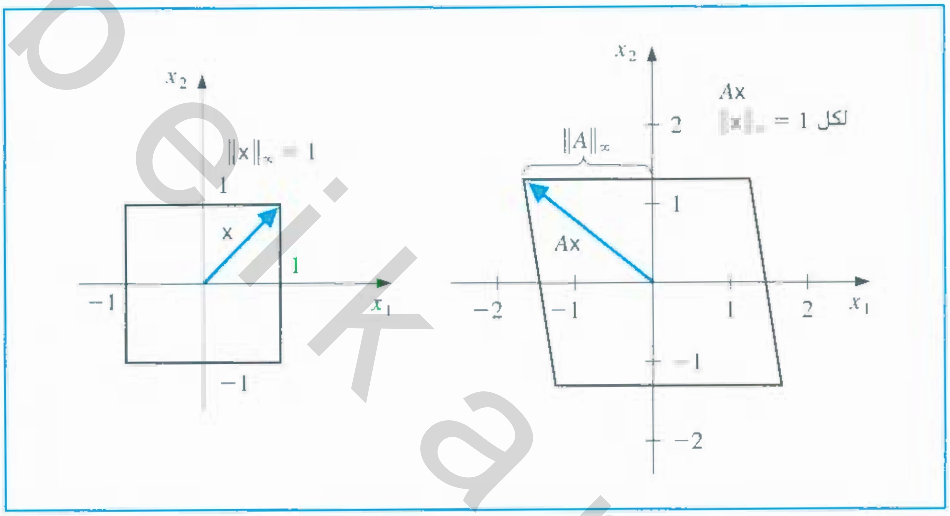
يوضِّح المعيار المعطى لمصفوفة ضمن معيار طبيعي كيف تُوسّع المصفوفة متجهات الباب بالنسبة إلى ذلك المعيار. وتكون التوسعة الكبرى معيارًا للمصفوفة. ومعايير المصفوفة التي نتناولها هنا تكون بالصيغة:

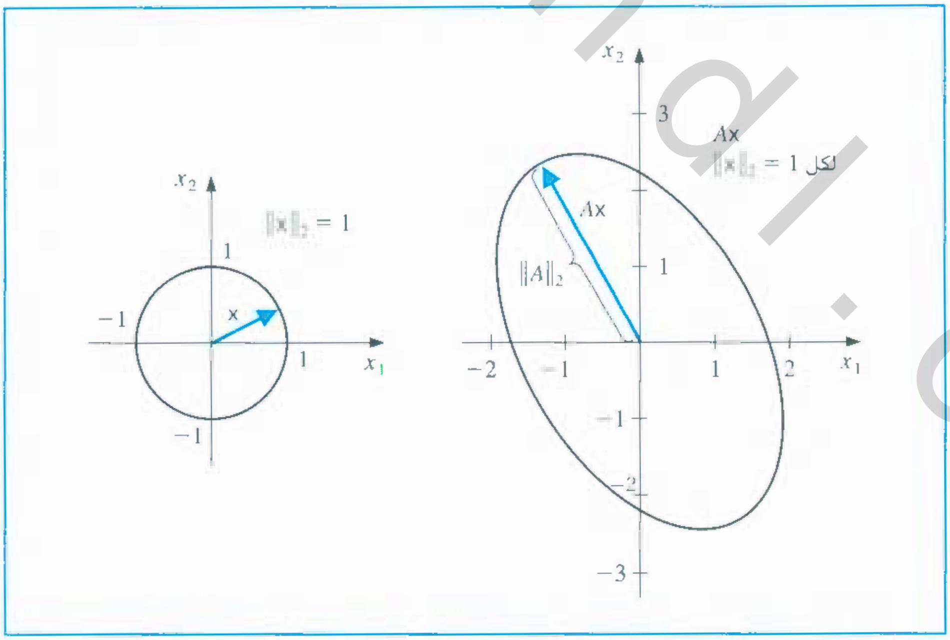
معيار l_∞ هو $\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$، ومعيار l_2 هو $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$.

