

فإذا كانت $i(0) = 0$ فأوجد التيار i للقيم $t = 0.1j$ حيث $j = 0, 1, \dots, 100$.

17. يعتمد الكتاب [Ra, pp. 103–110] *Looking at History Through Mathematics*, Rashevsky يعتمد على نموذج لسألة تتضمن حدوث التوحد في المجتمع. افترض مجتمعاً بتعداد سكاني $x(t)$ عند الزمن t (بالسنوات). وأن للمتوحدون كلهم الذين يتزوجون من متوحدين آخرين إنشء متوحدين أيضاً. حيث أن نسبة ثابتة r من جميع الإنشاء الآخرين جميعهم يتوحدون أيضاً. فإذا افترضنا أن معدلي الولادات والوفيات للسكان جميعهم هما الثابتان b و d على التوالي. وإذا تزواج المتوحدون مع غير المتوحدين عشوائياً، فإن المسألة يمكن التعبير عنها بالمعادلات التفاضلية:

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = (b - d)x_n(t) + rb(x(t) - x_n(t)) \quad \text{و} \quad \frac{dx(t)}{dt} = (b - d)x(t)$$

حيث يمثل $x_n(t)$ عدد المتوحدين في المجتمع عند الزمن t .
أ. افترض أن المتغير $p(t) = x_n(t)/x(t)$ يمثل نسبة المتوحدين في المجتمع عند الزمن t . أثبت أن هذه المعادلات يمكن دمجها وتبسيطها إلى معادلة تفاضلية واحدة

$$\frac{dp(t)}{dt} = rb(1 - p(t))$$

ب. بفرض $d = 0.015$, $b = 0.02$, $r = 0.1$ و $p(0) = 0.01$ اكتب تقريباً للحل $p(t)$ من $t = 0$ إلى $t = 50$ عندما تكون سعة الخطوة $h = 1$ سنة.
ج. حل المعادلة التفاضلية لـ $p(t)$ بدقة. وقارن نتيجتك في الفقرة (ب) عندما $t = 50$ بالقبلة الصحيحة عند ذلك الزمن.

3.5 طرائق تايلور من الرتبة الكبيرة Higher-Order Taylor Methods

لما كان هدف الأساليب العددية هو إيجاد تقريبات دقيقة بأقل جهد. فإننا نحتاج إلى وسائل لمقارنة كفاءة طرائق التقريب المختلفة. تسمى الأداة الأولى موضع اهتمامنا خطأ القطع المحلي $local\ truncation\ error$ للطريقة. إن خطأ القطع المحلي عند خطوة معينة يقيس مقدار الحل الصحيح للمعادلة التفاضلية الذي يفشل في تحقيق معادلة الفرق المستخدمة في التقريب.

تعريف 11.5 طريقة الفرق $w_0 = a$

$$i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad \text{لكل} \quad w_{i+1} = w_i + h \phi(t_i, w_i)$$

لها خطأ القطع المحلي

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - (y_i + h \phi(t_i, y_i))}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i)$$

لكل من $i = 0, 1, \dots, N - 1$

وبالنسبة إلى طريقة أويلر. فإن خطأ القطع المحلي عند الخطوة i للمسألة

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = a$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1 \quad \tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(t_i, y_i) \quad \text{هو}$$

حيث تمثل عادة القيمة الصحيحة للحل عند t_i . إن هذا الخطأ هو خطأ محلي؛ لأنه يقيس دقة الطريقة عند خطوة معينة. مفترضين أن الطريقة كانت صحيحة في الخطوة السابقة. وهكذا فإن ذلك يعتمد على المعادلة التفاضلية. وسعة الخطوة، والخطوة بعينها في التقريب.

وبالرجوع إلى المعادلة (7.5) في الفصل السابق، نرى أن طريقة أويلر لها

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{h}{2} y''(\xi_i) \quad \text{في } (t_i, t_{i+1})$$

وعندما تكون $y''(t)$ معروفة لتحدد بالثابت M على $[a, b]$ ، فسيؤدي ذلك إلى

$$|\tau_{i+1}(h)| \leq \frac{h}{2} M$$

ولهذا فإن خطأ القطع المحلي في طريقة أويلر يكون $O(h)$.

تكون إحدى السبل لاختيار طرائق المعادلة التفاضلية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية بأسلوب له أخطاء تقلص محلي $O(h^n)$ لأكبر قيمة ممكنة لـ p . حيث نبقي عدد العمليات الحسابية للطرائق وتعقيدها ضمن حدود معقولة.

ولما اشتقت طريقة أويلر باستخدام مبرهنة تايلور مع $n = 1$ لتقريب حل المعادلة التفاضلية فإن محاولتنا الأولى لإيجاد طرائق لتحسين سمات التقارب لطرائق الفرق تكمن في توسيع أسلوب الاشتقاق هذا لقيم أكبر لـ n .

افترض أن حل $y(t)$ مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = a$$

له $(n+1)$ من المشتقات المتصلة. فإذا وسعنا الحل $y(t)$ ، بدلالة كثيرة حدود تايلور من الرتبة n حول t_i ، وكان التقييم عند t_{i+1} ، فإننا نحصل على

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i) \quad (15.5)$$

لـ ξ_i ضمن (t_i, t_{i+1}) .

إن التفاضل المتتابع للحل $y(t)$ يعطي

$$y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y(t)) \quad \text{وعموماً} \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad y''(t) = f'(t, y(t))$$

وبتعويض هذه النتائج في المعادلة (15.5) نحصل على

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, y(t_i)) + \dots \quad (16.5)$$

$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$$

إننا نحصل على طريقة معادلة الفرق المناظرة للمعادلة (16.5) عن طريق حذف الجزء المتبقي

التي أتت في هذا الفصل تستخدم كثيرة حدود تايلور Taylor. إن المعلومات عن الاشتقاق عند نقطة على القريب قيمة الصة عند نقطة جديدة

والمتمم ξ_i . تسمى هذه الطريقة

طريقة تايلور من الرتبة n Taylor method of order n

$$u_0 = \alpha$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{لكل} \quad u_{i+1} = u_i + hT^{(n)}(t_i, u_i) \quad (17.5)$$

حيث

$$T^{(n)}(t_i, u_i) = f(t_i, u_i) + \frac{h}{2}f'(t_i, u_i) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}(t_i, u_i)$$

انظر أن طريقة أويلر هي طريقة تايلور من الرتبة واحد. **مثال 1**

لنفترض أننا نريد تطبيق طريقة تايلور من الرتبتيين 2 و 4 لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5$$

التي درست في الفصول السابقة. علينا إيجاد أول ثلاث مشتقات لـ $f(t, y(t)) = y - t^2 + 1$ بالنسبة إلى المتغير t

$$f'(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1) = y' - 2t = y - t^2 + 1 - 2t$$

$$\begin{aligned} f''(t, y(t)) &= \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1 - 2t) = y' - 2t - 2 \\ &= y - t^2 + 1 - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1 \end{aligned}$$

$$f'''(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 - 2t - 1) = y' - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1 \quad \text{و}$$

عندئذ

$$\begin{aligned} T^{(2)}(t_i, u_i) &= f(t_i, u_i) + \frac{h}{2}f'(t_i, u_i) = u_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(u_i - t_i^2 - 2t_i + 1) \\ &= \left(1 + \frac{h}{2}\right)(u_i - t_i^2 + 1) - ht_i \end{aligned} \quad \text{و}$$

$$\begin{aligned} T^{(4)}(t_i, u_i) &= f(t_i, u_i) + \frac{h}{2}f'(t_i, u_i) + \frac{h^2}{6}f''(t_i, u_i) + \frac{h^3}{24}f'''(t_i, u_i) \\ &= u_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(u_i - t_i^2 - 2t_i + 1) + \frac{h^2}{6}(u_i - t_i^2 - 2t_i - 1) \\ &\quad + \frac{h^3}{24}(u_i - t_i^2 - 2t_i - 1) \end{aligned} \quad \text{و}$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\right)(u_i - t_i^2) - \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\right)(ht_i) \\ &\quad + 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24} \end{aligned}$$

بناءً على ذلك فإن طريقة تايلور من الرتبين 2 و 4 هي

$$u_0 = 0.5,$$

$$u_{i+1} = u_i + h \left[\left(1 + \frac{h}{2}\right) (u_i - t_i^2 + 1) - ht_i \right]$$

$$u_0 = 0.5,$$

$$u_{i+1} = u_i + h \left[\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\right) (u_i - t_i^2) - \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\right) ht_i + 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24} \right],$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1$$

فإذا كانت $h = 0.2$ فإن $N = 10$ و $t_i = 0.2i$ لكل $i = 1, 2, \dots, 10$. ولذلك فإن الطريقة

بالرتبة الثانية تصبح

$$u_0 = 0.5,$$

$$u_{i+1} = u_i + 0.2 \left[\left(1 + \frac{0.2}{2}\right) (u_i - 0.04i^2 + 1) - 0.04i \right]$$

$$= 1.22u_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.22,$$

وتصبح الطريقة من الرتبة الرابعة

$$u_{i+1} = u_i + 0.2 \left[\left(1 + \frac{0.2}{2} + \frac{0.04}{6} + \frac{0.008}{24}\right) (u_i - 0.04i^2) - \left(1 + \frac{0.2}{3} + \frac{0.04}{12}\right) (0.04i) + 1 + \frac{0.2}{2} - \frac{0.04}{6} - \frac{0.008}{24} \right]$$

$$= 1.2214u_i - 0.008856i^2 - 0.00856i + 0.2186,$$

$$i = 0, 1, \dots, 9$$

يبين جدول (3.5) القيم الحقيقية للحل $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$ والناتج من خلال طرائق

تايلور من الرتبين 2 و 4. والأخطاء الحقيقية المرتبطة بهذه الطرائق. وكما هو متوقع، فإن نتائج

الرتبة 4 متميزة.

لنفترض أننا بحاجة إلى تحديد تقريب لنقطة وسطية في جدول. على سبيل مثال عند $t = 1.25$.

فإذا استخدمنا استكمالاً داخلياً في طريقة تايلور من الرتبة أربعة تقريبات عند $t = 1.2$

و $t = 1.4$. فسنحصل على

$$y(1.25) \approx \left(\frac{1.25 - 1.4}{1.2 - 1.4} \right) 3.1799640 + \left(\frac{1.25 - 1.2}{1.4 - 1.2} \right) 3.7324321 = 3.3180810$$

الخطأ $ y(t_i) - w_i $	تaylor بالرتبة 4 w_i	الخطأ $ y(t_i) - w_i $	تaylor بالرتبة 2 w_i	الصحيحة $y(t_i)$	t_i
0	0.5000000	0	0.5000000	0.5000000	0.0
0.0000014	0.8293000	0.0007014	0.8300000	0.8292986	0.2
0.0000034	1.2140910	0.0017123	1.2158000	1.2140877	0.4
0.0000062	1.6489468	0.0031354	1.6520760	1.6489406	0.6
0.0000101	2.1272396	0.0051032	2.1323327	2.1272295	0.8
0.0000153	2.6408744	0.0077868	2.6486459	2.6408591	1.0
0.0000225	3.1799640	0.0114065	3.1913480	3.1799415	1.2
0.0000321	3.7324321	0.0162446	3.7486446	3.7324000	1.4
0.0000447	4.2835285	0.0226626	4.3061464	4.2834838	1.6
0.0000615	4.8152377	0.0311223	4.8462986	4.8151763	1.8
0.0000834	5.3055554	0.0422123	5.3476843	5.3054720	2.0

جدول 3.5

ولما كانت القيمة الصحيحة $y(1.25) = 3.3173285$ ، فإن في هذا التقريب 0.0007525 خطأ يعدل مقداره 30 مرة معدل أخطاء التقريب عند 1.2 و 1.4.

بإمكاننا تحسين التقريب إلى $y(1.25)$ معنوياً باستخدام استكمال داخلي هرميات التكعيبي. وهذا يتطلب تقريبات إلى $y'(1.2)$ و $y'(1.4)$ إلى جانب التقريبات إلى $y(1.2)$ و $y(1.4)$. لكن تقريبات المشتقات ممكنة من خلال المعادلة التفاضلية؛ لأن $y'(t) = f(t, y(t))$ وفي مثلنا $y'(t) = y(t) - t^2 + 1$ ومن ثم فإن

$$y'(1.2) = y(1.2) - (1.2)^2 + 1 \approx 3.1799640 - 1.44 + 1 = 2.7399640$$

$$y'(1.4) = y(1.4) - (1.4)^2 + 1 \approx 3.7324321 - 1.96 + 1 = 2.7724321 \quad 9$$

إن عملية الفرق المنقسم في الفصل (3.3) تعطي المعلومات في جدول (4.5). وإن مصدر الخيم المخططة هي البيانات. أما الأخرى فقد صيغت باستخدام صيغ الفروقات المنقسمة.

			<u>3.1799640</u>	2.1
			<u>2.7399640</u>	
			<u>3.1799640</u>	2.1
	0.1118825		<u>2.7623405</u>	
	-0.3071225		<u>3.7324321</u>	4.1
		0.0504580	<u>2.7724321</u>	
			<u>3.7324321</u>	4.1

جدول 4.5

إن كثيرة حدود هرميات هي

$$y(t) \approx 3.1799640 + (t - 1.2)2.7399640 + (t - 1.2)^2 0.1118825 \\ + (t - 1.2)^2 (t - 1.4)(-0.3071225)$$

ومن ثم فإن

$$y(1.25) \approx 3.1799640 + 0.1369982 + 0.0002797 + 0.0001152 = 3.3173571$$

يتطلب استكمال هرميات داخلي كلا من قيمة الدالة ومشتقته عند كل نقطة وهذا يجعل منه طريقة لاستكمال داخلي طبيعي بتقريب معادلات تفاضلية. لأن هذه البيانات جميعها متوفرة

هي تمهيدية دقيقة ضمن 0.0000286. وهذا يعادل معدل الأخطاء عند 2.1 وعند 4.1 تقريباً. أو يعادل نحو 4% من الخطأ باستخدام استيفاء داخلي خطي. وببزر هذا التحسن في الدقة حتماً الحسابات المضافة المطلوبة لطريقة هرايمت.

مرهنة 12.5

إذا استخدمت طريقة تايلور من الرتبة n لتقريب الحل للمسألة

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

يعدد h من الخطوات، وأن $y \in C^{n+1}[a, b]$ ، فإن خطأ القطع المحلي هو $O(h^n)$.

البرهان انظر إلى المعادلة (16.5) حيث يمكن كتابتها

$$y_{i+1} - y_i - hf(t_i, y_i) = \frac{h^2}{2} f'(t_i, y_i) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y_i) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$$

لبعض قيم ξ_i ضمن (t_i, t_{i+1}) . لذا فإن خطأ القطع المحلي يكون

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - T^{(n)}(t_i, y_i) = \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$$

لكل i من $0, 1, \dots, N-1$ ولأن $y \in C^{n+1}[a, b]$ يكون لدينا $y^{(n+1)}(t) = f^{(n)}(t, y(t))$

محدداً على $[a, b]$ وأن $\tau_i = O(h^n)$ لكل من $i = 1, 2, \dots, N$

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 35

1. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكل من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. عند $h = 0.5$ $y' = te^{3t} - 2y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$

ب. عند $h = 0.5$ $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$

ج. عند $h = 0.25$ $y' = 1 + \frac{y}{t}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$

د. عند $h = 0.25$ $y' = \cos 2t + \sin 3t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$

2. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكل من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. عند $h = 0.5$ $y' = e^{t-y}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$

ب. عند $h = 0.5$ $y' = \frac{1+t}{1+y}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$

ج. عند $h = 0.25$ $y' = -y + ty^{1/2}$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 2$

د. عند $h = 0.25$ $y' = t^2(\sin 2t - 2ty)$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$

3. من التمرين (1) مستخدماً طريقة تايلور من الرتبة 4.

4. من التمرين (2) مستخدماً طريقة تايلور من الرتبة 4.

5. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكل من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. عند $h = 0.1$ $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 1.2$, $y(1) = 1$

ب. عند $h = 0.5$ $y' = \sin t + e^{-t}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$

ج. عند $h = 0.5$ $y' = 1/t(y^2 + y)$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = -2$

د. عند $h = 0.25$ $y' = -ty + 4ty^{-1}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$

6. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 لتقريب الحلول لكل من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = \frac{y^2}{1+t}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = -(\ln 2)^{-1}$ عند $h = 0.1$

ج. $y' = (y^2 + y)/t$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = -2$ عند $h = 0.2$

د. $y' = -ty + 4t/y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

7. كرر التمرين (5) مستخدماً طريقة تايلور من الرتبة 4.

8. كرر التمرين (6) مستخدماً طريقة تايلور من الرتبة 4.

9. لنفترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0$$

مع حل صحيح $y(t) = t^2(e^t - e)$

أ. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 مع $h = 0.1$ لتقريب الحل، وقارنه بقيم y الحقيقية.

ب. استخدم الإجابة في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب y عند القيم الآتية.

وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.04)$ 2. $y(1.55)$ 3. $y(1.97)$

ج. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 4 مع $h = 0.1$ لتقريب الحل، وقارنه بقيم y الحقيقية.

د. استخدم الإجابة في الفقرة (ج) والاستكمال الداخلي لهرايمت التكميبي المجزأ لتقريب y عند

القيم الآتية. وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.04)$ 2. $y(1.55)$ 3. $y(1.97)$

10. لنفترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = -1$$

مع حل صحيح $y(t) = -1/t$

أ. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 مع $h = 0.05$ لتقريب الحل. وقارنه بقيم y حقيقية.

ب. استخدم الإجابة في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب y عند القيم الآتية.

وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.052)$ 2. $y(1.555)$ 3. $y(1.978)$

ج. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 4 مع $h = 0.05$ لتقريب الحل. وقارنه بقيم y حقيقية.

د. استخدم الإجابة في الفقرة (ج) والاستكمال الداخلي لهرايمت التكميبي المجزأ لتقريب y عند

القيم الآتية. وقارنه بقيم y الحقيقية:

1. $y(1.052)$ 2. $y(1.555)$ 3. $y(1.978)$

11. مقذوف كتلته $m = 0.11$ kg أطلق عمودياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية $v(0) = 8$ m/s تؤثر عليه

قوة الجاذبية $F_g = -mg$. وتأثير مقاومة الهواء $F_r = -kv|v|$. حيث $k = 9.8$ m/s²

و $k = 0.002$ kg/m معطاة وفقاً للمعادلة $m v' = -ng - kv|v|$.

أ. أوجد السرعة بعد 1.0, 0.2, ..., 0.1 من الثواني.

ب. إلى أقرب عشر من الثانية. حدّد متى يصل المقذوف إلى أعلى ارتفاع ويبدأ السقوط.
12. استخدم طريقة تايلور من الرتبة 2 مع $h = 0.1$ لتقريب الحل إلى
 $y' = 1 + t \sin(ty)$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 0$

Runge-Kutta Methods

طرائق رونج-كوتا 4.5

إن طرائق تايلور المقدمة في الفصول السابقة لها سمة إيجابية تكمن في خطأ القطع المحلي، لكن الجانب السلبي فيها يتعلق بعملية الحساب والتقييم المطلوبة لاشتقاقات $f(t, y)$. وهذه عملية معقدة وتستغرق وقتاً طويلاً في غالبية المسائل. ولذلك فإن طرائق تايلور نادراً ما تستخدم في التطبيق العملي. ولطرائق رونج-كوتا خطأ تقلص محلي من الرتبة العالية لطرائق تايلور، حيث تلغى الحاجة إلى حساب اشتقاقات $f(t, y)$ وتقييمها. وقبل عرض الأفكار المتعلقة باشتقاقها نحتاج إلى طرائق مبرهنة تايلور في متغيرين. وبرهان هذه التمهيدية يمكن إيجاده في أي كتاب متخصص في التفاضل والتكامل المتقدم. (انظر على سبيل مثال [Fu, p. 331]).

