النتيجة التالية لها أهمية خاصة حيث تربط بين قابلية العكس للمصفوفة وطريقة جاوس للحذف.

مبرهنة 16.6 العبارات الآتية جميعها متكافئة للمصفوفة المربعة A من الدرجة $n \times n$:

(أ) للمعادلة $A\mathbf{x} = 0$ حل وحيد $\mathbf{x} = 0$.

(ب) للنظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ حل وحيد لأي متجه $\mathbf{b}$ من البعد n.

(ج) المصفوفة A غير منفردة. أي A^{-1} موجودة.

(د) $\det A \neq 0$.

(هـ) يمكن أن تنفذ عملية الحذف لجاوس بالتبديل الصفي على النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ لأي متجه $\mathbf{b}$ من البعد n.

مجموعة التمارين 4.6 EXERCISE SET

1. استخدم تعريف 14.6 لتحسب محدِّدات المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

2. استخدم تعريف 14.6 لتحسب محدِّدات المصفوفات الآتية:

أ. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

3. كرر التمرين 1 باستخدام الطريقة في مثال 2.

4. كرر التمرين 2 باستخدام الطريقة في مثال 2.

5. أوجد قيم α جميعها التي تجعل المصفوفة الآتية منفردة (غير قابلة للانعكاس):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

6. أوجد قيم α جميعها التي تجعل المصفوفة الآتية منفردة (غير قابلة للانعكاس):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \end{bmatrix}$$

7. أوجد قيم α جميعها بحيث إن النظام الخطي الآتي لا يملك أي حلول:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

8. أوجد قيم α جميعها بحيث يكون للنظام الخطي الآتي ما لانهاية من الحلول:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

9. استخدم الاستقراء الرياضي لتثبت أنه إذا كان $n > 1$ فإن حساب محددة المصفوفة $n \times n$ باستخدام تعريف يتطلب عددًا من عمليات الضرب/ القسمة يساوي $n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$ وعددًا من عمليات الجمع/ الطرح يساوي $n! - 1$.

10. لتكن A مصفوفة 3×3. برهن أنه إذا حصلنا على $\bar{A}$ من A باستخدام أي من العمليات: $(E_1) \leftrightarrow (E_3)$ ، $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$، أو $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$ فإن $\det \bar{A} = -\det A$

11. برهن أن AB غير منفردة إذا وفقط إذا كان كل من A و B غير منفردتين.

12. حُلَّ النظام الخطي

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

بقاعدة كرامر Cramer's rule يعطينا

نشر جبرائيل كرامر
Gabriel Cramer (1704-1752)
قاعدة الحل (كما في التمرين 12) عام 1750
وكانت قد نشرت من قبل ماكلورين
Colin Maclaurin في عام 1748

$$x_1 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_2}{D}$$

$$x_3 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix} \equiv \frac{D_3}{D}, \qquad D = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

أ. أوجد حَلَّ النظام الخطي الآتي باستخدام قاعدة كرامر:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

ب. أثبت أن النظام الخطي

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

ليس له حل. احسب D_1, D_2, D_3.

ج. أثبت أن للنظام الخطي

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

عددًا لانهائيًا من الحلول. احسب D_1، D_2 و D_3.

د. برهن إذا كان النظام الخطي 3×3 فيه $D = 0$ حلول، وأن $D_1 = D_2 = D_3 = 0$

هـ. حدّد عدد عمليات الضرب/ القسمة والجمع/ الطرح اللازمة لاستخدام قاعدة كرامر على النظام الخطي 3×3.

13. أ. عمّم قاعدة كرامر للأنظمة الخطية $n \times n$.

ب. استخدم نتيجة التمرين 9 لحساب عدد عمليات الضرب/ القسمة والجمع/ الطرح اللازمة لاستخدام قاعدة كرامر على الأنظمة $n \times n$.

5.6 تحليل المصفوفات Matrix Factorization

إن طريقة الحذف لجاوس هي الأداة الرئيسة في الحل المباشر لأنظمة المعادلات الخطية، ولذلك فليس مدهشًا ظهورها في صور أخرى. وسنرى في هذا الفصل أن الخطوات المستخدمة في حل نظام على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يمكن استخدامها لتحليل المصفوفة إلى العوامل. إن التحليل إلى العوامل مفيد وخصوصًا عندما يأخذ الصيغة $A = LU$، حيث L مثلثية سفلية، و U مثلثية علوية. وعلى الرغم من عدم امتلاك كل المصفوفات لهذا التمثيل. إلا أن كثيرًا منها يمتلكه، وتظهر كثيرًا في دراسة الطرائق العددية. ولقد وجدنا في الفصل 1.6 أن تطبيق طريقة الحذف لجاوس على أي نظام خطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يتطلب $O(n^3/3)$ من العمليات الحسابية لتحديد $\mathbf{x}$. وعلى كل حال فإن حل النظام الخطي الذي يحوي نظامًا مثلثيًا علويًا يتطلب التعويض الإرجاعي الذي يحتاج إلى $O(n^2)$ من العمليات. إن وضع الأنظمة المثلثية السفلية مشابه، لذلك إذا حلّل A إلى الصيغة المثلثية $A = LU$ فعندئذ يمكننا حل المتجه $\mathbf{x}$ بسهولة أكبر باستخدام عملية ذات خطوتين. أولًا: نفترض $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$، ونحل $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ لإيجاد $\mathbf{y}$. ولما كانت L مثلثية، فإن تحديد $\mathbf{y}$ من هذه المعادلة يحتاج إلى $O(n^2)$ من العمليات. وإذا وجدنا $\mathbf{y}$ فإن النظام المثلثي $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ يتطلب $O(n^2)$ فقط من العمليات الإضافية لإيجاد $\mathbf{x}$. إن هذه الحقيقة تعني أن عدد العمليات اللازمة لحل النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ قد نقص من $O(n^3/3)$ إلى $O(2n^2)$ في الأنظمة الأكبر من 100%، تنقص هذه الطريقة مقدار الحساب بأكثر من 99%؛ لأن $100^2 = 10{,}000 = (0.01)(1{,}000{,}000) = (0.01)(100)^3$.

إن التخفيض باستخدام التحليل إلى العوامل له ثمن؛ إذ إن تحديد المصفوفين الخاصتين L و U يتطلب $O(n^3)$ من العمليات. ولكن في حال حدّد التحليل، فإن الأنظمة ذات المصفوفة A يمكن حلها بالطريقة المبسطة هذه لأي عدد من المتجهات $\mathbf{b}$. ولفحص أي المصفوفات تملك التحليل LU ولتحديدها؛ نفترض أولًا أنه يمكن إجراء طريقة الحذف لجاوس على النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بدون تبديلات صفية. وباستخدام الرموز في الفصل 1.6، فإن هذا يكافئ وجود مراكز دورانية غير صفرية $a_{ii}^{(i)}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. إن الخطوة الأولى في عملية الحذف لجاوس تتألف من تنفيذ العمليات لكل

$$(E_j - m_{j,1}E_1) \longrightarrow (E_j) \quad \text{حيث} \quad m_{j,1} = \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \tag{8.6}$$

إن هـذه العمليـات تحوّل النظـام إلى نظام آخر تكون فيه مدخـلات العمود الأول تحت القطر أصفارًا.

ويمكـن النظر إلى نظام العمليات في المعادلـة (6.8) بطريقة أخرى، بحيث يمكن تحقيقها آنيًّا بضرب المصفوفة الأصلية A عن اليسار في المصفوفة

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتسمى هذه المصفوفة جاوس التحويلية الأولى first Gaussian Transformation matrix.

تحليل المصفوفة إلى عوامل هو طريقة أخرى مهمة من تلك الطرائق التي عرضها جاوس عام 1809 في الطرائق البرهنة Theoria Motus.

سنعبر عن حاصل ضرب هذه المصفوفة في المصفوفة $A \equiv A^{(1)}$ بالرمز $A^{(2)}$ وحاصل الضرب في المتجه $\mathbf{b}$ بالرمز $\mathbf{b}^{(2)}$، لذلك يكون

$$A^{(2)}\mathbf{x} = M^{(1)}A\mathbf{x} = M^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(2)}$$

ونبني $M^{(2)}$ بطريقة مشابهة، وهي المصفوفة المحايدة بعد وضع سوالب المضاعفات

$$m_{j,2} = \frac{a_{j2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

فـي المدخلات تحت القطـر في العمود الثاني تكـون عناصر حاصل ضرب هـذه المصفوفة في المصفوفة $A^{(2)}$ أصفارًا تحت القطر في العمودين الابتدائيين، ومن ثم نضع

$$A^{(3)}\mathbf{x} = M^{(2)}A^{(2)}\mathbf{x} = M^{(2)}M^{(1)}A\mathbf{x} = M^{(2)}M^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(3)}$$

ويوجد $A^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}$ عمومًا، ونضرب في مصفوفة جاوس التحويلية ذات العدد k

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & -m_{k+1,k} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -m_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لنجد

$$A^{(k+1)}\mathbf{x} = M^{(k)}A^{(k)}\mathbf{x} = M^{(k)}\cdots M^{(1)}A\mathbf{x} = M^{(k)}\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k+1)} = M^{(k)}\cdots M^{(1)}\mathbf{b} \quad (9.6)$$

وتنتهي العملية بتكوين $A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$، حيث $A^{(n)}$ هي المصفوفة المثلثية العليا

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

المعطاة بالصيغة $A^{(n)} = M^{(n-1)}M^{(n-2)}\cdots M^{(1)}A$.

تشكل هذه العملية الجزء $U = A^{(n)}$ من تحليل المصفوفة $A = LU$.

