ومن الممكن إثبات أن المعايير جميعها على $\mathbb{R}^n$ متكافئة بالنسبة إلى التقارب، بمعنى أنه إذا كان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|'$ يمثّلان أي اثنين من المعايير على $\mathbb{R}^n$ وأن $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ لها حدود x بالنسبة إلى $\|\cdot\|$ فإن $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ أيضًا لها حدود x بالنسبة إلى $\|\cdot\|'$. ويمكن برهنة هذه الحقيقة لحالة العامة في [Or2,p.8]. وتُستنتج حالة المعيارين $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ من المبرهنة (7.7).

سنحتاج في البنود اللاحقة من هذا الباب والأبواب الأخيرة إلى طرائق لتحديد المسافة بين مصفوفات بحجم $n \times n$. ويتطلب هذا مرة أخرى استخدامًا لمعيار ما.

تعريف 8.7 إن معيار المصفوفة matrix norm على مجموعة من المصفوفات بحجم $n \times n$ عبارة عن دالة بقيمة حقيقية $\|\cdot\|$ معرفة على هذه المجموعة، وهو يحقق لكل من المصفوفتين A و B بحجم $n \times n$ والأعداد الحقيقية α جميعها الخصائص الآتية:

أ. $\|A\| \geq 0$.

ب. $\|A\| = 0$ (إذا وقفط إذا A كانت O. أي مصفوفة مدخلاتها جميعًا أصفار).

ج. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.

د. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

هـ. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. ■

المسافة بين المصفوفتين A و B بحجم $n \times n$ بالنسبة إلى معيار المصفوفة هذا هي $\|A - B\|$. وعلى الرغم من أن معايير المصفوفة يمكن إيجادها بطرائق مختلفة، إلا أن المعايير الوحيدة التي تهمنا هنا هي تلك التي تكون نتائج طبيعية لمعايير المتجهين l_2 و l_∞. وليس من الصعب إثبات المبرهنة التالية، وقد تركنا برهانها للتمرين (13).

مبرهنة 9.7 إذا كان $\|\cdot\|$ معيارًا متجهًا على $\mathbb{R}^n$ تكون

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

معيار مصفوفة. ■

كل معيار متجه ينتج معيار مصفوفة طبيعيًا يقابله.

ويُسمى هذا معيار مصفوفة طبيعيًا (أو مستحثًّا) natural, or *induced*, matrix norm ومرتبطا بمعيار متجه. وسنعرض في هذا الكتاب أن معايير المصفوفة جميعها هي معايير مصفوفة طبيعية ما لم يذكر خلاف ذلك.

لأي $z \neq 0$، لدينا $x = z/\|z\|$ يمثّل متجه الوحدة. ومن ثم فإن

$$\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{z\neq 0} \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right\| = \max_{z\neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|}$$

ونستطيع بدلًا من ذلك كتابتها

$$\|A\| = \max_{z\neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|} \tag{7.2}$$

وتظهر النتيجة المباشرة للمبرهنة (9.7) من هذا التعبير لـ $\|A\|$.

التمهيدية 10.7 لأي متجه $z \neq 0$، مصفوفة A، وأي معيار طبيعي $\|\cdot\|$، يكون لدينا

$$\|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|$$ ■