تسمى المصفوفة $n \times 1$، ويعبر عنها $A = [a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}]$ متجهًا صفيًا ذا بعد n
وتسمى المصفوفة $1 \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

متجهًا عموديًا ذا بعد n

نحذف في العادة الرموز غير الضرورية عند التعبير عن المتجهات، وتستخدم حروف صغيرة غامقة اللون للتعبير عنها فمثلًا

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

متجه عمودي، و

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]$$

متجه صفي.

يمكن تمثيل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

بمصفوفة من الدرجة $n \times (n-1)$ على النحو التالي:

بوضع
$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

كلمة معزّزة (مزيدة) تشير إلى حقيقة أن الحدود الثابتة قد زيدت وضمت إلى المصفوفة

ثم بتجميع هاتين المصفوفتين للحصول على المصفوفة الموسعة augmented matrix

$$[A, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

حيث استخدمنا الخط العمودي المنقوط ليفصل بين معاملات المجاهيل عن القيم في الجهة اليمنى للمعادلات.

obeikandl.com

إن إعادة العمليات التي أُجريت في مثال (1) باستخدام رموز المصفوفة تنتج بالمصفوفة الموسعة أولاً.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

وبإجراء العمليات الصفية للمثال المذكور نحصل على المصفوفتين

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] \quad \text{و} \quad \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right]$$

ويمكن تحويل المصفوفة النهائية للنظام الخطي المرتبط بها، ومن ثم الحصول على حل المجاهيل x_1، x_2، x_3 و x_4.

تُسمى الطريقة المستخدمة في هذه العملية طريقة الحذف لجاوس باستخدام التعويض التراجعي
Gaussian elimination with backward substitution

ظهرت طريقة مشابهة لطريقة الحذف لجاوس لأول مرة في فترة حكم سلالة هان Han في الصين. وكان ذلك في الكتاب "تسعة فصول في فن الرياضيات" الذي كتب عام 200 قبل الميلاد تقريبا

لقد وصف جوزيف لويس لاجرانج (1736-1813) طريقة مماثلة لهذه العملية عام 1778 في حالة أن قيمة كل معامل صفر وأعطى جاوس وصفا أعم في كتابه
Theoria Motus corporum coelestium sectionbus solem ambientum
التي شرح طريقة المربعات الصغرى التي استخدمها عام 1809 ليحدد مدار الكوكب الصغير سيريز

تعمم طريقة الحذف لجاوس على النظام العام للمعادلات الخطية بصورة مماثلة على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 &: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ E_n &: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{4.6}$$

إن الصيغة الأولى للمصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ هي

$$\tilde{A} = [A, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right] \tag{5.6}$$

حيث تعبر A عن المصفوفة المكوّنة من المعاملات.

إن مدخلات العمود $(n+1)$ هي قيم $\mathbf{b}$، أي أن $a_{i,n+1} = b_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

في حالة $a_{11} \neq 0$، ويمكن تنفيذ العمليات المقابلة للتحويل $(E_j - (a_{j1}/a_{11})E_1) \rightarrow (E_j)$ لكل من $j = 2, 3, \ldots, n$؛ للتخلص من معامل x_1 في كل صف من هذه الصفوف.

وعلى الرغم من أنه من المتوقع أن تتغير المدخلات في الصفوف $2, 3, \ldots, n$، فإننا ولتبسيط الرموز سنعبر عن المدخل في الصف i والعمود j بالرمز a_{ij}. وبإبقاء هذا الأمر ضمن الافتراض سنتبع متتالية من العمليات لكل $i = 2, 3, \ldots, n-1$. ونجري العملية $(E_j - (a_{ji}/a_{ii})E_i) \rightarrow (E_j)$، لكل $j = i+1, i+2, \ldots, n$ على أن $a_{ii} \neq 0$

إن هذا يحذف (يغير المعامل ليصبح صفراً) x_i في كل صف تحت الصف i، وللقيم $i = 1, 2, \ldots, n-1$ جميعها تأخذ المصفوفة الناتجة الصيغة الآتية:

$$\tilde{\tilde{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

obeikandi.com

إذ لا يتوقَّع أن تتوافق قيم a_{ij} عدا التي في الصف الأول مع مثيلاتها في المصفوفة الأصلية A وتمثِّل المصفوفة $\tilde{A}$ نظامًا خطيًا له مجموعة من حلول النظام الأصلي (4.6) نفسها.

وبما أن النظام الخطي الجديد مثلثيّ فإن

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\
a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1} \\
\ddots \qquad \vdots \quad &\quad\ \vdots \\
a_{nn}x_n &= a_{n,n+1}
\end{aligned}$$

ويمكن تطبيق التعويض الارتجاعي. وبحل المعادلة ذات العدد n لإيجاد قيمة x_n نجد أن

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

وبحل المعادلة عدد $(n-1)$ لإيجاد قيمة x_{n-1} واستخدام القيمة المعلومة لـ x_n نجد أن

$$x_{n-1} = \frac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

وباستمرار هذه العملية نحصل على

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - a_{i,n}x_n - a_{i,n-1}x_{n-1} - \cdots - a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{ii}} = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

لكل $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$

ويمكن عرض طريقة جاوس بالحذف بدقة أكبر على الرغم من كونه أكثر تعقيدً، عن طريق تكوين المصفوفات الموسعة $\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}, \ldots, \tilde{A}^{(n)}$ حيث إن $\tilde{A}^{(1)}$ المعطاة في المعادلة (5.6) و $\tilde{A}^{(k)}$، لكل $k = 2, 3, \ldots, n$ لها المدخلات $a_{ij}^{(k)}$ حيث

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases}
a_{ij}^{(k-1)}, & \text{عندما } i = 1, 2, \ldots, k-1 \text{ و } j = 1, 2, \ldots, n+1 \\
0, & \text{عندما } i = k, k+1, \ldots, n \text{ و } j = 1, 2, \ldots, k-1 \\
a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}}\, a_{k-1,j}^{(k-1)}, & \text{عندما } i = k, k+1, \ldots, n \text{ و } j = k, k+1, \ldots, n+1
\end{cases}$$

وهكذا

$$\tilde{A}^{(k)} = \left[\begin{array}{cccccccc:c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & \\
\vdots & & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & a_{n,n+1}^{(k)}
\end{array}\right] \qquad (6.6)$$

يمثِّل النظام الخطي المكافئ الذي حذف فيه x_{k-1} من المعادلات $E_k, E_{k+1}, \ldots, E_n$.

obeikandl.com

وستفشل العملية إذا كان أي من $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, a_{33}^{(3)}, \ldots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}, a_{nn}^{(n)}$ يساوي صفرًا؛ لأن الخطوة

$$\left(E_i - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} E_k\right) \to E_i$$

إما أنه لا يمكن تنفيذها (هذا في حالة أن واحدًا من $a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}$ يساوي صفرًا)، وإما أنه لا يمكن إجراء التعويض الارتجاعي (في حالة $a_{nn}^{(n)} = 0$).