ويوضِّح الشكلان (4.7 و 5.7) هذه المعايير عندما $n = 2$.

شكل 4.7



شكل 5.7



إن معيار l_∞ لمصفوفة ما يمكن حسابه بسهولة من عناصر المصفوفة.

مبرهنة 11.7 إذا كانت $A = (a_{ij})$ عبارة عن مصفوفة بحجم $n \times n$ فإن

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

■

البرهان نثبت أولًا أن $\|A\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. وليكن x متجهًا بحجم n مع $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| = 1$. وبما أن $A\mathbf{x}$ هو أيضًا متجه بحجم n. فإن

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |(A\mathbf{x})_i| = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\le j\le n} |x_j|$$

ولكن $\max_{1\le j\le n} |x_j| = \|\mathbf{x}\|_\infty = 1$. لذا

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

وتكون النتيجة

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty = 1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{3.7}$$

وسنثبت الآن معكوس المتباينة. أي $\|A\|_\infty \ge \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. ليكن p عددًا صحيحًا مع

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

وأن x متجه بالمكونات

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{إذا كان } a_{pj} \ge 0 \\ -1, & \text{إذا كان } a_{pj} < 0 \end{cases}$$

إذن $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ و $a_{pj}x_j = |a_{pj}|$ لكل $j = 1, 2, \ldots, n$، لذا

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \ge \left| \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| \right| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

وتؤدي هذه النتيجة إلى

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty = 1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \ge \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

التي تعطي مع المتباينة (3.7)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

■ ■ ■

مثال 5 إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\sum_{j=1}^{3}|a_{1j}| = |1| + |2| + |-1| = 4, \quad \sum_{j=1}^{3}|a_{2j}| = |0| + |3| + |-1| = 4$$

و

$$\sum_{j=1}^{3}|a_{3j}| = |5| + |-1| + |1| = 7$$

ولذلك $\|A\|_\infty = \max\{4, 4, 7\} = 7$.

سنكتشف في الفصل الآتي طريقة بديلة لإيجاد معيار l_2 لمصفوفة ما.

مجموعة التمارين 1.7 EXERCISE SET

1. أوجد $\|x\|_\infty$ و $\|x\|_2$ للمتجهات الآتية:
أ. $x = (3, -4, 0, \frac{3}{2})^t$
ب. $x = (2, 1, -3, 4)^t$.
ج. $x = (\sin k, \cos k, 2^k)^t$ لقيمة ثابتة للعدد الصحيح الموجب k.
د. $x = (4/(k+1), 2/k^2, k^2e^{-k})^t$ لقيمة ثابتة للعدد الصحيح الموجب k.

2. أ. تحقّق من كون الدالة $\|\cdot\|_1$ المعرفة على $\mathbb{R}^n$ من خلال $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ معيارًا على $\mathbb{R}^n$.
ب. أوجد $\|x\|_1$ للمتجه المعطى في التمرين (1).
ج. برهن أنه لـ $x \in \mathbb{R}^n$ جميعًا يكون $\|x\|_1 \geq \|x\|_2$.

3. برهن أن المتتاليات الآتية تكون متقاربة. وجد نهاياتها
أ. $x^{(k)} = (1/k, e^{1-k}, -2/k^2)^t$
ب. $x^{(k)} = (e^{-k}\cos k, k\sin(1/k), 3 + k^{-2})^t$
ج. $x^{(k)} = (ke^{-k^2}, (\cos k)/k, \sqrt{k^2+k} - k)^t$
د. $x^{(k)} = (e^{1/k}, (k^2+1)/(1-k^2), (1/k^2)(1+3+5+\cdots+(2k-1)))^t$

4. أوجد $\|\cdot\|_\infty$ للمصفوفات الآتية:
أ. $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$
ج. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5. في الأنظمة الخطية الآتية $Ax = b$، حيث يمثّل x الحل الحقيقي و $\tilde{x}$ الحل التقريبي.
احسب $\|x - \tilde{x}\|_\infty$ و $\|A\tilde{x} - b\|_\infty$.

