخدم طريقة جاكوبي مع $x^{(0)} = 0$ لتقريب حلّ النظام الخطي ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞.

ج. أثبت أن $\rho(T_g) = 2$.

د. أثبت أن طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel المطبقة في (ب) تفشل في إعطاء تقريب جيد بعد 25 تكرار.

19. النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0.2, \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= -1.425 \\ x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

له حلّ $(0.9, -0.8, 0.7)^t$.

أ. هل معاملات المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ذات طابع قطري؟

ب. احسب نصف القطر الطيفي لمصفوفة جاوس–سيدل Gauss–Seidel. T_g.

ج. استخدم طريقة جاوس–سيدل Gauss–Seidel للتكرار لتقريب حلّ النظام الخطي بحد سماح 10^{-2} و 300 تكرار بوصفه حدًّا أعلى.

د. ماذا يحدث في (ج) عندما يتغير النظام إلى

$$\begin{aligned} x_1 - \qquad\quad 2x_3 &= 0.2 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + \quad x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= -1.425 \\ x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + \quad x_3 &= 2 \end{aligned}$$

20. كرر التمرين (19) مستخدمًا طريقة جاكوبي.

21. أ. برهن أن $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \le \|T\|^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|$ و $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \le \dfrac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$ حيث إن T مصفوفة بحجم $n \times n$ مع $\|T\| < 1$ وأن $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ ، $k = 1, 2, \ldots$ مع $\mathbf{x}^{(0)}$ قيمة عشوائية، $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$، و $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$.

ب. طبّق الحدود في التمرين (1) كلما كان ذلك ممكنًا مستخدمًا المعيار l_∞.

22. أثبت أنه لو كانت A ذات طابع قطري فإن $\|T_j\|_\infty < 1$.

23. برهن المبرهنة (24.7). [تلميح: إذا كانت $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ قيمًا مميزة لـ T_ω فإن $\det T_\omega = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. وبما أن $\det D^{-1} = \det(D - \omega L)^{-1}$ ومنتهي حاصل ضرب مصفوفات هو حاصل ضرب منتهات العوامل، فإن النتيجة تظهر من المعادلة (17.7).]

24. افترض وجود هدف عند أي من $n + 1$ من النقاط متساوية الأبعاد $x_0, x_1, \ldots, x_n$. وعندما يكون الهدف عند الموقع x_i، فإن له الفرصة نفسها للتحرك إلى x_{i-1} أو إلى x_{i-1} دون إمكانية تحركه مباشرةً إلى أي موقع آخر. اعتمد الاحتمالات $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ لهدف ما يبدأ عند الموقع x_i ويصل إلى النقطة اليسرى x_0 قبل وصوله إلى النقطة اليمنى x_n. ومن الواضح أن $P_0 = 1$ و $P_n = 0$. وبما أن الهدف يمكنه أن يتحرك في اتجاه x_i فقط من x_{i-1} أو x_{i+1} باحتمال مقداره $\frac{1}{2}$ لكلٍّ من هذين الموقعين، فإن $P_i = \frac{1}{2}P_{i-1} + \frac{1}{2}P_{i+1}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

أ. أثبت أن

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب. حُلّ هذا النظام مستخدمًا $n = 10, 50, 100$.

ج. غيِّر الاحتمال إلى α و $1 - \alpha$ للحركة إلى اليسار واليمين على التوالي، واشتق نظامًا خطيًا شبيهًا بالذي في (أ).

د. كرِّر (ب) مع $\alpha = \frac{1}{3}$.

25. استخدم الطرائق جميعها القابلة للتطبيق في هذا الفصل في حلِّ النظام الخطي $Ax = b$ ضمن 10^{-5} في المعيار l_∞، حيث عناصر A هي

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{حيث } j = i \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 80 \\ 0.5i, & \text{حيث } \begin{cases} j = i + 2 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 78 \\ j = i - 2 \text{ و } i = 3, 4, \ldots, 80 \end{cases} \\ 0.25i, & \text{حيث } \begin{cases} j = i + 4 \text{ و } i = 1, 2, \ldots, 76 \\ j = i - 4 \text{ و } i = 5, 6, \ldots, 80 \end{cases} \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

و عناصر b هي $b_i = \pi$ لكل $i = 1, 2, \ldots, 80$.

26. افترض أن A إيجابي واضح:

أ. أثبت أنه يمكننا كتابة $A = D - L - L^t$، حيث إن D قطري مع $d_{ii} > 0$ لكل $1 \le i \le n$ ويمثِّل L المثلث السفلي. وأبعد من هذا، أثبت أن $D - L$ غير مفردة.

ب. ليكن $T_g = (D - L)^{-1}L^t$ و $P = A - T_g^t A T_g$، أثبت أن P متماثل.

ج. أثبت أن T_g يمكن كتابته $T_g = I - (D - L)^{-1}A$ أيضًا.

د. ليكن $Q = (D - L)^{-1}A$، أثبت أن $T_g = I - Q$ و $P = Q^t[AQ^{-1} - A + (Q^t)^{-1}A]Q$.