ومن الممكن أن النظام ما زال له حل. ولكن لا بد من تغيير الطريقة لإيجاد الحل. والتوضيح في مثال الآتي:

مثال 3 لديك النظام الخطي

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \\
E_2 &: \quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20 \\
E_3 &: \quad x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\
E_4 &: \quad x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4
\end{aligned}$$

إن المصفوفة الموسعة هي

$$\tilde{A} = \tilde{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

وإن إجراء العمليات

$(E_4 - E_1) \to (E_4)$ و $(E_2 - 2E_1) \to (E_2),\ (E_3 - E_1) \to (E_3)$

يعطي

$$\tilde{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

وبما أن $a_{22}^{(2)}$ المسمّى بالعنصر المحوري pivot element يساوي صفرًا. فإنه لا يمكن استمرار الطريقة بنمطها الحالي. ولكن العملية $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$ مسموح بها. ولذلك نبدأ بتمعن العناصر $a_{32}^{(2)}$ و $a_{42}^{(2)}$ للتوصل إلى أول عنصر غير صفري. وبما أن $a_{32}^{(2)} \neq 0$ نجري العملية $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$ لنحصل على مصفوفة جديدة

إن العنصر المحوري في أي عمود محدد هو العنصر المستخدم لوضع أصفار في الخلايا الأخرى لذلك العمود

$$\tilde{A}^{(2)'} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

بما أن x_2 قد حذفت من E_3 و E_4 فإن $\tilde{A}^{(3)}$ تصبح $\tilde{A}^{(2)'}$ ويستمر الحساب في العملية $(E_4 + 2E_3) \to (E_4)$ التي تعطي

$$\tilde{A}^{(4)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

obeikandl.com

وأخيرًا، يطبّق التعويض الارتجاعي ليعطي

$$x_4 = \frac{4}{2} = 2,$$

$$x_3 = \frac{[-4 - (-1)x_4]}{-1} = 2$$

$$x_2 = \frac{[6 - x_4 - (-1)x_3]}{2} = 3$$

$$x_1 = \frac{[-8 - (-1)x_4 - 2x_3 - (-1)x_2]}{1} = -7$$ ■

يوضح مثال (3) ما يمكن عمله إذا كان $a_{kk}^{(k)} = k$ لعدد ما $k = 1, 2, \ldots, n-1$، يجب تمعّن العمود k للمصفوفة $\tilde{A}^{(k-1)}$ من الصف k حتى الصف n للحصول على أول مدخل غير صفري. إذا كان $a_{pk}^{(k)} \neq 0$ لعدد ما p حيث $k + 1 \leq p \leq n$ يجب إجراء العملية $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$ للحصول على $\tilde{A}^{(k-1)'}$. ويمكن بعد ذلك استمرار العملية لتكوين $\tilde{A}^{(k)}$. إذا كان $a_{pk}^{(k)} = 0$ لكل p يمكن برهنة (انظر المبرهنة (16.6) في الفصل 4.6) أن النظام الخطي ليس له حل وحيد، وأن العملية تتوقف. وأخيرًا إذا كان $a_{nn}^{(n)} = 0$ فإن النظام الخطي ليس له حل وحيد، وعليه تتوقف العملية مرة أخرى. إن الخوارزمية 1.6 تلخّص عملية الحذف لجاوس باستخدام التعويض الارتجاعي. وتستخدم الخوارزمية عملية التمحور عندما يقوم المحور $a_{kk}^{(k)} = 0$ بتبديل الصف k بالصف p حيث p أصغر عدد صحيح وأكبر من k، فسيكون له $a_{pk}^{(k)}$ غير صفري.

ALGORITHM
الخوارزمية
1.6

طريقة جاوس للحذف باستخدام التعويض الارتجاعي
Gaussian Elimination with Backward Substitution

لحل النظام الخطي $n \times n$ الآتي:

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\
E_2 &: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\
\vdots & \quad \quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\
E_n &: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}
\end{aligned}$$

المدخلات: عدد من المجاهيل والمعادلات، n، مصفوفة معزّزة $A = [a_{ij}]$، حيث

$1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n+1$

المخرجات: حلّ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أو رسالة تقول: ليس للنظام الخطي حل وحيد

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1, \ldots, n-1$ نفذ الخطوات 2، 3، 4. (عملية الحذف)
2	افترض p أصغر عدد صحيح بحيث $a_{pi} \neq 0$ و $i \leq p \leq n$ إذا لم يحقق العدد p ذلك فعندئذ يكون المخرج (لا يوجد حل وحيد). توقف.
3	إذا كان $p \neq i$ فعندئذ نفّذ $(E_p) \longleftrightarrow (E_i)$.
4	لكل $j = i+1, \ldots, n$ نفّذ الخطوتين 5 و6.
5	ضع $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$

obeikandl.com

6	أجرِ العملية $(E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow (E_j)$
7	إذا كان $a_{nn} = 0$ فإن المخرج (لا يوجد حل وحيد). توقف.
8	ضع $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$ (ابدأ بالتعويض الارتجاعي).
9	لكل $i = n-1, \ldots, 1$ ضع $x_i = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right] \Big/ a_{ii}$
10	المخرج $(x_1, \ldots, x_n)$ (نجحت العملية). توقف.

■

إن برمجيــات CAS جميعها تحوي برمجيــات المصفوفات. ولتعريف المصفوفات وتنفيذ عمليات الحذف لجاوس باســتخدام مابل Maple؛ عليك أولا الدخــول إلى مكتبة الجبر الخطي Linear Algebra باستخدام الأمر

```
>with(LinearAlgebra)
```

لتعريف المصفوفة $\tilde{A}^{(1)}$ في مثال 2 التي سنسميها AA استخدم الأمر

```
>AA:=Matrix([[1,-1,2,-1,-8],[2,-2,3,-3,-20],[1,1,1,0,-2],[1,-1,4,3,4]])
```

إن هذا يعمل قائمة بالمدخلات بحسب صفوف المصفوفة الموسعة $AA \equiv \tilde{A}^{(1)}$: إن الدالة

```
RowOperation(AA,[i,j],m)
```

يجري العملية $(E_j + mE_i) \rightarrow (E_j)$.

وهذا الأمر نفســه دون المعلمة الأخيرة RowOperation(AA,[i,j],m) يجري العملية $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

ومن ثم فإن متتالية العمليات

```
>AA1:=RowOperation(AA,[2,1],-2)
>AA2:=RowOperation(AA1,[3,1],-1)
>AA3:=RowOperation(AA2,[4,1],-1)
>AA4:=RowOperation(AA3,[2,3])
>AA5:=RowOperation(AA4,[4,3],2)
```

تؤدي إلى النتيجة $AA5 \equiv \tilde{A}^{(4)}$.

وبطريقة أخرى فإن الأمر المنفرد

```
AA5:=GaussianElimination(AA)
```

يؤدي إلى المصفوفة المنخفضة نفسها.

وفي أي من الحالتين فالعملية النهائية

```
>x:=BackwardSubstitute(AA5)
```

تعطي الحل

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مثال 4 إن الغرض من هذا مثال هو توضيح ما يمكن أن يحدث لو فشلت الخوارزمية (1.6).

إن الحسابات ستجري آنيًا على نظامين خطيين

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad \text{و} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

obeikandl.com

وإن هذين النظامين ينتجان المصفوفتين

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 6 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 2 & 2 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

وبما أن $a_{11} = 1$ نجري $(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2)$ و $(E_3 - E_1) \rightarrow (E_3)$ فينتج

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

عند هذه النتيجة $a_{22} = a_{32} = 0$

تتطلب الخوارزمية توقف العملية، ومن ثم عدم الحصول على حل لأي من النظامين. إن كتابة المعادلات لكل نظام يعطي

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_3 &= -4 \\ x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_3 &= -2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

إن النظام الخطي الأول له عدد لانهائي من الحلول

$$x_3 = 2,\ x_2 = 2 - x_1 \ \text{و}\ x_1$$

النظام الخطي الثاني يؤدي إلى تناقض

$x_3 = 2$ و $x_3 = 4$، لذلك لا يوجد حل. ■

لا يوجد حل وحيد لكل حالة ضمن ما نستنتجه من الخوارزمية (1.6).