أ.
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{63}$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{168}$$
$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{6}\right)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.142, -0.166)^t$$

ب.
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1$$
$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2$$
$$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.33, -7.9, 5.8)^t$$

ج.
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1$$
$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2$$
$$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.2, -7.5, 5.4)^t$$

د.
$$0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.06$$
$$0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 0.3$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$$
$$\mathbf{x} = (1.827586, 0.6551724, 1.965517)^t$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (1.8, 0.64, 1.9)^t$$

6. إن معيار المصفوفة $\|\cdot\|_1$ المعرف من خلال $\|A\|_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$، يمكن حسابه باستخدام الصيغة
$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
حيث إن معيار المتجه $\|\cdot\|_1$ معرف في التمرين (2). أوجد $\|\cdot\|_1$ للمصفوفات في التمرين (4).

7. أثبت بمثال أن $\|\cdot\|_{\otimes}$ المعرفة من خلال $\|A\|_{\otimes} = \max_{1 \le i, j \le n} |a_{ij}|$ لا تعرف معيار مصفوفة.

8. أثبت أن $\|\cdot\|_{①}$ المعرفة من خلال
$$\|A\|_{①} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$
هي معيار مصفوفة. أوجد $\|\cdot\|_{①}$ للمصفوفات في التمرين (4).

9. أ. إن معيار Frobenius (وهو ليس معيارًا طبيعيًا.) يعرف للمصفوفة A بحجم $n \times n$ من خلال
$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$
أثبت أن $\|\cdot\|_F$ هي معيار مصفوفة.

ب. أوجد $\|\cdot\|_F$ للمصفوفات في التمرين (4).

ج. لأي مصفوفة A، أثبت أن $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le n^{1/2}\|A\|_2$.

10. عُرف في التمرين (9) معيار Frobenius للمصفوفة. أثبت أنه لأي مصفوفة بحجم $n \times n$ ومتجه $\mathbf{x}$ في $\mathbb{R}^n$ فإن $\|A\mathbf{x}\|_2 \le \|A\|_F\|\mathbf{x}\|_2$.

11. لتكن S مصفوفة positive definite بحجم $n \times n$. عرف $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^t S\mathbf{x})^{1/2}$ لأي $\mathbf{x}$ في $\mathbb{R}^n$. أثبت أن هذا يعرف معيارًا على $\mathbb{R}^n$. [تلميح: استخدم تحليل شولسكي Cholesky factorization لـ S لإثبات أن $\mathbf{x}^t S\mathbf{y} = \mathbf{y}^t S\mathbf{x} \le (\mathbf{x}^t S\mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}^t S\mathbf{y})^{1/2}$].

12. لتكن S مصفوفة غير مفردة، وأن $\|\cdot\|$ أي معيار على $\mathbb{R}^n$. عرف $\|\cdot\|'$ من خلال $\|\mathbf{x}\|' = \|S\mathbf{x}\|$. وأثبت أن $\|\cdot\|'$ هو معيار على $\mathbb{R}^n$ أيضًا.

13. برهن أنه إذا كان $\|\cdot\|$ معيارًا متجهًا على $\mathbb{R}^n$ فإن $\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$ هو معيار مصفوفة.

14. الاقتباس الآتي من مجلة الرياضيات *Mathematics Magazine* [Sz] يعطي اتجاهًا بديلًا لبرهنة متباينة Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz Inequality.

أ. أثبت أنه عندما $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ و $\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$ يكون لدينا

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}} - \frac{y_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{1/2}}\right]^2$$

ب. استخدم النتيجة للفقرة (أ) لإثبات أن

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

2.7 القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues And Eingenvectors

يمكن اعتبار مصفوفة من الشكل $m \times n$ على أنها دالة تستخدم عملية ضرب المصفوفات لتحويل المتجهات بحجم m لمتجهات بحجم n. تأخذ المصفوفة التربيعية A متجهات بحجم n لنفسها. وفي هذه الحالة ثمة متجهات غير صفرية معينة x تكون موازية لـ Ax، الذي يعني وجود ثابت λ مع $A\mathrm{x} = \lambda\,\mathrm{x}$. ولهذه المتجهات يكون لدينا $(A - \lambda I)\mathrm{x} = 0$. وهناك صلة قوية بين هذه الأعداد λ وأرجحية التقارب لطريقة تكرار. وسنأخذ في الحسبان هذه الصلة ضمن هذا الفصل.