افترض أن $f(t, y)$ وكل تفاضلاته الجزئية من الرتبة لا تزيد على $n + 1$ متصلة على $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, c \leq y \leq d\}$. وليكن $(t_0, y_0) \in D$ ولكل $(t, y) \in D$ ، يوجد ξ ما بين t و t_0 وكذلك μ ما بين y و y_0 مع

$$f(t, y) = P_n(t, y) + R_n(t, y)$$

$$\begin{aligned} P_n(t, y) = & f(t_0, y_0) + \left[(t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right] \\ & + \left[\frac{(t - t_0)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + (t - t_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \right. \\ & \left. + \frac{(y - y_0)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) \right] + \dots \\ & + \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (t - t_0)^{n-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j} \partial y^j}(t_0, y_0) \right] \end{aligned}$$

$$R_n(t, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (t - t_0)^{n+1-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j} \partial y^j}(\xi, \mu)$$

تسمى الدالة $P_n(t, y)$ كثيرة حدود تايلور بمتغيرين من الرتبة n في (t, y) n th Taylor polynomial. للدالة f حول (t_0, y_0) ، و $R_n(t, y)$ عبارة عن الحد المتبقي المرتبط بـ $P_n(t, y)$.

في أواخر الـ 1800 استخدم كارل رونج (1856 - 1927)

Carle Runge طرائق ماثلة لتلك التي في هذا البند لاشتقاق صيغ مختلفة لتقريب حل مسائل القيمة الأولية

المبرهنة 13.5

في عام 1901، عمل مرتين ولهم كوتا Martin (1867 - 1944)

Wilhelm Kutta تعميماً للطرائق التي طورها رونج عام 1895 لتكوين نظم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى هذه التقنيات ماثلة ولكن ليست نفسها بالضبط. تلك التي نعرفها حالياً بطريقة رونج - كوتا Runge Kutta

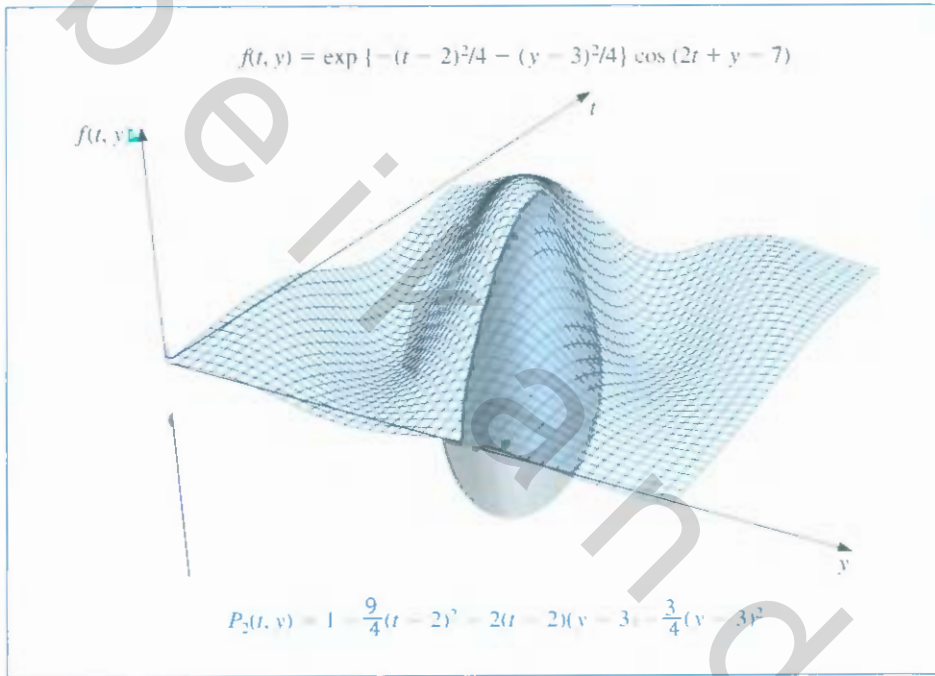
يبين شكل (4.5) الرسم البياني للدالة

مثال 1

$$f(t, y) = \exp \left[-\frac{(t-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4} \right] \cos(2t + y - 7)$$

معاً مع كثيرة حدود تايلور الثانية لـ f حول (2,3). أو كثيرة حدود بمتغيرين

$$P_2(t, y) = 1 - \frac{9}{4}(t-2)^2 - 2(t-2)(y-3) - \frac{3}{4}(y-3)^2$$



شكل 4.5

إن عمل التفاضل هذا الذي يتطلبه تحديد كثيرة حدود، سيكون متعباً باليد. ومن حسن الحظ فإن إحدى عمليات Maple تتيح ذلك. ونحتاج أولاً إلى تأسيس لعملية كثيرة حدود تايلور متعددة المتغيرات. وذلك بإدخال الأمر

`>readlib(mtay or)`

الذي ينتج الاستجابة

`Proc().....end proc`

ويكون إيجاد كثيرة حدود تايلور التي نحتاج إليها في هذا مثال من خلال إصدار الأمر

`>mtaylor(exp(-(t-2)^2/4-(y-3)^2/4)*cos(2*t+y-7),[t=2,y=3],3)`

تؤدي المتغيرة الأخيرة في هذا الأمر إلى حاجتنا إلى كثيرة حدود تايلور متعددة للمتغيرات الثانية بمعنى كثيرة حدود تكعيبية. فإذا كانت هذه المتغيرة 2 فإننا نحصل على كثيرة حدود ثابتة.

وعند حذف هذه المعلمة. تكون 6 تلقائيًا وتعطي كثيرة حدود تايلور الخامسة. الاستجابة من أمر Maple هذا هو كثيرة حدود

$$1 - \frac{9}{4}(t-2)^2 - 2(t-2)(y-3) - \frac{3}{4}(y-3)^2$$

الخطوة الأولى في اشتقاق طريقة Runge-kutta هي تحديد قيم لـ a_1, α_1 و β_1 مع سعة كون $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ تقرب

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y)$$

بخطأ ليس أكثر من $O(h^2)$. وهو خطأ تقلص محلي لطريقة تايلور من الرتبة 2. وحيث إن

$$y'(t) = f(t, y) \text{ و } f'(t, y) = \frac{df}{dt}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot y'(t)$$

فهذا يعطي

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot f(t, y). \quad (18.5)$$

وتوسيع $f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ في كثيرة حدود تايلور من الرتبة 1 حول (t, y) الخاص بها يعطي

$$\begin{aligned} a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1) &= a_1 f(t, y) + a_1 \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) \\ &+ a_1 \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) + a_1 \cdot R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1), \end{aligned} \quad (19.5)$$

حيث إن

$$R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) + \frac{\beta_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu), \quad (20.5)$$

لبعض قيم ξ ما بين t و $t + \alpha_1$ وكذلك μ ما بين y و $y + \beta_1$.

وبمطابقة معامل f واشتقاقاتها في المعادلتين (18.5) و (19.5) نحصل على المعادلات الثلاث

$$f(t, y): \quad a_1 = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, y): \quad a_1 \alpha_1 = \frac{h}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, y): \quad a_1 \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y)$$

و

والوسيطات a_1, α_1 و β_1 تُحدّد وحدها لتكون

$$\beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y) \text{ و } a_1 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{h}{2}$$

ولذلك

$$T^{(2)}(t, y) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right) - R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right)$$

ومن المعادلة (20.5) نجد أن

$$\begin{aligned} R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right) &= \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + \frac{h^2}{4} f(t, y) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) \\ &\quad + \frac{h^2}{8} (f(t, y))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu) \end{aligned}$$

وإذا كانت المشتقات الجزئية جميعها من الرتبة الثانية لـ f محددة فإن

$$R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right)$$

تكون $O(h^2)$. وهي رتبة خطأ القطع المحلي لطريقة تايلور من الرتبة 2. وفقاً لذلك، فإن استخدام الأسلوب الجديد بدلاً من طريقة تايلور من الرتبة 2، قد يضيف خطأً من رتبة الخطأ.

وطريقة معادلة الفروق الناتجة من استبدال $T^{(2)}(t, y)$ في طريقة تايلور من الرتبة 2 بالمقدار $f(t + (h/2), y + (h/2)f(t, y))$ هي طريقة خاصة Runge-kutta تعرف بطريقة النقطة الوسطية Midpoint method.

طريقة النقطة الوسطية Midpoint method

$$u_0 = \alpha,$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1 \text{ لكل } u_{i+1} = u_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}f(t_i, u_i)\right)$$

ولما كانت ثلاث معلمات فقط تظهر في $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ ونحتاج إليها جميعاً في مطابقة $T^{(2)}$ ، فإننا نحتاج إلى صيغة أكثر تعقيداً لتحقيق الشروط المطلوبة لأي من صرائق تايلور من الرتبة العالية.

إن صيغة الأربع معلمات الأكثر مناسبة لتقريب

$$T^{(3)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2}f'(t, y) + \frac{h^2}{6}f''(t, y)$$

هي

$$a_1 f(t, y) + a_2 f(t + \alpha_2, y + \delta_2 f(t, y)) \quad (21.5)$$

وحتى مع هذه، فإن هناك مرونة غير وافية لمطابقة الحد

$$\frac{h^2}{6} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right]^2 f(t, y)$$

الناتج عن توسيع $(h^2/6)f''(t, y)$. وبناءً على ذلك فإن أحسن ما يمكن الحصول عليه من استخدام المعادلة (21.5) هو طرائق مع الخطأ المتقلص المحلي $O(h^2)$. وحقيقة كون المعادلة (21.5) لها أربع معلمات، فإن ذلك يعطي مرونة في اختيارها. ومن ثم فإن بالإمكان اشتقاق عدد $O(h^2)$

من الطرائق. وإحدى أكثر الطرائق أهمية هي طريقة أويلر المعدلة Modified Euler method التي تقابل الاختيار $\frac{1}{2}$ و $a_1 = a_2 = h$ ولها صيغة معادلة الفرق الآتية.

طريقة أويلر المعدلة Modified Euler method

$$u_0 = a,$$

$$u_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} [f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_i + hf(t_i, u_i))],$$

لكل i من $0, 1, 2, \dots, N-1$

وهناك طريقة مهمة أخرى $O(h^2)$ هي طريقة هانز Haun's method التي تقابل $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3}{4}$ و $a_2 = \delta_2 = \frac{2}{3}h$ ولها صيغة معادلة الفرق الآتية:

طريقة هانز Heun's method

$$u_0 = a,$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{4} \left[f(t_i, u_i) + 3f\left(t_i + \frac{2}{3}h, u_i + \frac{2}{3}hf(t_i, u_i)\right) \right],$$

لكل i من $0, 1, 2, \dots, N-1$

وتصنف كل منهما على أنها من طرائق Runge-kutta من الرتبة 2. وهي رتبة خطأ القطع المحلي لها.

لمفترض تطبيق طرائق Runge-kutta من الرتبة 2 لثالثنا الاعتيادي **مثال 2**

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5$$

مع $N = 10, h = 0.2, t_i = 0.2i$ و $u_0 = 0.5$ في كل حالة. معادلات الفرق الناتجة عن صيغ مختلفة هي

$$u_{i+1} = 1.22u_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.218 \quad \text{طريقة النقطة الوسطية:}$$

$$u_{i+1} = 1.22u_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.216 \quad \text{طريقة أويلر المعدلة:}$$

$$u_{i+1} = 1.22u_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.2173 \quad \text{طريقة هانز:}$$

لكل i من $0, 1, \dots, 9$. ويتضمن جدول (5.5) نتائج هذه الحسابات. وبالنسبة إلى هذه المسألة. نجد أن طريقة النقطة الوسطية مناسبة جدًا ومتبوعة بطريقة هانز. ■

وعلى الرغم من إمكانية تقريب $T^{(3)}(t, y)$ بخطأ $O(h^3)$ وفق الصيغة

$$f(t + a_1, y + \delta_1 f(t + a_2, y + \delta_2 f(t, y)))$$

المتضمنة لأربع معاملات. إلا أن العمليات الجبرية الداخلة في تحديد a_1, δ_1, a_2 و δ_2 تدخل فعلا ولن تعرض. والواقع أن طريقة Runge-kutta من الرتبة 3 الناتجة عن هذه الصيغة لا تستخدم عموماً. وطريقة Runge-kutta الأكثر استخداماً هي من الرتبة 4، وبصيغة معادلة الفرق، فإنها تعطي بالصيغة الآتية.

جدول 5.5

الخطأ	طريقة هيوس	الخطأ	طريقة أولير المعدلة	الخطأ	طريقة نصف المتتصف	$y(t_i)$	t_i
0	0.5000000	0	0.5000000	0	0.5000000	0.5000000	0.0
0.0019653	0.8273333	0.0032986	0.8260000	0.0012986	0.8280000	0.8292986	0.2
0.0042077	1.2098800	0.0071677	1.2069200	0.0027277	1.2113600	1.2140877	0.4
0.007537	1.6421869	0.0116982	1.6372424	0.0042814	1.6446592	1.6489406	0.6
0.0116281	2.1176014	0.0169938	2.1102357	0.0059453	2.1212842	2.1272295	0.8
0.0168521	2.6280070	0.0231715	2.6176876	0.0076923	2.6331668	2.6408591	1.0
0.0234396	3.1635019	0.0303627	3.1495789	0.0094781	3.1704634	3.1799415	1.2
0.0313944	3.7120057	0.0387138	3.6936862	0.0112346	3.7211654	3.7324000	1.4
0.0407035	4.2587802	0.0483866	4.2350972	0.0128620	4.2706218	4.2834838	1.6
0.0513310	4.7858452	0.0595577	4.7556185	0.0142177	4.8009586	4.8151763	1.8
0.0632074	5.2712645	0.0724173	5.2330546	0.0151025	5.2903695	5.3054720	2.0

طريقة رونج-كوتا من الرتبة 4 Runge-kutta (Order Four)

$$w_0 = \alpha,$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3),$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

لكل من $i = 0, 1, \dots, N-1$ ، لهذه الطريقة خطأ القطع محلي $O(h^4)$. يتحقق بوجود خمسة اشتقاقات متصلة للحل $y(t)$. والسبب في تقديم الرموز k_1, k_2, k_3, k_4 في الطريقة هو استبعاد الحاجة إلى تداخل شبكي متتال في المتغير الثاني لـ $f(t, y)$. (انظر التمرين 31) تنفذ الخوارزمية (2.5) صيغة Runge-kutta من الرتبة 4.

طريقة رونج-كوتا من الرتبة 4 Runge-kutta (Order Four)

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

عند $(N+1)$ من الكراد المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط النهاية a, b . عدد صحيح N . شرط ابتدائي.

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N+1)$ من قيم t .

ALGORITHM

الخوارزمية

2.5

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/N$ $t = a$ $w = \alpha$ المخرجات (t, w)
2	لكل من $i = 1, 2, \dots, N$ طبق الخطوات 3 - 5
3	ضع $K_1 = hf(t, w)$ $K_2 = hf(t + h/2, w + K_1/2)$ $K_3 = hf(t + h/2, w + K_2/2)$ $K_4 = hf(t + h, w + K_3)$
4	ضع $w = w + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$ (احسب w_i) $t = a + ih$ (احسب t_i)
5	المخرجات (t, w)
6	توقف.



مثال 3

استخدم طريقة Runge-kutta من الرتبة 4 لإيجاد تقريبات لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5$$

مع $h = 0.2$ و $N = 10$ و $t_i = 0.2i$ لنحصل على النتائج والأخطاء المبينة في جدول (6.5).

جدول 6.5

الخطأ	رونج كوتا بالرتبة 4	الصحيحة	
$ y_i - w_i $	w_i	$y_i = y(t_i)$	t_i
0	0.5000000	0.5000000	0.0
0.0000053	0.8292933	0.8292986	0.2
0.0000114	1.2140762	1.2140877	0.4
0.0000186	1.6489220	1.6489406	0.6
0.0000269	2.1272027	2.1272295	0.8
0.0000364	2.6408227	2.6408591	1.0
0.0000474	3.1798942	3.1799415	1.2
0.0000599	3.7323401	3.7324000	1.4
0.0000743	4.2834095	4.2834838	1.6
0.0000906	4.8150857	4.8151763	1.8
0.0001089	5.3053630	5.3054720	2.0

إن الجهد الحسابي الرئيس في تطبيق طرائق Runge-kutta يكون في تقييم f . وفي الطرائق من الرتبة الثانية. فإن خطأ القطع المحلي هو $O(h^2)$ ، والثمن المقابل هو تقييم للدالة لكل خطوة. إن طريقة Runge-kutta من الرتبة 4 تتطلب أربعة تقييمات لكل خطوة، وخطأ القطع المحلي هو $O(h^4)$. وقد وجد بوتجر Butcher (انظر [But] للتلخيص) العلاقة بين عدد مرات التقييم لكل خطوة ورتبة خطأ القطع المحلي المبين في جدول (7.5). ويبين هذا الجدول لماذا تفضل الطرائق من الرتبة الأقل من 5 مع حجم عينة أصغر مقابل طرائق من الرتبة أكبر مستخدمين سعة خطوات أكبر.

جدول 7.5

عدد مرات التقييم لكل خطوة	2	3	4	$5 \leq n \leq 7$	$8 \leq n \leq 9$	$10 \leq n$
أفضل خطأ قطع محلي ممكن	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$	$O(h^{n-3})$

يمكن توضيح أحد معايير المقارنة لطرائق Runge-kutta برتب أبداً كما يلي:
إن طريقة Runge-kutta من الرتبة 4 تتطلب أربعة تقييمات لكل خطوة. ولذلك يجب أن تعطي أجوبة بدقة أكبر من طريقة أويلر وبربع سعة الخطوة إذا ما تطلب الأمر تمييزها. ومن ثم فإنه لكي تتميز طريقة Runge-kutta من الرتبة 4 على طريقة Runge-kutta من الرتبة الثانية. يتحتم عليها إعطاء دقة أكبر مع سعة خطوة h مقارنة بطريقة الرتبة الثانية مع سعة خطوة h وذلك لأن الطريقة من الرتبة 4 تتطلب ضعف عدد التقييمات لكل خطوة.
ومثال الآتي يوضح حالة تمييز طريقة Runge-kutta من الرتبة الرابعة وفق هذا المقاس.

مثال 4

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5$$

تقارن طرائق أويلر Euler بـ $h = 0.025$ والنقطة الوسطية Midpoint بـ $h = 0.05$ و Runge-kutta من الرتبة الرابعة بـ $h = 0.1$ عند النقاط الشبكية المشتركة لهذه الطرائق $0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$. وكل واحد من هذه الأساليب يتطلب 20 تقييماً. وننظر في هذا مثالاً يميز طريقة الرتبة الرابعة.

جدول 8.5

الصحيحة	أويلر $h = 0.025$	طريقة أويلر المعدلة $h = 0.05$	رونج - كوتا بالرتبة 4 $h = 0.1$	t_i
0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.0
0.6574145	0.6554982	0.6573085	0.6574144	0.1
0.8292986	0.8253385	0.8290778	0.8292983	0.2
1.0150706	1.0089334	1.0147254	1.0150701	0.3
1.2140877	1.2056345	1.2136079	1.2140869	0.4
1.4256394	1.4147264	1.4250141	1.4256384	0.5

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 4.5

1. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقرن اتمهيدية بالقيمة الحقيقية:

القيمة الحقيقية قيمة h مسائل القيمة الابتدائية

أ. $y' = te^{3t} - 2y, 0 \leq t \leq 1, y(0) = 0$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$

ب. $y' = 1 + (t - y)^2, 2 \leq t \leq 3, y(2) = 1$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = t + (1/1 - t)$

ج. $y' = 1 + \frac{y}{t}, 1 \leq t \leq 2, y(1) = 2$ مع $h = 0.25$ الحل الصحيح $y(t) = t \ln t + 2t$

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, 0 \leq t \leq 1, y(0) = 1$ مع $h = 0.25$

الحل الصحيح $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$

2. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية. وقارن التمهيدية بالقيمة الحقيقية:

القيمة الحقيقية قيمة h مسائل القيمة الابتدائية

أ. $y' = e^t - y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$.

ب. $y' = \frac{1+t}{1+y}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$ مع $h = 0.5$ الحل الصحيح $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$.

ج. $y' = -y + ty^{1/2}$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 2$ مع $h = 0.25$ الحل الصحيح $y(t) = (t - 2 + \sqrt{2}ee^{-t/2})^2$.

د. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty)$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$ مع $h = 0.25$ الحل الصحيح $y(t) = \frac{4 + \cos 2t - \cos 2t}{2t^2}$.

3. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية. وقارن التمهيدية بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$ مع $h = 0.2$ الحل الصحيح $y(t) = t \tan(\ln t)$.

ج. $y' = -(y+1)(y+3)$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = -2$ مع $h = 0.2$ الحل الصحيح $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$.

د. $y' = -5y + 5t^2 + 2t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = \frac{1}{3}$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$.

4. استخدم طريقة أويلر المعدلة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية. وقارن التمهيدية بالقيمة الحقيقية:

أ. $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = \frac{2t+1}{t^2+1}$.

ب. $y' = \frac{2}{1+t}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = \frac{-1}{\ln 2}$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $\ln y(t) = \frac{-1}{\ln(t+1)}$.

ج. $y' = (y^2 + y)/t$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = -2$ مع $h = 0.2$ الحل الصحيح $y(t) = \frac{2t}{1-2t}$.

د. $y' = -ty + 4t/y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الصحيح $y(t) = \sqrt{4-3e^{-t}}$.

5. كرّر تمرين (1) مستخدماً طريقة هانز.

6. كرّر تمرين (2) مستخدماً طريقة هانز.

7. كرّر تمرين (3) مستخدماً طريقة هانز.

8. كرّر تمرين (4) مستخدماً طريقة هانز.

9. كرّر تمرين (1) مستخدماً طريقة النقطة الوسطية.

10. كرّر تمرين (2) مستخدماً طريقة النقطة الوسطية.

11. كرّر تمرين (3) مستخدماً طريقة النقطة الوسطية.

12. كرّر تمرين (4) مستخدماً طريقة النقطة الوسطية.

13. كرّر تمرين (1) مستخدماً طريقة Runge-kutta من الرتبة الرابعة.

14. كرّر تمرين (2) مستخدماً طريقة Runge-kutta من الرتبة الرابعة.

15. كرّر تمرين (3) مستخدماً طريقة Runge-kutta من الرتبة الرابعة.

16. كرّر تمرين (4) مستخدماً طريقة Runge-kutta من الرتبة الرابعة.

17. استخدم نتائج تمرين (3) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$. وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y(1.93)$ و $y(1.25)$ ب. $y(2.75)$ و $y(2.1)$

ج. $y(1.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$
18. استخدم نتائج التمرين (4) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$. وقرن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y(0.94)$ و $y(0.54)$ ب. $y(1.93)$ و $y(1.25)$
ج. $y(2.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$

19. كرّر تمرين (17) مستخدماً نتائج التمرين (7).
20. كرّر تمرين (18) مستخدماً نتائج التمرين (8).
21. كرّر تمرين (17) مستخدماً نتائج التمرين (11).
22. كرّر تمرين (18) مستخدماً نتائج التمرين (12).
23. كرّر تمرين (17) مستخدماً نتائج التمرين (15).
24. كرّر تمرين (18) مستخدماً نتائج التمرين (16).
25. استخدم نتائج تمرين (15) والاستكمال الداخلي لهرايميت التكميبي لتقريب قيم $y(t)$. وقرن التقريبات بالقيمة الحقيقية:

أ. $y(1.93)$ و $y(1.25)$ ب. $y(2.75)$ و $y(2.1)$
ج. $y(1.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$

26. استخدم نتائج التمرين (16) والاستكمال الداخلي لهرايميت التكميبي لتقريب قيم $y(t)$. وقرن التقريبات بالقيمة الحقيقية:

أ. $y(0.94)$ و $y(0.54)$ ب. $y(1.93)$ و $y(1.25)$
ج. $y(2.93)$ و $y(1.3)$ د. $y(0.94)$ و $y(0.54)$

27. أثبت أن طرائق النقطة الوسطية **Midpoint**، وأويلر المعدلة **Modified Euler**، وهانز **Heun** تعطي التقريبات نفسها لسألة النقطة الابتدائية

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1$$

ولأي اختيار إلى h . لماذا يكون هذا صحيحاً؟

28. ينساب ماء من خزان على شكل مخروطي مقلوب مع فوهة دائرية بمعدل

$$\frac{dx}{dt} = -0.6\pi r^2 \sqrt{2g} \frac{\sqrt{x}}{A(x)}$$

حيث تمثّل r نصف قطر الفوهة، وتمثّل x ارتفاع مستوى السائل عن رأس المخروط، و $A(x)$ تمثّل مساحة مقطع المخروط عند x من الوحدات فوق رأس المخروط. لنفترض $r = 0.1$ ft و $g = 32.1$ ft/s² وللخزان مستوى ماء ابتدائي قدره 8 ft، وحجم ابتدائي قدره $512(\pi/3)$ ft³.
أ. احسب مستوى الماء بعد 10 min مع $h = 20$ s.
ب. حدّد ضمن 1 min متى سيصبح الخزان فارغاً.

29. التفاعل الكيميائي اللامتراجع **irreversible** الذي يتضمن خلط جزئين من كلٍّ من كرومات البوتاسيوم الصلب ($K_2Cr_2O_7$) والماء (H_2O) بثلاث ذرات من الكبريت الصلب (S) ليعطي ثلاثة جزيئات من غاز ثاني أكسيد الكبريت (SO_2)، وأربعة جزيئات من هايدروكسيد البوتاسيوم الصلب (KOH)، وجزيئين من أكسيد الكروم الصلب (Cr_2O_3) يمكن وضعه بالصيغة الرميّة



وإذا ما توفر أصلاً n_1 جزيء من $K_2Cr_2O_7$ ، n_2 جزيء من H_2O ، و n_3 جزيء من S، فإن المعامل التفاضلية الآتية توضح مقدار $x(t)$ من KOH بعد الزمن t :

$$\frac{dx}{dt} = k \left(n_1 - \frac{x}{2} \right)^2 \left(n_2 - \frac{x}{2} \right) \left(n_3 - \frac{3x}{4} \right)^3$$

حيث يمثل k ثابت سرعة التفاعل. فإذا كان $n_1 = n_2 = 2 \times 10^1$ ، $n_3 = 3 \times 10^1$ ، فما عدد الوحدات من هايدروكساييد البوتاسيوم التي تكونت بعد 0.2 s ؟
30. أثبت أن طريقة الفرق

$$w_{i+1} = w_i + a_1 f(t_i, w_i) + a_2 f(t_i + \alpha_2, w_i + \delta_2 f(t_i, w_i))$$

لكل i من $0, 1, \dots, N-1$ ، لا يمكن أن يكون لها خطأ متقلص محلي $O(h^3)$ لأي اختيار للثوابت $\delta_2, a_1, a_2, \alpha_2$.

31. إن طريقة Runge-kutta من الرتبة 4 يمكن كتابتها بالصيغة

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6} f(t_i, w_i) + \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_1 h, w_i + \delta_1 h f(t_i, w_i))$$

$$+ \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_2 h, w_i + \delta_2 h f(t_i + \gamma_2 h, w_i + \gamma_1 h f(t_i, w_i)))$$

$$+ \frac{h}{6} f(t_i + \alpha_3 h, w_i + \delta_3 h f(t_i + \gamma_3 h, w_i + \gamma_3 h f(t_i + \gamma_6 h, w_i + \gamma_7 h f(t_i, w_i))))).$$

أوجد قيم الثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7$ و γ_7 .

5.5 التحكم بالخطأ وطريقة رونج-كوتا-فهلبيرك Error control and the Runge-Kutta-Fehlberg Method

لاحظنا في الفصل (6.4) الاستخدام المناسب لخطوة بسعات مختلفة لإنتاج طرائق تقريب تكاملية وافية من الناحية الحسابية. وهذا ليس كافياً لصالح هذه الطرائق في ضوء زيادة التعقيد عند تطبيق هذه الطرائق. وثمة مزية أخرى لدى هذه الطرائق تجعل منها ذات قيمة، حيث تتضمن العملية المتعلقة بسعة الخطوة تقديراً لخطأ القطع الذي لا يتطلب تقريب الاشتقاقات العالية للدالة. وهذه الطرائق تدعى المتبنية Adaptive: بسبب تبنيها لكل من عدد النقاط المستخدمة في التقريب وموقعها؛ لضمان إبقاء خطأ القطع ضمن حد معين.

هناك اتصال وثيق بين مسألة تقريب قيمة تكامل مؤكدة ومسألة تقريب الحل لمسألة القيمة الوسطية. وعلينا إذن ألا نستغرب وجود طرائق متبنية لتقريب حلول مسائل القيمة الوسطية وكون هذه الطرائق ليست وافية فقط. بل تتضمن السيطرة على الخطأ أيضاً.

يمكن وضع أي طريقة بخطوة واحدة لتقريب الحل $y(t)$ لمسألة القيمة الوسطية

$$y' = f(t, y) \quad \text{لكل } a \leq t \leq b \quad \text{عند } y(a) = \alpha$$

بالصيغة

$$w_{i+1} = w_i + h_i \phi(t_i, w_i, h_i) \quad \text{لكل } i = 0, 1, \dots, N-1$$

لدالة معين ϕ .

ثمة طريقة مثالية لمعادلة الفرق

$$w_{i+1} = w_i + h_i \phi(t_i, w_i, h_i) \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

لتقريب الحل $y(t)$ لمسألة القيمة الوسطية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

رَبِّدْ تَرْغِبْ فِي مَرَاجَعَةِ مَادَّةِ التَّرْبِيعِ

الْمَعْدُ فِي الْفَصْلِ (6.4) قَبْلَ تَنَاوُلِ

مَادَّةِ هَذَا الْفَصْلِ وَالْعُضْ (7.5).

تتسم بما يلي: عند حد السماح $\varepsilon > 0$ ، فإن أصغر عدد للنقاط الشبكية التي تستخدم لضمان الخطأ التام $|y(t_i) - w_i|$ لن يتجاوز ε لأي $i = 0, 1, \dots, N$ ، وليس غريباً أن يكون لدينا أصغر عدد من النقاط الشبكية إلى جانب السيطرة على الخطأ التام لطريقة الفرق، الذي لا يتماشى والنقاط المتساوية التباعد في الفترة. سوف نختبر في هذا الفصل أساليب تستخدم في السيطرة على الخطأ لطريقة معادلة الفرق وفق أسلوب فعال من خلال اختيار مناسب للنقاط الشبكية.

وعلى الرغم من أننا لا نستطيع تحديد الخطأ التام لطريقة ما، إلا أننا سنرى في الفصل (10.5) الصلة القريبة ما بين خطأ القطع المحلي والخطأ التام. وباستخدام طرائق الترتيب المختلف يمكننا التنبؤ بخطأ القطع المحلي، وباستخدام هذا التنبؤ، نختار سعة الخطوة التي ستبقيها قيد الفحص مع الخطأ التام. ولتوضيح الأسلوب، نفترض أن لدينا أسلوبيين للتقريب: الأول عبارة عن طريقة من الرتبة n ووجدت من طريقة تايلور من الرتبة n بالصيغة

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\phi(t_i, y(t_i), h) + O(h^{n+1})$$

وتعطي تقريبات

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h) \quad \text{لكل } i > 0$$

مع خطأ قطع محلي $\tau_{i+1}(h) = O(h^n)$ وننشأ الطريقة عموماً من خلال تطبيق تعديل Runge-kutta لطريقة تايلور مع عدم أهمية الاشتقاق المحدد.

الطريقة الثانية شبيهة بذلك، ولكنها أعلى من الرتبة واحدة، وناجئة عن طريقة تايلور من الرتبة $(n+1)$ ذات الصيغة

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\bar{\phi}(t_i, y(t_i), h) + O(h^{n+2})$$

$$\bar{w}_0 = \alpha$$

وتعطي تقريبات

$$\bar{w}_{i+1} = \bar{w}_i + h\bar{\phi}(t_i, \bar{w}_i, h) \quad \text{لكل } i > 0$$

مع خطأ قطع محلي $\bar{\tau}_{i+1}(h) = O(h^{n+1})$.

نبدأ أولاً بافتراض أن $w_i = y(t_i) = \bar{w}_i$ ، ونختار سعة خطوة ثابتة h لتوليد تقريبات w_{i+1} و \bar{w}_{i+1} إلى $y(t_{i+1})$ ، ومن ثم

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}(h) &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \phi(t_i, y(t_i), h) \\ &= \frac{y(t_{i+1}) - w_i}{h} - \phi(t_i, w_i, h) \\ &= \frac{y(t_{i+1}) - [w_i + h\phi(t_i, w_i, h)]}{h} \\ &= \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - w_{i+1}) \end{aligned}$$

وبالأسلوب نفسه

$$\bar{\tau}_{i+1}(h) = \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - \bar{w}_{i+1})$$

وتمهيدية لذلك فإن

$$\begin{aligned}\tau_{i+1}(h) &= \frac{1}{h}(y(t_{i+1}) - w_{i+1}) \\ &= \frac{1}{h}[(y(t_{i+1}) - \tilde{w}_{i+1}) + (\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})] \\ &= \tilde{\tau}_{i+1}(h) + \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})\end{aligned}$$

ولكن $\tau_{i+1}(h)$ هو $O(h^n)$ ، و $\tilde{\tau}_{i+1}(h)$ هو $O(h^{n+1})$ ، ولذا فإن الجزء المعنوي من $\tau_{i+1}(h)$ يجب أن يأتي من

$$\frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

هذا يعطينا تقريبا سهل الحساب لخطأ القطع المحلي لطريقة $O(h^n)$:

$$\tau_{i+1}(h) \approx \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

وليس الهدف تقدير خطأ القطع المحلي. بل تعديل سعة الخطوة وإبقائها ضمن حد معين. ولعمل ذلك، نفترض الآن أنه ما دام $\tau_{i+1}(h)$ هو $O(h^n)$ ، فإن العدد K موجود ومستقل عن h مع

$$\tau_{i+1}(h) \approx Kh^n$$

ولذلك فإن خطأ القطع المحلي الناتج عن تطبيق طريقة من الرتبة n مع سعة خطوة جديدة qh يمكن تقديرها باستخدام التقريبات الأصلية w_{i+1} و \tilde{w}_{i+1}

$$\tau_{i+1}(qh) \approx K(qh)^n = q^n(Kh^n) \approx q^n \tau_{i+1}(h) \approx \frac{q^n}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

ولتحديد $\tau_{i+1}(qh)$ بالمقدار ε ، فإننا نختار q بحيث إن

$$\frac{q^n}{h}|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}| \approx |\tau_{i+1}(qh)| \leq \varepsilon$$

ومن ثم

$$q \leq \left(\frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|} \right)^{1/n}$$

أحد الأساليب الشائعة التي تستخدم هذه المتباينة للسيطرة على الخطأ هي طريقة Runge-Kutta-Fehlberg (انظر [Fe]). ويستخدم هذا الأسلوب طريقة Runge-Kutta مع خطأ قطع محلي

من الرتبة 5

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

لتقدير الخطأ المحلي في طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4 ومن خلال

$$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

فإن معادلات المعامل هي

لسد طور إرون فاهلبرج Erwin Fehlberg هذه وغيرها من تقنيات تصحيح الخطأ، بينما كان يعمل مع وكالة الفضاء الأمريكية NASA في هنتسفيل/ألباما في ستينيات القرن الماضي 1960s. وفي عام 1960 نال ميدالية NASA للإنجاز العلمي المتميز من قبل عمله هذا.

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{1}{4}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right),$$

$$k_5 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right),$$

$$k_6 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right).$$

ومن إيجابيات هذه الطريقة أنها تتطلب ستة تقييمات فقط لـ f في كل خطوة. وطرق Runge-Kutta من الرتبين 4 و 5 التي تُستخدم معاً عشوائية، وتتطلب (انظر جدول 7.5 في الفصل 4.5) أربعة تقييمات على الأقل لـ f بالنسبة إلى الطريقة من الرتبة 4، بالإضافة إلى ستة أخرى للطريقة من الرتبة 5، وبمجموع لا يقل عن عشرة تقييمات دالة. في مبرهنة السيطرة على الخطأ error-control theory ثمة قيمة ابتدائية لـ h عند الخطوة (i) استخدمت لإيجاد القيم الابتدائي لـ w_{i+1} و \tilde{w}_{i+1} التي تؤدي إلى حديد q لتلك الخطوة، ومن ثم تُعاد الحسابات. وهذه العملية تتطلب ضعف عدد التقييمات الدالية لكل خطوة عند عدم السيطرة على الخطأ. وعملياً تُختار قيمة q المستخدمة على نحو مختلف نوعاً ما لجعل تكلفة تقييم الدالة المتزايدة مجددة. وتستخدم قيمة q المحددة عند الخطوة (i) غرضين هما

- عندما $q < 1$ ، لرفض الاختيار الأول لـ h عند الخطوة (i)، وتكرار الحسابات مسخمين qh
- وعندما $q \geq 1$ ، لقبول القيمة المحسوبة عند الخطوة (i) مستخدمين سعة الخطوة F ، ولتغيير سعة خطوة qh بالنسبة إلى الخطوة ($i + 1$).

وبسبب مخالفة دلالة تقييم الدالة الواجب دفع ثمنها في حالة تكرار الخطوات، فإن q تُختار بتحفظ وفي الحقيقة، مع طريقة Runge-Kutta-Fehlberg و $n = 4$ يكون الاختيار الاعتيادي

$$q = \left(\frac{\varepsilon h}{2|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/4} = 0.84 \left(\frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/4}$$

في الخوارزمية (3.5) لطريقة Runge-Kutta-Fehlberg. أضيفت الخطوة 6 لاستبعاد تعديلات كبيرة في سعة الخطوة. بغرض تجنب هدر الكثير من الوقت مع ساعات صغيرة للخطوة ضمن مناطق تتسم بمخالفات في اشتقاقات v ، وكذلك تجنب ساعات كبيرة للخطوة التي يمكنها أن تؤدي إلى تخطي مناطق حساسة ما بين الخطوات. وفي بعض الأحيان نجد أن عملية زيادة سعة الخطوة تحذف كلياً من الخوارزمية، وأن عملية تقليل سعة الخطوة تعدل لتصبح ضمن العملية فقط عند الحاجة إليها لجعل الخطأ تحت السيطرة.

طريقة رونج-كوتا-فهلبرك Runge-Kutta-Fehlberg Method

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

مع خطأ قطع محلي ضمن حد سماح معين:

المدخلات: نقاط النهاية a و b ، شرط ابتدائي α ، حد سماح TOL ، أكبر سعة خطوة $hmax$ أصغر سعة خطوة $hmin$.

المخرجات: t, w, h حيث إن w تقرب $y(t)$ ، وقد استخدمت سعة الخطوة h ، أو ظهرت عبارة تفيد بأن أقل سعة للخطوة قد تم تجاوزها.

الخطوة	المضمون
1	ضع $t = a$ $w = \alpha$ $h = hmax$ $FLAG = 1$ المخرجات (t, w)
2	ما دام $(FLAG = 1)$ ، فطبق الخطوات 3 - 11.
3	ضع $K_1 = hf(t, w);$ $K_2 = hf(t + \frac{1}{4}h, w + \frac{1}{4}K_1);$ $K_3 = hf(t + \frac{3}{8}h, w + \frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2);$ $K_4 = hf(t + \frac{12}{13}h, w + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3);$ $K_5 = hf(t + h, w + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4);$ $K_6 = hf(t + \frac{1}{2}h, w - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5).$
4	ضع $R = \frac{1}{h} \frac{1}{360}K_1 - \frac{128}{4275}K_3 - \frac{2197}{75240}K_4 + \frac{1}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6 $ (ملحوظة: $R = \frac{1}{h} \hat{w}_{i+1} - w_{i+1} $).
5	إذا كان $R \leq TOL$ فطبق الخطوتين 6 و 7.
6	ضع $t = t + h$ (التقريب مقبول). $w = w + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5$
7	المخرجات (t, w, h)
8	ضع $\delta = 0.84(TOL/R)^{1/4}$
9	إذا كان $\delta \leq 0.1$ ضع $h = 0.1h$ وإذا كان $\delta \geq 4$ ضع $h = 4h$ وما عدا ذلك ضع $h = \delta h$. (احسب h جديدة).