وعلى الرغم من أنه يمكن النظر إلى الخوارزمية (1.6) على أنها إنشاء المصفوفات $\tilde{A}^{(1)}, \ldots, \tilde{A}^{(n)}$ فإنه يمكن إجراء الحسابات على الحاسوب بتخزين مصفوفة واحدة $n \times (n+1)$ فقط ويمكن أن نعوض في كل خطوة عن قيمة a_{ij}، السابقة بالقيمة الجديدة. بالإضافة إلى ذلك يمكننا تخزين m_{ji} في مواقع a_{ij}، لأن a_{ij} قيمته 0 لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$ و $j = i+1, i+2, \ldots, n$. وهكذا فبدلاً من A يمكن كتابة المضاريب تحت القطر الرئيس وكتابة مدخلات $\tilde{A}^{(n)}$ غير الصفرية على القطر الرئيس وفوقه. ويمكن استخدام هذه القيم لحل أنظمة خطية أخرى محتوية على المصفوفة الأصلية A، كما سنرى في الفصل (5.6). إن الوقت اللازم لكل من الحسابات وتدوير الخطأ الناتج يعتمد على عدد عمليات الحساب للنقطة العائمة اللازمة لحل المسألة روتينيًا.

وعمومًا فإن الوقت اللازم لإجراء الضرب أو القسمة على الحاسوب هو نفسه تقريبًا، وهو أكثر بكثير من الوقت اللازم لإجراء الجمع أو القسمة. وعلى كل حال فإن الفروق الفعلية تعتمد على نظام الحساب المحدد. ولعرض تعداد العمليات لأي طريقة معينة، سنعدّ العمليات اللازمة لحل نظام خطي نمطي مؤلف من n معادلات بعدد n من المجاهيل باستخدام الخوارزمية 1.6. سنبقي عدد عمليات الجمع/ الطرح منفصلاً عن عمليات الضرب/ القسمة بسبب الفرق في الوقت. ولا يوجد أي عمليات حسابية لغاية الخطوتين 5 و 6 في الخوارزمية. وتتطلب الخطوة 5 $(n - i)$ من عمليات القسمة، وإن وضع $(E_j - m_{ji}E_i)$ بدلاً من E_j في الخطوة 6 يتطلب ضرب m_{ji} في كل حد في E_i، وينتج من ذلك $(n-i)(n-i+1)$ من عمليات الضرب.

وبعد استكمال هذا، فإن كل حد في المعادلة الناتجة يطرح من الحد المقابل في E_j.

إن هذا يتطلب $(n-i)(n-i+1)$ من عمليات الطرح. لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$، فإن العمليات اللازمة في الخطوتين 5 و 6 هي كما يلي:

obeikandl.com

ضرب/ قسمة

$$(n-i)+(n-i)(n-i+1)=(n-i)(n-i+2)$$

جمع/ طرح

$$(n-i)(n-i+1)$$

يمكن الحصول على العدد الكلي للعمليات اللازمة لهذه الخطوات بجمع تعداد العمليات لكل i. تذكر من حساب التفاضل والتكامل أن

$$\sum_{j=1}^{m} 1 = m, \quad \sum_{j=1}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

ومن ثم نحصل على تعدادات العمليات الآتية:

الضرب/ القسمة

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+2) = \sum_{i=1}^{n-1}(n^2-2ni+i^2+2n-2i)$$

$$= (n^2+2n)\sum_{i=1}^{n-1} 1 - 2(n+1)\sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

الجمع/ الطرح

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n-1}(n^2-2ni+i^2+n-i)$$

$$= (n^2+n)\sum_{i=1}^{n-1} 1 - (2n+1)\sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n^3-n}{3}$$

إن الخطوات الوحيدة الأخرى في الخوارزمية (1.6) التي تحتوي على عمليات حسابية هي تلك اللازمة للتعويض الارتجاعي، وهي الخطوتان 8 و9. وتتطلَّب الخطوة 8 عملية قسمة واحدة. وتتطلَّب الخطوة 9 $(n-i)$ من عمليات الضرب و $(n-i-1)$ من عمليات الجمع لكل حد جمع، ثم عملية طرح واحدة وعملية قسمة واحدة.

إن العدد الكلي للعمليات في الخطوتين 8 و9 هو كما يلي:

ضرب/ قسمة

$$1+\sum_{i=1}^{n-1}((n-i)+1) = \frac{n^2+n}{2}$$

جمع/ طرح

$$\sum_{i=1}^{n-1}((n-i-1)+1) = \frac{n^2-n}{2}$$

obeikandl.com

ولذلك فإن العدد الكلي للعمليات الحسابية في الخوارزمية 1.6 هو

ضرب/ قسمة

$$\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}+\frac{n^2+n}{2}=\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}$$

جمع/ طرح

$$\frac{n^3-n}{3}+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$$

عندما تكون n كبيرة فإن العدد الكلي لعمليات الضرب والقسمة هو $n^3/3$ تقريباً، كما هو الحال في العدد الكلي لعمليات الجمع والطرح. وهكذا تزداد كمية الحساب والوقت اللازم مع n بالتناسب مع n^3 كما في جدول (1.6).

جدول 1.6

n	جمع/ طرح	ضرب/ قسمة
3	17	11
10	430	375
50	44,150	42,875
100	343,300	338,250

مجموعة التمارين 1.6
EXERCISE SET

1. أوجد حلًّا بالطرائق البيانية إن أمكن لكل من الأنظمة الخطية الآتية، ونسرح النتائج من وجهة نظر هندسية:

أ. $\begin{aligned} x_1+2x_2&=3\\ x_1-x_2&=0\end{aligned}$

ب. $\begin{aligned} x_1+2x_2&=3\\ 2x_1+4x_2&=6\end{aligned}$

ج. $\begin{aligned} x_1+2x_2&=0\\ 2x_1+4x_2&=0\end{aligned}$

د. $\begin{aligned} 2x_1+x_2&=-1\\ 4x_1+2x_2&=-2\\ x_1-3x_2&=5\end{aligned}$

2. أوجد حلًّا بالطرائق البيانية إن أمكن لكل من الأنظمة الخطية الآتية. ونسرح النتائج من وجهة نظر هندسية:

أ. $\begin{aligned} x_1+2x_2&=0\\ x_1-x_2&=0\end{aligned}$

ب. $\begin{aligned} x_1+2x_2&=3\\ -2x_1-4x_2&=6\end{aligned}$

ج. $\begin{aligned} 2x_1+x_2&=-1\\ x_1+x_2&=2\\ x_1-3x_2&=5\end{aligned}$

د. $\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=1\\ 2x_1+4x_2-x_3&=-1\end{aligned}$

3. استخدم طريقة جاوس للحذف باستخدام التعويض الارتجاعي وحساب تقريب لعددين في حل الأنظمة الخطية الآتية، ولا تعد ترتيب المعادلات: (إن الحل لصحيح لكل نظام هو $x_1=1, x_2=-1, x_3=3$.)

أ. $\begin{aligned} 4x_1+x_2+2x_3&=9\\ 2x_1+4x_2-x_3&=-5\\ x_1+x_2-3x_3&=-9\end{aligned}$

ب. $\begin{aligned} 4x_1-x_2+x_3&=8\\ 2x_1+5x_2+2x_3&=3\\ x_1+2x_2+4x_3&=11\end{aligned}$

4. استخدم طريقة جاوس للحذف باستخدام التعويض الارتجاعي وحساب تقريب لعددين في حل الأنظمة الخطية الآتية. ولا تعد ترتيب المعادلات: (إن الحل لصحيح لكل نظام هو

obeikandl.com

$(x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$.)

