مثال 1 ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

و $\lambda = -2$ فإن

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+4 & -1+2 & 7-8 \\ 3+0 & 1+1 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

و

$$\lambda A = \begin{bmatrix} -2(2) & -2(-1) & -2(7) \\ -2(3) & -2(1) & -2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -14 \\ -6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ ■

عبّر بالرمز O عن المصفوفة التي عناصرها جميعها هي 0 و $-A$ المصفوفة التي عناصرها $-a_{ij}$. ولدينا الخصائص العامة التالية لجمع المصفوفات والضرب في ثابت. وإن هذه الخصائص كافية لتصنيف المصفوفات $m \times n$ التي مدخلاتها (عناصرها) أعداد حقيقية بوصفها فضاء متجهات (أو فضاء خطي) Vector Space على حقل (field) الأعداد الحقيقية. انظر ([ND, pp. 107–109]).

مبرهنة 5.6 لتكن A و B و C مصفوفات $m \times n$. وليكن λ و μ عددين حقيقيين. عندئذ تتحقق الخواص الآتية لعمليات الجمع والضرب في ثابت:

أ. $A + B = B + A$ ب. $(A + B) + C = A + (B + C)$

ج. $A + O = O + A = A$ د. $A + (-A) = -A + A = 0$

هـ. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ و. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

ز. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ ح. $1A = A$

■

إثبات هذه الخواص مماثل لنظرياتها في الأعداد الحقيقية.

تعريف 6.6 ضرب المصفوفات Matrix product

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الشكل $n \times m$، وكانت $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من الشكل $m \times p$ فإن $AB = [c_{ij}]$ مصفوفة من الشكل $n \times p$، حيث c_{ij} هو العنصر الذي نحصل عليه على النحو التالي:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, p$ ■

يمكن النظر إلى حساب c_{ij} على أنه حاصل ضرب عناصر الصف i في المصفوفة A في العناصر المقابلة لها في العمود j للمصفوفة B متبوعًا بجمع حاصل الضرب هذا. أي

$$[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} = c_{ij}$$

حيث

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$