الباب

6

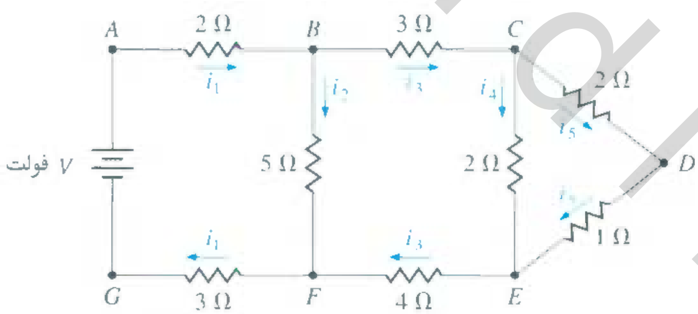
الطرائق المباشرة لحل الأنظمة الخطيَّة

Direct Methods for Solving Linear Systems

مقدمة

تنص قوانين كيرشــوف Kirchhoff في الــدارات الكهربائية على أن صافي تدفق التيار عند كل عروة وصافي انخفاض الجهد حول كل دارة في الدارة يساوي صفرًا. افترض أن طاقة وضع قيمتهــا V فولت وُضعــت بين النقطتين A و G في الــدارة، وأن i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 تمثيل اندفاع التيار كما في الشكل أدناه بافتراض G نقطة مرجعية، وإن قوانين كيرشوف تعني أن التيارات تحقق نظام المعادلات الخطية الآتية:

$$
\begin{aligned}
5i_1 + 5i_2 &= V \\
i_3 - i_4 - i_5 &= 0 \\
2i_4 - 3i_5 &= 0 \\
i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\
5i_2 - 7i_3 - 2i_4 &= 0
\end{aligned}
$$



ســيتناول هــذا الباب حَلّ الأنظمة من هذا النوع. لقد شُــرح هــذا التطبيق في التمرين (29) من الفصل (6.6).

إن أنظمــة المعادلات الخطية مرتبطة بكثير من مســائل الهندســة والعلــوم وكذلك بتطبيقات الرياضيات في العلوم الاجتماعية والدراسات الكمية في الأعمال والمسائل الاقتصادية.

ندرس في هذا الباب طرائق مباشرة لحل نظام خطي على الصيغة

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
E_2 &: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\quad \vdots \\
E_n &: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

في المجاهيل (المتغيرات) $x_1, \dots, x_n$ حيث a_{ij} ثوابت معطاة لكل $i, j = 1, 2, \dots, n$ و b_i لكل $i = 1, 2, \dots, n$ إن الطرائق المباشرة هي طرائق تعطي الحل بعدد محدد من الخطوات، وخاضعة لأخطاء تقريب فقط. وسنقدم خلال عرضنا بعض المفاهيم الابتدائية في موضوع الجبر الخطي.

أما طرائق تقريب حل الأنظمة الخطية باستخدام الطرائق المتكررة فستعرض في الفصل السابع.

1.6 أنظمة المعادلات الخطية Linear Systems of Equations

نستخدم ثلاث عمليات (تدعى العمليات الابتدائية) لتبسيط النظام الخطي في المعادلة (1.6):

أ. يمكن ضرب المعادلة E_i في أي ثابت غير صفري λ والحصول على معادلة تكافئ المعادلة (E_i). ونعبر عن هذه العملية بالرمز $(\lambda E_i) \to (E_i)$.

ب. يمكن ضرب المعادلة E_i في أي ثابت λ، ثم إضافة الناتج إلى المعادلة E_j، ونعبّر عن هذه العملية بالرمز $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$.

ج. يمكن تبديل المعادلتين E_i و E_j. ونعبّر عن هذه العملية بالرمز $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$.

يمكن تحويل نظام خطي باستخدام متتالية من هذه العمليات، إلى نظام خطي آخر يسهل حله، وله حلول النظام الأول نفسها.

مثال 1 حُلَّ المعادلات الأربع الآتية للمجاهيل x_1, x_2, x_3, x_4:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\
E_2 &: \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\
E_3 &: \quad 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\
E_4 &: \quad -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

نستخدم E_1 أولاً لحذف المجهول x_1 من E_2, E_3, E_4 وذلك باستخدام

$(E_4 + E_1) \to (E_4)$ و $(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3)$

لنحصل على النظام

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\
E_2 &: \quad -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\
E_3 &: \quad -4x_2 - x_3 - 7x_4 = -15 \\
E_4 &: \quad 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8
\end{aligned}
$$

حيث رمزنا إلى المعادلات الجديدة بالرموز E_1, E_2, E_3 و E_4 للتبسيط.