أ.
$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8 \\ \tfrac{5}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= -5 \\ \tfrac{1}{9}x_1 + \tfrac{1}{9}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 &= -1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

5. اســتخدم خوارزمية الحذف لجاوس لحل الأنظمة الخطية الآتية إذا كان ذلك ممكنًا. وحدّد ما إذا كانت التبادلات في الصفوف ضرورية أو لا :

أ.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 &= 3 \\ x_1 + 1.5x_2 &= 4.5 \\ -3x_2 + 0.5x_3 &= -6.6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

6. اســتخدم خوارزمية الحذف لجاوس لحل الأنظمة الخطية الآتية إذا كان ذلك ممكنًا. وحدّد ما إذا كانت التبادلات في الصفوف ضرورية أو لا :

أ.
$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 2 \\ x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_4 &= 5 \\ x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

7. استخدم الخوارزمية 1.6 ومابل Maple بالأمر DIGITS:=10 لحل الأنظمة الخطية الآتية:

أ.
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + \tfrac{1}{6}x_3 &= 9 \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 8 \\ \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913 \\ 2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 &= 28.544 \\ 1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 &= \tfrac{1}{6} \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{5}x_4 &= \tfrac{1}{7} \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{1}{6}x_4 &= \tfrac{1}{8} \\ \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + \tfrac{1}{6}x_3 + \tfrac{1}{7}x_4 &= \tfrac{1}{9} \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 &= 7 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 2 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 &= 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

8. اســتخدم الخوارزمية 1.6 ومابــل Maple بالأمر DIGITS:=10 لحــل الأنظمة الخطية الآتية :

أ.
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 - \tfrac{1}{8}x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{6}x_2 + \tfrac{1}{9}x_3 &= 1 \\ \tfrac{1}{7}x_1 + \tfrac{1}{7}x_2 + \tfrac{1}{10}x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} 2.71x_1 + x_2 + 1032x_3 &= 12 \\ 4.12x_1 - x_2 + 500x_3 &= 11.49 \\ 3.33x_1 + 2x_2 - 200x_3 &= 41 \end{aligned}$$

ج.
$$\begin{aligned} \pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ e x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 - x_2 + \sqrt{3}x_3 - \sqrt{5}x_4 &= 3 \end{aligned}$$

د.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 16 \\ 16x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 32 \end{aligned}$$

9. لديك النظام الخطي
$$\begin{aligned} 2x_1 - 6\alpha x_2 &= 3 \\ 3\alpha x_1 - x_2 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

أ. أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث لا يكون هناك حلول للنظام.

ب. أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث يكون للنظام ما لانهاية من الحلول.

ج. على فرض وجود حل وحيد لقيمة معطاة للمعامل α، أوجد الحل.

obeikandl.com

10. لديك النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + \alpha x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 &= 3 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

أ. أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث لا يكون هناك حلول للنظام.
ب. أوجد قيمة (قيمًا) للمعامل α بحيث يكون للنظام ما لانهاية من الحلول.
ج. على فرض وجود حل وحيد لقيمة معطاة للمعامل α. أوجد الحل.

11. أن العمليات

أ. $(\lambda E_i) \to (E_i)$ ب. $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$ ج. $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

لا تغير مجموعة حل النظام الخطي.

12. طريقة جاوس – جوردن Gauss - Jordan Method

توصف هذه الطريقة كما يلي:

استخدم المعادلة i ليس فقط لحذف x_i من المعادلات $E_{i+1}, E_{i+2}, \ldots, E_n$. كما ستخدمت في طريقة الحذف لجاوس. بل لحذف x_i من $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$. وعند تخفيض [A b] إلى الصيغة

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right]$$

نحصل على الحل بوضع

$$x_i = \frac{a_{i,n+1}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

إن هذه الطريقة تتحاشى التعويض الارجاعي في طريقة الحذف لجاوس. ابن خوارزمية لطريقة جاوس – جوردان على غرار الخوارزمية (1.6).

13. استخدم طريقة جاوس – جوردان وحساب تقريب لخانتين لحل الأنظمة في لتمرين (3)

14. أعد حل التمرين ٧ باستخدام طريقة جاوس – جوردان.

15. برهن أن طريقة جاوس – جوردان تتطلب

$\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2}$ من عمليات الضرب/ القسمة. و $\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$ من عمليات الجمع/ الطرح.

ب. اعمل جدولاً لمقارنة عدد العمليات اللازمة لطريقة جاوس – جوردان وطريقة الحذف لجاوس للقيم $n = 3, 10, 50, 100$

أي الطريقتين تتطلب عدد عمليات أقل؟

16. افترض الطريقة الآتية الهجين من الطريقتين الحذف لجاوس/ جاوس– جوردان لحل النظام (4.6). أولاً. طبق طريقة الحذف لجاوس لتحويل النظام إلى صيغة مثلثية. ثم استخدم المعادلة n لحذف معاملات x_n في كل صف من الصفوف $n-1$ الأولى.

بعد استكمال ذلك استخدم المعادلة $(n-1)$st لحذف معادلات x_{n-1} من الصفوف $n-2$ الأولى وهكذا.

سيظهر النظام في النهاية مثل النظام المختزل في التمرين (12).

أ. برهن أن هذه الطريقة تتطلب $\frac{n^3}{3} + \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$ من عمليات الضرب/ القسمة و $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n$ من عمليات الجمع/ الطرح.

ب. اعمل جدولاً لمقارنة العمليات اللازمة لطريقة الحذف لجاوس. جاوس – جوردان. والطريقة الهجين للقيم $n = 3, 10, 50, 100$.

17. استخدم طريقة جاوس – جوردان وحساب تقريب لخانتين لحل الأنظمة في التمرين (3).

obeikandl.com

18. أعد حل التمرين (7) باستخدام الطريقة الموصوفة في التمرين (16).
19. افترض أنه في نظام بيولوجي يوجد n نوع من الحيوانات و m مصدر للغذاء.

افترض أن x_j تمثّل مجتمع النوع j لكل $j = 1, \ldots, n$، وافترض b_i تمثّل كمية الغذاء المتاحة يوميًا من الغذاء i، وأن a_{ij} تمثّل كمية الغذاء i المستهلكة من قبل النوع j.

إن النظام الخطي

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

يمثّل التوازن، حيث توجد كمية يومية من الغذاء تســاوي الكمية المســتهلكة من قبل كل نوع يوميًا.

أ. افترض

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و $\mathbf{x} = (x_j) = [1000, 500, 350, 400]$

و $\mathbf{b} = (b_i) = [3500, 2700, 900]$

هل يوجد غذاء كافٍ لمعدل الاستهلاك اليومي؟

ب. ما أكبر عدد من الحيوانات من كل نوع يمكن إضافته إلى النظام بانفراد على أن يبقى الغذاء كافيًا للاستهلاك؟

ج. إذا انقرض النوع 1، فكم يزداد كل نوع بحيث يكون الغذاء كافيًا؟

د. إذا انقرض النوع 2، فكم يزداد كل نوع بحيث يكون الغذاء كافيًا؟

20. إن معادلة تكامل فردهولم Fredholm من النوع الثاني تكون على الصيغة

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)\, dt$$

حيث a، b والدالتان f و K معطاة.

لإيجاد تقريب للدالة u على الفترة $[a, b]$ ؛ نختار التجزئة

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

$$u(x_i) = f(x_i) + \int_a^b K(x_i, t)u(t)\, dt$$

لكل $i = 0, \ldots, m$

ونحل المعادلات لإيجاد $u(x_0), u(x_1), \ldots, u(x_m)$

تقرّب التكاملات باستخدام معادلات التكامل المبنية على النقاط $x_0, \ldots, x_m$

ليكن في مسألتنا $a = 0, b = 1, f(x) = x^2$ و $K(x, t) = e^{|x-t|}$

أ. برهن أنه يجب حل النظام الخطي

$$u(0) = f(0) + \tfrac{1}{2}[K(0, 0)u(0) + K(0, 1)u(1)], \quad u(1) = f(1) + \tfrac{1}{2}[K(1, 0)u(0) + K(1, 1)u(1)]$$

عند استخدام قاعدة شبه المنحرف.

ب. كوّن النظام الخطي وحُلّه عند استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة بأخذ $n = 4$.