ALGORITHM

الخوارزمية

3.5

10	إذا كان $h > h_{max}$ فضع $h = h_{max}$
11	إذا كان $t \geq b$ فضع $FLAG = 0$ وإذا كان $t + h > b$ فضع $h = b - t$ وإذا كان $h < h_{min}$ فضع $FLAG = 0$; المخرجات (تم تجاوز أصغر h). (العملية فشلت).
12	العملية تامة. توقف.



مثال 1

نستخدم هنا الخوارزمية (3.5) لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية.
 $y'(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$ التي لها حل $y' = y - t^2 + 1$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 0.5$
 تتضمن المدخلات حدًا أقصى $TOL = 10^{-5}$ ، أعلى سعة خطوة $h_{max} = 0.25$ ، وأصغر سعة
 خطوة $h_{min} = 0.01$ والنتائج مبينة في جدول (9.5). وآخر عمودين في جدول (9.5) يبيان
 نتائج طريقة الرتبة الخامسة. وعند قيم صغيرة لـ t ، يكون الخطأ أقل مما هو عليه في طريقة
 الرتبة الرابعة، ولكنه يتجاوز ما هو عليه في طريقة الرتبة الرابعة عندما تزداد قيمة t .

جدول 9.5

$ y_i - \hat{w}_i $	RKF-5 \hat{w}_i	$ y_i - w_i $	R_i	h_i	RKF-4 w_i	$y_i = y(t_i)$	t_i
		0.5			0.5	0.5	0
2.424×10^{-7}	0.9204870	1.3×10^{-6}	6.2×10^{-6}	0.2500000	0.9204886	0.9204873	0.2500000
1.510×10^{-6}	1.3964900	2.6×10^{-6}	4.5×10^{-6}	0.2365522	1.3964910	1.3964884	0.4865522
3.136×10^{-6}	1.9537477	4.2×10^{-6}	4.3×10^{-6}	0.2427810	1.9537488	1.9537446	0.7293332
5.242×10^{-6}	2.5864251	6.2×10^{-6}	3.8×10^{-6}	0.2500000	2.5864260	2.5864198	0.9793332
7.835×10^{-6}	3.2604599	8.5×10^{-6}	2.4×10^{-6}	0.2500000	3.2604605	3.2604520	1.2293332
1.036×10^{-5}	3.9520954	1.11×10^{-5}	7×10^{-7}	0.2500000	3.9520955	3.9520844	1.4793332
1.446×10^{-5}	4.6308272	1.41×10^{-5}	1.5×10^{-6}	0.2500000	4.6308268	4.6308127	1.7293332
1.839×10^{-5}	5.2574871	1.73×10^{-5}	4.3×10^{-6}	0.2500000	5.2574861	5.2574687	1.9793332
1.738×10^{-5}	5.3054896	1.77×10^{-5}		0.0206668	5.3054896	5.3054720	2.0000000

ثمة تنفيذ لطريقة Runge-Kutta-Fehlberg متوفرة في Maple باستخدام الأمر dsolve مع خيارات
 عددية. لنأخذ مسألة القيمة الابتدائية للمثال (1). الأمر

```
>g:=dsolve({D y}(t)=y(t)-t*t+1,y(0)=0.5),y(t),numeric);
```

يعيد العملية

```
g := proc(rkf45_x) ... end
```

يمكننا تقييم y كما هو واضح في مثال مستخدمين

```
>g(2.0);
```

الذي يعطي

```
[t = 2.0, y(t) = 5.305471958400194]
```

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 5.5

1. استخدم طريقة Runge-Kutta-Fehlberg مع $TOL = 10^{-4}$ و $hmax = 0.25$ و $hmin = 0.05$

لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية:

أ. $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ القيمة الحقيقية $y' = y/t - (y/t)^2$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$;

ب. $y(t) = t + 1/(1-t)$ القيمة الحقيقية $y' = 1 + (t-y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$;

ج. $y(t) = t \ln t + 2t$ القيمة الحقيقية $y' = 1 + y/t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$;

د. $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$ القيمة الحقيقية $y' = \cos 2t + \sin 3t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$.

2. استخدم طريقة Runge-Kutta-Fehlberg مع حد سماح $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلول مسائل

القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.05$ مع $y' = (y/t)^2 + y/t$, $1 \leq t \leq 1.2$, $y(1) = 1$

ب. $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.25$ مع $y' = \sin t + e^{-t}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$

ج. $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.5$ مع $y' = 1/t(y^2 + y)$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = -2$

د. $hmin = 0.02$ و $hmax = 0.5$ مع $y' = t^2$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 0$

3. استخدم طريقة Runge-Kutta-Fehlberg مع $TOL = 10^{-6}$ و $hmax = 0.5$ و $hmin = 0.05$

لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيمة الحقيقية:

أ. $y(t) = t/(1 + \ln t)$ القيمة الحقيقية $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 4$, $y(1) = 1$

ب. $y(t) = t \tan(\ln t)$ القيمة الحقيقية $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$

ج. $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$ القيمة الحقيقية $y' = -(y+1)(y+3)$, $0 \leq t \leq 3$, $y(0) = -2$

د. $y(t) = (3 + 2t^3 + 6e^{t^2})^{-1/2}$ القيمة الحقيقية $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = \frac{1}{3}$

4. طريقة Runge-Kutta-Verner method [Ve] تعتمد على الصيغ

$$w_{i+1} = w_i + \frac{13}{160}k_1 + \frac{2375}{5984}k_3 + \frac{5}{16}k_4 + \frac{12}{85}k_5 + \frac{3}{44}k_6$$

$$\text{و } \bar{w}_{i+1} = w_i + \frac{3}{40}k_1 + \frac{875}{2244}k_3 + \frac{23}{72}k_4 + \frac{264}{1955}k_5 + \frac{125}{11592}k_7 + \frac{43}{616}k_8$$

حيث إن

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{6}, w_i + \frac{1}{6}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{4h}{15}, w_i + \frac{4}{75}k_1 + \frac{16}{75}k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{5}{6}k_1 - \frac{8}{3}k_2 + \frac{5}{2}k_3\right),$$

$$k_5 = hf\left(t_i + \frac{5h}{6}, w_i - \frac{165}{64}k_1 + \frac{55}{6}k_2 - \frac{425}{64}k_3 + \frac{85}{96}k_4\right),$$

$$k_6 = hf \left(t_i + h, w_i + \frac{12}{5}k_1 - 8k_2 + \frac{4015}{612}k_3 - \frac{11}{36}k_4 + \frac{88}{255}k_5 \right),$$

$$k_7 = hf \left(t_i + \frac{h}{15}, w_i - \frac{8263}{15000}k_1 + \frac{124}{75}k_2 - \frac{643}{680}k_3 - \frac{81}{250}k_4 + \frac{2484}{10625}k_5 \right),$$

$$k_8 = hf \left(t_i + h, w_i + \frac{3501}{1720}k_1 - \frac{300}{43}k_2 + \frac{297275}{52632}k_3 - \frac{319}{2322}k_4 + \frac{24068}{84065}k_5 + \frac{3850}{26703}k_7 \right).$$

إن طريقة الرتبة السادسة \tilde{W}_{i+1} تستخدم لتقدير الخطأ في طريقة الرتبة الخامسة \tilde{W}_{i+1} . ابن خوارزمية شبيهة بخوارزمية Runge–Kutta–Fehlberg . وكرّر التمرين (3) مستخدماً هذه الطريقة الجديدة.

5. في مبرهنة انتشار مرض وبائي (انظر [Ba1] أو [Ba2]). يمكن نسبياً استخدام معادلة تفاضلية ابتدائية لتوقع عدد الأشخاص المصابين في المجتمع عند أي زمن بعد أن تُفترض افتراضات تبسيطية مناسبة. ولنفترض - على نحو خاص - أن الأفراد جميعهم في مجتمع ثابت لديهم الاحتمال نفسه في الإصابة متى كانت هناك حالة إصابة في تلك المنطقة. وافترض $x(t)$ تمثل عدد الأفراد المعرضين للإصابة عند الزمن t . وأن $y(t)$ تمثل عدد المصابين. يبدو منطقياً افتراض كون معدل التغير في عدد المصابين يتناسب مع حاصل ضرب $x(t)$ في $y(t)$ لكون المعدل يعتمد على كليهما. فإذا كان المجتمع كبيراً كفاية فبافتراض أن $x(t)$ و $y(t)$ متصلان، فإن المسألة يمكن وضعها على الصيغة

$$y'(t) = kx(t)y(t)$$

حيث k ثابت، وتمثل $x(t) + y(t) = m$ المجتمع الكلي. وهذه المعادلة يمكن كتابتها بحيث تتضمن $y(t)$ فقط على النحو الآتي:

$$y'(t) = k(m - y(t))y(t)$$

أ. مفترضين أن $k = 2 \times 10^{-6}$, $y(0) = 1000$, $m = 100,000$. وأن الزمن مقيس بالأيام، أوجد تقريباً لعدد المصابين بعد مرور 30 يوماً.

ب. تسمى المعادلة التفاضلية في الفقرة (أ) بمعادلة برنولي Bernoulli equation. ويمكن تحويلها إلى معادلة تفاضلية خطية في $u(t) = (y(t))^{-1}$. استخدم هذا الأسلوب لإيجاد الحل الصحيح للمعادلة تحت الافتراضات نفسها كما في الفقرة (أ). ثم قارن قيمة $y(t)$ الحقيقية بذلك التقريب. ماذا يكون $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ ؟ وهل يتفق هذا وحسبك؟

6. في التمرين السابق. يبقى المصابون جميعهم في المجتمع لنشر المرض. ولعل الأكثر منطقية أن نُقدم متغيراً ثالثاً هو $z(t)$ ليمثل عدد الأشخاص المستبعدين من المجتمع الموبوء عند زمن معلوم t تمهيدية الحجر. الشفاء تمهيدية المناعة. أو الموت. وهذا يعقد المسألة، ولكن يمكن ملاحظة (نظر [Ba2]) حل تقريبي يُعطى بالصيغة

$$x(t) = x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)} \quad \text{و} \quad y(t) = m - x(t) - z(t)$$

حيث يمثل k_1 معدل الإصابة، ويمثل k_2 معدل العزل (الاستبعاد). وان $z(t)$ تُحدّد بلعاقلة التفاضلية

$$z'(t) = k_2(m - z(t) - x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)})$$

إن المؤلفين غير ملتئين بأي أسلوب لحل هذه المسألة مباشرة، ولذلك فثمة عمية عديدة يجب

تطبيقها. أوجد تقريباً إلى $z(30)$ ، $y(30)$ و $x(30)$ مفترضاً أن $m = 100,000$ و $x(0) = 90,000$

و $k_1 = 2 \times 10^{-6}$ و $k_2 = 10^{-4}$

Multistep Methods

6.5 طرائق متعددة الخطوات

تُسمى الطرائق التي نُوقشت حتى الآن طرائق الخطوة الواحدة one-step method. لأن تقريب النقطة الشبكية t_{i+1} يتضمن معلومات من نقطة شبكية سابقة واحدة فقط هي t_i . وعلى الرغم من أن هذه الطرائق قد تستخدم معلومات تقييم دالية عند نقاط ما بين t_i و t_{i+1} ، فهي لا تحتفظ بتلك المعلومات لاستخدامها مباشرة في تقريبات مستقبلية. والمعلومات المستخدمة كلها ضمن هذه الطرائق مستخرجة في الفترة الجزئية التي تجعل الحل قيد التقريب. وحيث إن الحل التقريبي متوفر عند كل واحدة من النقاط الشبكية t_0, t_1, \dots, t_i قبل ظهور التقريب عند t_{i+1} . ولأن الخطأ $|w_j - y(t_j)|$ يتجه نحو الزيادة مع j . فسيبدو من المنطقي تطوير طرائق تستخدم هذه البيانات السابقة وبدقة أكبر عند تقريب الحل عند t_{i+1} . وتسمى الطرائق التي تستخدم التقريب عند أكثر من نقطة شبكية واحدة لتحديد التقريب عند النقطة اللاحقة طرائق متعددة الخطوات Multistep Methods. والتعريف الدقيق لها هو كالاتي بالإضافة إلى تعريف لنوعين من الطرائق متعددة الخطوات.

طريقة متعددة الخطوات عددها m لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha \quad (22.5)$$

لها معادلة فرق لإيجاد التقريب w_{i+1} عند النقطة الشبكية t_{i+1} معطاة بالمعادلة الآتية. حيث m عبارة عن عدد صحيح أكبر من 1

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \dots + a_0w_{i-m} + h[b_m f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1}f(t_i, w_i) + \dots + b_0 f(t_{i-m}, w_{i-m})]. \quad (23.5)$$

لـ $i = m-1, m, \dots, N-1$ ، حيث إن $h = (b-a)/N$ و a_0, a_1, \dots, a_{m-1} و b_0, b_1, \dots, b_m وقيم البداية

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

محددة. وعندما تكون $b_m = 0$. فإن الطريقة تسمى "واضحة أو مفتوحة"؛ لأن المعادلة (23.5) تعطي w_{i+1} بوضوح بدلالة القيم التي حُدثت سابقاً. وعندما $b_m \neq 0$ فإن الطريقة تسمى "غير واضحة أو مغلقة"؛ لأن w_{i+1} تظهر في كلا طرفي المعادلة (5.23) ويكون تحديدها غير واضح.

المعادلات

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3 \quad (24.5)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} [55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

تعريف 14.5

كان جون كوش آدرز John Couch Adams (1892-1819) مهتماً على نحو خاص باستخدام قابليته في الحسابات الرياضية الدقيقة لتفحص مدارات الكواكب وقد تنبأ بوجود نيبتون Neptune من خلال تحليل الحالات اللانظامية في الكوكب أورانوس Uranus. كما طوّر تقنيات التكامل العددي للمساعدة على تقريب حل المعادلات تفاضلية.

مثال

إن تقنيات آدمز - باشفورث

Adams - Bashforth

تعود إلى J. C. Adams والذي طوّر هذه التقنيات لتقريب حل مسألة تدفق السائل العائدة إلى باشفورث.

كان فورست ري مولتون (1872-

Forest Ray Moulton (1952

فلكيًّا. وقد طوّر طرق المصحح - المقدر المحسنة لحل المعادلات الباليستية خلال الحرب العالمية الأولى

لكلّ من $i = 3, 4, \dots, N - 1$ ، هي طريقة واضحة بأربع خطوات تُعرف بأسلوب آدمز- باشفورث من الرتبة الرابعة fourth-order Adams - Bashforth technique.

المعادلات

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2 \quad (25.5)$$

$$w_{i+1} = w_i - \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

لكلّ من $i = 2, 3, \dots, N - 1$ ؛ هي طريقة واضحة بأربع خطوات تُعرف بأسلوب آدمز-مولتون من الرتبة الرابعة fourth-order Adams-Moulton technique.

يجب تحديد قيم البداية سواءً في المعادلة (24.5) أو المعادلة (25.5) بافتراض $w_0 = \alpha$ وتوليد بقية القيم من خلال طريقة Runge-Kutta أو ثمة أسلوب خطوة واحدة آخر.

ولتطبيق طريقة واضحة مثل المعادلة (25.5) مباشرة، يتحتم علينا حل المعادلة الواضحة w_{i+1} . وليس واضحًا أنه يمكن عمل ذلك عمومًا، أو أن حلًا وحيدًا لـ w_{i+1} يمكن ظهوره دئماً.

لبدء اشتقاق طريقة متعددة الخطوات، انظر أن حل مسألة القيمة الابتدائية في المعادلة (25.5)

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

إذا ما تكاملت على الفترة $[t_i, t_{i+1}]$ ، تتسم بأن

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

والتمهيدية أن

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \quad (26.5)$$

ولأنه لا يمكننا عمل تكامل $f(t, y(t))$ دون معرفة الحل $y(t)$ للمسألة، فبدلاً من ذلك نعمل تكاملاً لكثيرة حدود استكمال داخلي $P(t)$ لـ $f(t, y(t))$ المحدد من خلال بعض نقاط البيانات المستخرجة سابقاً $(t_0, w_0), (t_1, w_1), \dots, (t_i, w_i)$. وعندما نفترض بالإضافة إلى ذلك

أن $w_i \approx y(t_i)$ ، فإن المعادلة (26.5) تصبح

$$y(t_{i+1}) \approx w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(t) dt \quad (27.5)$$

وعلى الرغم من إمكانية استخدام أي صيغة لكثيرة حدود استكمال داخلي للاشتقاق، إلا أنه من

المناسب جداً استخدام صيغة نيوتن للفرق المتراجع Newton backward-difference.

ولاشتقاق أسلوب Adams-Bashforth الواضح ذي m من الخطوات، ننشئ كثيرة حدود الفرق

التراجعي $P_{m-1}(t)$ من خلال

$$((t_i, f(t_i, y(t_i))), (t_{i-1}, f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))), \dots, (t_{i+1-m}, f(t_{i+1-m}, y(t_{i+1-m}))))$$

ولأن $P_{m-1}(t)$ عبارة عن كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة $m - 1$ ، فإن ثمة عدد ξ_i ضمن

(t_{i+1-m}, t_i) يكون موجوداً مع

$$f(t, y(t)) = P_{m-1}(t) + \frac{f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))}{m!} (t - t_i)(t - t_{i-1}) \cdots (t - t_{i+1-m})$$

وبتقديم متغير الحل $t = t_i + sh$ مع $dt = h ds$ ضمن $P_{m-1}(t)$ وحدّ الخطأ. نحصل على

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(t_i, y(t_i)) dt \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))}{m!} (t - t_i)(t - t_{i-1}) \cdots (t - t_{i+1-m}) dt \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \nabla^k f(t_i, y(t_i)) h (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds \\ &\quad + \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i)) ds. \end{aligned}$$

تُقيّم التكاملات $(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$ لقيم k المختلفة بسهولة، وهي مبينة في جدول (10.5). وعلى سبيل المثال، عندما $k = 3$ فإن

$$\begin{aligned} (-1)^3 \int_0^1 \binom{-s}{3} ds &= - \int_0^1 \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} ds \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (s^3 + 3s^2 + 2s) ds \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{s^4}{4} + s^3 + s^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \left(\frac{9}{4} \right) = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

ومن ثم فإن

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt &= h \left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2} \nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12} \nabla^2 f(t_i, y(t_i)) + \cdots \right] \\ &\quad + \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i)) ds \end{aligned} \quad (28.5)$$

ولأن $s(s+1) \cdots (s+m-1)$ لا تغير الإشارة على $[0, 1]$ ، فإن مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة للتكاملات يمكن استخدامها لنستنتج أنه لعددٍ ما μ_i حيث $t_{i+1-m} < \mu_i < t_{i+1}$ ، فإن حد الخطأ في المعادلة (28.5) يصبح

$$\begin{aligned} \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i)) ds \\ = \frac{h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i))}{m!} \int_0^1 s(s+1) \cdots (s+m-1) ds \\ \text{أو} \\ h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds \end{aligned} \quad (29.5)$$

جدول 10.5

$(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$	k
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{5}{12}$	2
$\frac{3}{8}$	3
$\frac{25}{720}$	4
$\frac{95}{288}$	5

ولكون $y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$ فإن المعادلة (26.5) يمكن كتابتها على النحو الآتي

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h \left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2} \nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12} \nabla^2 f(t_i, y(t_i)) + \dots \right] + h^{m+1} f^{(m)}(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds \quad (30.5)$$

مثال 2 لاشتقاق أسلوب Adams-Bashforth ذي الخطوات الثلاث؛ نفترض المعادلة (30.5) مع $m = 3$

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) &= y(t_i) + h \left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2} \nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12} \nabla^2 f(t_i, y(t_i)) \right] \\ &= y(t_i) + h \left\{ f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2} [f(t_i, y(t_i)) - f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))] \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{12} [f(t_i, y(t_i)) - 2f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] \right\} \\ &= y(t_i) + \frac{h}{12} [23f(t_i, y(t_i)) - 16f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 5f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] \end{aligned}$$

وطريقة Adams-Bashforth ذات الخطوات الثلاث تعطي

$$w_{i+1} = \alpha, \quad w_i = \alpha_1, \quad w_{i-2} = \alpha_2$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12} [23f(t_i, w_i) - 16f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

لـ $i = 2, 3, \dots, N-1$

ويمكن اشتقاق الطرائق المتعددة الخطوات باستخدام سلسلة تايلور أيضاً. وقد تناولنا مثلاً على العملي المعتمدة في التمرين (12). وقد شرح الاشتقاق باستخدام كثيرة حدود لاكرنج للاستكمال الداخلي فترى التمرين (11).