هـ. أثبت أن $P = Q^t DQ$، وأن P إيجابي واضح.

و. لتكن λ قيمة مميزة لـ T_g مع متجه مميز $x \neq 0$. استخدم الفقرة (ب) في إثبات أن $x^t P x > 0$ يؤدي إلى $|\lambda| < 1$.

ز. أثبت أن T_g متقاربة، وبرهن أن طريقة Gauss–Seidel تتقارب.

27. وسِّع طريقة البرهان في التمرين (26) إلى طريقة SOR مع $0 < \omega < 2$.

28. تحقق القوى على دعائم الجسر الموضحة في مقدمة هذا الفصل المعادلات في الجدول الآتي:

المفصل	المركبة الأفقية	المركبة العمودية
①	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - F_2 = 0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - f_3 - \frac{1}{2} f_4 = 0$
③	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 10{,}000 = 0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2} f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2} f_4 - F_3 = 0$

ويمكن وضع هذا النظام الخطي بصيغة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10{,}000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أ. وضِّح لماذا أعيد ترتيب نظام المعادلات.

ب. قرِّب حَلَّ النظام الخطي الناتج ضمن 10^{-2} في المعيار l_∞ مستخدمًا كل متجه عناصره الواحدات و(i) طريقة Gauss–Seidel، (ii) طريقة جاكوبي، و (iii) طريقة SOR مع $\omega = 1.25$.

4.7 حدود الخطأ والتنقية الإرجاعية
Error Bounds and Interative Refinement

يبدو الأمر معقولاً بديهيًا في حال كان $\tilde{x}$ تقريبًا للحلّ x إلى $Ax = b$، وأن متجه البواقي $r = b - A\tilde{x}$ له خاصية كون $\|r\| = \|b - A\tilde{x}\|$ صغيرًا، فإن $\|x - \tilde{x}\|$ سيكون صغيرًا كذلك. هذه الحالة هي الغالبة، ولكن بعض الأنظمة التي تظهر عادةً في التطبيق تفشل في أن يكون لها مثل هذه الصفة.

مثال 1 النظام الخطي $Ax = b$ الآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

له حلّ وحيد $x = (1, 1)^t$. التقريب الضعيف $\tilde{x} = (3, 0)^t$ له متجه بواقي

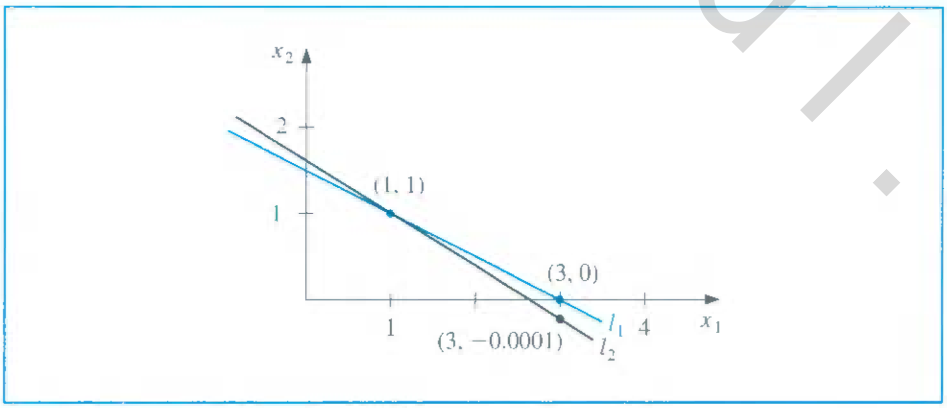
$$r = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0002 \end{bmatrix}$$

ومن ثم $\|r\|_\infty = 0.0002$. ومع كون معيار متجه البواقي صغيرًا، فإن لتقريب $\tilde{x} = (3, 0)^t$ سيكون بلا شك صغيرًا نسبيًا. وفي الحقيقة $\|x - \tilde{x}\|_\infty = 2$. ■

اتضحت الصعوبة في مثال (1) من خلال ملاحظة كون حلّ النظام يمثّل تقاطع الخطين $l_1: x_1 + 2x_2 = 3$ و $l_2: 1.0001x_1 + 2x_2 = 3.0001$.

إن النقطة $(3, 0)$ تقع على l_1، وإن الخطين متوازيان تقريبًا. هذا يؤدي إلى كون $(3, 0)$ قريبة من l_2 أيضًا. على الرغم من أنها تفترق معنويًا عن حلّ النظام المعطى من خلال التقاطع $(1, 1)$ (انظر شكل 7.7)

شكل 7.7



بُني مثال (1) بوضوح لإثبات الصعوبات التي يمكن أن تظهر (وإنها في الواقع تظهر). وفي حالة كون الخطين ليسا متطابقين تقريبًا، فإننا نتوقع أن يعطي متجه بواقٍ صغير تقريبًا دقيقًا. لا يمكننا الاعتماد على الصيغة الهندسية للنظام عمومًا لإعطاء مؤشر عن توقيت ظهور المشاكل