ج. أعد الفقرة (ب) باستخدام قاعدة سمبسون المركبة.

obeikandl.com

2.6 استراتيجيات التمحور Pivoting Strategies

وجدنا في إثبات الخوارزمية (1.6) الحاجة إلى التغيير الصفي عندما يكون أحد عناصر التمحور $a_{kk}^{(k)} = 0$. إن صيغة التغيير الصفي من النوع $(E_k) \longleftrightarrow (E_p)$ حيث p أصغر عدد صحيح يكون أكبر من k. ويحقق $a_{pk}^{(k)} \neq 0$. ولتخفيض خطأ التدوير، غالبًا ما يكون من الضرورة إجراء تغييرات صفية حتى لو كان التمحور غير صفرية.

إذا كان المقدار $a_{kk}^{(k)}$ صغيرًا مقارنة بـ $a_{jk}^{(k)}$ فإن مقدار حد الضرب

$$m_{jk} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

سيكون أكبر من 1 كثيرًا.

إن خطأ تقريب الداخل في حساب أحد الحدود $a_{kl}^{(k)}$ سيضرب في القدار m_{jk} عندما نحسب $a_{jl}^{(k+1)}$ مما يزيد من الخطأ الأصلي.

وكذلك عند إجراء التعويض الإرجاعي للمجهول

$$x_k = \frac{a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

الذي فيه $a_{kk}^{(k)}$ قيمة صغيرة. فإن أي خطأ في البسط يمكن أن يكبر دراماتيكيًا، بسبب القسمة على $a_{kk}^{(k)}$. وسنرى في مثالنا الآتي أنه في الأنظمة الصغيرة جدًا، يمكن لخطأ تقريب أن يطغى على الحسابات.

مثال 1 إن النظام الخطي

$$\begin{aligned} E_1: &\quad 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ E_2: &\quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{aligned}$$

له الحل الصحيح $x_2 = 1.000$ و $x_1 = 10.00$. افترض أنه أجريت طريقة الحذف لجاوس على هذا النظام باستخدام الحساب ذي الخانات الأربع مع التدوير. إن أول عنصر التمحور $a_{11}^{(1)} = 0.003000$ صغير. والمضاعف المرتبط به هو

$$m_{21} = \frac{5.291}{0.003000} = 1763.6\overline{6}$$

ويدوّر إلى العدد الكبير 1764.

وبإجراء $(E_2 - m_{21}E_1) \longrightarrow (E_2)$

واستخدام التقريب المناسب نحصل على

$$0.003000x_1 + 59.14x_2 \approx 59.17 - 104300x_2 \approx -104400$$

بدلًا من القيم الدقيقة

$$0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 - 104309.37\overline{6}x_2 = -104309.37\overline{6}$$

إن الاختلاف في مقادير $m_{21}a_{13}$ و a_{23} قد أدى إلى خطأ تدوير. ولكن لم تجر زيادات على خطأ التدوير. إن التعويض الإرجاعي يعطي $x_2 \approx 1.001$ الذي هو تقريب قريب من القيمة الفعلية $x_2 = 1.000$. وعلى كل حال فبسبب صغر عنصر التمحور $a_{11} = 0.003000$. فإن

obeikandl.com

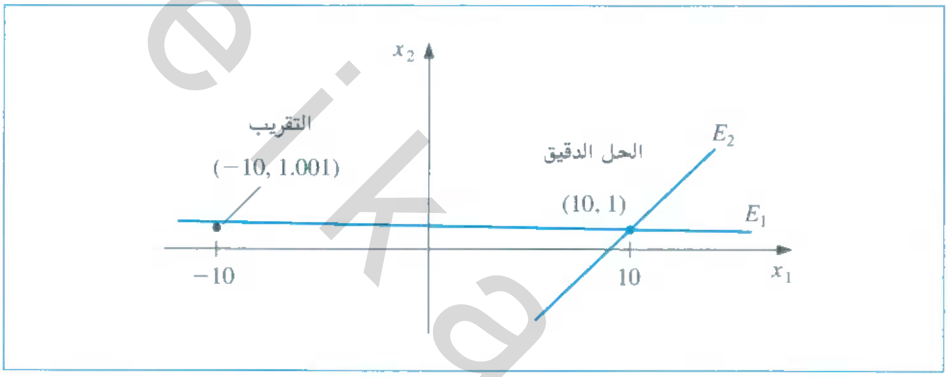
$$x_1 \approx \frac{59.17-(59.14)(1.001)}{0.003000} = -10.00$$

يحتوي على خطأ صغير قيمته 0.001 مضروب في العدد

$$\frac{59.14}{0.003000} \approx 20000$$

إن هــذا يهدم تقريب القيمة الفعلية $x_1 = 10.00$ ، ومـن الواضح أن هذا مثال مصطنع، ويُظهر الرسـم في شكل (1.6) كيف يمكن حدوث الخطأ بسـهولة. ولكن بالنسبة إلى الأنظمة الخطية الأكبر قليلًا فإن التنبؤ مسبقًا بمتى يمكن حدوث خطأ فادح أمر صعب.

شكل 1.6



إن مثال 1 يوضّح كيفية ظهور الصعوبات عندما يكون عنصر مركز التمحور $a_{kk}^{(k)}$ صغيرا بالنسـبة إلـى المدخـلات $a_{ij}^{(k)}$ لـكل $k \le i \le n$ و $k \le j \le n$. ولتجنب هذه المشـكلة، يجري التمحور باختيـار عنصر $a_{pq}^{(k)}$ كبير القيمة ليكون مركـزًا محوريًا. وبعد ذلك يحدث تبادل بين الصفين k وp. ونتبع بعد ذلك تبادل العمودين k وp إذا كان هناك ضرورة.

إن أبسـط استراتيجية هي أن تختار عنصرًا في العمود نفسه الواقع تحت القطر، وله أكبر قيمة مطلقة، وبالتحديد نعيّن أصغر عدد p، بحيث يحقق $p \ge k$

$$|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}|$$

ثم نجري $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$

ولا حاجة إلى تبادل الأعمدة في هذه الحالة.

مثال 2 افترض ثانية النظام

$$\begin{aligned} E_1: &\quad 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ E_2: &\quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{aligned}$$

إن عملية التمحور التي شرِحت تؤدي أولًا إلى إيجاد

$$\max\left\{|a_{11}^{(1)}|, |a_{21}^{(1)}|\right\} = \max\{|0.003000|, |5.291|\} = |5.291| = |a_{21}^{(1)}|$$

obeikandi.com

تنفّذ بعدئذ العملية $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$ لتعطي النظام

$$\begin{aligned} E_1: &\quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \\ E_2: &\quad 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \end{aligned}$$

إن المضاعف (العدد الذي نضرب فيه) لهذا النظام هو

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0.0005670$$

والعملية $(E_2 - m_{21}E_1) \rightarrow (E_2)$ تختزل النظام إلى

$$\begin{aligned} 5.291x_1 - 6.130x_2 &\approx 46.78 \\ 59.14x_2 &\approx 59.14 \end{aligned}$$

وتكـون الإجابـات ذات الخانت الأربع الناتجة من التعويـض الإرجاعي هي القيم الصحيحة $x_1 = 10.00$ و $x_2 = 1.000$. ■

إن الطريقة التي شـرحت تسـمى التمحـور الجزئـي Partial Pivoting أو تمحور العمود الأعظم maximal column pivoting وتُفصّـل في الخوارزمية (2.6). إن التبادل الصفي الفعلي قد حوكي في الخوارزمية بتبادل القيم في الأمر NROW في الخطوة 5.