إن خطأ القطع المحلي للطرائق المتعددة الخطوات معرف بقياس الطرائق بخطوة واحدة. وفي حالة الطرائق المتعددة الخطوات، فإن خطأ القطع المحلي يعطي مقياساً لفشل معادة التفاضلي في حل معادلة الفرق.

تعريف 15.5 إذا كان حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

وكان

$$w_{i+1} = a_{m-1} w_i + a_{m-2} w_{i-1} + \dots + a_0 w_{i+1-m} + h [b_m f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, w_i) + \dots + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})]$$

هو الخطوة $(i + 1)$ st من طريقة متعددة الخطوات. فإن خطأ القطع المحلي عند هذه الخطوة هو

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - a_{m-1}y(t_i) - \cdots - a_0y(t_{i+1-m})}{h} \quad (31.5)$$

$$- [b_m f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, y(t_{i+1-m}))]$$

لكل من $i = m - 1, m, \dots, N - 1$

لمثال 3 لتحديد خطأ القطع المحلي لطريقة Adams-Bashforth ذات الخطوات الثلاث التي اشتقت في مثال

(2)، افترض صيغة الخطأ المعطاة في المعادلة (29.5) والقيمة المناسبة من جدول (10.5)

$$h^4 f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) (-1)^3 \int_0^1 \binom{-s}{3} ds = \frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))$$

وباستخدام حقيقة أن $y^{(4)}(\mu_i) = f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i))$ ومعادلة الفرق التي اشتقت في مثال (2)، يكون لدينا

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}(h) &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \frac{1}{12} [23f(t_i, y(t_i)) - 16f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 5f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{3h^4}{8} f^{(3)}(\mu_i, y(\mu_i)) \right] = \frac{3h^3}{8} y^{(4)}(\mu_i) \end{aligned}$$

لبعض $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$.

إن بعض الطرائق المتعددة الخطوات الواضحة مع قيمها الابتدائية، وخطأ القطع المحلي المطلوبة هي

كما يلي. واشتقاق هذه الأساليب مشابه للعملية في المثالين (2) و (3).

طريقة آدمز - باشفورث الواضحة ذات الخطوتين

Adams-Bashforth Two-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} [3f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})], \quad (32.5)$$

حيث $i = 1, 2, \dots, N - 1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{5}{12} y'''(\mu_i) h^2$ ، لبعض قيم

$\mu_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز - باشفورث الواضحة ذات الخطوات الثلاث

Adams-Bashforth Three-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12} [23f(t_i, w_i) - 16f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, w_{i-2})], \quad (33.5)$$

حيث $i = 2, 3, \dots, N - 1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = \frac{3}{8} y^{(4)}(\mu_i) h^3$ ، لبعض قيم

$\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز-باشفورث الواضحة ذات الأربع خطوات
Adams-Bashforth Four-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3 \quad (34.5)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} [55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

حيث $i = 2, 3, \dots, N-1$ وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i-1}(h) = \frac{251}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4$ لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز-باشفورث الواضحة ذات الخطوات الخمس
Adams-Bashforth Five-Step Explicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3, \quad w_4 = \alpha_4$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720} [1901f(t_i, w_i) - 2774f(t_{i-1}, w_{i-1}) \quad (35.5)$$

$$+ 2616f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 1274f(t_{i-3}, w_{i-3}) + 251f(t_{i-4}, w_{i-4})]$$

حيث $i = 4, 5, \dots, N-1$ وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i-1}(h) = \frac{95}{288} y^{(6)}(\mu_i) h^5$ لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-4}, t_{i+1})$.

تُشتق الطرائق الضمنية Implicit باستخدام $(t_{i+1}, f(t_{i+1}, y(t_{i+1})))$ بوصفها رأس استكمال داخلي إضافية في تقريب التكامل $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$. إن من الطرائق الضمنية الأكثر شيوعاً ما يأتي:

طريقة آدمز-مولتون الضمنية ذات الخطوتين
Adams-Moulton Two-Step Implicit

$$u_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12} [5f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})], \quad (36.5)$$

حيث $i = 1, 2, \dots, N-1$ وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = -\frac{1}{24} y^{(4)}(\mu_i) h^3$ لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز-مولتون الضمنية ذات الخطوات الثلاث
Adams-Moulton Three-Step Implicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad (37.5)$$

$$w_{i+1} = w_i - \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})],$$

حيث $i = 2, 3, \dots, N-1$ وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4$ لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$.

طريقة آدمز-مولتون الضمنية ذات الخطوات الأربع
Adams-Moulton Four-Step Implicit

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720} [251f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 646f(t_i, w_i) \quad (38.5)$$

$$- 264f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 106f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 19f(t_{i-3}, w_{i-3})],$$

حيث $i = 3, 4, \dots, N - 1$. وخطأ القطع المحلي هو $\tau_{i+1}(h) = -\frac{3}{160}y^{(6)}(\mu_i)h^5$ ، لبعض قيم $\mu_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$

والمثير للاهتمام هو مقارنة طريقة آدمز-باشفورث الواضحة ذات m من الخطوات بطريقة آدمز-مولتون الضمنية ذات $(m-1)$ من الخطوات. وتتضمن كلتا الطريقتين m من التقييمات لـ f في كل خطوة، مع وجود الحد $y^{(m+1)}(\mu_i)h^m$ ضمن خطأ القطع المحلي لهما. وعموماً فإن معاملات الحدود التي تتضمن f في خطأ القطع المحلي تكون أصغر في الطرائق الضمنية مقارنة بالطرائق الواضحة. وهذا يؤدي إلى استقرار أكبر مع أخطاء مدورة أصغر بالنسبة إلى الطرائق الضمنية. لنأخذ مسألة القيمة الابتدائية

مثال 4

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \leq t \leq 2 \quad y(0) = 0.5$$

والتقريبات من خلال طريقة Adams-Bashforth الواضحة ذات الخطوات الأربع، وطريقة Adams-Moulton الضمنية ذات الخطوات الثلاث، وإن كلتا الطريقتين تستخدم $h = 0.2$

المعادلة التفاضلية لطريقة Adams-Bashforth هي

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

لـ $i = 3, 4, \dots, 9$. وعند التبسيط واستخدام $h = 0.2$ و $f(t, y) = y - t^2 + 1$ تصبح

$$w_{i+1} = \frac{1}{24}[35w_i - 11.8w_{i-1} + 7.4w_{i-2} - 1.8w_{i-3} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

والمعادلة التفاضلية لطريقة Adams-Moulton هي

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

لـ $i = 2, 3, \dots, 9$. وهذه تختصر لتصبح

$$w_{i+1} = \frac{1}{24}[1.8w_{i+1} + 27.8w_i - w_{i-1} + 0.2w_{i-2} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

ولأجل استخدام هذه الطريقة بوضوح؛ فإن حل w_{i+1} يعطي

$$w_{i+1} = \frac{1}{22.2}[27.8w_i - w_{i-1} + 0.2w_{i-2} - 0.192i^2 - 0.192i + 4.736]$$

لـ $i = 2, 3, \dots, 9$.

وقد استخرجت النتائج في جدول (11.5) باستخدام القيم الصحيحة من $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$ لـ

α_2 و α_1, α_2 في حالة طريقة Adams-Bashforth الواضحة، ولـ α_1, α_2 و α_2 في حالة طريقة

Adams-Moulton الضمنية.

في مثال (4) أعطت طريقة Adams-Moulton الضمنية نتائج أفضل مما أعطته طريقة Adams-

Bashforth الواضحة من نفس الرتبة. وعلى الرغم من عمومية الحالة هذه، إلا أن الطرائق الضمنية

تتسم بالضعف؛ لأنها تكمن أولاً في وجوب تحويل طريقة التمثيل الجبري الواضح إلى w_{i+1} . هذه

العملية غير ممكنة دائماً، وكما يمكن رؤيته من خلال افتراض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = e^y \quad 0 \leq t \leq 0.25 \quad y(0) = 1$$

جدول 11.5

t_i	الصحيحة	آدمز - باشفورت w_i	الخطأ	آدمز-مواتون w_i	الخطأ
0.0	0.5000000				
0.2	0.8292986				
0.4	1.2140877				
0.6	1.6489406				
0.8	2.1272295	2.1273124	0.0000828	2.1272136	0.0000160
1.0	2.6408591	2.6410810	0.0002219	2.6408298	0.0000293
1.2	3.1799415	3.1803480	0.0004065	3.1798937	0.0000478
1.4	3.7324000	3.7330601	0.0006601	3.7323270	0.0000731
1.6	4.2834838	4.2844931	0.0010093	4.2833767	0.0001071
1.8	4.8151763	4.8166575	0.0014812	4.8150236	0.0001527
2.0	5.3054720	5.3075838	0.0021119	5.3052587	0.0002132

ولأن $f(t, y) = e^y$ ، فإن لطريقة Adams-Moulton ذات الخطوات الثلاث معادلة الفرق

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} [9e^{w_{i+1}} + 19e^{w_i} - 5e^{w_{i-1}} + e^{w_{i-2}}]$$

وهذه المعادلة لا يمكن حلها بوضوح لـ w_{i+1} .

ويمكننا استخدام طريقة نيوتن أو طريقة القاطع لتقريب w_{i+1} ، ولكن هذا من شأنه تعقيد العملية إلى حد كبير. وعملياً لا تستخدم الطرائق الواضحة المتعددة الخطوات وفق ما شرح. بل نلجأ بالأسلوبين المستخدم لتحسين التقريبات التي ظهرت من خلال الطرائق الواضحة. ويسمى لدمج ما بين الأسلوبين الواضح والضمني "طريقة التنبؤ - المصحح predictor-corrector method". تتنبأ الطريقة الواضحة بالتقريب، والطريقة الضمنية تصحح هذا التنبؤ.

لنأخذ الطريقة من الرتبة الرابعة التالية. نحسب في الخطوة الأولى نقاط البداية w_0, w_1, w_2, w_3 لطريقة Adams-Bashforth الواضحة ذات الخطوات الأربع. ولعمل ذلك، نستخدم طريقة بخطوة واحدة ورتبة 4. وهي طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4. بعد ذلك نحسب التقريب $w_4^{(0)}$ إلى $y(t_4)$ مستخدمين طريقة Adams-Bashforth الواضحة بمنزلة التنبؤ

$$w_4^{(0)} = w_3 + \frac{h}{24} [55f(t_3, w_3) - 59f(t_2, w_2) + 37f(t_1, w_1) - 9f(t_0, w_0)]$$

يتحسن هذا التقريب بإدخال $w_4^{(0)}$ ضمن الطرف الأيمن لطريقة Adams-Moulton الضمنية بثلاث خطوات. واستخدام تلك الطريقة بمنزلة المصحح. هذا يعطي

$$w_4^{(1)} = w_3 + \frac{h}{24} [9f(t_4, w_4^{(0)}) + 19f(t_3, w_3) - 5f(t_2, w_2) + f(t_1, w_1)]$$

التقييم الوحيد للدالة الجديد الذي تتطلبه هذه العملية وهو $f(t_4, w_4^{(0)})$ ضمن معادلة المصحح. والقيم الأخرى جميعها لـ f قد حُسبت في التقريبات السابقة.

تستخدم القيمة $w_4^{(1)}$ بعد ذلك بمنزلة تقريب إلى $y(t_4)$ ، ويُعاد أسلوب استخدام طريقة Adams-Bashforth بمنزلة التنبؤ وطريقة Adams-Moulton بمنزلة المصحح لإيجاد التقريب الابتدائي $w_5^{(0)}$ والتقريب النهائي $w_5^{(1)}$ إلى $y(t_5)$. تستمر هذه العملية إلى حين إيجاد تقريب إلى $y(t_N) = y(b)$.

ويمكن إيجاد تقريبات محسنة إلى $y(t_{i+1})$ من خلال تكرار صيغة Adams-Moulton

$$w_{i+1}^{(k+1)} = w_i + \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}, w_{i+1}^{(k)}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

وعلى أي حال تتقارب $\{w_{i+1}^{(k+1)}\}$ نحو التقريب المعطى من خلال الصيغة الواضحة بدلا من الحل $y(t_{i+1})$ ، وعادة ما يكون استخدام تقليص في سعة الخطوة أكثر كفاءة إذا ما دعت الحاجة إلى دقة أكبر.

وتستند الخوارزمية (4.5) إلى طريقة Adams-Bashforth بمنزلة التنبؤ وتكرار واحد لطريقة Adams-Moulton بمنزلة المصحح. مع قيم بداية تستخرج من طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4.

متنبئ- مصحح آدم من الرتبة 4

Adams Fourth-Order Predictor-Corrector

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

عند $(N + 1)$ من الكراد المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط النهاية a و b ، عدد صحيح N ، شرط ابتدائي α .

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N + 1)$ من قيم t .

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/N$ $t_0 = a$ $w_0 = \alpha$ المخرجات (t_0, w_0)
2	عند $i = 1, 2, 3$. طبق الخطوات 3 - 5. (احسب القيمة البدائية مستخدما طريقة Runge-Kutta)
3	ضع $K_1 = hf(t_{i-1}, w_{i-1})$ $K_2 = hf(t_{i-1} + h/2, w_{i-1} + K_1/2)$ $K_3 = hf(t_{i-1} + h/2, w_{i-1} + K_2/2)$ $K_4 = hf(t_{i-1} + h, w_{i-1} + K_3)$
4	ضع $w_i = w_{i-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$ $t_i = a + ih$
5	المخرجات (t_i, w_i)
6	عند $i = 4, \dots, N$. طبق الخطوات 7 - 10.
7	ضع $t = a + ih$ $w = w_3 + h[55f(t_3, w_3) - 59f(t_2, w_2) + 37f(t_1, w_1) - 9f(t_0, w_0)]/24$ (التنبؤ w_i) $w = w_3 + h[9f(t, w) + 19f(t_3, w_3) - 5f(t_2, w_2) + f(t_1, w_1)]/24$ (صحح w_i)
8	المخرجات (t, w)

ALGORITHM

الخوارزمية

4.5

عند $j = 0, 1, 2$ ضع $t_j = t_{j+1}$ (حضر الإعادة التالية) $w_j = w_{j+1}$	9
ضع $t_3 = t$ $w_3 = w$	10
توقف.	11



مثال 5

يتضمن جدول (12.5) النتائج المستخرجة باستخدام الخوارزمية (4.5) لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \leq t \leq 2 \quad y(0) = 0.5$$

مع $N = 10$. النتائج هنا أدق مما هي في مثال (4) التي استخدمت المصحح فقط (أي طريقة Adams–Moulton الضمنية). ولكن هذا ليس دائماً.

الخطأ $ y_i - w_i $	w_i	$y_i = y(t_i)$	t_i
0	0.5000000	0.5000000	0.0
0.0000053	0.8292933	0.8292986	0.2
0.0000114	1.2140762	1.2140877	0.4
0.0000186	1.6489220	1.6489406	0.6
0.0000239	2.1272056	2.1272295	0.8
0.0000305	2.6408286	2.6408591	1.0
0.0000389	3.1799026	3.1799415	1.2
0.0000495	3.7323505	3.7324000	1.4
0.0000630	4.2834208	4.2834838	1.6
0.0000799	4.8150964	4.8151763	1.8
0.0001013	5.3053707	5.3054720	2.0

جدول 12.5

وهناك طرائق أخرى متعددة الخطوات يمكن اشتقاقها باستخدام تكامل كثيرات حدود استكمال داخلي على الفترات بصيغة $[t_j, t_{j+1}]$ لـ $j \leq i-1$ ، لإيجاد تقريب إلى $y(t_{i+1})$. وعند تكامل كثيرة حدود استكمال داخلي على الفترة $[t_{i-3}, t_{i+1}]$ ، فإن التمهيدية هي "طريقة ملن Milne's method"

$$w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3} [2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

التي فيها القطع $\frac{14}{45}h^4 y^{(5)}(\xi_i)$ من أجل قيمة ما $\xi_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$ تستخدم هذه الطريقة أحياناً كمتنبئ لطريقة سمبسون الضمنية Simpson's method.

$$w_{i-1} = w_{i-1} + \frac{h}{3} [f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 4f(t_i, w_i) + f(t_{i-1}, w_{i-1})]$$

التي لها خطأ قطع محلي $-(h^4/90)y^{(5)}(\xi_i)$ لبعض قيم $\xi_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$ والمستخرجة من خلال تكامل كثيرة حدود استكمال داخلي على الفترة $[t_{i-1}, t_{i+1}]$.

خطأ القطع المحلي المرتبط بطريقة متنبئ - مصحح من نوع Milne Simpson أقل عموماً من طريقة Adams–Bashforth–Moulton.

لكن لهذا الأسلوب استخدامات محددة، بسبب مشاكل تدوير الخطأ التي لا تظهر مع عنية Adams. سنتناول تفاصيل هذه الصعوبة في الفصل (10.5).

إدوارد آرثر ملني

(1896–1950)

Edward Arthur Milne

عمل في البحث الباستي خلال

الحرب العالمية الأولى. وبعد

ذلك في مرصد الفيزياء للطاقة

الشمسية في جامعة كامبريدج

وفي عام 1929 تم ترشيحه

لكرسي روز بول Rouse Ball

في جامعة أوكسفورد

إن اسم سمبسون Simpson

مرتبط بهذه التقنية. لأنها تستند

إلى قاعدة سمبسون للتكامل

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 6.5

1. استخدم طرائق Adams-Bashforth لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية. وفي كل حالة استخدم قيم بداية صحيحة، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$

ب. $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$

ج. $y' = 1 + y/t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = t \ln t + 2t$

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$

2. استخدم طرائق Adams-Bashforth لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية. وفي كل حالة استخدم قيم بداية مستخرجة من طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = \frac{2 - 2ty}{t^2 + 1}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{2t + 1}{t^2 + 2}$

ب. $y' = \frac{y^2}{1 + t}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = \frac{-1}{\ln 2}$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{-1}{\ln(t + 1)}$

ج. $y' = (y^2 + y)/t$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = -2$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{2t}{1 - 2t}$

د. $y' = -ty + 4t/y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$

3. استخدم طرائق Adams-Bashforth لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية. وفي كل حالة استخدم قيم بداية مستخرجة من طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 1$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = \frac{t}{1 + \ln t}$

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$ مع $h = 0.2$ الحل الحقيقي $y(t) = t \tan(\ln t)$

ج. $y' = -(y + 1)(y + 3)$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = -2$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$

د. $y' = -5y + 5t^2 + 2t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = \frac{1}{3}$ مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$

4. استخدم طرائق Adams-Moulton جميعها لتقريب حلول التمرين 1 (أ، ج، د). وفي كل حالة استخدم قيم بداية صحيحة. وضمن حل W_{i+1} . وقارن النتائج بالقيم الحقيقية.

5. استخدم الخوارزمية (4.5) لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (1).

6. استخدم الخوارزمية (4.5) لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (2).

7. استخدم الخوارزمية (4.5) لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (3).

8. غير الخوارزمية (4.5) بحيث يكون بالإمكان تكرار المصحح لعدد p من المرات. كرر التمرين (7) مع $p = 2, 3$ و 4 من المرات. ما اختيار p الذي يعطي أحسن جواب لكل مسألة للقيمة الابتدائية؟

9. مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = e^y, \quad 0 \leq t \leq 0.20, \quad y(0) = 1$$

لها حل

$$y(t) = 1 - \ln(1 - et)$$

إن تطبيق طريقة Adams–Moulton بثلاث خطوات على هذه المسألة يعادل إيجاد النقطة الثابتة w_{i+1} لـ

$$g(w) = w_i + \frac{h}{24} (9e^{w_i} + 19e^{w_{i-1}} - 5e^{w_{i-2}} + e^{w_{i-3}})$$

أ. مع $h = 0.01$ ، أوجد w_{i+1} من خلال تكرار دالية لـ $i = 2, \dots, 19$ مستخدماً قيم بداية صحيحة w_0, w_1, w_2 . استخدم في كل خطوة w_i لتقريب ابتدائي إلى w_{i+1} .