ولتحديد المصفوفة الثلاثية السفلى المتممة للتحليل L، تذكر أولاً حاصل ضرب $A^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}$ في مصفوفة جاوس التحويلية $M^{(k)}$ المستخدمة في الحصول على المعادلة (9.6)

$$A^{(k+1)}\mathbf{x} = M^{(k)}A^{(k)}\mathbf{x} = M^{(k)}\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k+1)}$$

حيث تولد $M^{(k)}$ عمليات الصف

$(E_j - m_{j,k}E_k) \to (E_j)$ لكل $j = k+1, \ldots, n$

يتطلب عكس تأثيرات هذا التحويل والرجوع إلى $A^{(k)}$، إجراء العمليات $(E_j + m_{j,k}E_k) \to (E_j)$ لكل $j = k+1, \ldots, n$.

هذا مكافئ للضرب في معكوس المصفوفة $M^{(k)}$ والمصفوفة هي

$$L^{(k)} = [M^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & m_{k+1,k} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,k} & 0 & \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة الثلاثية السفلية L في تحليل A هي حاصل ضرب المصفوفات $L^{(k)}$.

$$L = L^{(1)}L^{(2)}\cdots L^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

ولما كان حاصل ضرب L في المصفوفة الثلاثية العليا $U = M^{(n-1)}\cdots M^{(2)}M^{(1)}A$ يعطي

$$LU = L^{(1)}L^{(2)}\cdots L^{(n-3)}L^{(n-2)}L^{(n-1)} \cdot M^{(n-1)}M^{(n-2)}M^{(n-3)}\cdots M^{(2)}M^{(1)}A$$
$$= [M^{(1)}]^{-1}[M^{(2)}]^{-1}\cdots[M^{(n-2)}]^{-1}[M^{(n-1)}]^{-1} \cdot M^{(n-1)}M^{(n-2)}\cdots M^{(2)}M^{(1)}A = A$$

عندها تنتج المبرهنة (17.6) من هذه الخطوات.

مبرهنة 17.6 إذا أمكن تطبيق طريقة الحذف لجاوس على النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دون تبديل صفي فإن المصفوفة A قابلة للتحليل إلى حاصل ضرب مصفوفة مثلثية سفلى L في مصفوفة مثلثية عليا U

أي $A = LU$، حيث $m_{ji} = a_{ji}^{(i)}/a_{ii}^{(i)}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

مثال 1 لقد تعاملنا مع النظام الخطي الآتي في الفصل (1.6):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}- x_3} + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

إن توالي العمليات

$$(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3)$$

$$(E_4 - (-1)E_1) \to (E_4), (E_3 - 4E_2) \to (E_3), (E_4 - (-3)E_2) \to (E_4)$$

يحوّل النظام إلى الصيغة المثلثية

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}- x_3} + 3x_4 &= 4 \\ -x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 3x_3 + 13x_4 &= 13 \\ -13x_4 &= -13 \end{aligned}$$

إن المضاعفات m_{ij} والمصفوفة المثلثية العليا تنتج التحليل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} = LU$$

إن هذا التحليل يتيح لنا حل أي نظام يحوي A بسهولة، فعلى سبيل المثال لكي تحل

$$A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

نعوض أولاً $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$، ثم $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ بمعنى أن

$$LU\mathbf{x} = L\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

ويُحلّ هذا النظام لإيجاد $\mathbf{y}$ بعملية تعويض أمامي سهلة

$y_1 = 8;$

$2y_1 + y_2 = 7,$ لذا $y_2 = 7 - 2y_1 = -9;$

$3y_1 + 4y_2 + y_3 = 14,$ لذا $y_3 = 14 - 3y_1 - 4y_2 = 26;$

$-y_1 - 3y_2 + y_4 = -7,$ لذا $y_4 = -7 + y_1 + 3y_2 = -26.$

بعد ذلك نحل $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ لإيجاد $\mathbf{x}$ وهو حل النظام الأصلي، أي أن

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 26 \\ -26 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التعويض الإرجاعي نحصل على $x_4 = 2, x_3 = 0, x_2 = -1, x_1 = 3$ ■

إن التحليل إلى العوامل المستخدمة في مثال (1) يسمى طريقة دوليتل Doolittle's method. ويتطلب أن يكون 1 في عناصر قطر L جميعها الذي يؤدي إلى التحليل الذي شرح في المبرهنة (17.6) سنبحث في الفصل (6.6) في طريقة كروات Crout's method التي تتطلب وجود 1 في عناصر قطر U جميعها. وسنبحث في طريقة تشولسكي Cholesky's method التي تتطلب أن يكون $l_{ii} = u_{ii}$ لكل i.

إن الخوارزمية (4.6) تعطي طريقة عامة لتحليل المصفوفات إلى حاصل ضرب مصفوفات مثلثية. وعلى الرغم من إنشاء مصفوفتين جديدتين L وU، فإن القيم الناتجة تحل محل عناصر A المقابلة التي لم تعد هناك حاجة إليها.

تسمح الخوارزمية (4.6) بأن يكون قطر L أو قطر U هو المحدد.

ALGORITHM

الخوارزمية 4.6

تحليل LU Factirization LU

لتحليل المصفوفة $n \times n$ المعبر عنها $A = [a_{ij}]$ لحاصل ضرب مصفوفة مثلثية سفلية $L = [l_{ij}]$ في مصفوفة مثلثية عليا $U = [u_{ij}]$. أي $A = LU$ حيث كل عنصر (مدخله) في لقطر الرئيس في L أو U هو 1 (الوحدة)؛

المدخلات: البعد n. العناصر $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A. حيث $l_{11} = \cdots = l_{nn} = 1$، القطر $u_{11} = \cdots = u_{nn} = 1$ في المصفوفة L أو القطر U في المصفوفة.

المخرجات: العناصر l_{ij} حيث $1 \le i \le n$، $1 \le j \le i$ في المصفوفة L والعناصر u_{ij} حيث $i \le j \le n$ في $1 \le i \le n$ في U.

الخطوة	المضمون
1	اختر l_{11} و u_{11} بحيث $l_{11}u_{11} = a_{11}$. إذا كان $l_{11}u_{11} = 0$ فالمخرجات (التحليل مستحيل). توقف.
2	لكل $j = 2, \ldots, n$ ضع $u_{1j} = a_{1j}/l_{11}$ (الصف الأول في U). $l_{j1} = a_{j1}/u_{11}$ (العمود الأول في L).
3	لكل $i = 2, \ldots, n-1$ نفذ الخطوتين 4 و5.
4	اختر l_{ii} و u_{ii} بحيث $l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$ إذا كان $l_{ii}u_{ii} = 0$ فإن المخرجات (التحليل مستحيل). توقف.
5	لكل $j = i+1, \ldots, n$ ضع $u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right]$ (الصف i في U). $l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}\left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}\right]$ (العمود i في L).

6	اختر l_{nn} و u_{nn} بحيث إن $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$ (ملحوظة: إذا كان $l_{nn}u_{nn} = 0$ فإن $A = LU$، ولكن A منفردة).
7	المخرجات (l_{ij} لكل $j = 1, \ldots, i$ و $i = 1, \ldots, n$)، المخرجات (u_{ij} لكل $j = i, \ldots, n$ و $i = 1, \ldots, n$) توقف.

عندمــا يكتمل تحليل المصفوفة، يوجــد حل النظام الخطي على الصيغة $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ عن طريق وضع $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ أولًا، ثم حُلَّ $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ لإيجاد $\mathbf{y}$.

بما أن L مثلثية سفلية يكون لدينا $y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}}$

ولكل $i = 2, 3, \ldots, n$ يكون

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j\right]$$

وبعــد إيجاد $\mathbf{y}$ بعمليــة التعويض الأمامي هذه، نحل النظــام المثلثي العلوي $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ لإيجاد $\mathbf{x}$ بعملية التعويض الإرجاعي وباستخدام

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \quad \text{و} \quad x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right]$$

لقد افترضنا في الشــرح الســابق أن $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ قابلة للحل باســتخدام طريقة الحذف لجاوس دون مبادلات صفية. ومن وجهة نظر عملية يكون التحليل إلى العوامل مفيدًا فقط عندما لا يكون هناك لــزوم للمبادلات الصفية للتحكم في خطأ تقريب الناتج عن اســتخدام الحســاب منتهي الأرقام. ولحسن الحظ، فإن كثيرًا من الأنظمة التي تقابلنا عند استخدام التقريب هي من هذا النوع. ولكن ســنتعامل الآن مع التعديــلات التي يجب إجراؤها عندما يتطلب الأمر مبادلات صفية. وســنبدأ الشرح بتقديم مجموعة من المصفوفات التي تستخدم لإعادة ترتيب صفوف مصفوفة ما أو تبديلها. مصفــوفــة التبادل (Permutation Matrix) $n \times n$ هي $P = [p_{ij}]$ ناتجة عن تبادل صفوف المصفوفة الحيادية I_n. وإن هذا يعطي مصفوفة في كل صف فيها مدخلة واحدة فقط غير صفرية، وفي كل عمود فيها مدخلة واحدة فقط غير صفرية، وكل قيمة غير صفرية هي 1.

مثال 2 المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

هــي مصفــوفــة التبادل 3×3 لأي مصفوفة A بحجم 3×3، الضرب من اليســار في المصفوفة P ينتج أثر تبادل الصفين الثاني والثالث للمصفوفة A:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

وبالمثل فالضرب من اليمين في المصفوفة A ينتج P عند تبادل العمودين الثاني والثالث للمصفوفة A. ■

تتعلق طريقة الحذف لجاوس بخاصيتين مفيدتين للمصفوفات التبادلية. وضّحت الأولى في مثال السابق. افترض أن $k_1, \ldots, k_n$ هي تبادل للأعداد الصحيحة $1, \ldots, n$. وأن مصفوفة التبادل $P = (p_{ij})$ معرّفة بما يلي:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & j = k_i \text{ إذا كان } \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ملحوظة: ينتج ضرب المصفوفة من جهة اليمين. أي PA تبديل أعمدة A.