ALGORITHM

الخوارزمية

2.6

طريقة الحذف لجاوس بالتمحور الجزئي

Gaussian Elimination with Partial Pivoting

لحل النظام الخطي $n \times n$

$$\begin{aligned} E_1: &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ E_2: &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ &\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ E_n: &\quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{aligned}$$

المدخلات: عدد من المجاهيل والمعادلات n، المصفوفة المزيدة $A = [a_{ij}]$ حيث $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le n+1$.

المخرجات: حل المجاهيل $x_1, \ldots, x_n$ أو رسالة تقول: إن النظام الخطي ليس له حل وحيد.

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1, \ldots, n$ ضع $NROW(i) = i$ (حدد مؤشر الصف الابتدائي).
2	لكل $i = 1, \ldots, n-1$ نفّذ الخطوات 3-6. (عملية الحذف)
3	اجعل p أصغر عدد صحيح بحيث $i \le p \le n$ و $\lvert a(NROW(p), i)\rvert = \max_{i \le j \le n} \lvert a(NROW(j), i)\rvert$ $(Notation: a(NROW(i), j) \equiv a_{NROW_i, j}.)$
4	إذا كان $a(NROW(p), i) = 0$ تنتج المخرجات (لا يوجد حل وحيد). توقف
5	إذا كان $NROW(i) \neq NROW(p)$ فضع $NCOPY = NROW(i)$ $NROW(i) = NROW(p)$ $NROW(p) = NCOPY$ (التبادل الصفي المحاكي)

obeikandl.com

6	لكل $j = i + 1, \ldots, n$ نفّذ الخطوتين 7 و8.
7	ضع $m(NROW(j), i) = a(NROW(j), i)/a(NROW(i), i)$.
8	نفّذ $(E_{NROW(j)} - m(NROW(j), i) \cdot E_{NROW(i)}) \rightarrow (E_{NROW(j)})$.
9	إذا كان $a(NROW(n), n) = 0$ فضع المخرجات (لا يوجد حل وحيد). توقف.
10	ضع $x_n = a(NROW(n), n + 1)/a(NROW(n), n)$ (ابدأ بالتعويض التراجعي.)
11	لكل $i = n - 1, \ldots, 1$ ضع $x_i = \dfrac{a(NROW(i), n + 1) - \sum_{j=i+1}^{n} a(NROW(i), j) \cdot x_j}{a(NROW(i), i)}$
12	المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$ (نجحت العملية). توقف.

■

كل مضاعف m_{ji} في خوارزمية التمحور الجزئي له قيمة تساوي أو أقل من 1. وعلى الرغم من أن هذه الاستراتيجية كافية لمعظم النظم الخطية، إلا أنه تظهر حالات لا تكون الاستراتيجية فيها ناجحة.

مثال 3 النظام الخطي الآتي هو ذاته في مثالين 1 و2. إلا أن المدخلات في المعادلة الأولى قد ضربت في العدد 10^4.

$$E_1: \quad 30.00x_1 + 591400x_2 = 591700$$
$$E_2: \quad 5.291x_1 - \quad 6.130x_2 = 46.78$$

إن العملية الموصوفة في الخوارزمية (2.6) بالحساب ذي الخانات الأربع تؤدي إلى النتائج نفسها كما في مثال (1).

إن أكبر قيمة في العمود الأول هي 30.00 والمضاعف

$$m_{21} = \frac{5.291}{30.00} = 0.1764$$

يؤدي إلى النظام

$$30.00x_1 + 591400x_2 \approx 591700$$
$$-104300x_2 \approx -104400$$

الذي يعطي الحلول غير الدقيقة كما في مثال 1 وهي $x_2 \approx 1.001$ و $x_1 \approx -10.00$.

■

التمحور الجزئي الموزون Scaled Partial Pivoting الذي يُسمى أيضًا تمحور العمود الموزون Scaled-column Pivoting هو عملية مناسبة للنظام في مثال (3) بحيث يضع العنصر الأكبر من المدخلات في صفه بوصفه مركزًا للتمحور. إن الخطوة الأولى في هذه العملية تبدأ بتعريف عامل ضربي (وزن) s_i لكل صف كما يلي:

$$s_i = \max_{1 \le j \le n} |a_{ij}|$$

إذا حدث وكان $s_i = 0$ لأي عدد i، فهذا يعني أنه ليس للنظام حل وحيد؛ لأن المدخلات جميعها في الصف i هي أصفار.

obeikandi.com

وعلى فرض أن هذه ليست هي الحالة، فإن التبادل الصفي المناسب لوضع أصفار في العمود الأول يتحدد باختيار أصغر عدد صحيح p بحيث

$$\frac{|a_{p1}|}{s_p} = \max_{1\le k\le n} \frac{|a_{k1}|}{s_k}$$

ومن ثم إجراء التبديل $(E_1) \leftrightarrow (E_p)$.

إن تأثير الوزن يكون لضمان أن العنصر الأكبر في كل صف له قيمة نسبية 1 قبل إجراء المقارنة لتبديل الصفوف، وبطريقة مماثلة وقبل حذف المتغير x_i باستخدام العمليات $E_k - m_{ki}E_i$ لكل $k = i+1, \dots, n$ نختار أصغر عدد صحيح $p \ge i$ بحيث

$$\frac{|a_{pi}|}{s_p} = \max_{i\le k\le n} \frac{|a_{ki}|}{s_k}$$

وننفِّذ المبادلة الصفية $E_i \leftrightarrow E_p$ إذا كان $p \neq i$. إن العوامل الضربية $s_1, \dots, s_n$ تحسب مرة واحدة فقط عند البدء بالعليا. ويجب مبادلتها عند تنفيذ مبادلة الصفوف.

إن تطبيق التمحور الجزئي الموزون على مثال 3 يعطي

$$s_1 = \max\{|30.00|, |591400|\} = 591400 \quad \text{و} \quad s_2 = \max\{|5.291|, |-6.130|\} = 6.130$$

ومن ثم

$$\frac{|a_{11}|}{s_1} = \frac{30.00}{591400} = 0.5073 \times 10^{-4}, \qquad \frac{|a_{21}|}{s_2} = \frac{5.291}{6.130} = 0.8631$$

وتحدث المبادلة $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$.

وبتطبيق عملية الحذف لجاوس على النظام الجديد

$$5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$$

$$30.00x_1 + 591400x_2 = 591700$$

نحصل على النتائج الصحيحة $x_1 = 10.00$ و $x_2 = 1.000$.

تنفَذ الخوارزمية 3.6 عملية التمحور الجزئي الموزون.

ALGORITHM

الخوارزمية

3.6

عملية جاوس بالتمحور الجزئي الموزون

Gaussian Elimination with Scaled Partial Pivoting

الخطوات الوحيدة في هذه الخوارزمية التي تختلف عن الخوارزمية 2.6 هي:

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 1, \dots, n$ ضع $s_i = \max_{1\le j\le n} \lvert a_{ij}\rvert$ إذا كان $s_i = 0$ فعندئذ تكون المخرجات (لا يوجد حل وحيد). توقف. ضع $NROW(i) = i$.
2	لكل $i = 1, \dots, n-1$ نفِّذ الخطوات 3-6. (عملية الحذف).
3	افترض p أصغر عدد صحيح حيث $i \le p \le n$ و $\frac{\lvert a(NROW(p), i)\rvert}{s(NROW(p))} = \max_{i\le j\le n} \frac{\lvert a(NROW(j), i)\rvert}{s(NROW(j))}$

■

obeikandl.com

يشرح المثال الآتي طريقة التمحور الجزئي الموزون باستخدام مابل Mable ومكتبة الجبر الخطي Linear Algebra library ذات الحساب بتقريب بعدد منتهٍ من الخانات.

