إن هذا يفسِّر سبب كون عدد الأعمدة في A مساويًا بالضرورة عدد الصفوف في B لكي يكون حاصل الضرب AB معرّفًا.

إن المثال الآتي كافٍ لتوضيح عملية ضرب المصفوفات.

مثال 2 ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

فإن

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 11 & -4 & 11 \\ -13 & 2 & -13 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 1 & -3 & -10 \\ 6 & -3 & -12 \end{bmatrix} = DA$$

وبالإضافة إلى ذلك

$$CB = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \text{ و } BC = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ 8 & 18 & 8 \end{bmatrix}$$

وهما ليسا من الحجم نفسه.

وأخيرًا

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 20 & 15 \\ -16 & -14 \end{bmatrix}$$

ولكن لا يمكن حساب BA. ■

المصفوفة المربعة (Square) A هي المصفوفة التي عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها

المصفوفة القطرية (diagonal) $D = [d_{ij}]$ هي مصفوفة مربعة فيها $d_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$.

تعريف 7.6 المصفوفة المحايدة ذات الرتبة n $I_n = [\delta_{ij}]$، (identity matrix of order n) هي مصفوفة قطرية عناصرها

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

وعندما يكون حجم I_n واضحًا في السياق، يعبَّر عنه عادة بالرمز I. ■

إن كلمة "قطري" المستعملة في المصفوفة تشير إلى عناصر القطر الذي يبدأ من أعلى اليسار، وينتهي إلى أسفل اليمين

فعلى سبيل المثال فإن المصفوفة المحايدة ذات الرتبة 3 هي

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف 8.6 المصفوفة $n \times n$ المثلثية العلوية (upper - triangular) $U = [u_{ij}]$ فيها لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ العناصر $u_{ij} = 0$ لكل $i = j + 1, j + 2, \ldots, n$

والمصفوفة المثلثية السفلية (lower - triangular) $L = [l_{ij}]$ فيها لكل $j = 1, 2, \ldots, n$ العناصر $l_{ij} = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, j - 1$

عناصر المصفوفة المثلثية جميعها أصفار، إلا تلك التي على القطر الرئيس أو فوقه (علوية) أو تلك التي على القطر الرئيس أو تحته (سفلية).

لديك المصفوفة الحيادية ذات الرتبة الثالثة

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 3 إذا كانت A مصفوفة 3×3 فإن

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A$$

■

إن المصفوفة الحيادية I_n تبادلية مع أي مصفوفة A بالحجم $n \times n$؛ أي أن الترتيب في عملية الضرب ليس مهمًا، أي أن $I_n A = A = AI_n$.

يتضح في مثال 2 أن $AB = BA$ ليس صحيحًا بالنسبة إلى ضرب المصفوفات. وإن خواص ضرب المصفوفات المحققة ستُعرض في المبرهنة الآتية:

مبرهنة 9.6 لتكن A مصفوفة $n \times m$، B مصفوفة $m \times k$، C مصفوفة $k \times p$، D مصفوفة $m \times k$ و λ عددًا حقيقيًا، فإن الخواص الآتية صحيحة:

(أ) $A(BC) = (AB)C$

(ب) $A(B + D) = AB + AD$

(ج) $I_m B = B$ و $BI_k = B$

(د) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

■

البرهان نعطي برهان الخاصية في الفقرة (أ) لشرح الطريقة المستخدمة في البرهان. ويمكن برهنة الفروع الأخرى بطريقة مشابهة. ولبرهنة أن $A(BC) = (AB)C$؛ نحسب العنصر i, j لكل طرف من المعادلة. ومن الواضح أن BC هي مصفوفة $m \times p$. ويكون العنصر i, j فيها هو

$$(BC)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} b_{il} c_{lj}$$