فإن (i) PA تنتج تبديل صفوف A

أي أن

$$PA = \begin{bmatrix} a_{k_1 1} & a_{k_1 2} & \cdots & a_{k_1 n} \\ a_{k_2 1} & a_{k_2 2} & \cdots & a_{k_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_n 1} & a_{k_n 2} & \cdots & a_{k_n n} \end{bmatrix}$$

(ii) P^{-1} موجودة ويكون $P^{-1} = P^t$

رأينا في نهاية الفصل 4.6 أنه يمكن لكل مصفوفة غير منفردة A حل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ بطريقة الحذف لجاوس مع إمكانية استخدام مبادلة الصفوف. إذا ما علمنا مبادلات الصيغة اللازمة لحل النظام بطريقة الحذف لجاوس، أمكننا ترتيب المعادلات الأصلية في ترتيب يضمن عدم الحاجة إلى مبادلة صفوف.

يُعاد إذن ترتيب المعادلات في النظام، بحيث يسمح لطريقة الحذف لجوس بالاستمرار دون مبادلات صفية. وإن هذا يحتم وجود مصفوفة تبديل P لكل مصفوفة غير منفردة، بحيث يمكن حل النظام $PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$ دون مبادلة صفية. ولكن يمكن تحليل هذه المصفوفة PA إلى $PA = LU$، حيث L مثلثية سفلية، وU مثلثية علوية. بما أن $P^{-1} = P^t$، يكون لدينا التحليل

$$A = P^{-1}LU = (P^t L)U$$

لا تزال المصفوفة U مثلثية علوية. أما $P^t L$ فليست مثلثية سفلية إلا إذا كان $P = I$.

مثال 3

بما أن $a_{11} = 0$، فإن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

لا تملك تحليلاً LU.

على كل حال، فإن استخدام المبادلة الصفية $(E_2) \leftrightarrow (E_1)$ متبوعًا بالعمليات $(E_3 + E_1) \rightarrow E_3$ ثم $(E_4 - E_1) \rightarrow E_4$ ينتج

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بعد ذلك يعطي $(E_4) \leftrightarrow (E_3)$ متبوعًا بالعملية $E_3 \rightarrow (E_3 - E_2)$ المصفوفة

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وإن مصفوفة التبديل المقترنة بالمبادلات الصفية $(E_2) \leftrightarrow (E_1)$ و $(E_4) \leftrightarrow (E_3)$ هي

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ويمكن تنفيذ طريقة الحذف لجاوس على PA دون مبادلات صفية لتعطي التحليل UL للمصفوفة PA على الصيغة

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

وعليه ينتج

$$A = P^{-1}(LU) = P^t(LU) = (P^tL)U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

■

إن التحليل على الصيغة $A = PLU$ للمصفوفة A يمكن الحصول عليه باستخدام مكتبة الجبر الخطي في مابل بالأمر LUDecomposition(A)

وعندما تنشأ المصفوفة A، فإن الاستدعاء الدالي

```
>(P, L, U) := LUDecomposition(A)
```

سيعطي التحليل، ويخزّن مصفوفة التبديل بوصفها قيمة للمصفوفة P. والمصفوفة المثلثية السفلية بوصفها قيمة، والمصفوفة L المثلثية العلوية بوصفها قيمة للمصفوفة U.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 5.6

1. حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ب. $$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ب. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3. لديك المصفوفات الآتية. أوجد مصفوفة التبديل P بحيث تكون PA قابلة للتحليل إلى حاصل الضرب LU، حيث L مثلثية سفلية عناصر قطرها كلها الباب 1، و U مثلثية علوية:

أ. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ب. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ج. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

د. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. لديك المصفوفات الآتية، أوجد مصفوفة التبديل P بحيث تكون PA قابلة للتحليل إلى حاصل الضرب LU. حيث L مثلثية سفلية عناصر قطرها كلها الباب 1، و U مثلثية علوية:

أ. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

ب. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ج. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

د. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

5. حلِّل المصفوفات الآتية إلى التحليل LU باستخدام خوارزمية التحليل LU حيث $l_{ii} = 1$ لكل i مما يلي:

أ. $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ب. $$\begin{bmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ -2.132 & 4.906 & -7.013 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 \end{bmatrix}$$

ج. $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

د. $$\begin{bmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & -5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & -4.1561 \end{bmatrix}$$

6. حلِّل المصفوفات الآتية إلى التحليل LU باستخدام خوارزمية التحليل LU حيث $l_{ii} = 1$ لـ i جميعها:

أ. $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ب. $$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

ج. $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

د. $\begin{bmatrix} 2.121 & -3.460 & 0 & 5.217 \\ 0 & 5.193 & -2.197 & 4.206 \\ 5.132 & 1.414 & 3.141 & 0 \\ -3.111 & -1.732 & 2.718 & 5.212 \end{bmatrix}$

7. عدّل خوارزمية التحليل LU لكي تكون قابلة للاستخدام بوصفها حلًّا لنظام خطي، ثم حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} 1.012x_1 - 2.132x_2 + 3.104x_3 &= 1.984 \\ -2.132x_1 + 4.906x_2 - 7.013x_3 &= -5.049 \\ 3.104x_1 - 7.013x_2 + 0.014x_3 &= -3.895 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ x_1 + 1.5x_2 \qquad\qquad &= 4.5 \\ -3x_2 + 0.5x_3 \qquad &= -6.6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 2.1756x_1 + 4.0231x_2 - 2.1732x_3 + 5.1967x_4 &= 17.102 \\ -4.0231x_1 + 6.0000x_2 \qquad + 1.1973x_4 &= -6.1593 \\ -1.0000x_1 - 5.2107x_2 + 1.1111x_3 \qquad &= 3.0004 \\ 6.0235x_1 + 7.0000x_2 \qquad - 4.1561x_4 &= 0.0000 \end{aligned}$$

8. عدّل خوارزمية التحليل LU لكي تكون قابلة للاستخدام بوصفها حلًّا لنظام خطي، ثم حُلَّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= 1 \\ \tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{3}{8}x_3 &= 2 \\ \tfrac{2}{5}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{5}{8}x_3 &= -3 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 \qquad &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 6 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 2.121x_1 - 3.460x_2 \qquad + 5.217x_4 &= 1.909 \\ 5.193x_2 - 2.197x_3 + 4.206x_4 &= 0 \\ 5.132x_1 + 1.414x_2 + 3.141x_3 \qquad &= -2.101 \\ -3.111x_1 - 1.732x_2 + 2.718x_3 + 5.212x_4 &= 6.824 \end{aligned}$$

9. أوجد التحليل بالصيغة $A = P^tLU$ للمصفوفات الآتية:

أ. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ب. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

د. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

10. افترض أن $A = P^tLU$ حيث P مصفوفة تبديل، L مصفوفة مثلثية سفلية حيث كل عنصر على القطر هو 1، وU مصفوفة مثلثية علوية.

أ. احسب عدد العمليات اللازمة لحساب P^tLU لمصفوفة معطاة.

ب. برهن أنه إذا احتوت P مبادلات صفية عددها k فإن
$$\det P = \det P^t = (-1)^k$$

ج. استخدم $\det A = \det P^t \det L \det U = (-1)^k \cdot 1 \cdot \det U$ لإيجاد عدد العمليات لتحديد det A بالتحليل.

د. احسب det A، وأوجد عدد العمليات عندما

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

11. أ. برهن أن خوارزمية التحليل LU تتطلب

عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$.

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

ب. برهن أن حل $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$، حيث L مصفوفة مثلثية سفلية في العناصر $l_{ii} = 1$ لكل i يتطلب :

عمليات ضرب/ قسمة عددها $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

وعمليات جمع/ طرح عددها $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

ج. برهن أن حلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ عن طريق تحليل A إلى $A = LU$ أولاً، وأن حلّ $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ و $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ يتطلب عدد العمليات نفسه التي تتطلبه خوارزمية الحذف لجاوس (1.6).

د. أوجد عدد العمليات اللازمة لحل m من الأنظمة الخطية على الصيغة $A\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)}$ لكل $k = 1, \ldots, m$ عن طريق تحليل A أولاً، ثم استخدام الطريقة في الفقرة (جـ) m من المرات.

6.6 أنماط خاصة من المصفوفات Special Types of Matrices

سنحوّل الآن اهتمامنا إلى فئتين من المصفوفات، ويمكن أن نطبق عليهما طريقة الحذف لجاوس تطبيقًا فعالًا دون مبادلات صفية.

الفئة الأولى توصف من خلال التعريف الآتي:

تعريف 18.6

في كل صف من صفوف المصفوفة ذات القطر السائد بالكامل يكون مقدار كل عنصر في القطر الرئيس أكبر من مجموع مقادير عناصر ذلك الصف، مقدار العنصر هو القيمة المطلقة لذلك العنصر

تُسمى المصفوفة A ذات $n \times n$ مصفوفة ذات قطر سائد بالكامل (Strictly diagonally dominant) إذا كان

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. ■

مثال 1

لديك المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة غير المتماثلة A هي ذات قطر سائد بالكامل؛ لأن $|7| > |2| + |0|$ و $|5| > |3| + |-1|$ و $|-6| > |0| + |5|$.

أما المصفوفة المتماثلة B فهي ليست ذات قطر سائد بالكامل؛ لأنه في الصف الأول على سبيل المثال $|6| < |4| + |-3| = 7$.

ومما يثير الدهشة أن A^t ليست ذات قطر سائد بالكامل؛ لأن الصف الأوسط للمصفوفة A^t هو $[2\ 5\ 5]$، وكذلك فإن B^t التي تساوي B بدهيًا ليست ذات قطر سائد بالكامل أيضًا. ■

استخدمت المبرهنة الآتية في الفصل 4.3 لضمان وجود حلول وحيدة للأنظمة الخطية المطلوبة لتحديد استكمالات الشريحة المكعبة.