مثال 4 حُلَّ النظام الخطي باستخدام حساب تقريب لثلاث خانات

$$\begin{aligned} 2.11x_1 - 4.21x_2 + 0.921x_3 &= 2.01 \\ 4.01x_1 + 10.2x_2 - 1.12x_3 &= -3.09 \\ 1.09x_1 + 0.987x_2 + 0.832x_3 &= 4.21 \end{aligned}$$

لكي نحصل على حساب تقريب بثلاث خانات؛ أدخل

```
>Digits:=3
```

لدينا $s_1 = 4.21, s_2 = 10.2$ و $s_3 = 1.09$

ولذلك يكون

$$\frac{|a_{31}|}{s_3} = \frac{1.09}{1.09} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{|a_{11}|}{s_1} = \frac{2.11}{4.21} = 0.501, \quad \frac{|a_{21}|}{s_1} = \frac{4.01}{10.2} = 0.393$$

بعد ذلك نحمّل مكتبة الجبر الخطي بالأمر

```
>with(LinearAlgebra)
```

إن المصفوفة المزيدة AA تكون معرفة بـ

```
>AA:=Matrix([[2.11,-4.21,0.921,2.01],[4.01,10.2,-1.12,-3.09],[1.09
        0.987,0.832,4.21]])
```

التي تعطي

$$AA := \begin{bmatrix} 2.11 & -4.21 & .921 & 2.01 \\ 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \end{bmatrix}$$

وبما أن $|a_{31}|/s_3$ هو الأكبر، نجري $(E_1) \leftrightarrow (E_3)$ باستخدام

```
>AA1:=RowOperation(AA,[1,3])
```

لنحصل على

$$AA := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 2.11 & -4.21 & .921 & 2.01 \end{bmatrix}$$

وحساب المضاعفات يعطي

```
>m21:=AA1[2,1]/AA1[1,1]
```

$$m21 := 3.68$$

```
>m31:=AA1[3,1]/AA1[1,1]
```

$$m31 := 1.94$$

ننفّذ أول عمليتين للحذف باستخدام

```
>AA2:=RowOperation(AA1,[2,1],-m21)
```

و

```
>AA3:=RowOperation(AA2,[3,1],-m31)
```

لنحصل على

$$AA3 := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 0 & 6.57 & -4.18 & -18.6 \\ 0 & -6.12 & -.689 & -6.16 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$\frac{|a_{22}|}{s_2} = \frac{6.57}{10.2} = 0.644 < \frac{|a_{32}|}{s_3} = \frac{6.12}{4.21} = 1.45$$

ننّفذ

```
>AA4:=RowOperation(AA3,[2,3])
```

التي تعطي

$$AA4 := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 0 & -6.12 & -.689 & -6.16 \\ 0 & 6.57 & -4.18 & -18.6 \end{bmatrix}$$

إن المضاعف m_{32} يُحسب بالأمر

```
>m32:=AA4[3,2]/AA4[2,2]
```

$$m_{32} := -1.07$$

وخطوة الحذف

```
>AA5:=RowOperation(AA4,[3,2],-m32)
```

تعطي

$$AA5 := \begin{bmatrix} 1.09 & .987 & .832 & 4.21 \\ 0 & -6.12 & -.689 & -6.16 \\ 0 & .02 & -4.92 & -25.2 \end{bmatrix}$$

ولا نستطيع استخدام التعويض الإرجاعي Backward Substitute؛ لأن المدخل .02 موجود في المكان (3,2). وإن هذا المدخل غير صفري بسبب التدوير. ولكن يمكن أن نصوّب هذه المشكلة البسيطة باستخدام الأمر

```
>AA5[3,2]:=0
```

التي تعوّض عن .02 بالصفر. ولكي تشاهد ذلك؛ أدخل

```
>AA5
```

الذي يعرض المصفوفة $AA5$.

وأخيرًا

```
>x:=BackwardSubstitute(AA5)
```

obeikandl.com

يعطي الحل

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.431 \\ 0.430 \\ 5.12 \end{bmatrix}$$

إن أول الحسابات الإضافية اللازمة لطريقة التمحور الجزئي الموزون تنتج عن تحديد العوامل الضربية بثوابت؛ هناك $(n-1)$ من المقارنات لكل صف من الصفوف التي عددها n. ومن ثم فيكون $n(n-1)$ من المقارنات. لتحديد أول خطوة تبادل صحيحة؛ نجري n من عمليات القسمة متبوعة بمقارنات عددها $(n-1)$.

ولذلك فإن أول تحديد للتبادل يضيف n من عمليات القسمة مع $(n-1)$ من المقارنات.

ولما كانت العوامل الضربية تحسب لمرة واحدة، فإن الخطوة الثانية تحتاج إلى $(n-1)$ من عمليات قسمة و $(n-2)$ من عمليات مقارنة.

ونستمر بطريقة مماثلة حتى نحصل على أصفار في المدخلات جميعها تحت القطر الرئيس عدا الصف n. إن الخطوة النهائية تتطلب عمليتي قسمة وعملية مقارنة واحدة.

وبالنتيجة فإن عملية التمحور الجزئي الموزون تضيف

$$n(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1) + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3}{2}n(n-1) \tag{7.6}$$

من عمليات المقارنة،

و
$$\sum_{k=2}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

من عمليات القسمة إلى طريقة الحذف لجاوس.

إن الوقت اللازم لإجراء مقارنة يقارب الوقت المطلوب لعمليات الجمع/ الطرح. ولما كان الوقت الكلي اللازم لإجراء عملية الحذف لجاوس هو من الرتبة $O(n^3/3)$ من عمليات الضرب/ القسمة و$O(n^3/3)$ من عمليات الجمع/ الطرح، فإن عملية التمحور الجزئي الموزون لا تحتاج إلى وقت إضافي ذي قيمة مهمة لحل نظام ذي قيم كبيرة لـ n.

ولنؤكد أهمية اختيار عوامل الضرب لمرّة واحدة؛ نفترض كمية الحسابات الإضافية التي ستكون مطلوبة في حالة تعديل الطريقة، بحيث تحدّد عوامل ضربية جديدة في كل مرّة يُتخذ فيها قرار تبادل صفي.

في هذه الحالة، فإن الحدّ $n(n-1)$ في المعادلة (7.6) يجب التعويض عنه بالمقدار

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}n(n^2-1)$$

ونتيجة لذلك، فإن طريقة التمحور ستضيف $O(n^3/3)$ من المقارنات، بالإضافة إلى $[n(n+1)/2] - 1$ من عمليات القسمة.

يجب إذن ضمن نظام ما من نوع التمحور هذا استخدام ما يُسمى التمحور التام (الأعظمي) Complete (or *maximal*).

إن التمحور الكامل في الخطوة k يتفحّص استخدام المدخلات a_{ij} جميعها لكل $i = k, k+1, \ldots, n$

و $j = k, k+1, \ldots, n$ لمحاولة إيجاد المدخلة ذات القيمة الأعلى. تُجرى المبادلات الصفية والعمودية كلها لتوصيل هذه المدخلة إلى مركز المحور. إن الخطوة الأولى للتمحور الكلي تتطلب إجراء $n^2 - 1$ من المقارنات. وتتطلب الخطوة الثانية $(n-1)^2 - 1$ من المقارنات. وهكذا. ولذلك فإن الوقت الإضافي الكلي اللازم لاستكمال التمحور الكامل في عملية الحذف لجاوس هو

$$\sum_{k=2}^{n}(k^2 - 1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

من المقارنات.