تعريف 12.7 إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن كثيرة الحدود المميزة characteristic polynomial لـ A تعرف على النحو الآتي:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$ ■

كثير حدود التميز هذ لا تصف تماما حالة لقيمة المميزة المصفوفة. وكما سنلاحظ ذلك في مثال (2) من الفصل 2.9)

ليس من الصعب إثبات أن p كثيرة حدود برتبة n (انظر التمرين 11)، ومن ثم فله n من الأصفار المختلفة على الأكثر، وبعضها قد يكون مركبًا complex. فإذا كانت λ صفرًا لـ p، فإن $\det(A - \lambda I) = 0$، وتفيد المبرهنة (16.6) بأن النظام الخطي المعرف من خلال $(A - \lambda I)\mathrm{x} = 0$ له حلٌّ مع $\mathrm{x} \neq 0$. نرغب هنا في دراسة الأصفار لـ p والحلول غير الصفرية المقابلة لتلك النظم.

تعريف 13.7 إذا كانت p كثيرة حدود المميزة للمصفوفة A فإن أصفار p هي القيم المميزة للمصفوفة A، وإذا كانت λ قيمة مميزة لـ A، وأن $\mathrm{x} \neq 0$ يتحقق $(A - \lambda I)\mathrm{x} = 0$، فإن x هي متجه مميز لـ A مقابلة للقيمة المميزة λ. ■

التعبير eigen هو من معنى كلمة ألمانة "to own" والتي تماثل (المميزة) باللغة الإنجليزية. كل مصفوفة لها ميزة أو معادلة تميز مع قيم متجهات مميزة او سماتية.

إذا كانت x متجهًا مميزًا مرتبطًا بالقيمة المميزة فإن $A\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x}$، ومن ثم فإن المصفوفة A تأخذ المتجه x إلى قيمة مضاعفة لنفسه. فإذا كانت λ حقيقية و $\lambda > 1$ فإن A لها تأثير في توسعة x بعامل λ . كما يتضح من شكل 6.7 (أ). وإذا كان $0 < \lambda < 1$ فإن A تقلص x بعامل λ. (انظر شكل 7.6 (ب)) وعندما $\lambda < 0$ فإن التأثيرات تكون متشابهة (انظر الشكلين 6.7 (ج)،(د)) على الرغم من أن اتجاه Ax قد عُكِس.

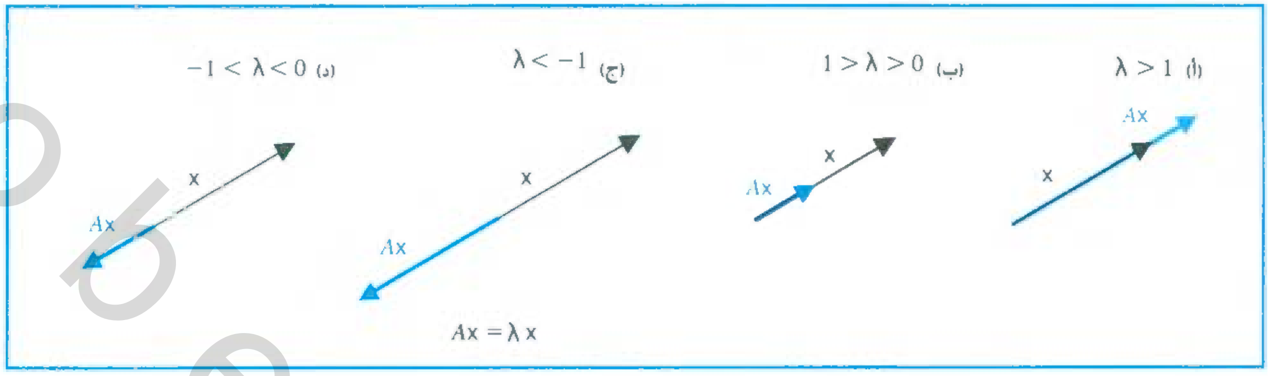
انظر كذلك أنه إذا كان x متجهًا مميزًا لـ A ومرتبطًا بالقيمة المميزة λ، وأن α أي ثابت ليس صفرًا، فإن $\alpha\mathbf{x}$ متجه مميّز أيضًا، لأن