مبرهنة 19.6 كل مصفوفة ذات قطر سائد بالكامل غير منفردة. ويمكن بالإضافة إلى ذلك تنفيذ طريقة الحذف لجاوس على أي نظام خطي على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ للحصول على حله الوحيد دون مبادلات صفية أو عمودية. كما ستكون حسابات نمو أخطاء تقريب مستقرة. ■

البرهان نستخدم البرهان بالتناقض لنثبت أن A غير منفردة. افترض أن النظام الخطي الموصوف بالصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. وافترض أن حلًّا غير صفري $\mathbf{x} = (x_i)$ لهذا النظام موجود.

افترض k مؤشرًا له

$$0 < |x_k| = \max_{1 \le j \le n} |x_j|$$

بما أن $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

يكون لدينا عندما $i = k$

$$a_{kk} x_k = -\sum_{\substack{j=1,\\ j \ne k}}^{n} a_{kj} x_j$$

إن هذا يتضمن

$$|a_{kk}||x_k| \le \sum_{\substack{j=1\\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}||x_j| \quad \text{او} \quad |a_{kk}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \le \sum_{\substack{j=1\\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}|$$

إن هذه المتراجحة تناقض خاصية أن A ذات قطر سائد بالكامل. ومن ثم فإن الحل الوحيد للنظام $A\mathbf{x} = 0$ هو $\mathbf{x} = 0$، وهذه الحالة مكافئة لخاصية A غير المنفردة وفق المبرهنة (16.6)

لبرهنة أن طريقة الحذف لجاوس يمكن تطبيقها دون مبادلة صفية. سنثبت أن كلًّا من المصفوفات $A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots, A^{(n)}$ التي تولّدت بطريقة الحذف لجاوس (كما وصفت في الفصل 5.6) هي ذات قطر سائد بالكامل.

بما أن A ذات قطر سائد بالكامل. فإن $a_{11} \ne 0$ و $A^{(2)}$ يمكن تركيبها. وهكذا لكل $i = 2, 3, \ldots, n$ يكون

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad \text{لكل} \quad 2 \le j \le n$$

بما أن $a_{i1}^{(2)} = 0$، فإن

$$\sum_{\substack{j=2\\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}^{(2)}| = \sum_{\substack{j=2\\ j \ne i}}^{n} \left| a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right| \le \sum_{\substack{j=2\\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}^{(1)}| + \sum_{\substack{j=2\\ j \ne i}}^{n} \left| \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right|$$

$$< |a_{ii}^{(1)}| - |a_{i1}^{(1)}| + \frac{|a_{i1}^{(1)}|}{|a_{11}^{(1)}|} \sum_{\substack{j=2\\ j \ne i}}^{n} |a_{1j}^{(1)}| < |a_{ii}^{(1)}| - |a_{i1}^{(1)}| + \frac{|a_{i1}^{(1)}|}{|a_{11}^{(1)}|} (|a_{11}^{(1)}| - |a_{1i}^{(1)}|)$$

$$= |a_{ii}^{(1)}| - \frac{|a_{i1}^{(1)}||a_{1i}^{(1)}|}{|a_{11}^{(1)}|} \le \left| a_{ii}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)} a_{1i}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right| = |a_{ii}^{(2)}|$$

إن هذا يثبت خاصية القطر السائد بالكامل في الصفوف n ، ...، 2، ولما كان الصف الأول للمصفوفة $A^{(2)}$ هو نفسه للمصفوفة A. فهذا يعني أن $A^{(2)}$ ذات قطر سائد بالكامل.
يستمر تنفيذ هذه العملية بالاستقراء حتى الحصول على المصفوفة المثلثية العلوية ذات القطر السائد بالكامل $A^{(n)}$. ■ ■ ■

ويتضمن هذا أن عناصر القطر جميعها غير صفرية، ومن ثم يمكن تنفيذ عملية الحذف لجاوس دون مبادلات صفية.

إن إثبات استقرار هذه العملية يمكن الرجوع إليه في [We].

الفئة الثانية من المصفوفات الخاصة هي موجبة التحديد.

تعريف 6 20 يقال للمصفوفة A إنها موجبة التحديد (Positive definite) إذا كانت متماثلة، وكان $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ لكل متجه $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. ■

يشير التعبير موجب التحديد إلى حقيقة أن العدد $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ يجب أن يكون موجبا لكل $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

لا يرى كل المؤلفين ضرورة التماثل لمصفوفة موجبة التحديد. وعلى سبيل المثال فإن Golub و Van Loan [GV]. اللذين يعدان مرجعين رئيسين لطرائق المصفوفات ضرورة $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ لكل $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ وتسمى المصفوفات من نوع موجبة التحديد موجبة التحديد المتماثلة في [GV]. خذ هذا التوضيح في الحسبان إذا كنت تستخدم مواد من مصادر أخرى.

ولكي نكون دقيقين، فإن تعريف (6.20) يجب أن يحدد بأن المصفوفة 1×1 قد تولدت بالعملية $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ التي لها قيمة موجبة لعنصرها الوحيد، لأن العملية تنفذ بشكل الآتي:

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \right]$$

مثال 2 تكون المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

موجبة التحديد عند افتراضنا أن $\mathbf{x}$ عبارة عن أي متجه عمودي بالبعد الثالث. لذلك

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^t A\mathbf{x} &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2\end{aligned}$$

و

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0,$$

إلا إذا كان $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. ■

ويجب أن يكون واضحًا من مثال 2 أن استخدام تعريف لتقرير ما إذا كانت المصفوفة موجبة التحديد Positive definite قد يؤدي إلى صعوبات. ولحسن الحظ، توجد معايير أسهل ستناقش في الباب 9، لتحديد أفراد هذه الفئة المهمة.

تبين النتيجة الآتية بعض الشروط التي يمكن استخدامها لاستبعاد بعض المصفوفات.

مبرهنة 21.6 إذا كانت A مصفوفة $n \times n$ موجبة التحديد:

أ. يوجد معكوس للمصفوفة A.

ب. إن العناصر $a_{ii} > 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

ج. $\max_{1\le k,j\le n} |a_{kj}| \le \max_{1\le i\le n} |a_{ii}|$

د. $(a_{ij})^2 < a_{ii}a_{jj}$ لكل $i \neq j$. ■

البرهان أ. إذا كان $\mathbf{x}$ يحقق $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ فإن $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = 0$. ولما كانت A موجبة التحديد فإن $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ لها الحل الصفري فقط. ومن ثم A غير منفردة (لها معكوس).

ب. لأي i، ضع $\mathbf{x} = (x_j)$ وعرّفها كما يلي:

$x_i = 1$ و $x_j = 0$ إذا كان $j \neq i$.

بما أن $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ فإن

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = a_{ii}$$

ج. لكل $k \neq j$ عرّف $\mathbf{x} = (x_i)$ كما يلي:

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } i \neq k \text{ و } i \neq j \\ 1, & \text{إذا كان } i = j \\ -1, & \text{إذا كان } i = k \end{cases}$$

بما أن $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$، فإن

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = a_{jj} + a_{kk} - a_{jk} - a_{kj}$$

ولكن $A^t = A$ لذا فإن $a_{jk} = a_{kj}$

و

$$2a_{kj} < a_{jj} + a_{kk}. \tag{10.6}$$

والآن عرّف $\mathbf{z} = (z_i)$ كما يلي:

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } i \neq k \text{ و } i \neq j \\ 1, & \text{إذا كان } i = k \text{ أو } i = j \end{cases}$$

عندئذ $\mathbf{z}^t A\mathbf{z} > 0$ لذلك

$$-2a_{kj} < a_{kk} + a_{jj} \tag{11.6}$$

إن المعادلتين (10.6) و (11.6) تتضمنان لكل $j \neq k$.

$$|a_{kj}| < \frac{a_{kk} + a_{jj}}{2} \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_{ii}| \quad \text{لذلك} \quad \max_{1\leq k,j\leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_{ii}|$$

د. لكل $j \neq i$، عرّف $\mathbf{x} = (x_k)$ كما يلي:

$$x_k = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } k \neq j \text{ و } k \neq i \\ \alpha, & \text{إذا كان } k = i \\ 1, & \text{إذا كان } k = j \end{cases}$$

حيث تمثل α عددا حقيقيًا مهما اتفق.

بما أن $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$، فإن

$$0 < \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = a_{ii}\alpha^2 + 2a_{ij}\alpha + a_{jj}$$

وبالنظر إلى $P(\alpha) = a_{ii}\alpha^2 + 2a_{ij}\alpha + a_{jj}$ بافتراض كثيرة حدود تربيعية في α ذي الجذور غير الحقيقية، فإن المميزة لـ $P(\alpha)$ يجب أن تكون سالبة.

وهكذا فإن $\quad a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj} \quad$ و $\quad 4a_{ij}^2 - 4a_{ii}a_{jj} < 0$ ■ ■ ■

ومع أن المبرهنة (21.6) تعطي بعض الشروط المهمة التي يجب أن تتحقق في صفوفات الموجبة التحديد، إلا أنها لا تضمن للمصفوفة التي تحقق هذه الشروط أن تكون موجبة التحديد.

إن المفهوم الآتي سيستخدم استخدام الشرط الضروري والكافي:

تعريف 22.6 تعرّف المصفوفة الجزئية المتقدمة الرئيسة A (leading principal submatrix) على أنها مصفوفة من النوع

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

لعدد ما $1 \leq k \leq n$. ■

إن برهان النتيجة الآتية موجود في [stew 2,p.250].

تمهيدية 23.6 تكون المصفوفة المتماثلة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا كانت مصفوفاتها جميعها جزئية متقدمة رئيسة ذات محددات موجبة. ■

مثال 3 استخدمنا في مثال (2) تعريف لبرهنة أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

موجبة التحديد.