ب. هل ستعمل طريقة نيوتن على تسريع التقارب عما هي مع تكرار دالية؟

10. استخدم طريقة Milne–Simpson Predictor-Corrector لتقريب حلول مسألة القيمة الابتدائية في التمرين (3).

11. أ. اشتق المعادلة (32.5) باستخدام صيغة لاكرنج لكثيرة حدود استكمال داخلي.

ب. اشتق المعادلة (34.5) باستخدام صيغة الفرق المتراجع لنيوتن لكثيرة حدود استكمال داخلي.

12. اشتق المعادلة (33.5) من خلال الطريقة الآتية. ضع

$$y_{i+1} = y(t_i) + ahf(t_i, y(t_i)) + bhf(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + chf(t_{i-2}, y(t_{i-2}))$$

وسّع $f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))$ ، $f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$ و $y(t_{i+1})$ في سلسلة تايلور حول $(t_i, y(t_i))$ وعدّل معاملات h, h^2, h^3 لإيجاد a, b, c .

13. اشتق المعادلة (36.5) وخطأ القطع المحلي لها باستخدام صيغة مناسبة لكثيرة حدود استكمال داخلي.

14. اشتق طريقة Simpson's من خلال تطبيق قاعدة Simpson's للتكامل

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

15. اشتق طريقة Milne's من خلال تطبيق صيغة Newton–Cotes المفتوحة (المعادلة (29.4))

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-3}) = \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

16. تحقق من بيانات جدول (10.5).

7.5 طرائق متعددة الخطوات متغيرة السعة Variable Step-size Multistep Methods

تستخدم طريقة Runge–Kutta–Fehlberg للسيطرة على الخطأ؛ لأنها في كل خطوة بتكلفة إضافية قليلة تعطي تقريبين يمكن مقارنتهما وربطهما بخطأ القطع المحلي. إن ساليب المتنبئ – المصحح تنتج دائماً اثنين من التقريبات عند كل خطوة. و من ثم فإنهما مرشحان طبيعيان لتبني السيطرة على الخطأ. ولتوضيح عملية السيطرة على الخطأ؛ سننشئ طريقة المتنبئ – المصحح متغيرة السعة مستخدمين طريقة Adams–Bashforth الواضحة بأربع خطوات بمنزلة المتنبئ، وطريقة Adams–Moulton الضمنية بثلاث خطوات بمنزلة المصحح.

وتأتي طريقة Adams–Bashforth بأربع خطوات من العلاقة

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24} [55f(t_i, y(t_i)) - 59f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) - 37f(t_{i-2}, y(t_{i-2})) - 9f(t_{i-3}, y(t_{i-3}))] + \frac{251}{720} y^{(5)}(\xi_i) h^5$$

لبعض القيم $\hat{\mu}_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$. بافتراض أن التقريبات w_0, w_1, \dots, w_i جميعها صحيحة يؤدي إلى خطأ قطع

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{251}{720} y^{(5)}(\hat{\mu}_i) h^4 \quad (39.5)$$

وإن التحليل المماثل لطريقة Adams–Moulton بثلاث خطوات تأتي من

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + 19f(t_i, y(t_i)) - 5f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] - \frac{19}{720} y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) h^4$$

لبعض القيم $\tilde{\mu}_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$. يؤدي إلى خطأ قطع محلي

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}}{h} = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) h^4 \quad (40.5)$$

وللمضي في ذلك أكثر: يجب أن نفترض أن لقيم h الصغيرة يكون

$$y^{(5)}(\hat{\mu}_i) \approx y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$$

إن فاعلية أسلوب السيطرة على الخطأ تعتمد مباشرة على هذا الافتراض.

وإذا طرحنا المعادلة (40.5) من المعادلة (39.5) يكون لدينا

$$\frac{w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{h^4}{720} [251 y^{(5)}(\hat{\mu}_i) + 19 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)] \approx \frac{3}{8} h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$$

ولذلك

$$y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) \approx \frac{8}{3h^5} (w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}) \quad (41.5)$$

واستخدام هذه التمهيدية لحذف الحد المتضمن $h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$ من المعادلة (40.5) يعطي التقريب

لخطأ القطع المحلي لـ

$$|\tau_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19h^4}{720} \cdot \frac{8}{3h^5} |w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}| = \frac{19|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{270h}$$

لنفترض أننا الآن نعود إلى المعادلة (40.5) مع سعة خطوة جديدة qh وتوليد تقريبات جديدة

\hat{w}_{i+1} و $\hat{w}_{i+1}^{(0)}$. والهدف اختيار q بما يحقق كون خطأ القطع المحلي المعطى بالمعادلة (40.5)

محددًا بحد سماح ε المبين مسبقًا. فإذا افترضنا أن القيمة $y^{(5)}(\mu)$ في المعادلة (40.5) المرتبطة بـ

qh مقربة أيضًا باستخدام المعادلة (41.5) فإن

$$\frac{|y(t_i + qh) - \hat{w}_{i+1}|}{qh} = \frac{19q^4 h^4}{720} |y^{(5)}(\mu)| \approx \frac{19q^4 h^4}{720} \left[\frac{8}{3h^5} |w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}| \right]$$

ونحتاج إلى اختيار q ليكون

$$\frac{|y(t_i + qh) - \hat{w}_{i+1}|}{qh} \approx \frac{19q^4}{270} \frac{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{h} < \varepsilon$$

بمعنى أننا نختار q ليكون

$$q < \left(\frac{270}{19} \frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|} \right)^{1/4} \approx 2 \left(\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|} \right)^{1/4}$$

عدداً من افتراضات التقريب قد افترضت في هذا التطوير، لذا تُختار q عملياً وبتحفظ. عادة تكون

$$q = 1.5 \left(\frac{h\varepsilon}{|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|} \right)^{1/4}$$

إن التغيير في سعة الخطوة للطريقة المتعددة الخطوات أكثر تكلفة من حيث تقييمات الدالة مقارنة بطريقة الخطوة الواحدة، إذ يجب حساب قيم البداية الجديدة المتساوية القواعد وتعهيدية لكث نتجاهل عادة تغيير سعة الخطوة ما دام أن خطأ القطع المحلي ما بين $\varepsilon/10$ و ε ، معني أن

$$\frac{\varepsilon}{10} < |\tau_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}|}{270h} < \varepsilon$$

وبالإضافة إلى ذلك، فإن q تعطي حدًا أعلى لضمان أن تقريبًا دقيقًا واحدًا على غير العادة لا يظهر خطوة ذات سعة كبيرة جدًا. وتعتمد الخوارزمية (5.5) هذه الحماية مع حد أعلى 4. وتذكر أنه لكون الطرائق المتعددة الخطوات تتطلب سعة خطوات متساوية لقيم البداية، فإن أي تغيير في سعة الخطوة يتطلب بالضرورة تكرار حساب قيم بداية جديدة عند تلك النقطة. وقد تم ذلك في الخوارزمية (5.5) من خلال استدعاء خوارزمية Runge-Kutta الجزيئية (الخوارزمية 2.5).

متنبي- مصحح آدم بسعة خطوة متغير Adams Variable Step-Size Predictor-Corrector

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

مع خطأ قطع محلي ضمن حد سماح معين:

المدخلات: نقاط النهاية a و b ، شرط ابتدائي α ، حد سماح TOL ، أكبر سعة خطوة h_{max} ، أصغر سعة خطوة h_{min} .

المخرجات: h, t_i, w_i حيث عند الخطوة i ، فإن w_i تقرب $y(t_i)$ ، وقد استخدمت سعة الخطوة h أو ظهرت عبارة تفيد بأن أقل سعة للخطوة قد تم تجاوزها.

المضمون	الخطوة
<p>هي خوارزمية جزئية من طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4. وتسميتها $RK4(h, v_0, x_0, v_1, x_1, v_2, x_2, v_3, x_3)$ وتقبل سعة خطوة h بوصفها مدخلات وقيمة البداية $y(x_0) \approx v_0$ وتعيد $\{(x_j, v_j) \mid j = 1, 2, 3\}$ معرفًا وفق ما يلي:</p> <p>عند $j = 1, 2, 3$ ضع</p> $K_1 = hf(x_{j-1}, v_{j-1});$ $K_2 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_1/2)$ $K_3 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_2/2)$ $K_4 = hf(x_{j-1} + h, v_{j-1} + K_3)$	1



	$v_j = v_{j-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6;$ $x_j = x_0 + jh.$	
2	<p>ضع</p> $t_0 = a$ $w_0 = \alpha$ $h = h_{max}$ <p>سيستخدم لتنفيذ الحلقة في الخطوة (4). سيؤشر متى تحسب القيمة الأخيرة). المخرجات (t_0, w_0)</p>	
3	<p>استدع $RK4(h, w_0, t_0, w_1, t_1, w_2, t_2, w_3, t_3)$ ضع $NFLAG = 1$ (يشير إلى حساب من $RK4$). $i = 4$ $t = t_3 + h$</p>	
4	<p>بما أن $(FLAG = 1)$. فطبق الخطوات 5 - 20.</p>	
5	<p>ضع</p> $WP = w_{i-1} + \frac{h}{24}[55f(t_{i-1}, w_{i-1}) - 59f(t_{i-2}, w_{i-2})$ <p>(التنبؤ w_i) $+ 37f(t_{i-3}, w_{i-3}) - 9f(t_{i-4}, w_{i-4})];$</p> $WC = w_{i-1} + \frac{h}{24}[9f(t, WP) + 19f(t_{i-1}, w_{i-1})$ <p>(صحح w_i) $- 5f(t_{i-2}, w_{i-2}) + f(t_{i-3}, w_{i-3})];$</p> $\sigma = 19 WC - WP /(270h).$	
6	<p>إذا كان $\sigma \leq TOL$ فطبق الخطوات 7 - 16. (قبل التمهيدي). وإلا فطبق الخطوات 17 - 19. (رفض التمهيدي).</p>	
7	<p>ضع $w_i = WC$ (قبل التمهيدي). $t_i = t$</p>	
8	<p>إذا كان $NFLAG = 1$. فإنه عند $i, i-1, i-2, i-3$. تكون المخرجات (f, t_j, w_j, h). (النتائج السابقة مقبولة أيضاً). وما عدا ذلك تكون المخرجات (i, t_i, w_i, h). (قبل النتائج السابقة).</p>	
9	<p>إذا كان $LAST = 1$ فضع $FLAG = 0$ (الخطوة التالية هي 20). وإلا فطبق الخطوات 10 - 16.</p>	
10	<p>ضع $i = i + 1$ $NFLAG = 0$</p>	
11	<p>إذا كان $TOL \leq 0.1\sigma$ أو $t_{i-1} + h > b$ فطبق الخطوات 12 - 16. (زد h إذا كانت أدق من المطلوب أو أنقص h لجعل b بمنزلة نقطة شبكية).</p>	
12	<p>ضع $q = (TOL/(2\sigma))^{1/4}$</p>	



13	إذا كان $q > 4$ فضع $h = 4h$ ما عدا ذلك ضع $h = qh$.
14	إذا كان $h > hmax$ فضع $h = hmax$.
15	إذا كان $t_{i-1} + 4h > b$ فضع $h = (b - t_{i-1})/4$ $LAST = 1$
16	استدع $RK4(h, w_{i-1}, t_{i-1}, w_i, t_i, w_{i+1}, t_{i+1}, w_{i+2}, t_{i+2})$ ضع $NFLAG = 1$ $i = i + 3$ (الفرع الحقيقي قد استكمل. والخطوة التالية هي 20)
17	ضع $q = (TOL/(2\sigma))^{1/4}$ (فرع فاشل من الخطوة 6. التمهيدية مرفوضة).
18	إذا كان $q < 0.1$ فضع $h = 0.1h$ وإلا فضع $h = qh$.
19	إذا كان $h < hmin$ فضع $FLAG = 0$. المخرجات ($hmin$ تم تجاوزها). وما عدا ذلك إذا كان $NFLAG = 1$ فضع $i = i - 3$ (النتائج السابقة مرفوضة أيضا). استدع $RK4(h, w_{i-1}, t_{i-1}, w_i, t_i, w_{i+1}, t_{i+1}, w_{i+2}, t_{i+2})$ ضع $i = i + 3$ $NFLAG = 1$
20	ضع $t = t_{i-1} + h$
21	توقف.



جدول 135

$ y(t_i) - w_i $	σ_i	h_i	w_i	$y(t_i)$	t_i
0.000005	4.051×10^{-6}	0.1257017	0.7002318	0.7002323	0.1257017
0.000011	4.051×10^{-6}	0.1257017	0.9230949	0.9230960	0.2514033
0.000017	4.051×10^{-6}	0.1257017	1.1673877	1.1673894	0.3771050
0.000022	4.051×10^{-6}	0.1257017	1.4317480	1.4317502	0.5028066
0.000028	4.610×10^{-6}	0.1257017	1.7146306	1.7146334	0.6285083
0.000035	5.210×10^{-6}	0.1257017	2.0142834	2.0142869	0.7542100
0.000043	5.913×10^{-6}	0.1257017	2.3287200	2.3287244	0.8799116
0.000054	6.706×10^{-6}	0.1257017	2.6556877	2.6556930	1.0056133
0.000066	7.604×10^{-6}	0.1257017	2.9926319	2.9926385	1.1313149
0.000080	8.622×10^{-6}	0.1257017	3.3366562	3.3366642	1.2570166
0.000097	9.777×10^{-6}	0.1257017	3.6844761	3.6844857	1.3827183
0.000108	7.029×10^{-6}	0.1030100	3.9697433	3.9697541	1.4857283
0.000120	7.029×10^{-6}	0.1030100	4.2527711	4.2527830	1.5887383
0.000133	7.029×10^{-6}	0.1030100	4.5310137	4.5310269	1.6917483
0.000151	7.029×10^{-6}	0.1030100	4.8016488	4.8016639	1.7947583
0.000172	7.760×10^{-6}	0.1030100	5.0615488	5.0615660	1.8977683
0.000177	3.918×10^{-8}	0.0255579	5.1239764	5.1239941	1.9233262
0.000181	3.918×10^{-8}	0.0255579	5.1854751	5.1854932	1.9488841
0.000186	3.918×10^{-8}	0.0255579	5.2459870	5.2460056	1.9744421
0.000191	3.918×10^{-8}	0.0255579	5.3054529	5.3054720	2.0000000

مثال 1

يتضمن جدول (13.5) النتائج المستخرجة باستخدام الخوارزمية (5.5) لإيجاد تقريبات لحل مسألة

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \leq t \leq 2 \quad y(0) = 0.5$$

التي لها حل $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$. وتتضمن المدخلات حد السماح $TOL = 10^{-5}$. أكبر سرعة خطوة $hmax = 0.25$. وأصغر سرعة خطوة $hmin = 0.01$. وقد أدرجنا في العمود الخامس

$$\sigma_i = \frac{19}{270h} |w_i - w_i^{(0)}| \approx |y(t_i) - w_i|$$

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 7.5

1. استخدم خوارزمية آدمز المتنبئ - المصحح لسعة خطوة متغير مع حد سماح $TOL = 10^{-4}$ و $hmin = 0.025$ و $hmax = 0.25$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية. وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$. الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{3}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

ب. $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$. الحل الحقيقي $y(t) = t + 1/(1 - t)$.

ج. $y' = 1 + y/t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$. الحل الحقيقي $y(t) = t \ln t + 2t$.

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$. الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$.

2. استخدم خوارزمية آدمز المتنبئ - المصحح لسعة خطوة متغير مع $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = (y/t)^2 + y/t$, $1 \leq t \leq 1.2$, $y(1) = 1$. الحل الحقيقي $hmin = 0.01$ و $hmax = 0.05$.

ب. $y' = \sin t + e^{-t}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$. الحل الحقيقي $hmin = 0.01$ و $hmax = 0.2$.

ج. $y' = (1/t)(y^2 + y)$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = -2$. الحل الحقيقي $hmin = 0.01$ و $hmax = 0.4$.

د. $y' = -ty + 4t/y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$. الحل الحقيقي $hmin = 0.01$ و $hmax = 0.2$.

3. استخدم خوارزمية آدمز المتنبئ - المصحح لسعة خطوة متغير مع $TOL = 10^{-6}$ و $hmax = 0.5$. وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 4$, $y(1) = 1$. الحل الحقيقي $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$. الحل الحقيقي $y(t) = t \tan(\ln t)$.

ج. $y' = -(y + 1)(y + 3)$, $0 \leq t \leq 3$, $y(0) = -2$. الحل الحقيقي $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$.

د. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = \frac{1}{3}$. الحل الحقيقي $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$.

4. أنشئ الخوارزمية متنبئ - مصحح آدم بسعة خطوة متغير بالاعتماد على طريقة Adams-Bashforth ذات الخطوات الخمس وطريقة Adams-Moulton ذات الخطوات الأربع. كرر التمرين (3) مستخدماً هذه الطريقة الجديدة.

5. دائرة كهربائية تتضمن مكثفاً بتكثيف ثابت $C = 1.1$ فارادي على التوالي مع مقاوم بمقاومة ثابتة $R_0 = 2.1$ أوم. مُرّرت فولتية $E(t) = 110 \sin t$ عند الزمن $t = 0$ وعندما ترتفع رتبة حرارة المقاوم، فإن المقاومة تصبح دالة للتيار i . حيث $R(t) = R_0 + ki$ ، $k = 0.9$ ، والمعادلة التفاضلية لـ

$$\left(1 + \frac{2k}{R_0}i\right) \frac{di}{dt} + \frac{1}{R_0C}i = \frac{1}{R_0C} \frac{dE}{dt}$$

تصبح

أوجد $i(2)$. مفترضاً أن $i(0) = 0$.

8.5

طرائق الاستكمال الخارجي

Extrapolation Methods

استُخدم الاستكمال الخارجي في الفصل (5.4) لتقريب تكاملات محدودة، حيث وجدنا أنه عن طريق أخذ المعدلات الصحيحة للتقريبات بطريقة شبه المنحرف غير الدقيقة نسيباً نستطيع عمل تقريبات جديدة. وتكون دقيقة إلى حد بعيد. وسوف نطبق في هذا الصل الاستكمال الخارجي لزيادة دقة التقريبات لحل مسائل القيمة الابتدائية. وكما لاحظنا سابقاً، يجب أن يكون للتقريبات الأصلية امتداد خطأ بصيغة معينة لتكون العملية ناجحة.