إن هذا العدد قابل للمقارنة بالعدد اللازم لعملية التمحور العمودي الموزون، ولكن لا حاجة إلى عمليات القسمة. ومن ثم فإن التمحور الكامل هو استراتيجية محبّذة للأنظمة، حيث إن الدقة مهمة والوقت اللازم لتنفيذ هذه الطريقة مبرر.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 2.6

1. أوجد المبادلات الصفية اللازمة لحلّ الأنظمة الخطية الآتية باستخدام الخوارزمية (1.6):

أ. $x_1 - 5x_2 + x_3 = 7$, $10x_1 + 20x_3 = 6$, $5x_1 - x_3 = 4$

ب. $x_1 + x_2 - x_3 = 1$, $x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$, $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$

ج. $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5$, $-4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 14$, $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8$

د. $x_2 + x_3 = 6$, $x_1 - 2x_2 - x_3 = 4$, $x_1 - x_2 + x_3 = 5$

2. أوجد المبادلات الصفية اللازمة لحلّ الأنظمة الخطية الآتية باستخدام الخوارزمية 1.6:

أ. $13x_1 + 17x_2 + x_3 = 5$, $x_2 + 19x_3 = 1$, $12x_2 - x_3 = 0$

ب. $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $12x_2 - x_3 = 4$, $2x_1 + x_2 + x_3 = 5$

ج. $5x_1 + x_2 - 6x_3 = 7$, $2x_1 + x_2 - x_3 = 8$, $6x_1 + 12x_2 + x_3 = 9$

د. $x_1 - x_2 + x_3 = 5$, $7x_1 + 5x_2 - x_3 = 8$, $2x_1 + x_2 + x_3 = 7$

3. كرر التمرين (1) باستخدام الخوارزمية (2.6).
4. كرر التمرين (2) باستخدام الخوارزمية (2.6).
5. كرر التمرين (1) باستخدام الخوارزمية (3.6).
6. كرر التمرين (2) باستخدام الخوارزمية (3.6).
7. كرر التمرين (1) باستخدام التمحور الكامل.
8. كرر التمرين (2) باستخدام التمحور الكامل.
9. استخدم طريقة الحذف لجاوس وحساب القطع ذي الخانات الثلاث لحلّ الأنظمة الخطية الآتية. وقارن التقريب بالحلّ الفعلي:

أ. $0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2,$ $5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0.$
الحل الفعلي $[10, 1]$

ب. $3.03x_1 - 12.1x_2 + 14x_3 = -119,$ $-3.03x_1 + 12.1x_2 - 7x_3 = 120,$ $6.11x_1 - 14.2x_2 + 21x_3 = -139.$
لحل الفعلي $[0, 10, \frac{1}{7}]$

obeikandl.com

ج.
$$\begin{aligned} 1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + x_4 &= 1.12 \\ 14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - x_4 &= 3.44 \\ 100x_2 - 99.9x_3 + x_4 &= 2.15 \\ 15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - x_4 &= 4.16 \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[0.176, 0.0126, -0.0206, -1.18]$

د.
$$\begin{aligned} \pi x_1 - ex_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 &= \sqrt{11} \\ \pi^2 x_1 + ex_2 - e^2 x_3 + \tfrac{3}{7}x_4 &= 0 \\ \sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_4 &= \pi \\ \pi^3 x_1 + e^2 x_2 - \sqrt{7}x_3 + \tfrac{1}{9}x_4 &= \sqrt{2} \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[0.788, -3.12, 0.167, 4.55]$

10. استخدم طريقة الحذف لجاوس وحساب القطع ذي الخانات الثلاث لحل الأنظمة الخطية الآتية، وقارن التقريب بالحل الفعلي:

أ.
$$\begin{aligned} 58.9x_1 + 0.03x_2 &= 59.2 \\ -6.10x_1 + 5.31x_2 &= 47.0 \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[1, 10]$

ب.
$$\begin{aligned} 3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 &= 7953 \\ 2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 &= 0.965 \\ -1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 &= 2.714 \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[1, 0.5, -1]$

ج.
$$\begin{aligned} 2.12x_1 - 2.12x_2 + 51.3x_3 + 100x_4 &= \pi \\ 0.333x_1 - 0.333x_2 - 12.2x_3 + 19.7x_4 &= \sqrt{2} \\ 6.19x_1 + 8.20x_2 - 1.00x_3 - 2.01x_4 &= 0 \\ -5.73x_1 + 6.12x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[0.0998, -0.0683, -0.0363, 0.0465]$

د.
$$\begin{aligned} \pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ ex_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - \sqrt{5}x_4 &= 3 \end{aligned}$$
الحل الفعلي $[1.35, -4.68, -4.03, -1.66]$

11. كرر التمرين (9) باستخدام حساب التقريب ذي الخانات الثلاث.
12. كرر التمرين (10) باستخدام حساب التقريب ذي الخانات الثلاث.
13. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي.
14. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي.
15. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي وحساب التدوير ذي الثلاث خانات.
16. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي وحساب التدوير ذي الخانات الثلاث.
17. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون.
18. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون.
19. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون وحساب التقريب ذي الخانات الثلاث.
20. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الجزئي الموزون وحساب التقريب ذي الخانات الثلاث.
21. كرر التمرين (9) باستخدام الخوارزمية (1.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.
22. كرر التمرين (10) باستخدام الخوارزمية (1.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.
23. كرر التمرين (9) باستخدام الخوارزمية (2.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.
24. كرر التمرين (10) باستخدام الخوارزمية (2.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.
25. كرر التمرين (9) باستخدام الخوارزمية (3.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.
26. كرر التمرين (10) باستخدام الخوارزمية (3.6) في مابل Maple ذات DIGITS:= 10.

obeikandl.com

27. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل.
28. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل.
29. كرر التمرين (9) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل وحساب التقريب ذي الخانات الثلاث.
30. كرر التمرين (10) باستخدام طريقة الحذف لجاوس مع التمحور الكامل وحساب التقريب ذي الثلاث خانات.
31. افترض أن

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$
$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 5$$
$$6x_1 + \alpha x_2 + 10x_3 = 5$$

حيث $|\alpha| < 10$ لأي من قيم α الآتية. فليس هناك ضرورة لمبادلة صفية عند حل هذا النظام باستخدام التمحور الجزئي الموزون.

أ. $\alpha = 6$ ب. $\alpha = 9$ ج. $\alpha = -3$

32. أنشئ خوارزمية لعملية التمحور الكامل التي وصفت في الكتاب.
33. استخدم خوارزمية التمحور الكلي لحل التمرين (9) باستخدام مابل Maple ذي DIGITS:= 10.
34. استخدم خوارزمية التمحور الكلي لحل التمرين (10) باستخدام مابل Maple ذي DIGITS:= 10.

3.6 الجبر الخطي ومعكوس المصفوفة
Linear Algebra and Matrix Inversion

قدمنا المصفوفات في الفصل (1.6) على أنها طريقة ملائمة للتعبير عن الأنظمة الخطية والتعامل معها. وسنناقش في هذا الفصل بعض المفاهيم الجبرية المرتبطة بالمصفوفات، ثم بينّا كيفية استخدمها في حل المسائل المشتملة على أنظمة خطية.

تعريف 2.6 تكون المصفوفتان A و B متساويتين إذا كان لهما العدد نفسه من الصفوف والأعمدة. وليكن $n \times m$ وكان $a_{ij} = b_{ij}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, m$ ■

على سبيل المثال

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

لأنهما يختلفان في البعد (dimension).

هناك عمليتان مهمتان تُجرى على المصفوفات، وهما حاصل جمع مصفوفتين، وضرب مصفوفة في عدد حقيقي.

تعريف 3.6 إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الشكل $n \times m$ فيعرف مجموعهما $A + B$ على أنه مصفوفة $n \times m$ عناصرها $a_{ij} + b_{ij}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, m$. ■

تعريف 4.6 عملية الضرب في ثابت Scalar multiplication

إذا كانت A مصفوفة $n \times m$، وكان λ عدداً حقيقيًا فإن ضرب λ في العدد A المعبّر عنه بالرمز λA هو المصفوفة $n \times m$ التي عناصرها λa_{ij} لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ و $j = 1, 2, \ldots, m$. ■

obeikandl.com