ولكي نؤكد هذا باستخدام المبرهنة 23.6، انظر أن

$$\det A_1 = \det[2] = 2 > 0$$

$$\det A_2 = \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

و

$$\det A_3 = \det\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - (-1)\det\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2(4-1) + (-2+0) = 4 > 0$$ ■

إن أمر مابل Maple في مكتبة الجبر الخطي

```
>IsDefinite(A, query = 'positive_definite')
```

يعطي "صحيحة" true إذا كانت المصفوفة A المدخلات الحقيقية جميعها موجبة التحديد، فيما عدا ذلك يعطي "خطأ" false بوصفها إشارة للتحديد الموجب.

وبالتلاؤم مع تعريفنا فإن التماثل مطلوب للحصول على نتيجة صحيحة true.

تعطي النتيجة الآتية تعميمًا للفقرة (أ) للمبرهنة (21.6)، وتوازي النتائج الخاصة بالقطر السائد المعطاة في المبرهنة (14.6). ولن نعطي برهانًا لهذه المبرهنة؛ لأنها تتطلب تقديم مصطلحات ونتائج غير ضرورية لأي غرض آخر.

إن تطوير هذه المبرهنة وبرهانها موجودان في [We,p.120ff].

مبرهنة 24.6 المصفوفة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا أمكن إجراء عملية الحذف لجاوس دون مبادلات صفية على النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ حيث التمحور موجب. ■

وفي هذه الحالة، وبالإضافة إلى ذلك فإن الحسابات الخاصة بأخطاء تقريب مستقرة.

وإن بعض الحقائق الممتعة التي لا يكشف عنها برهان المبرهنة (24.6) تُعرض في النتائج الآتية:

تمهيدية 25.6 المصفوفة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا أمكن تحليل A على الصيغة LDL^t، حيث L مصفوفة مثلثية سفلية بعناصر القطر كلها 1، و D مصفوفة قطرية بعناصر القطر الموجبة. ■

تمهيدية 26.6 تكون المصفوفة A موجبة التحديد إذا وفقط إذا أمكن تحليلها على الصيغة LL^t، حيث L مثلثية سفلية بعناصر القطر كلها غير الصفرية. ■

إن المصفوفة L في النتيجة (26.6) ليست هي نفسها في النتيجة (25.6). وهناك علاقة بينهما تعرض في التمرين (32). إن الخوارزمية (5.6) مبنية على خوارزمية التحليل LU (4.6)، وتنتج التحليل LDL^t الموصوف في النتيجة (25.6).

ALGORITHM
الخوارزمية
5.6

التحليل LDL^t LDL^t Factorization

لتحليل المصفوفة $n \times n$ موجبة التحديد A بالصيغة LDL^t، حيث L مصفوفة مثلثية سفلية بعناصر القطر كلها 1، و D مصفوفة قطرية بعناصر القطر كلها الموجبة:
المدخلات: البعد n، العناصر المدخلة a_{ij} لكل $1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A.
المخرجات: العناصر الدخلة l_{ij}، لكل $1 \le j < i$ و $1 \le i \le n$ للمصفوفة L و d_i لكل $1 \le i \le n$ للمصفوفة L، و d_i لكل $1 \le i \le n$ للمصفوفة D.

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1,\dots, n$، نفّذ الخطوات 2-4.
2	لكل $j = 1,\dots, i-1$ ضع $v_j = l_{ij}d_j$.
3	ضع $d_i = a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}v_j$.
4	لكل $j = i+1,\dots, n$ ضع $l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}v_k)/d_i$
5	المخرجات (l_{ij} لكل $i = 1,\dots, n$ و $j = 1,\dots, i-1$) المخرجات (d_i لكل $i = 1,\dots, n$) توقف.

للنتيجة 25.6 نتيجة مقابلة عندما تكون A متماثلة، ولكنها ليست بالضرورة موجبة التحديد. إن هذه النتيجة واسعة التطبيق؛ لأن المصفوفات المتماثلة شائعة، ويمكن تعرفها بسهولة.

27.6 تمهيدية

لتكن A مصفوفة متماثلة $n \times n$ يمكن أن نطبق عليها عملية الحذف لجاوس دون مبادلات صفية، ويمكن تحليل A إلى LDL^t، حيث L مثلثية سفلية كل عناصر قطرها 1، و D لمصفوفة القطرية عناصر قطرها $a_{11}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(n)}$.

يمكن تعديل الخوارزمية (5.6) لتحليل المصفوفات في النتيجة (27.6). وإنها تتطلب بكل سهولة فحصًا إضافيًّا لضمان أن العناصر القطرية غير صفرية. إن خوارزمية تشولسكي (6.6) تنتج التحليل LL^t الموصوف في النتيجة (26.6).

آندريه – لويس تشولسكي كان قائدًا عسكريًا فرنسيًا، وكان مسؤولًا عن المساحة. وفي عام 1900 Andre - Louis Cho-) 1918 - 1875(lesky طوّر طريقة التحليل لحساب حلول مسائل التربيعات الصغرى.

ALGORITHM
الخوارزمية
6.6

تشولسكي Cholesky

لتحليل المصفوفة موجبة التحديد A من نوع $n \times n$ لـ LL^t حيث L مثلثية سفلية:
المدخلات: البعد n. العناصر المدخلة a_{ij} لكل $1 \le i, j \le n$ للمصفوفة A.
المخرجات: العناصر الدخلة l_{ij}، لكل $1 \le j \le i$ و $1 \le i \le n$ للمصفوفة L (مدخلات $U = L^t$ هي $u_{ij} = l_{ji}$ لكل $i \le j \le n$ و $1 \le i \le n$).

الخطوة	المضمون
1	ضع $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$.
2	لكل $j = 2,\dots, n$ ضع $l_{j1} = a_{j1}/l_{11}$.
3	لكل $i = 2,\dots, n-1$ نفّذ الخطوتين 5 و 4.
4	ضع $l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{1/2}$

5	لكل $j = i+1, \ldots, n$ ضع $l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}\right) / l_{ii}$
6	ضع $l_{nn} = \left(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2\right)^{1/2}$
7	المخرجات (l_{ij} لكل $i = 1, \ldots, n$ و $j = 1, \ldots, i$) توقف.

■

إن تحليل تشولسكي للمصفوفة A يحسب من مكتبة الجبر الخطي باستخدام عبارة Maple

```
>L:=LUDecomposition(A, method='Cholesky')
```

ويعطي المصفوفة المثلثية السفلية L بوصفها مخرجًا.

مثال 4 المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}$$

موجبة التحديد. إن التحليل LDL^t للمصفوفة A المعطى في الخوارزمية (5.6) هو

$$A = LDL^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وخوارزمية تشولسكي (6.6) تعطي التحليل

$$A = LL^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

إن التحليل LDL^t الموصوف في الخوارزمية (5.6) يتطلب عمليات ضرب/قسمة عددها $n^3/6 + n^2 - 7n/6$ وعمليات جمع/طرح عددها $n^3/6 - n/6$.

ويتطلب تحليل تشولسكي LL^t للمصفوفة موجبة التحديد عمليات ضرب/قسمة عددها $n^3/6 + n^2/2 - 2n/3$، وعمليات جمع/ طرح عددها $n^3/6 - n/6$.

لكن المزية الحسابية لتحليل تشولسكي مضللة، لأنها تتطلب إجراء n من الجذور التربيعية. لكن عدد العمليات اللازمة لحساب n، من الجذور التربيعية هو عامل خطي في n وسيتناقض بشدة مع زيادة n.

توفر الخوارزمية (5.6) طريقة مستقرة لتحليل المصفوفة موجبة التحديد بالصيغة $A = LDL^t$، ولكن يجب تعديلها لحل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

ولعمل ذلك، نحذف عبارة توقف STOP من الخطوة 5 في الخوارزمية. ونضيف الخطوات الآتية لحلِّ النظام المثلثي السفلي $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

6	ضع $y_1 = b_1$.
7	لكل $i = 2, \ldots, n$ ضع $y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$

بعد ذلك يمكن حل النظام الخطي $D\mathbf{z} = \mathbf{y}$.

8	لكل $i = 1, \dots, n$ ضع $z_i = y_i / d_i$.

أخيرًا يُحلّ النظام المثلثي العلوي $L^t\mathbf{x} = \mathbf{z}$ بالخطوات:

9	ضع $x_n = z_n$.
10	لكل $i = n-1, \dots, 1$ ضع $x_i = z_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j$.
11	المخرجات (x_i لكل $i = 1, \dots, n$). توقف.

يظهر جدول (3.6) العمليات الإضافية اللازمة لحل النظام الخطي.

جدول 3.6

الخطوة	الضرب/القسمة	الجمع/الطرح
6	0	0
7	$n(n-1)/2$	$n(n-1)/2$
8	n	0
9	0	0
10	$n(n-1)/2$	$n(n-1)/2$
المجموع	n^2	$n^2 - n$

إذا فضّل تحليل تشولسكي المعطى في الخوارزمية 6.6 فإن الخطوات الإضافية لمطلوبة لحل النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ هي كما يلي: أولًا: احذف عبارة توقف STOP من الخطوة 7 ثم أضف:

8	ضع $y_1 = b_1 / l_{11}$.
9	لكل $i = 2, \dots, n$ ضع $y_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j\right) / l_{ii}$.
10	ضع $x_n = y_n / l_{nn}$.
11	لكل $i = n-1, \dots, 1$ ضع $x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j\right) / l_{ii}$.
12	المخرجات (x_i لكل $i = 1, \dots, n$). توقف.

تحتاج الخطوات 8-12 إلى عمليات ضرب/ قسمة عددها $n^2 + n$ وعمليات جمع / طرح عددها $n^2 - n$.

إن فئة المصفوفات التي افتُرضت تسمى مصفوفات طوقية (band matrices) في معظم التطبيقات وهي أيضا مصفوفات قطرية حتمًا أو موجبة التحديد.

تسمى المصفوفة $n \times n$ مصفوفة طوقية إذا وجد عددان صحيحان q و p، حيث $1 < p, q < n$ في الخاصية $a_{ij} = 0$ عندما $p \le j - i$ أو $q \le i - j$.