لتطبيق الاستكمال الخارجي في حل مسائل القيمة الابتدائية، فإننا نستخدم أسلوباً يعتمد على طريقة النقطة الوسطية

$$w_{i+1} = w_{i-1} + 2hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل } i \geq 1 \quad (42.5)$$

يتطلب هذا الأسلوب قيمتين للبدائية؛ بسبب الحاجة إلى كل من w_0 و w_1 قبل أن يمكن من تحديد أول تقريب لنقطة وسطية w_2 . وإحدى القيمتين عادة هي الشرط الابتدائي لـ $y(a) = \alpha$. ولتحديد نقطة البداية الثانية w_1 نطبق طريقة أويلر. وتوجد التقريبات اللاحقة من المعادلة (42.5). وبعد سلسلة من تقريبات هذا النوع المتولدة التي تنتهي عند القيمة t ، فإننا نجري تصحيحاً لنقطة نهاية يتضمن آخر تقريبين لنقطة النهاية. وهذا يعطي التقريب $w(t, h)$ لـ $y(t)$ وصيغته

$$y(t) = w(t, h) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k h^{2k} \quad (43.5)$$

حيث إن δ_k عبارة عن ثوابت تعود إلى مشتقات الحل $y(t)$. والنقطة المهمة هي أن δ_k لا تعتمد على سعة الخطوة h . وتوجد تفصيلات هذه العملية في ورقة بحثية لـ Gragg (Gr) ولتوضيح أسلوب الاستكمال الخارجي لحل

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

نفترض خطوة بسعة ثابتة h . وأننا نرغب في تقريب $y(t_1) = y(a + h)$ وبالنسبة إلى خطوة الاستكمال الخارجي الأولى نضع $h_0 = h/2$ ، ونستخدم طريقة أويلر مع $w_0 = \alpha$ لتقريب $w_1 = y(a + h/2)$ وهي

$$w_1 = w_0 + h_0 f(a, w_0)$$

وعند تطبيق طريقة النقطة الوسطية مع $t_{i-1} = a$ و $t_i = a + h_0 = a + h/2$ نعمل أول تقريب لـ $y(a + h) = y(a + 2h_0)$ وهو

$$w_2 = w_0 + 2h_0 f(a + h_0, w_1)$$

إن تصحيح نقطة النهاية يُطبق لإيجاد التقريب النهائي لـ $y(a + h)$ عند سعة خطوة h_0 ، وهذا يؤدي إلى ظهور التقريب $O(h_0^2)$ إلى $y(t_1)$

$$y_{1.1} = \frac{1}{2}[w_2 + w_1 + h_0 f(a + 2h_0, w_2)]$$

لقد وفرنا التقريب $y_{1.1}$ تقريباً، وأهملنا النتائج الوسطية w_1 و w_2 .

لإيجاد التقريب التالي $y_{2,1}$ لـ $y(t_1)$ ؛ نضع $h_1 = h/4$ ، ونستخدم طريقة أويلر مع $w_0 = \alpha$ لإيجاد تقريب لـ $y(a + h/4) = y(a + h_1)$ الذي سنرمز إليه بـ w_1 :

$$w_1 = w_0 + h_1 f(a, w_0)$$

بعد ذلك نقرب $y(a + h/2) = y(a + h_1/2)$ مع w_2 و $y(a + 3h/4) = y(a + 3h_1/4)$ مع w_3 حيث

$$w_2 = w_0 + 2h_1 f(a + h_1, w_1) \text{ و } w_3 = w_1 + 2h_1 f(a + 2h_1, w_2)$$

ثم نوجد التقريب w_4 لـ $y(t_1) = y(a + 4h_1)$ حيث

$$w_4 = w_2 + 2h_1 f(a + 3h_1, w_3)$$

إن تصحيح نقطة النهاية يُطبَّق الآن على w_3 و w_4 للحصول على تقريب $O(h_1^2)$ محسن لـ $y(t_1)$

$$y_{2,1} = \frac{1}{2}[w_4 + w_3 + h_1 f(a + 4h_1, w_4)]$$

وبسبب صيغة الخطأ المعطى في المعادلة (43.5)، فإن التقريبيين لـ $y(a+h)$ يتميزان بالآتي:

$$y(a+h) = y_{1,1} + \delta_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \delta_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \dots = y_{1,1} + \delta_1 \frac{h^2}{4} + \delta_2 \frac{h^4}{16} + \dots$$

$$y(a+h) = y_{2,1} + \delta_1 \left(\frac{h}{4}\right)^2 + \delta_2 \left(\frac{h}{4}\right)^4 + \dots = y_{2,1} + \delta_1 \frac{h^2}{16} + \delta_2 \frac{h^4}{256} + \dots$$

ويمكننا حذف جزء $O(h^2)$ من هذا الخطأ المتقلص من خلال عمل معدل هاتين الصيغتين على نحو مناسب. وعلى نحو خاص، فإذا طرحنا الصيغة الأولى من 4 أمثال الثانية وقسمنا الناتج

على 3، يكون لدينا

$$y(a+h) = y_{2,1} + \frac{1}{3}(y_{2,1} - y_{1,1}) - \delta_2 \frac{h^4}{64} + \dots$$

و من ثم فإن تقريب $y(t_1)$ المعطى من خلال

$$y_{2,2} = y_{2,1} + \frac{1}{3}(y_{2,1} - y_{1,1})$$

له خطأ من رتبة $O(h^4)$.

وباستمرار هذا الأسلوب، نضع بعد ذلك $h_2 = h/6$ ونطبِّق طريقة أويلر مرة واحدة، ثم نتبعها بطريقة النقطة الوسطية خمس مرات، وبعد ذلك نستخدم تصحيح نقطة النهاية لتحديد تقريب h^2 ، $y_{3,1}$ إلى $y(t_1) = y(a+h)$. ويمكن إيجاد معدل هذا التقريب مع $y_{2,1}$ للحصول على تقريب $O(h^4)$ الثاني الذي نرمز إليه بـ $y_{3,2}$. ومن ثم فإن معدل $y_{3,2}$ و $y_{2,2}$ من شأنه إلغاء حدود خطأ $O(h^4)$ وإعطاء تقريب بخطأ من رتبة $O(h^6)$. ويمكن توليد صيغ أخرى من الرتبة أعلى باستمرار العملية.

والفرق المعنوي الوحيد ما بين الاستكمال الخارجي المطبق هنا وذلك الذي استُخدم في تكامل Romberg في الفصل (5.4) يكمن في طريقة اختيار التقسيمات الجزئية. إن لتكامل Romberg صيغة مريحة لتمثيل تقريبات قاعدة Composite Trapezoidal التي تستخدم تقسيمات متتابعة لسعة الخطوة بـ كُرَّاد صحيحة $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$. يسمح هذا الإجراء لعملية عمل المعدل بالاستمرار وفق أسلوب سهل المتابعة.

ونحن لا نملك وسائل للحصول على تقريبات منتقاة بسهولة لمسائل القيمة الابتدائية، لذا فإن تقسيمات أساليب الاستكمال الخارجي تختار لتقليل عدد تقييمات الدالة المطلوبة وعملية عمل المعدل ناتجة من هذا الاختيار للتقسيم الجزئي، والمبينة في جدول (14.5)، هي ليست بهذه البدائية، ولكن العملية هي نفسها التي استخدمت في تكامل Romberg.

جدول 14.5

$$y_{1,1} = w(t, f_0)$$

$$y_{2,2} = w(t, f_1) \quad y_{2,2} = y_{2,1} + \frac{h_1^2}{h_0^2 - h_1^2} (y_{2,1} - y_{1,1})$$

$$y_{3,3} = w(t, f_2) \quad y_{3,2} = y_{3,1} + \frac{h_2^2}{h_1^2 - h_2^2} (y_{3,1} - y_{2,1}) \quad y_{3,3} = y_{3,2} + \frac{h_2^2}{h_0^2 - h_2^2} (y_{3,2} - y_{2,2})$$

تستخدم الخوارزمية (6.5) أسلوب الاستكمال الخارجي مع متتالية كبراد صحيحة بصيغة $q_7 = 32$ و $q_6 = 24$, $q_5 = 16$, $q_4 = 12$, $q_3 = 8$, $q_2 = 6$, $q_1 = 4$, $q_0 = 2$. تختار سعة خطوة رئيسية h . وتستمر الطريقة باستخدام $h_i = h/q_i$ لكل من $i = 0, \dots, 7$. لتقريب $y(t+h)$ وبعد الخطأ مسيطراً عليه على أن تحسب التقريبات $y_{1,1}, y_{2,2}, \dots$ حتى يكون $|y_{i,i} - y_{i-1,i-1}|$ أقل من حد السماح المحدد. وإذا لم تصل إلى حد السماح عند $i = 8$ تخفّض F ، وبعاد تطبيق العملية. تحدّد القيمة الدنيا $hmin$ والقيمة العليا $hmax$ لضمان سيطرة الطريقة. فإذا وجدت $y_{i,i}$ مقبولة فإن w_1 تعطى لـ $y_{i,i}$. وتبدأ الحسابات مجدداً بتحديد w_2 التي ستقرب $y(t_2) = y(a + 2h)$. وتعاد العملية إلى أن يكون التقريب w_N إلى $y(b)$ قد حدّد.

الخوارزمية تستخدم نقاطاً مع تقسيمات بالصيغة $2^n \cdot 3$ و 2^n اختيارات أخرى يمكن استخدامها.

الاستكمال الخارجي Extrapolation

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

مع خطأ قطع محلي ضمن حد سماح معين:

المدخلات: نقاط النهاية a و b . شرط ابتدائي α . حد سماح TOL . أكبر سعة خطوة $hmax$ أصغر سعة خطوة $hmin$.
المخرجات: T, W, h حيث W تقرب $y(t)$ وقد استخدمت سعة الخطوة h أو ظهرت عبارة تفيد بأن أقل سعة للخطوة تم تجاوزها.

الخطوة	المضمون
1	هيئة الصف $NK = (2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32)$.
2	ضع $TO = a$ $WO = \alpha$ $h = hmax$ $FLAG = 1$ (سيستخدم لتنفيذ الحلقة في الخطوة 4).



3	عند $j = 1, \dots, i$ و $i = 1, 2, \dots, 7$ ضع (ملحوظة: $Q_{i,j} = h_j^2/h_{i+1}^2$). $Q_{i,j} = (NK_{i+1}/NK_j)^2$
4	ما دام ($FLAG = 1$). فطبّق الخطوات 5 - 20.
5	ضع $k = 1$ ($NFLAG = 0$) وعند حصول الدقة المطلوبة، ضع $NFLAG = 1$
6	ما دام ($k \leq 8$ و $NFLAG = 0$). فطبّق الخطوات 7 - 14.
7	ضع $HK = h/NK_k$ $T = TO$ $W2 = W0$ $W3 = W2 + HK \cdot f(T, W2)$ (أولى خطوات أويلر Euler) $T = TO + HK$
8	عند $j = 1, \dots, NK_k - 1$ ضع $W1 = W2$ $W2 = W3$ $W3 = W1 + 2HK \cdot f(T, W2)$ (طريقة النقطة الوسطية) $T = TO + (j + 1) \cdot HK$
9	ضع $y_k = [W3 + W2 + HK \cdot f(T, W3)]/2$ (تصحّح نقطة النهاية لحساب $(Y_{k,1})$.
10	إذا كان $k \geq 2$ فطبّق الخطوات 11 - 13. (ملحوظة: $y_{k-1,k-1} \equiv y_{k-1,k-1}$, $y_{k-2} \equiv y_{k-2,2}, \dots, y_1 \equiv y_{k-1,k-1}$ لأنه قد حُفظ السطر السابق للجدول فقط).
11	ضع $j = k$ (حفظ $(Y_{k-1,k-1})$) $v = y_1$
12	ما دام ($j \geq 2$) فاعمل الآتي: ضع $y_{j-1} = y_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{Q_{k-1,j-1} - 1}$ (استكمال خارجي لحساب $y_{k,k-j+2}$) $(y_{j-1} \equiv y_{k,k-j+2})$ (ملحوظة: $y_{j-1} = \frac{h_{j-1}^2 y_j - h_k^2 y_{j-1}}{h_{j-1}^2 - h_k^2}$) $j = j - 1$
13	إذا كان $ y_1 - v \leq TOL$ فضع $NFLAG = 1$ (تقبّل y_1 بمنزلة w الجديدة).
14	ضع $k = k + 1$
15	ضع $k = k - 1$
16	إذا كان $NFLAG = 0$ فطبّق الخطوتين 17 و 18. (التمهيدية مرفوضة). أيضاً طبق الخطوتين 19 و 20. (التمهيدية مقبولة).



17	ضع $h = h/2$ (قيمة جديدة لـ w مرفوضة. أنقص h).
18	إذا كان $h < hmin$ فإن المخرجات ($hmin$ تم تجاوزه). ضع $FLAG = 0$ (فرع صحيح قد استكمل. الخطوة الآتية هي الذهاب إلى الخطوة 4).
19	ضع $WO = y_1$ (قيمة جديدة لـ w مقبولة). ضع $TO = TO + h$ المخرجات (TO, WO, h)
20	إذا كان $TO \geq b$ فضع $FLAG = 0$ (العملية استكملت بنجاح). وما عدا ذلك إذا كان $TO + h > b$ فضع $h = b - TO$ (توقف عند $t = b$) وما عدا ذلك إذا كان $k \leq 3$ و $h < 0.5(hmax)$ فضع $h = 2h$ (زيادة سعة الخطوة إذا أمكن).
21	توقف.



لنأخذ مسألة القيمة الابتدائية

مثال 1

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \leq t \leq 2 \quad y(0) = 0.5$$

التي لها حل $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$. ستطبق خوارزمية الاستكمال الخارجي على هذه المسألة مع $h = 0.25$, $TOL = 10^{-10}$ و $hmin = 0.01$ وقد استخرج جدول (15.5) ضمن حساب $w_1 \approx y(0.25)$

تتوقف الحسابات مع $w_1 = y_{5.5}$ لأن $|y_{5.5} - y_{4.4}| \leq 10^{-10}$ وقد قُبلت $y_{5.5}$ بوصفها تقريباً إلى $y(t_1) = y(0.25)$ تكون المجموعة الكاملة لهذه التقريبات دقيقة، والمواقع المعطاة في جدول (5.16) أيضاً.

جدول 15.5

$y_{1.1} = 0.9187311719$				
$y_{2.1} = 0.920079348$	$y_{2.2} = 0.9204835892$			
$y_{3.1} = 0.9202873589$	$y_{3.2} = 0.9204868761$	$y_{3.3} = 0.9204872870$		
$y_{4.1} = 0.9203747396$	$y_{4.2} = 0.9204871876$	$y_{4.3} = 0.9204872914$	$y_{4.4} = 0.9204872917$	
$y_{5.1} = 0.920447263$	$y_{5.2} = 0.9204872656$	$y_{5.3} = 0.9204872916$	$y_{5.4} = 0.9204872917$	$y_{5.5} = 0.9204872917$

جدول 16.5

t_i	$y_i = y(t_i)$	w_i	h_i	k
0.25	0.9204872917	0.9204872917	0.25	5
0.50	1.4256393646	1.4256393646	0.25	5
0.75	2.0039999917	2.0039999917	0.25	5
1.00	2.6408590858	2.6408590858	0.25	5
1.25	3.3173285213	3.3173285212	0.25	4
1.50	4.0091554648	4.0091554648	0.25	3
1.75	4.6851986620	4.6851986619	0.25	3
2.00	5.3054719505	5.3054719505	0.25	3

إن البرهان الذي بيئته الطريقة في تقاربات الخوارزمية (6.5) يتضمن نتائج من مبرهنة الجمع التي يمكن إيجادها في ورقة Gragg [Gr] البحثية الأصلية. وهناك عدد آخر من عمليات الاستكمال الخارجي المتوفرة، وبعضها يعتمد أساليب سعة الخطوة. وبشأن أساليب إضافية تستند إلى عملية الاستكمال الخارجي، انظر أوراق Bulirsch and Stoer ([BS1], [BS2], [BS3]) أو كتاب Stetter [Stet]. تتضمن الطرائق المستخدمة في Bulirsch and Stoer استيفاءً داخلياً مع دوال معقولة بدلاً من كثيرة حدود الاستكمال الداخلي المستخدم في عملية Gragg.

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 8.5

1. استخدم خوارزمية الاستكمال الخارجي مع حد سماح $hmax = 0.25$ و $TOL = 10^{-4}$ و $hmin = 0.05$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:
 أ. $y' = te^{3t} - 2y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$. الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.
 ب. $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$. الحل الحقيقي $y(t) = t + 1/(1 - t)$.
 ج. $y' = 1 + y/t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$. الحل الحقيقي $y(t) = t \ln t + 2t$.
 د. $y' = \cos 2t + \sin 3t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$. الحل الحقيقي $y(t) = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{2}{3}$.
 2. استخدم خوارزمية الاستكمال الخارجي مع $TOL = 10^{-4}$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = (y/t)^2 + y/t$, $1 \leq t \leq 1.2$, $y(1) = 1$. مع $hmax = 0.05$ و $hmin = 0.02$.
 ب. $y' = \sin t + e^{-t}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$. مع $hmax = 0.25$ و $hmin = 0.02$.
 ج. $y' = (1/t)(y^2 + y)$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = -2$. مع $hmax = 0.5$ و $hmin = 0.02$.
 د. $y' = -ty + 4t/y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$. مع $hmax = 0.25$ و $hmin = 0.02$.
 3. استخدم خوارزمية الاستكمال الخارجي مع $TOL = 10^{-4}$, $hmax = 0.5$ و $hmin = 0.05$ لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية الآتية، وقارن النتائج بالقيم الحقيقية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 4$, $y(1) = 1$. الحل الحقيقي $y(t) = t/(1 + \ln t)$.
 ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$. الحل الحقيقي $y(t) = t \tan(\ln t)$.
 ج. $y' = -(y + 1)(y + 3)$, $0 \leq t \leq 3$, $y(0) = -2$. الحل الحقيقي $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$.
 د. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = \frac{1}{2}$. الحل الحقيقي $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$.

4. ليُمثل $P(t)$ عدد الأشخاص في مجتمع عند الزمن t ، مقيسًا بالسنوات. فإذا كان معدل الولادات b ثابتاً، ومعدل الوفيات d يتناسب مع حجم المجتمع (بسبب الكثافة السكانية المفرطة)، فإن معدل نمو المجتمع مُعطى من خلال المعادلة اللوجستية

$$\frac{dP(t)}{dt} = bP(t) - k[P(t)]^2$$

حيث $d = kP(t)$ افترض أن $b = 2.9 \times 10^{-2}$ و $P(0) = 50,976$ و $k = 1.4 \times 10^{-7}$ أوجد حجم المجتمع بعد 5 سنوات.

معادلات عالية الرتبة وأنظمة المعادلات التفاضلية

9.5

Higher - Order Equations and Systems of Differential Equations

يتضمن هذا الفصل مقدمة للحل العددي لمسائل القيمة الابتدائية العالية الرتبة. والأساليب المعروضة محددة بتلك التي تتضمن تحويل معادلة عالية الرتبة إلى نظام معادلات تفاضلية

بالرتبة الأولى. وقبل شرح عملية التحويل، نحتاج إلى بعض الملاحظات ذات العلاقة بأنظمة تتضمن معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

إن نظاماً من الرتبة m لمسائل القيمة الابتدائية من الرتبة الأولى تمتلك الصيغة

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt}(t) &= f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \frac{du_2}{dt}(t) &= f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \frac{du_m}{dt}(t) &= f_m(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{aligned} \quad (44.5)$$

لـ $a \leq t \leq b$ مع الشروط الابتدائية

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = \alpha_m \quad (45.5)$$

الهدف هو إيجاد m من الدوال u_1, u_2, \dots, u_m من شأنها تحقيق كل واحدة من المعادلات التفاضلية مع الشروط الابتدائية جميعها. ولناقشة وجود الحلول لأنظمة المعادلات ووحدايتها، فإننا نحتاج إلى توسيع تعريف شرط Lipschitz لدوال بعدة متغيرات.

تعريف 16.5 الدالة $f(t, y_1, \dots, y_m)$ المعروف على المجموعة

■ $\{i = 1, 2, \dots, m \text{ لكل } D = (t, u_1, \dots, u_m) \mid a \leq t \leq b, -\infty < u_i < \infty\}$ يقال إنه يحقق شرط Lipschitz على D ، في المتغيرات u_1, u_2, \dots, u_m في حالة وجود ثابت $L > 0$ حيث

$$|f(t, u_1, \dots, u_m) - f(t, z_1, \dots, z_m)| \leq L \sum_{j=1}^m |u_j - z_j| \quad (46.5)$$

■ لكل من (t, u_1, \dots, u_m) و (t, z_1, \dots, z_m) ينتمي إلى D . وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطية. يمكن إثبات أنه إذا كانت f ومشتقاتها الجزئية الأولى متصلة على D ، وإذا كان

$$\left| \frac{\partial f(t, u_1, \dots, u_m)}{\partial u_i} \right| \leq L$$

لكل من $i = 1, 2, \dots, m$ و (t, u_1, \dots, u_m) جميعها ضمن D ، فإن f يحقق شرط Lipschitz على D مع ثابت Lipschitz L . (انظر [BiR, p. 141])، وفيما يلي مبرهنة الوجود والحدانية الرئيسية، ويمكن إيجاد برهانها في [BiR, pp. 152–154].

