وهكذا تكون $A(BC)$ مصفوفة $n \times p$ وعناصرها

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}(BC)_{sj} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}\left(\sum_{l=1}^{k} b_{sl}c_{lj}\right) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} a_{is}b_{sl}c_{lj}$$

وبالمثل، فإن AB تكون مصفوفة $n \times k$ وعناصرها

$$(AB)_{il} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sl}$$

وعليه $(AB)C$ تكون مصفوفة $n \times p$ وعناصرها

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{l=1}^{k}(AB)_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sl}\right)c_{lj} = \sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sl}c_{lj}$$

وبتبديل ترتيب الجمع في الطرف الأيمن نحصل على

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} a_{is}b_{sl}c_{lj} = [A(BC)]_{ij}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, p$، ولذلك فإن $A(BC) = (AB)C$. ■ ■ ■

ويمكن النظر إلى النظام الخطي

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

على أنه معادلة مصفوفات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، حيث

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

هناك مفهوم ذو علاقة بالأنظمة الخطية، ألا وهو معكوس المصفوفة (inverse of a matrix).

تعريف 10.6

كلمة منفردة تعني أنها تخرج عن المعتاد. ولذلك فالمصفوفة المنفردة ليس لها معكوس

تسمى A المصفوفة $n \times n$ غير المنفردة (nonsingular) أو القابلة للعكس (invertible) إذا وجدت مصفوفة $n \times n$ يعبر عنها بالرمز A^{-1}.

حيث $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

تسمى المصفوفة A^{-1} معكوس A أو النظير الضربي للمصفوفة A. وتسمى أي مصفوفة دون معكوس منفردة (singular) أو غير قابلة للعكس (noninvertible). ■

الخواص الآتية متعلّقة بمعكوس المصفوفة من تعريف (1.6)، وبراهين هذه النتائج مطلوبة في التمرين 5.

مبرهنة 11.6

لكل مصفوفة $n \times n$ غير منفردة A، يتحقق ما يلي:

أ. A^{-1} وحيدة.

ب. A^{-1} غير منفردة ويكون $(A^{-1})^{-1} = A$.

ج. إذا كانت B مصفوفة $n \times n$ غير منفردة فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

مثال 4 ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

فإن

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

وبطريقة مماثلة $BA = I_3$، ولذلك فإن A و B غير منفردتين ويكون $B = A^{-1}$ و $A = B^{-1}$.

إذا كان لدينا معكوس A فإننا نتمكن من حل النظام الخطي على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

افترض على سبيل مثال أننا نريد حل النظام

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

أولًا: نحوّل النظام إلى معادلة بالمصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ثم نضرب طرفي المعادلة في المعكوس

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{13}{9} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

ولذلك فإن

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{13}{9} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{3}{9} & \frac{3}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= I_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وهذا يعطي الحل $x_1 = \frac{7}{9}$، $x_2 = \frac{13}{9}$ و $x_3 = \frac{5}{3}$. ■

وعلى الرغم من أنه من السهل حل نظام خطي على الصيغة $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ إذا كانت A^{-1} معلومة فإن عملية تحديد A^{-1} لحل النظام ليست ذات فاعلية حسابيًا. (انظر التمرين 8) وعلى الرغم من

هذا كله فإنه من المفيد من وجهة نظر مفاهيمية، شرح طريقة لإيجاد معكوس لمصفوفة.
ولإيجاد طريقة لحساب A^{-1} على فرض وجودها، دعنا نتفحص ضرب المصفوفات ثانية.
افترض B_j العمود j للمصفوفة B ذات $n \times n$.

$$B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

إذا كان $AB = C$ فإن العمود j للمصفوفة C يعطى بحاصل الضرب

$$\begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix} = C_j = AB_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kj} \end{bmatrix}$$

افترض أن A^{-1} موجودة، وأن $A^{-1} = B = (b_{ij})$، عندئذ $AB = I$ ويكون

$$AB_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث تظهر القيمة 1 في الصف j.
ولإيجاد B، يجب حل n من الأنظمة الخطية التي يكون فيها العمود j للمعكوس هو حل النظام الخطي الذي يكون الطرف الأيمن له العمود j في I.
ويوضح مثال الآتي هذه الطريقة:

مثال 5 لإيجاد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نجد أولاً حاصل الضرب AB حيث B هي أي مصفوفة 3×3

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} + 2b_{21} - b_{31} & b_{12} + 2b_{22} - b_{32} & b_{13} + 2b_{23} - b_{33} \\ 2b_{11} + b_{21} & 2b_{12} + b_{22} & 2b_{13} + b_{23} \\ -b_{11} + b_{21} + 2b_{31} & -b_{12} + b_{22} + 2b_{32} & -b_{13} + b_{23} + 2b_{33} \end{bmatrix}$$

إذا كانت $B = A^{-1}$ فإن $AB = I$ ولذلك يجب أن يكون لدينا

$$\begin{aligned}
b_{11} + 2b_{21} - b_{31} &= 1, & b_{12} + 2b_{22} - b_{32} &= 0, & b_{13} + 2b_{23} - b_{33} &= 0\\
2b_{11} + b_{21} &= 0, & 2b_{12} + b_{22} &= 1, & 2b_{13} + b_{23} &= 0\\
-b_{11} + b_{21} + 2b_{31} &= 0, & -b_{12} + b_{22} + 2b_{32} &= 0, & -b_{13} + b_{23} + 2b_{33} &= 1
\end{aligned}$$

انظر أن المعاملات في كل أنظمة المعادلات هي نفسها؛ والتغير في الأنظمة موجود في الطرف الأيمن من المعادلات. ونتيجة لذلك، يمكن إجراء عملية الحذف لجاوس على المصفوفة المزيدة المكوّنة من توليفة المصفوفات لكل نظام من الأنظمة

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

أولاً: إجراء $(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$ و $(E_3 + E_1) \to (E_3)$

متبوعًا بالعملية $(E_3 + E_2) \to (E_3)$ ينتج

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ و } \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

إن إجراء التعويض الإرجاعي على كل مصفوفة من المصفوفات المزيدة

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

يعطي في النهاية

$$\begin{aligned}
b_{12} &= \tfrac{5}{9}, & b_{11} &= -\tfrac{2}{9}, & b_{13} &= -\tfrac{1}{9},\\
b_{22} &= -\tfrac{1}{9}, & b_{21} &= \tfrac{4}{9}, \quad\text{و}\quad & b_{23} &= \tfrac{2}{9},\\
b_{32} &= \tfrac{1}{3}, & b_{31} &= -\tfrac{1}{3}, & b_{32} &= \tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

وكما يظهر في المثال (4) هذه هي العناصر في A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

■

لقد شرحنا في المثال الأخير حساب A^{-1}. وكما رأينا في ذلك مثال، فمن الملائم تكوين مصفوفة موسعة أكبر

$$[\,A \ \vdots \ I\,]$$

وبتنفيذ الحذف بحسب الخوارزمية (1.6)، نحل المصفوفة المزيدة بالصيغة

$$[\,U \ \vdots \ Y\,]$$

حيث U مصفوفة مثلثية عليا، وY مصفوفة ناتجة من تنفيذ العمليات على المصفوفة الحيادية I التي نُفِّذت لتنقل A إلى U.