تعريف 28.6

تسمى المصفوفة $n \times n$ مصفوفة طوقية إذا وجد عددان صحيحان q و p، حيث $1 < p, q < n$ في الخاصية $a_{ij} = 0$ عندما $p \le j - i$ أو $q \le i - j$. إن طول طوق (bandwidth) المصفوفة الطوقية هو $w = p + q - 1$. ■

يأتي اسم مصفوفة طوقية من حقيقة أن عناصر غير الصفرية جميعها تقع في طوق يتمركز حول القطر الرئيس

إن العدد p يصف عدد الأقطار أعلى القطر الرئيس ومتضمنًا إياه، بحيث تقع العناصر غير الصفرية عليها. والعدد q يصف عدد الأقطار تحت القطر الرئيس ومتضمنا إياه، بحيث تقع العناصر غير الصفرية عليها. فعلى سبيل المثال المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة طوقية فيها $p = q = 2$ وطول الطوق $3 = 1 - 2 + 2$.

إن تعريف المصفوفة الطوقية تجبر تلك المصفوفات على تركيز عناصرها غير الصفرية جميعها حول القطر. وهناك حالتان خاصتان من المصفوفات الطوقية المتكررة. وهما اللتان يكون فيهما $p = q = 2$ و $p = q = 4$.

إن المصفوفات التي فيها طول الطوق 3 والتي تحدث عندما $p = q = 2$ تُسمى ثلاثية الأقطار (tridiagonal)؛ لأنها تكون على الصيغة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ستُعالَج المصفوفات الثلاثية الأقطار في الباب 11، بربطها بدراسة التقريب الخطي المنقطع لمسائل القيم الحدودية. ستستخدم حالة $p = q = 4$ لحل مسائل القيم الحدودية عندما تتخذ الدالة التقريبية صيغ الشريحة التكعيبية.

من الممكن تبسيط خوارزميات التحليل على نحو كبير في حالة المصفوفات الطوقية؛ لأن عددًا كبيرًا من الأصفار يظهر في هذه المصفوفات في صيغها المنتظمة. وعليك أن تناظر الصيغة التي تتخذها عملية كراوت Crout أو دوليتل Doolittle في هذه الحالة.

ولشرح هذه الحالة، افترض أن المصفوفة الثلاثية القطر A قابلة للتحليل إلى المصفوفات المثلثية U و L، وبما أن A فيها $(3n - 2)$ من المدخلات غير الصفرية فقط. فإن هناك $(3n - 2)$ فقط من الحالات اللازم تطبيقها لتحديد مدخلات U و L، على شرط الحصول على المدخلات الصفرية في A. افترض إمكانية الحصول على المصفوفات بالصيغة:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix}$$

يوجد $(2n - 1)$ من المدخلات غير المحددة في L و $(n - 1)$ من المدخلات غير المحددة في U التي مجموعها عدد الحالات $(3n - 2)$.

فنحصل على المدخلات الصفرية في A تلقائيًا.

إن عملية الضرب المتضمنة في $A = LU$ تعطينا بالإضافة إلى المدخلات الصفرية الـمخلات الآتية :

$$a_{11} = l_{11}$$

$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1} \quad \text{لكل } i = 2, 3, \ldots, n \qquad (12.6)$$

$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii} \quad \text{لكل } i = 2, 3, \ldots, n \qquad (13.6)$$

و

$$a_{i,i+1} = l_{ii}u_{i,i+1} \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (14.6)$$

ويمكـن إيجاد حـل لهذا النظام باسـتخدام المعادلة (12.6) أولاً للحصـول على الحدود غير الصفريـة جميعها خارج القطر في L، ثم باسـتخدام المعادلتـين (13.6) و (14.6) لـلحصول على المدخلات المتبقية في L و U على نحو متبادل.
ويمكن تخزين هذه المدخلات في مدخلات A المقابلة.

إن الخوارزميـة (7.6) تحـل نظـام المعـادلات $n \times n$ ذي مصفوفة معاملات ثلثيـة. إن هذه الخوارزمية تتطلب $(5n - 4)$ فقط من عمليات الضرب/ القسمة و $(3n - 3)$ من عمليات الجمع/ الطرح. ومن ثم فإن لها مزية حسـابية في الطرائق الأخرى التي لا تسـتخدم الخاصية المثلثية للمصفوفة.

طريقة كراوت لتحليل الأنظمة الخطية ثلاثية الأقطار

Crout Factorization for Tridiagonal Linear Systems

ALGORITHM
الخوارزمية
7.6

لحلّ النظام الخطي $n \times n$

$$\begin{array}{lll}
E_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = a_{1,n+1} \\
E_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = a_{2,n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
E_{n-1}: & a_{n-1,n-2}x_{n-2} + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = a_{n-1,n+1} \\
E_n & a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n & = a_{n,n+1}
\end{array}$$

ومن المفترض أن له حلًّا وحيداً.

المدخلات: البعد n، مدخلات A

المخرجات: الحل $x_1, \ldots, x_n$.

(الخطوات 1-3 وحل $Lz = b$.)

الخطوة	المضمون
1	ضع $l_{11} = a_{11}$ $u_{12} = a_{12}/l_{11}$ $z_1 = a_{1,n+1}/l_{11}$
2	لكل $i = 2, \ldots, n-1$ ضع $l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$ (الصف i في L) $l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}$ $u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii}$ (العمود $(i+1)$ في U) $z_i = (a_{i,n+1} - l_{i,i-1}z_{i-1})/l_{ii}$
3	ضع $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$ (الصف n في L) $l_{nn} = a_{nn} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}$ $z_n = (a_{n,n+1} - l_{n,n-1}z_{n-1})/l_{nn}$ (تنفذ الخطوتان 4 و 5 $Ux = z$.)

4	ضع $x_n = z_n$.
5	لكل $i = n-1, \ldots, 1$ ضع $x_i = z_i - u_{i,i+1} x_{i+1}$
6	المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$ توقف.

مثال 5 لتوضيح عملية المصفوفات الثلاثية الأقطار، لديك نظام ثلاثي الأقطار ذو المعادلات

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad\quad\quad &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \quad\quad &= 0 \\ - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ - x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

الذي له المصفوفة الممتدة (الموسعة)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

إن خوارزمية كراوت للتحليل تعطي التحليل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

إن حلَّ النظام $L\mathbf{z} = \mathbf{b}$ يعطي $\mathbf{z} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1\right)^t$، وحلّ النظام $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ هو $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)^t$.

يمكن تطبيق خوارزمية كراوت للتحليل عندما $l_{ii} \neq 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

إن أيًّا من الحالتين الآتيتين تضمن صحة هذا، فإما أن تكون مصفوفة المعادلات للنظام موجبة التحديد، وإما أنها ذات قطر سائد حتمًا.

هناك حالة ثالثة تضمن إمكانية تطبيق هذه الخوارزمية وترد في المبرهنة الآتية، ويرد برهانها في التمرين (28).

مبرهنة 6.29 افترض أن $A = [a_{ij}]$ ثلاثية الأقطار وفيها $a_{i,i-1} a_{i,i+1} \neq 0$ لكل $i = 2, 3, \ldots, n-1$

إذا كان $|a_{11}| > |a_{12}|$، $|a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|$ لكل $i = 2, 3, \ldots, n-1$ و $|a_{nn}| > |a_{n,n-1}|$

فإن A تكون غير منفردة. وقيم l_{ii} المصفوفة في خوارزمية كراوت للتحليل غير صفرية لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

مجموعة التمارين 6.6 EXERCISE SET

1. حدّد أيٌّ من المصفوفات الآتية تكون (i) متماثلة، (ii) منفردة، (iii) ذات قطر سائد حتمًا، (iv) موجبة التحديد:

أ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. حدّد أيًّ من المصفوفات الآتية تكون (i) متماثلة ، (ii) منفردة ، (iii) ذات قطر سائد حتمًا ، (iv) موجبة التحديد :

أ. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 1.5 & 1 \\ 6 & -9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

3. استخدم خوارزمية التحليل LDL^t لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LDL^t$ للمصفوفات الآتية :

أ. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4. استخدم خوارزمية التحليل LDL^t لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LDL^t$ للمصفوفات الآتية :

أ. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

ج. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ د. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. استخدم خوارزمية تشولسكي لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LL^t$ للمصفوفات في التمرين (3).

6. استخدم خوارزمية تشولسكي لإيجاد تحليل على الصيغة $A = LL^t$ للمصفوفات في التمرين (4).

7. طوّر خوارزمية التحليل LDL^t كما اقتُرح في الكتاب ، لكي تكون صالحة للاستخدام لحل الأنظمة الخطية. استخدم الخوارزمية المطورة لحلّ الأنظمة الخطية الآتية.

أ.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0.65 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0.05 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \quad &= 0 \\ x_1 + x_2 \quad + 2x_4 &= 0.5 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 \quad &= 7 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \quad &= 8 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 2x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \quad &= 7 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 \quad - x_3 + 3x_4 &= -2 \end{aligned}$$

8. استخدم الخوارزمية المطوّرة في التمرين (7) لحلّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_1 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -2 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

9. طوّر خوارزمية تشولسكي كما اقتُرح في الكتاب؛ لكي تكون صالحة لحل أنظمة خطية، واستخدم الخوارزمية المطورة لحل الأنظمة الخطية الواردة في التمرين (7).

10. استخدم الخوارزمية المطوّرة الواردة في التمرين (9) لحل الأنظمة الخطية في التمرين (8).

