لقد ظهر مفهوم المحدّدة في عام 1683 في كل من اليابان وأوروبا. على الرغم من أن تكاكازو كوا Takakazu Seki kowa (1642-1708)، وليبنتز Gottfried Leibniz (1646-1716) لم يستخدما عبارة المحددة

ج. العامل المشارك (cofactor) A_{ij} المقترن بـ M_{ij} يعرّف بالمعادلة $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

د. إن محددة المصفوفة A ذات $n \times n$، حيث $n > 1$ تعطى بإحدى المعادلتين

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{لكل} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

أو

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{لكل} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

■

يمكن برهنة (انظر التمرين 9) أنه لحساب محدّدة مصفوفة عامة $n \times n$ في تعرف السابق يلزم $O(n!)$ من عمليات الضرب/ القسمة والجمع/ الطرح. وحتى إذا كانت قيم n صغيرة نسبيًا فإن عدد الحسابات يخرج عن السيطرة.

وعلى الرغم من وجود $2n$ من التعاريف المختلفة لـ $\det A$ وفق أي صف أو عمود تختاره. فإن تعريفات جميعها تعطي النتيجة العددية نفسها.

استخدمت مرونة تعريف في حل مثال الآتي.

إن الأكثر ملاءمة في حساب $\det A$ هو استخدام الصف أو العمود ذي عدد الأصفار الأكثر.

مثال 1

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 5 \\ 6 & -6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

لحساب $\det A$، يكون من الأسهل استخدام العمود الرابع.

$$\det A = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44} = 5A_{34} = -5M_{34}$$

وبحذف الصف الثالث والعمود الرابع نحصل على

$$\det A = -5 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \\ 6 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= -5\left\{2 \det \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} - (-1) \det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}\right\} = -30$$

■

يمكن حساب محددة مصفوفة ما في مابل Maple عن طريق مكتبة الجبر الخطي باستخدام الأمر determinant (A)

وتعد الخواص الآتية مفيدة في ربط الأنظمة الخطية وطريقة الحذف لجاوس بالمحددات.

ويمكن الرجوع إلى أي كتاب في الجبر الخطي لبرهنة هذه الخواص. (انظر على سبيل المثال [ND, pp. 200–201])

مبرهنة 15.6

لتكن A مصفوفة $n \times n$:

أ. إذا كانت عناصر أي صف أو عمود من A أصفارًا فإن $\det A = 0$.

ب. إذا تساوى أي صفين أو عمودين في A فإن $\det A = 0$.

ج. إذا حصلنا على $\tilde{A}$ من A في العملية $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$، حيث $i \neq j$ فإن $\det \tilde{A} = -\det A$.

د. إذا حصلنا على $\tilde{A}$ من A في العملية $(\lambda E_i) \to (E_i)$ فإن $\det \tilde{A} = \lambda \det A$.

هـ. إذا حصلنا على $\tilde{A}$ من A في العملية $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$، حيث $i \neq j$ فإن $\det \tilde{A} = \det A$

و. إذا كانت B مصفوفة $n \times n$ أيضًا فإن $\det AB = \det A \det B$.

ز. $\det A^t = \det A$.

ح. إذا كانت A^{-1} موجودة فإن $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

ط. إذا كانت A مصفوفة مثلثية عليا أو مثلثية سفلى أو قطرية فإن $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. ■

إن المصفوفة في الصيغة المثلثية يسهل حساب محددتها، وعليه فإن حساب محددة أي مصفوفة يمكن تبسيطه عن طريق تحويل المصفوفة إلى مصفوفة مثلثية أولاً. ثم نستخدم الفقرة (ط) من المبرهنة لحساب محددة المصفوفة.

مثال 2 احسب محدّدة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

باستخدام الفروع (ب)، (د) و(هـ) في المبرهنة (15.6)، وباستخدام الحسابات في Maple من مكتبة الجبر الخطي. وإن المصفوفة A معرّفة بالأمر

```
A:=Matrix([[2,1,-1,1],[1,1,0,3],[-1,2,3,-1],[3,-1,-1,2]]);
```

إن توالي العمليات في الجدول (2.6) يعطينا المصفوفة

$$A8 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

ومن الفقرة (ط) نجد $\det A8 = -39$ ولذلك $\det A = 39$. ■

جدول 2.6

العملية	مابل	الأثر
$\frac{1}{2}E_1 \to E_1$	A1:= RowOperation(A,1,1/2)	$\det A1 = \frac{1}{2}\det A$
$E_2 - E_1 \to E_2$	A2:=RowOperation(A1,[2,1],-1)	$\det A2 = \det A1 = \frac{1}{2}\det A$
$E_3 + E_1 \to E_3$	A3:=RowOperation(A2,[3,1],1)	$\det A3 = \det A2 = \frac{1}{2}\det A$
$E_4 - 3E_1 \to E_4$	A4:=RowOperation(A3,[4,1],-3)	$\det A4 = \det A3 = \frac{1}{2}\det A$
$2E_2 \to E_2$	A5:=RowOperation(A4,2,2)	$\det A5 = 2\det A4 = \det A$
$E_3 - \frac{5}{2}E_2 \to E_3$	A6:=RowOperation(A5,[3,2],-5/2)	$\det A6 = \det A5 = \det A$
$E_4 + \frac{5}{2}E_2 \to E_4$	A7:=RowOperation(A6,[4,2],5/2)	$\det A7 = \det A6 = \det A$
$E_3 \leftrightarrow E_4$	A8:=RowOperation(A7,[3,4])	$\det A8 = -\det A7 = -\det A$