$$A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x}) = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x}).$$

مثال 1 إن كثيرة حدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

شكل 6.7



هو

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$$

ولذلك فإن القيم المميزة لـ A هي $\lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = 2$.

والمتجه المميز $\mathbf{x}_1$ المقابل للقيمة المميزة $\lambda_1 = 3$ عبارة عن حلٍّ للمعادلة $(A - 3 \cdot I)\mathbf{x}_1 = 0$، ومن ثم فإن

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

التي تؤدي إلى $x_1 = 0$ و $x_2 = x_3$.

إن أي قيمة غير الصفر لـ x_3 تعطي متجهًا مميزًا للقيمة المميزة $\lambda_1 = 3$. وعلى سبيل المثال عندما $x_3 = 1$ يكون لدينا المتجه المميز $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1)^t$. أي متجه مميز لـ A مقابل $\lambda = 3$ هو مضروب لاصفري لـ $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1)^t$.

وبالمثل فأي متجه مميز $\mathbf{x} \neq 0$ لـ A مرتبط مع $\lambda_2 = 2$ هو حلٌّ للنظام $(A - 2 \cdot I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ومن ثم

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وفي هذه الحالة لا بد لمتجه المميز أن يحقِّق المعادلة $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ فقط التي يمكن عملها بطرائق مختلفة. وعلى سبيل المثال عندما $x_1 = 0$ يكون لدينا $x_2 = 2x_3$ ومن ثم فإن أحد الخيارات سيكون $\mathbf{x}_2 = (0, 2, 1)^t$. وبإمكاننا اختيار $x_2 = 0$ أيضًا الذي يتطلب كون $x_1 = -2x_3$. لذلك فإن $\mathbf{x}_3 = (-2, 0, 1)^t$ يعطي المتجه المميز الثاني للقيمة المميزة $\lambda_2 = 2$ التي لا تكون من مضاعفات $\mathbf{x}_2$. المتجهات المميزة لـ A والمقترنة بالقيمة المميزة $\lambda_2 = 2$ تولد سطحًا بالكامل موضحًا من خلال المتجهات جميعها ذات الصيغة

$$\alpha \mathbf{x}_2 + \beta \mathbf{x}_3 = (-2\beta, 2\alpha, \alpha + \beta)^t$$

للثابتين العشوائيين α و β، على ألا يكون أحدهما صفرًا على الأقل. ■

ولما كانت القيم المميزة للمصفوفة عبارة عن أصفار كثيرة حدود، فإنها غالبًا أعداد معقدة complex حتى عندما تكون عناصر المصفوفة كافة أعدادًا حقيقية. وعند حدوث ذلك فإن المتجهات المميزة تتضمن أعدادًا معقدة في بعض مكوناتها أيضًا. ويعطي المثال التالي توضيحًا لذلك.

مثال 2

إن كثيرة حدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

هي

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 6\lambda - 4 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 4)$$

القيم المميزة لـ A هي الحلول لـ $p(\lambda) = 0$، وهي

$$\lambda_1 = 1 \text{ ،} \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}i \text{ و } \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$$

المتجه المميز $\mathbf{x}_1$ لـ A المقترن مع $\lambda_1 = 1$ هو حل للمعادلة $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = 0$، وبذلك

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ومن ثم $2x_3 = 0$، $-x_3 = 0$ و $-x_1 + x_2 = 0$

التي تؤدي إلى أن

$x_3 = 0$، $x_2 = x_1$ و x_1 عشوائيًّا.