11. استخدم تحليل كراوت للأنظمة الثلاثية الأقطار لحلّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1.5 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 0.5x_1 + 0.25x_2 &= 0.35 \\ 0.35x_1 + 0.8x_2 + 0.4x_3 &= 0.77 \\ 0.25x_2 + x_3 + 0.5x_4 &= -0.5 \\ x_3 - 2x_4 &= -2.25 \end{aligned}$$

12. استخدم تحليل كراوت للأنظمة ثلاثية الأقطار لحلّ الأنظمة الخطية الآتية:

أ. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ب. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ج. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

د. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_4 - x_5 &= -2 \\ x_4 + 2x_5 &= -1 \end{aligned}$$

13. لتكن A المصفوفة 10×10 ثلاثية الأقطار، حيث $a_{ii} = 2, a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = -1$ لكل $i = 2, \ldots, 9$ و $a_{11} = a_{10,10} = 2, a_{12} = a_{10,9} = -1$. ليكن $\mathbf{b}$ المتجــه العمودي ذا 10 أبعاد المعطى بالعناصر $b_1 = b_{10} = 1$ ، و $b_i = 0$ لكل $i = 2, 3, \ldots, 9$؛

حُلّ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ باستخدام تحليل كراوت للأنظمة ثلاثية الأقطار.

14. طوّر التحليل LDL^t للتمكن من تحليل المصفوفة المتماثلة A.

[ملحوظــة: ليــس مضمونا أن يكــون التحليل ممكنــا دائمًا]. طبّق الخوارزميــة الجديدة على المصفوفات الآتية:

أ. $$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & -7 \\ 6 & -7 & 13 \end{bmatrix}$$

ب. $$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 14 & -20 \\ 9 & -20 & 29 \end{bmatrix}$$

ج. $$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

د. $$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 4 & -4 & 10 & -10 \\ -4 & 5 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

15. أي المصفوفات في التمرين (14) موجبة التحديد؟

16. أوجد α بحيث تكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ موجبة التحديد.

17. أوجد α بحيث تكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ موجبة التحديد.

18. أوجد α و $\beta > 0$ لكي تكون

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 1 \\ 2\beta & 5 & 4 \\ \beta & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

ذات قطر سائد حتمًا.

19. أوجد $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ لكي تكون المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \beta \\ \alpha & 5 & \beta \\ 2 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

ذات قطر سائد حتمًا.

20. لتكن كل من A و B مصفوفة $n \times n$ ذات قطر سائد حتمًا.

أ. هل $-A$ ذات قطر سائد حتمًا؟

ب. هل A^t ذات قطر سائد حتمًا؟

ج. هل $A + B$ ذات قطر سائد حتمًا؟

د. هل A^2 ذات قطر سائد حتمًا؟

هـ. هل $A - B$ ذات قطر سائد حتمًا؟

21. لتكن A و B مصفوفتين. $n \times n$ موجبتي التحديد:

أ. هل $-A$ موجبة التحديد؟

ب. هل A^t موجبة التحديد؟

ج. هل $A + B$ موجبة التحديد؟

د. هل A^2 موجبة التحديد؟

هـ. هل $A - B$ موجبة التحديد؟

22. لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

أوجد قيم α جميعها التي تجعل A:

أ. منفردة. ب. ذات قطر سائد حتمًا.

ج. متماثلة. د. موجبة التحديد.

23. لتكن

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد قيم α و β جميعها التي تجعل A:

أ. منفردة. ب. ذات قطر سائد حتمًا.

ج. متماثلة. د. موجبة التحديد.

24. افترض أن A و B تحققان خاصية التبديل أي $AB = BA$، فهل تحقق A^t و B^t خاصية التبديل أيضًا؟

25. أنشيء مصفوفة غير متماثلة A بحيث يكون $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ لـ $\mathbf{x} \neq 0$ جميعها.

26. أثبت أن عملية الحذف لجاوس يمكن تطبيقها على أي مصفوفة A دون مبادلات صفية إذا وفقط إذا كانت المصفوفات المصغرة الرئيسة جميعها المتقدمة للمصفوفة A غير منفردة.

[ملحوظة: جزّئت كل مصفوفة في المعادلة $A^{(k)} = M^{(k-1)}M^{(k-2)} \cdots M^{(1)}A$ عموديًا بين العمودين عدد k وعدد $(k+1)$ وأفقيًا بين الصفين عدد k وعدد $(k+1)$. (انظر التمرين 10 الفصل 3.6) برهن أن المصفوفة المصغرة الرئيسة المتقدمة للمصفوفة A تكافئ $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$

27. عادة ما يعبر عن المصفوفات الثلاثية الأقطار بالصيغة:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & b_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

وذلك للتأكيد على عدم الحاجة إلى التعبير عن مدخلات المصفوفة جميعها. اكتب مرة أخرى خوارزمية كراوت للتحليل باستخدام هذا التعبير. وغيّر التعبير l_{ij} و u_{ij} بطريقة مماثلة].

28. برهن المبرهنة (29.6).

[ملحوظة: برهن أن $|u_{i,i+1}| < 1$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$، وأن $|l_{ii}| > 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. واستنتج أن $\det A = \det L \cdot \det U \neq 0$].

29. افترض أن $V = 5.5$ فولت في مثال في مقدمة هذا الفصل. وبإعادة ترتيب المعادلات يمكنك تكوين نظام خطي ثلاثي الأقطار. استخدم خوارزمية كراوت للتحليل لإيجاد حلّ النظام المعدّل.

30. أنشئ طريقة لعد العمليات لحلّ نظام خطي $n \times n$ باستخدام خوارزمية كراوت للتحليل.

31. في بحث قام به دورن وبردك Dorn and Burdick [DoB] استنتجا منه أنه يمكن التعبير عن معدل طول جناح ذبابة الفاكهة (Drosophila melanogaster) المهجنة من تزاوج ثلاثة أنواع من ذباب الفاكهة، بصيغة المصفوفة المتماثلة

$$A = \begin{bmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{bmatrix}$$

حيث تمثّل a_{ij} معدل طول جناح الجيل الناتج من تزاوج الذكور من نوع i مع الأنثى من نوع j.

أ. ما الأهمية في الطبيعة التي يمكن ربطها بتماثل هذه المصفوفة؟

ب. هل هذه المصفوفة موجبة التحديد؟

إذا كان الأمر كذلك فبرهنه. وإذا كان غير ذلك، فأوجد متجهًا $\mathbf{x}$ بحيث $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \leq 0$.

32. افترض أن المصفوفة موجبة التحديد A قابلة لتحليل تشولسكي $A = LL^t$ وكذلك التحليل $A = \hat{L}D\hat{L}^t$. حيث D المصفوفة القطرية بمدخلات قطرية موجبة $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$. لتكن $D^{1/2}$ المصفوفة القطرية بمدخلات قطرية $\sqrt{d_{11}}, \sqrt{d_{22}}, \ldots, \sqrt{d_{nn}}$.

أ. أثبت أن $D = D^{1/2}D^{1/2}$. ب. أثبت أن $L = \hat{L}D^{1/2}$.

7.6 مسح الطرائق والبرمجيات Survey of Methods and Software

لقد درسنا في هذا الفصل طرائق مباشرة لحل الأنظمة الخطية. ويتألف النظام الخطي من n من المعادلات التي تحتوي على n من المجاهيل، والتي يعبر عنها بالمصفوفات على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. تستخدم هذه الطرائق متتالية منتهية من العمليات الحسابية للتوصل إلى الحل الصحيح للنظام

مـع الخضـوع لخطأ تقريـب فقط. لقد وجدنـا أن النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يمـلك حلًّا وحيدًا إذا وفقـط إذا كانـت A^{-1} موجـودة، أي ما يكافئ $\det A \neq 0$. إن حلَّ هـذا النظام الخطي هو $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. لقـد اسـتُخدمت طرائق التمحـور لتقليل آثار خطأ التقريـب الذي يمكن أن يطغى على الحل باستخدام الطرائق المباشرة. لقد درسنا التمحور الجزئي، والتمحور الجزئي الموزون، والتمحور الكلي. وإننا ننصح باستخدام طرائق التمحور الجزئي أو التمحور الجزئي الموزون، في معظم المسـائل؛ لأن هذه الطرائق حسـابية زائدة. ويجب استخدام التمحور الكلي إذا كان هناك شك في وجود خطأ تدوير كبير.

سنتعرف في الفصل 4.7 بعض الطرائق لتقدير خطأ تقريب هذا. لقد ثبت أن طريقة الحذف لجـاوس بتعديلات بسـيطة تعطي تحليـلًا للمصفوفة A بالصيغة LU، حيث L مثلثية سـفلية بمدخلات 1 على القطر، وU مثلثية علوية. وتسـمى هذه العملية بتحليل دوليتل Doolittle. ولا تخضـع المصفوفات غير المنفردة جميعها للتحليل بهذه الطريقـة، ولكن تبديل الصفوف يعطي دائمًـا تحليلًا على الصيغة $PA = LU$، حيث P مصفوفة التباديل المسـتخدمة لإعادة ترتيب صفـوف A. إن مزية التحليل تتجلى في تقليل العمل عند حلِّ الأنظمة الخطية $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ذات مصفوفة المعاملات A نفسها ومتجهات مختلفة $\mathbf{b}$.

إن التحليل يأخذ صيغة أسـهل عندما تكون A موجبة التحديد. وعلى سـبيل المثال فإن تحليل تشولسـكي يكون علـى الصيغة $A = LL^t$، حيث L مثلثية سـفلية، وإن المصفوفـة المتماثلة ذات التحليل LU يمكن تحليلها أيضًا على الصيغة $A = LDL^t$، حيث D قطرية، و L مثلثية سـفلية بمدخلات قطرية 1. ومن الممكن تبسـيط العمليات حول A ثلاثية الأقطار. وإن التحليل UL يأخذ صيغة بسـيطة خاصة، حيث إن مدخلات القطر الرئيـس وباقي المدخلات أصفار ما عدا مدخلات القطر الذي يعلو القطر الأساس مباشرة. وبالإضافة إلى ذلك فإن المدخلات غير الصفرية في L تكون علـى القطر الرئيس والقطر تحته. إن الطرائق المباشـرة هي الطرائق المختارة لمعظم الأنظمة الخطية. وفي حالات المصفوفات الثلاثية الأقطار، الطوقية، وموجبة التحديد، فإنه ينصح باستخدام الطرائق الخاصـة. أمـا في الحالة العامة فـإن طريقة الحذف لجاوس أو طريقـة التحليل على الصيغة LU التي تسمح بالتمحور تكون المفضلة. ويجب في هذه الحالات مناقشة تقدير الأخطاء في الطرائق المباشرة.

