بحذف المعيارين l_2 و l_∞ للمتجه $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ على النحو الآتي

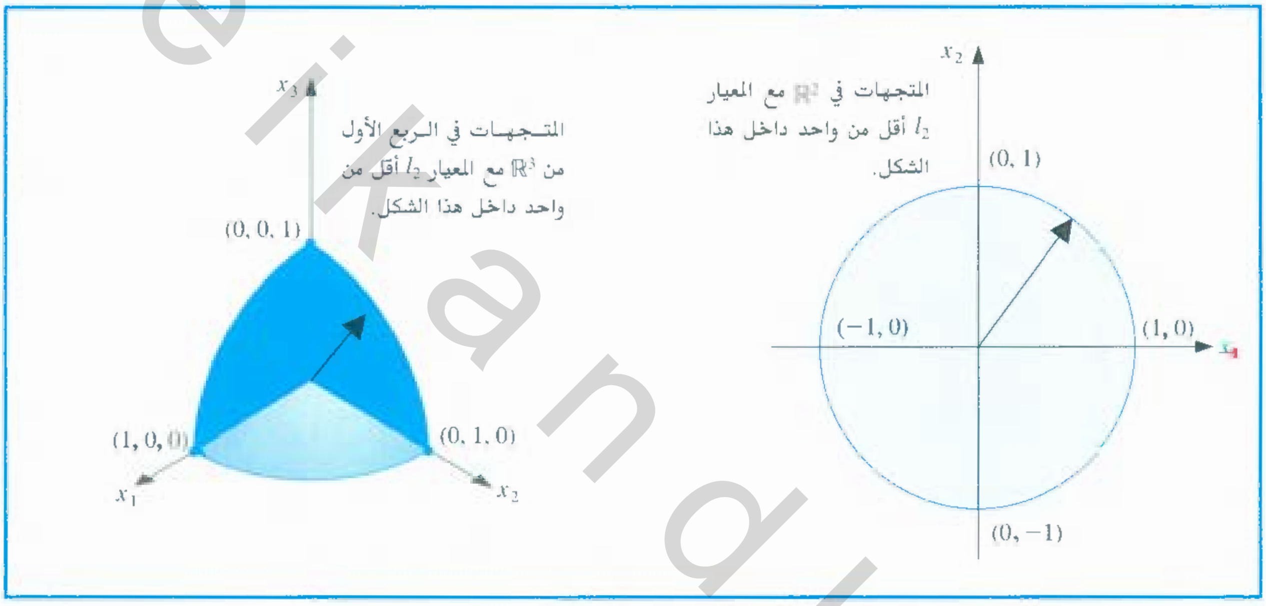
$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \quad \text{و} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$ ■

تعريف 2.7

في المسافة المعيارية يعتبر الخط المستقيم أقصر مسافة ما بين نقطتين. وتسمى بالمسافة الإقليدية، لأنها تعنينا هندسة إقليدية.

يسمى المعيار l_2 معيارًا إقليديًّا Euclidean norm للمتجه $\mathbf{x}$، لأنه يمثّل مفهوم المسافة من نقطة الأصل في حالة كون x في $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, أو $\mathbb{R}^3$. وعلى سبيل المثال فإن معيار l_2 للمتجه $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ يعطي طول الخط المستقيم الواصل ما بين النقطتين $(0, 0, 0)$ و (x_1, x_2, x_3). ويبيّن شكل (1.7) حدود المتجهات في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ التي لها معيار l_2 أقل من 1. وشكل (2.7) هو توضيح مماثل للمعيار l_∞. ■

شكل 1.7



مثال 1

للمتجه $\mathrm{x} = (-1, 1, -2)^t$ في $\mathbb{R}^3$ معايير

$$\|\mathrm{x}\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} \quad \text{و} \quad \|\mathrm{x}\|_\infty = \max\{|-1|, |1|, |-2|\} = 2.$$

ومن السهل أن نرى تحقق خصائص تعريف (1.7) لمعيار l_∞، لأنها تنبع من نفس النتائج لقيم مطلقة. وعلى سبيل المثال فإذا كان $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ و $\mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ فإن

$$\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i + y_i| \le \max_{1\le i\le n} (|x_i| + |y_i|) \le \max_{1\le i\le n} |x_i| + \max_{1\le i\le n} |y_i| = \|\mathrm{x}\|_\infty + \|\mathrm{y}\|_\infty$$

ولكي نثبت أن

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2 \quad \text{لكلٍّ من} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

فإننا نحتاج إلى المتباينة المشهورة التي تقدمها المبرهنة الآتية.