إن اختيار $x_1 = 1$ يعطي المتجه المميز $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0)^t$ مقترنًا بالقيمة المميزة $\lambda_1 = 1$. ووفقًا لهذا الاختيار، يكون لدينا $\|(1, 1, 0)^t\|_\infty = 1$. فإذا أردنا متجهًا مميزًا بقيمة منتهة في معيار ما آخر، فما علينا سوى الضرب في ثابت مناسب. وعلى سبيل المثال عند ضرب $\mathbf{x}_1$ في المقدار $\sqrt{2}/2$ يعطي المتجه المميز $\hat{\mathbf{x}}_1$ مع معيار l_2 مساوٍ لـ 1:

$$\|\hat{\mathbf{x}}_1\|_2 = \left\| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^t \right\|_2 = 1$$

ولما كان λ_2 و λ_3 عددين معقّدين، فإن المتجهات المميزة المقترنة بها تكون كذلك. ولإيجاد متجه مميز لـ λ_2، نحلُّ النظام

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (1 + \sqrt{3}i) & 0 & 2 \\ 0 & 1 - (1 + \sqrt{3}i) & -1 \\ -1 & 1 & 1 - (1 + \sqrt{3}i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وَحلٌّ واحد لهذا النظام هو المتجه المميز

$$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}i, 1\right)^t$$

وبالمثل فإن المتجه

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}i, -\frac{\sqrt{3}}{3}i, 1\right)^t$$

هو متجه مميز مقترن بالقيمة المميزة $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$. ■

إنّ الحزمة LinearAlgebra في Maple توفر الدالة Eigenvalues لحساب القيم المميزة. الدالة تعطي كلًا من القيم المميزة والمتجهات المميزة المقابلة لها. ولاستخراج نتائج للمصفوفة في مثال (2) ندخل

```
>with(LinearAlgebra);
>A:=Matrix([[1,0,2],[0,1,-1],[-1,1,1]]);
>evalf(Eigenvectors(A));
```

الذي ينتج

$$\begin{bmatrix} 1. + 1.732050808I \\ 1. - 1.732050808I \\ 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. \\ -0.5000000000 & -0.5000000000 & 1. \\ 0.8660254040I & -0.8660254040I & 0. \end{bmatrix}$$

الذي يعطي القيم المميزة

$1 + 1.732050808i$ ، $1 - 1.732050808i$ و 1

مع ما يقابلها من متجهات مميزة معطاة من خلال أعمدة مثل:

$(1, -0.5, 0.8660254040i)^t$ ، $(1, -0.5, 0.8660254040i)^t$ و $(1, 1, 0)^t$

إن مفاهيم القيم المميزة والمتجهات المميزة قُدِّمت هنا من أجل حسابات ملائمة خاصة. ولكن هذه المفاهيم تظهر غالبا في دراسة الأنظمة الفيزيائية. وفي الحقيقة إنها مهمة لرتبة تكفي لتخصيص الباب التاسع لتقريباتها العددية.

تعريف 14.7

نصف القطر الطيفي **spectral radius** $\rho(A)$ للمصفوفة A يُعرف على النحو التالي:

$\rho(A) = \max|\lambda|$ حيث إن λ قيمة مميزة لـ A.

(تذكر أنه عند $\lambda = \alpha + \beta i$ المركبة. يكون لدينا $|\lambda| = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$). ■

ونجد أن المصفوفة في مثال (2)

$$\rho(A) = \max\{1, |1 + \sqrt{3}i|, |1 - \sqrt{3}i|\} = \max\{1, 2, 2\} = 2$$

يرتبط نصف القطر الطيفي spectral radius عن قرب بمعيار المصفوفة. كما يظهر في المبرهنة الآتية:

مبرهنة 15.7

إذا كانت A مصفوفة بحجم $n \times n$ فإن