إن الأنظمـة الخطيـة الكبيرة التي تكون مدخلاتها الصفرية أساسًـا واقعةً في أنمـاط منتظمة قابلة للحل على نحو فعّال باستخدام طريقة ارتجاع مثل تلك المعطاة في الباب 7. وإن أنظمة من هذا النوع تظهر طبيعيًا على سـبيل مثال، عند اسـتخدام طرائق الفرق المنتهي لحل مسـائل القيمة الحدودية التـي هي تطبيق مألوف في الحل العـددي للمعادلات التفاضلية الجزئية. ومن الممكن أن تكون هناك صعوبة في حل نظام خطي كبير، بحيث لا تدفع مدخلاته غير الصفرية أساسًا أو مدخلاته الصفرية نمطـا متنبأً به. ويمكن أن نضع المصفوفـة المقابلة للنظام في مخزن ثانوي بصيغة مجزأة وبأجزاء تُقرأ في الذاكرة الرئيسة كلما احتجنا إليها للحساب. إن الطرائق التي تحتاج إلى تخزين ثانوي يمكن أن تكـون متراجعة أو مباشـرة، ولكنها عادة ما تحتاج إلـى طرائق من حقول هيكلية البيانات أو مبرهنة الرسـم. نوجّه عناية القارئ إلى المرجعين [BuR] و [RW] لمناقشـة هذه الطرائق. إن برمجيات عمليات المصفوفات والحل المباشـر للأنظمة الخطية المسـتخدمة في IMSL وNAG مبنية على LAPACK، وهي حقيبـة برمجيـات في الحقـل العام، ويوجد توثيق متميـز متاح معها والكتب التـي كتبت حولها.

سنركز على برمجيات متعددة متاحة في المصادر الثلاثة. يصاحب LAPACK مجموعة من العمليات منخفضة المستوى المسماة Basic Linear Algebra Subprograms (BLAS) يتكون المستوى 1 من BLAS عمومًا من عمليات متجه – متجه مع بيانات الإدخال وعدد العمليات برتبة $O(n)$. يتكون المستوى 2 من عمليات مصفوفة – متجه مع بيانات الإدخال وعدد العمليات برتبة $O(n^2)$. يتكون المستوى 3 من عمليات مصفوفة – مصفوفة مع بيانات الإدخال وعدد العمليات برتبة $O(n^3)$. فعلى سبيل المثال في المستوى 1، تكتب البرمجية SCOPY المتجه $\mathbf{y}$ مع المتجه $\mathbf{x}$. وتحسب SSCAL العدد الثابت a مضروبًا في المتجه $\mathbf{x}$، وتجمع SAXPY العدد الثابت a مضروبًا في المتجه $\mathbf{x}$ مع المتجه $\mathbf{y}$ أي $\mathbf{y}$ $(\mathbf{y} = a \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y})$. وأن SDOT تحسب الضرب الداخلي لمتجهين. وكذلك الضرب في ثابت. وتحسب SNRM2 القياس الإقليدي للمتجه بطريقة مماثلة لتلك التي شُرحت في الفصل (1.4). وأن ISAMAX تحسب مؤشر (index) مركبة المتجه التي تعطي أعظم قيمة مطلقة للمركبات جميعها. في المستوى 2 تحسب SGEMV حاصل ضرب مصفوفة في متجه. وفي المستوى 3 تحسب SGEMM حاصل ضرب مصفوفة في مصفوفة. إن البرمجيات في LAPACK لحل الأنظمة الخطية تحلل المصفوفة A إلى العوامل أولاً. ويعتمد التحليل على نوع المصفوفة بالطرائق الآتية:

1. المصفوفة العامة $PA = LU$
2. المصفوفة موجبة التحديد $A = LL^t$
3. المصفوفة المتماثلة $A = LDL^t$
4. المصفوفة ثلاثية الأقطار $A = LU$ (بصيغة الطوق)

إن البرمجية STRTRS تحل النظام الخطي الثلثي عندما تكون المصفوفة علوية أو سفلية. والبرمجية SGETRF تحلل PA إلى LU بوصفها عملية مبدئية للبرمجية SGETRS، التي تحسب بعد ذلك حلّ النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. تستخدم البرمجية SGETRI لإيجاد معكوس (النظير الضربي) للمصفوفة A. وتستخدم لحساب محددة A عندما تكون A قد حلّلت عن طريق SGETRF. ويوجد تحليل تشولسكي للمصفوفة موجبة التحديد A عن طريق البرمجية SPOTRF. يمكن بعدئذ حل النظام الخطي $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ باستخدام البرمجية SPOTRS. ويمكن إيجاد المعكوس والمحدّدة للمصفوفة الموجبة التحديد. إذا ما أُعطي تحليل تشولسكي لها باستخدام SPOTRI. إذا كانت A متماثلة فإنه يمكن إيجاد التحليل LDL^t باستخدام SSYTRF. عندئذ يمكن حل الأنظمة الخطية باستخدام SSYTRS. وإذا ما رغبت في إيجاد المعكوس أو المحددة فاستخدم SSYTRI. إن الكثير من البرمجيات في LINPACK و LAPACK التي تلتها يمكن تنفيذها باستخدام MATLAB. باستخدام الأمر

$$[L, U, P] = lu(A)$$

يمكن تحليل المصفوفة غير المنفردة A إلى الصيغة $PA = LU$. حيث P هي مصفوفة التبديل المعرّفة عن طريق تنفيذ التمحور الجزئي لحل النظام الخطي المنطوي على A.

إذا ما عُرّفت المصفوفة غير المنفردة A والمتجه $\mathbf{b}$ في MATLAB فإن الأمر

$$x = A\backslash b$$

يحلُّ النظام الخطي باستخدام أمر التحليل $PA = LU$ أولًا. وبعدئذ يحلُّ النظام الثلثي السفلي $L\mathbf{z} = \mathbf{b}$ للمتجه $\mathbf{z}$ باستخدام الأمر

$$z = L\backslash b$$

ويتبع هذا حلّ النظام المثلثي العلوي $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ باستخدام الأمر

$$x = U\backslash z$$

وتوجد أوامر أخرى في MATLAB. منها ما يستخدم لحساب المعكوس. المنقول. والمحددة للمصفوفة A عن طريق الأوامر $\mathrm{inv}(A)$. A' و $\det(A)$ على التوالي. تحتوي مكتبة IMSL برمجيات مقابلة لمعظم برمجيات LAPACK. بالإضافة إلى بعض الزيادات.

وتُسمى وفق المهمات التي تؤديها بما يلي:

1. الحروف الثلاثة الأولى للاسم بالإنجليزية:
   أ. LSL: تحلُّ النظام الخطي.
   ب. LFT: تحلّل مصفوفة معاملات.
   ج. LFS: تحلُّ نظامًا خطيًا إذا أعطيت العوامل من LFT.
   د. LFD: تحسب محددات العوامل المعطاة.
   هـ. LIN: تحسب معكوس العوامل المعطاة.
2. يحدد الحرفان الأخيران نوع المصفوفة المعطاة:
   أ. RG: حقيقية عامة
   ب. RT: حقيقية مثلثية
   ج. DS: حقيقية موجبة التحديد
   د. SF: حقيقية متماثلة
   هـ. RB: حقيقية طوقية

فعلى سبيل المثال تحلّل البرمجية LFTDS المصفوفة الحقيقية موجبة التحديد إن مكتبة NAG تحوي كثيرًا من البرمجيات الخاصة بالطرائق المباشرة لحل الأنظمة الخطية المماثلة تلك في LAPACK و IMSL فعلى سبيل المثال يحلُّ البرنامج F04AEF أنظمة خطية باستخدام تحليل كراوت. ويحلُّ البرنامج F04ATF نظامًا خطيًا واحدًا باستخدام تحليل كراوت كما في F04AEF. يحلُّ البرنامج F04EAF نظامًا خطيًا واحدًا. حيث المصفوفة حقيقية والثلاثية الأقطار. ويحلُّ F04ASF النظام الذي مصفوفته حقيقية وموجبة التحديد. ويمكن حساب معكوس المصفوفات بالبرنامج F07AJF بعد استخدام F07ADF لأي مصفوفة حقيقية. وبعد استخدام F01ABF إذا كانت المحددة باستخدام F03AAF. ويمكن إيجاد التحليل باستخدام F07ADF لتحليل LU للمصفوفة الحقيقية. وباستخدام F01LEF لتحليل المصفوفة ثلاثية الأقطار. بعد ذلك يمكن حلُّ الأنظمة الخطية باستخدام F07AEF. ويمكن إيجاد تحليل تشولسكي للمصفوفة موجبة التحديد باستخدام F07FDF، ثم حل النظام الخطي باستخدام F07FEF. إن مكتبة NAG تحوي أيضًا عمليات المصفوفة – المتجه من المستوى الأدنى. للمزيد من المعلومات عن الحلول العددية للأنظمة الخطية والمصفوفات، يمكنك الرجوع إلى Golub و Van Loan [GV]، Forsythe and Moler [FM] و Stewart [Stew1]. ويمكن الرجوع إلى George and Liu [GL] و Pissanetzky [Pi] اللذين بحثا موضوع الطرائق المباشرة لحلّ الأنظمة الكبيرة بالتفصيل. أما Coleman and Van Loan [CV] فقد بحثا استخدام LINPACK، BLAS و MATLAB.