مبرهنة 17.5 افترض أن

$$\{i = 1, 2, \dots, m \text{ لكل } D = (t, u_1, u_2, \dots, u_m) \mid a \leq t \leq b, -\infty < u_i < \infty\}$$

وليكن $f_i(t, u_1, \dots, u_m)$ لكل من $i = 1, 2, \dots, m$ متصلاً على D ، ويحقق شرط Lipschitz هناك. إن نظام المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى (معادلة 44.5) ضمن الشروط الابتدائية (معادلة 45.5) له حل وحيد $u_1(t), \dots, u_m(t)$ لـ $a \leq t \leq b$.

إن طرائق حل أنظمة المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى عبارة عن تعميمات لطرائق معادلة الرتبة الأولى المفردة التي قد شُرحَت مبكراً ضمن هذه الوحدة. وعلى سبيل المثال فطريقة Runge-Kutta التقليدية من الرتبة 4 المعطاة بالصيغة

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \alpha, \\
 k_1 &= hf(t_i, w_i), \\
 k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\
 k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\
 k_4 &= hf(t_{i+1}, w_i + k_3), \\
 w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{و} \quad i = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

المستخدمة لحل مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الأولى $y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$

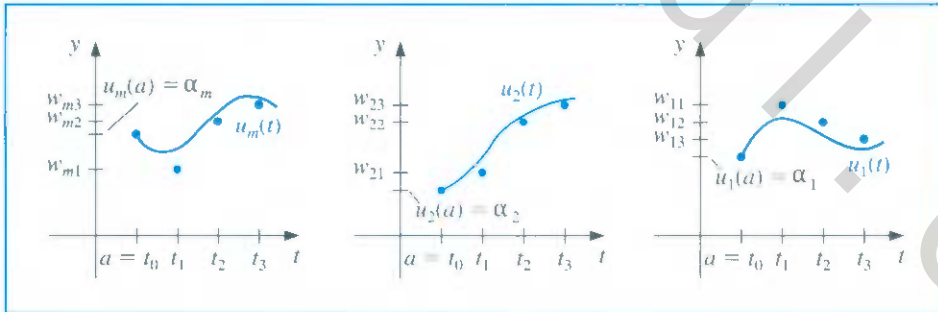
يمكن تعميمها كما يلي:

افترض أن اختيار $N > 0$ عدد صحيح، وضع $h = (b - a)/N$ قسّم الفترة $[a, b]$ إلى N من الفترات الجزئية مع النقاط الشبكية

$$t_j = a + jh \quad \text{لكل } j = 0, 1, \dots, N$$

استخدم الرمز w_{ij} لكل $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 0, 1, \dots, N$ لتمثيل تقريب إلى $u_i(t_j)$ بمعنى أن w_{ij} تقرب الحل بتسلسل i وهو $u_i(t)$ للمعادلة (44.5) عند النقطة الشبكية t_j بتسلسل j . أما الشروط الابتدائية. فضع: (انظر شكل 5.5)

$$w_{1,0} = \alpha_1, \quad w_{2,0} = \alpha_2, \quad \dots, \quad w_{m,0} = \alpha_m \quad (47.5)$$



شكل 5.5

افترض أن القيم $w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{m,j}$ قد حُسِبَت. فنجد $w_{1,j+1}$ من خلال حساب $w_{2,j+1}, \dots, w_{m,j+1}$

$$k_{1,i} = hf_i(t_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{m,j}), \quad (48.5)$$

$$k_{2,i} = hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, w_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m}\right) \quad (49.5)$$

$$k_{3,i} = hf \left(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, w_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m} \right) \quad (50.5)$$

$$k_{4,i} = hf_i(t_j + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, \dots, w_{m,j} + k_{3,m}) \quad (51.5)$$

ثم بعد ذلك

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}) \quad (52.5)$$

وذلك في المعادلات جميعها لكل من $i = 1, 2, \dots, m$

ولكل من $i = 1, 2, \dots, m$ انظر أن القيم $k_{1,1}, k_{1,2}, \dots, k_{1,m}$ يجب حسابها قبل أن نتكهن من حساب أي من الحدود ذات الصيغة $k_{2,i}$. وعموماً يجب حساب كل من $k_{1,1}, k_{1,2}, \dots, k_{1,m}$ قبل أي من القيم $k_{i+1,i}$. تنفذ الخوارزمية (7.5) طريقة من الرتبة الرابعة لأنظمة مسائل القيمة الابتدائية.

طريقة رونج-كوتا لأنظمة معادلات تفاضلية

Runge-Kutta Methods for Systems of Differential Equations

لتقريب حل نظام من رتبة m لمسائل القيمة الابتدائية من الرتبة أولى

$$u_j'(a) = \alpha_j \text{ مع } a \leq t \leq b, u_j' = f_j(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

لكل $j = 1, 2, \dots, m$ عند $(N + 1)$ من الأرقام المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$

المدخلات: نقاط نهاية a, b , عدد المعادلات N, m عدد صحيح، شروط ابتدائية $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.
المخرجات: التقريبات w_j إلى $u_j(t)$ عند $(N + 1)$ من القيم لـ t .

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a) / N$ $t = a$
2	عند $j = 1, 2, \dots, m$ ضع $w_j = \alpha_j$
3	المخرجات $(t, w_1, w_2, \dots, w_m)$
4	عند $i = 1, 2, \dots, N$ طبق الخطوات 5 - 11.
5	عند $j = 1, 2, \dots, m$ ضع $k_{1,j} = hf_j(t, w_1, w_2, \dots, w_m)$
6	عند $j = 1, 2, \dots, m$ ضع $k_{2,j} = hf_j(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, w_m + \frac{1}{2}k_{1,m})$
7	عند $j = 1, 2, \dots, m$ ضع $k_{3,j} = hf_j(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, w_m + \frac{1}{2}k_{2,m})$
8	عند $j = 1, 2, \dots, m$ ضع $k_{4,j} = hf_j(t + h, w_1 + k_{3,1}, w_2 + k_{3,2}, \dots, w_m + k_{3,m})$

ALGORITHM

الخوارزمية

7.5



عند $j = 1, 2, \dots, m$ ضع	9
$w_j = w_j + (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j})/6$	
ضع $t = a + ih$	10
المخرجات $(t, w_1, w_2, \dots, w_m)$	11
توقف.	12



مثال 1

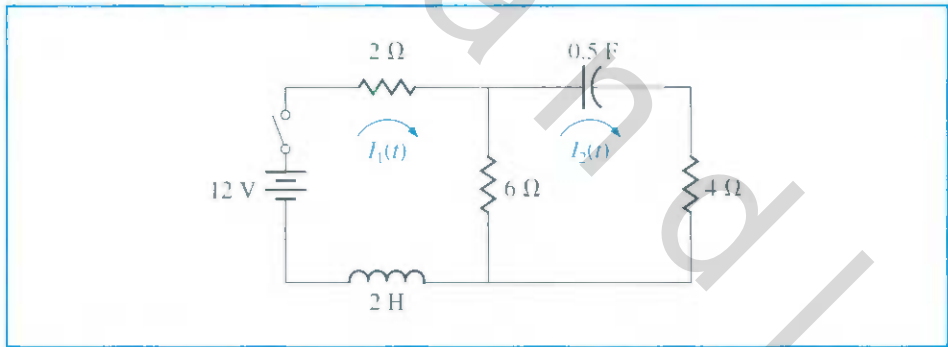
إن قانون Kirchhoff ينص على أن مجموع كل التغيرات اللحظية في الفولتية حول دائرة مغلقة يساوي صفراً، ويؤدي هذا القانون إلى أن التيار $I(t)$ في دائرة مغلقة مقدار مقاومتها R ohms وحمل مقداره C ، وحث مقداره L ، ومصدر فولتية مقداره $E(t)$ يحقق المعادلة

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt = E(t)$$

إن التيارين $I_1(t)$ و $I_2(t)$ في الحلقتين اليسرى واليمنى على التوالي من الدائرة المبينة في شكل (6.5) هما الحل لنظام المعادلات

$$2I_1'(t) + 6[I_1(t) - I_2(t)] + 2I_1'(t) = 12$$

$$\frac{1}{0.5} \int I_2(t) dt + 4I_2(t) + 6[I_2(t) - I_1(t)] = 0$$



شكل 6.5

افتراض أن المفتاح في الدائرة مغلق عند الزمن $t = 0$ ، وبذلك $I_1(0) = 0$ و $I_2(0) = 0$. طبق الحل

لـ $I_1'(t)$ في المعادلة الأولى. وفاضل المعادلة الثانية. ومن ثم عوّض $I_1'(t)$ لتحصل على

$$I_1' = f_1(t, I_1, I_2) = -4I_1 + 3I_2 + 6, \quad I_1(0) = 0$$

$$I_2' = f_2(t, I_1, I_2) = 0.6I_1' - 0.2I_2 = -2.4I_1 + 1.6I_2 + 3.6, \quad I_2(0) = 0$$

والحل الصحيح لهذا النظام هو

$$I_1(t) = -3.375e^{-2t} + 1.875e^{-0.4t} + 1.5$$

$$I_2(t) = -2.25e^{-2t} + 2.25e^{-0.4t}$$

سنطبق طريقة Runge-Kutta من الرتبة 4 لهذا النظام مع $h = 0.1$ وحيث $w_{1,0} = I_1(0) = 0$

و $w_{2,0} = I_2(0) = 0$ فإن

$$k_{1,1} = hf_1(t_j, w_{1,0}, w_{2,0}) = 0.1 f_1(0, 0, 0) = 0.1(-4(0) + 3(0) + 6) = 0.6$$

$$k_{1,2} = hf_2(t_j, w_{1,0}, w_{2,0}) = 0.1 f_2(0, 0, 0) = 0.1(-2.4(0) + 1.6(0) + 3.6) = 0.36$$

$$k_{2,1} = hf_1\left(t_j + \frac{1}{2}h, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right) = 0.1 f_1(0.05, 0.3, 0.18) \\ = 0.1(-4(0.3) + 3(0.18) + 6) = 0.534$$

$$k_{2,2} = hf_2\left(t_j + \frac{1}{2}h, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right) = 0.1 f_2(0.05, 0.3, 0.18) \\ = 0.1(-2.4(0.3) + 1.6(0.18) + 3.6) = 0.3168$$

وتوليد بقية المدخلات بنفس الأسلوب يعطينا

$$k_{3,1} = (0.1) f_1(0.05, 0.267, 0.1584) = 0.54072$$

$$k_{3,2} = (0.1) f_2(0.05, 0.267, 0.1584) = 0.321264$$

$$k_{4,1} = (0.1) f_1(0.1, 0.54072, 0.321264) = 0.4800912$$

$$k_{4,2} = (0.1) f_2(0.1, 0.54072, 0.321264) = 0.28162944 \quad \text{و}$$

وتمهيدية لذلك

$$I_1(0.1) \approx w_{-1} = w_{1,0} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}) \\ = 0 + \frac{1}{6}(0.6 + 2(0.534) + 2(0.54072) + 0.4800912) = 0.5382552$$

$$I_2(0.1) \approx w_{-1} = w_{2,0} + \frac{1}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}) = 0.3196263 \quad \text{و}$$

وتتولد البيانات المتبقية في جدول (5.17) بنفس الأسلوب.

$ I_2(t_j) - w_{2,j} $	$ I_1(t_j) - w_{1,j} $	$w_{2,j}$	$w_{1,j}$	t_j
0	0	0	0	0.0
0.5303×10^{-5}	0.8285×10^{-5}	0.3196263	0.5382550	0.1
0.9596×10^{-5}	0.1514×10^{-4}	0.5687817	0.9684983	0.2
0.1216×10^{-4}	0.1907×10^{-4}	0.7607328	1.310717	0.3
0.1311×10^{-4}	0.2098×10^{-4}	0.9063208	1.581263	0.4
0.1240×10^{-4}	0.2193×10^{-4}	1.014402	1.793505	0.5

جدول 17.5

ويمكن استخدام الأمر dsolve في Maple's لحل أنظمة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

يحتفظ Maple بالحرف D للتعبير عن المشتقة

ويُعرّف النظام في مثال (1) من خلال

```
>sys2:=D(u1)(t)=-4*u1(t)+3*u2(t)+6,D(u2)(t)=-2.4*u1(t)+1.6*u2(t)+3.6;
```

والشروط الابتدائية من خلال

```
>init2:=u1(0)=0,u2(0)=0;
```

يكون حل النظام من خلال الأمر

```
>sol2:=dsolve({sys2,init2},{u1(t),u2(t)});
```

لإيجاد

$$\text{sol2} := \left\{ u_1(t) = \frac{3}{2} - \frac{27}{8}e^{(-2t)} + \frac{15}{8}e^{(-2/5t)}, u_2(t) = -\frac{9}{4}e^{(-2t)} + \frac{9}{4}e^{(-2/5t)} \right\}$$

ولحصر الحل في صيغة دالة، استخدم

```
>r1:=rhs(sol2[2]);
```

$$r1 := \frac{3}{2} - \frac{27}{8}e^{(-2t)} + \frac{15}{8}e^{(-2/5t)}$$

و

```
>r2:=rhs(sol2[1]);
```

الذي يعطي استجابة مماثلة.

ولتقييم $u_2(0.5)$ و $u_1(0.5)$ استخدم

```
>evalf(subs(t=0.5,r1));evalf(subs(t=0.5,r2));
```

لتحصل على 1.014415451 و 1.793527048.

سيفشل الأمر dsolve لو كان ثمة حل ضمني لا يمكن إيجاده. ويمكننا في تلك الحالة استخدام معادلة عددية في dsolve التي تطبق أسلوب Runge-Kutta-Fehlberg وعلى سبيل المثال فإن

```
>g:=dsolve({sys2,init2},{u1(t),u2(t)},numeric);
```

يعيد العملية

```
g := proc(rkf45_x) ... end proc
```

ولتقريب الحل عند $t = 0.5$ ؛ أدخل

```
>g(0.5);
```

لإيجاد

$$[t = .5, u_2(t) = 1.01441545470291761, u_1(t) = 1.79352705243766586]$$

تتضمن العديد من المسائل الفيزيائية المهمة. مثل الدوائر الكهربائية ونظم الاهتزاز مسائل القيمة الابتدائية ومعادلاتها من الرتبة أكبر من 1. ولا يتطلب الأمر أساليب جديدة لحل هذه المسائل، ويمكننا من خلال إعادة تسمية المتغيرات. تخفيض المعادلة التفاضلية من الرتبة العالية إلى نظام معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى. وبعد ذلك نطبق إحدى الطرائق التي شرحت. إن مسألة قيمة ابتدائية عامة من الرتبة m

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) , \quad a \leq t \leq b$$

مع شروط ابتدائية $y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \dots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$ يمكن قلبها إلى نظام

معادلات بصيغة المعادلتين (44.5) و(45.5).

لتكن $u_1(t) = y(t)$, $u_2(t) = y'(t)$, ..., $u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$. هذا يعطي النظام من الرتبة الأولى

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u_3, \quad \dots \quad \frac{du_{m-1}}{dt} = \frac{dy^{(m-2)}}{dt} = u_m$$

و

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) = f(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

مع شروط ابتدائية

$$u_1(a) = y(a) = \alpha_1, \quad u_2(a) = y'(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$$

مثال 2 افترض مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t} \sin t \quad \text{لكل } 0 \leq t \leq 1 \quad \text{مع } y(0) = -0.4, \quad y'(0) = -0.6$$

ليكن $u_1(t) = y(t)$ و $u_2(t) = y'(t)$ ، وهذا يحول المعادلة إلى النظام

$$u_1'(t) = u_2(t), \quad u_2'(t) = e^{2t} \sin t - 2u_1(t) + 2u_2(t)$$

مع شروط ابتدائية

$$u_1(0) = -0.4, \quad u_2(0) = -0.6$$

وستستخدم طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة لتقريب حل هذه المسألة باستخدام $h = 0.1$.

الشروط الابتدائية تعطي $w_{1,0} = -0.4$ و $w_{2,0} = -0.6$. المعادلات من (51.5) إلى (51.5)

مع $z = 0$ تعطي

$$k_{1,1} = f_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = hw_{2,0} = -0.06$$

$$k_{1,2} = f_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = h[e^{2t_0} \sin t_0 - 2w_{1,0} + 2w_{2,0}] = -0.04$$

$$k_{2,1} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right) = h[w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}] = -0.062$$

$$k_{2,2} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right)$$

$$= h \left[e^{2(t_0+0.05)} \sin(t_0+0.05) - 2 \left(w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1} \right) + 2 \left(w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2} \right) \right]$$

$$= -0.13247644757$$

$$k_{3,1} = f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right) = -0.06162832238$$

$$k_{3,2} = f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right)$$

$$= -0.13152409237$$

$$k_{4,1} = h \left[w_{2,0} + k_{3,2} \right] = -0.06315240924$$

و

$$k_{4,2} = h \left[e^{2(t_0+0.1)} \sin(t_0 + 0.1) - 2(u_{1,0} + k_{3,1}) + 2(w_{2,0} + k_{3,2}) \right] = -0.02178637298$$

ومن ثم فإن

$$w_{1,1} = w_{1,0} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}) = -0.4617333423$$

$$w_{2,1} = w_{2,0} + \frac{1}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}) = -0.6316312421 \quad \text{و}$$

القيمة $w_{1,1}$ تقرب $u_1(0.1) = y(0.1) = 0.2e^{2(0.1)}(\sin 0.1 - 2 \cos 0.1)$ والقيمة $w_{2,1}$ تقرب $u_2(0.1) = y'(0.1) = 0.2e^{2(0.1)}(4 \sin 0.1 - 3 \cos 0.1)$

وتوجد مجموعة القيم $w_{1,j}$ و $w_{2,j}$ عند $j = 0, 1, \dots, 10$ باستخدام طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة، وقد عُرضت في جدول (18.5) وقُورنت بالقيم الحقيقية لـ

$$u_1(t) = 0.2e^{2t}(\sin t - 2 \cos t) \quad \text{و} \quad u_2(t) = 0.2e^{2t}(4 \sin t - 3 \cos t)$$

جدول 18.5

$ y'(t_j) - w_{2,j} $	$ y(t_j) - w_{1,j} $	$w_{2,j}$	$y'(t_j) = u_2(t_j)$	$w_{1,j}$	$y(t_j) = u_1(t_j)$	j
0	0	-0.60000000	-0.60000000	-0.40000000	-0.40000000	0
7.75×10^{-7}	3.7×10^{-7}	-0.63163124	-0.6316304	-0.46173334	-0.46173297	1
1.01×10^{-6}	8.3×10^{-7}	-0.64014895	-0.6401478	-0.52555988	-0.52555905	2
8.34×10^{-7}	1.39×10^{-6}	-0.61366381	-0.6136630	-0.58860144	-0.58860005	3
1.79×10^{-7}	2.03×10^{-6}	-0.53658203	-0.5365821	-0.64661231	-0.64661028	4
5.96×10^{-7}	2.71×10^{-6}	-0.38873810	-0.3887395	-0.69356666	-0.69356395	5
7.75×10^{-7}	3.41×10^{-6}	-0.14438087	-0.1443834	-0.72115190	-0.72114849	6
2.03×10^{-6}	4.05×10^{-6}	0.22899702	0.2289917	-0.71815295	-0.71814890	7
5.30×10^{-6}	4.56×10^{-6}	0.77199180	0.7719815	-0.66971133	-0.66970677	8
9.54×10^{-6}	4.76×10^{-6}	1.5347815	1.534764	-0.55644290	-0.55643814	9
1.34×10^{-5}	4.50×10^{-6}	2.5787663	2.578741	-0.35339886	-0.35339436	10

يمكننا أيضاً تطبيق dsolve من Maple على معادلات برتب أعلى. ولتعريف المعادلة التفاضلية في مثال (2)؛ استخدم

في Maple المشتقة اليونانية $y^{(n)}$ محددة بـ $(D@@n)(y)$

```
>def2:=(D@@2)(y)(t)-2*D(y)(t)+2*y(t)=exp(2*t)*sin(t);
```

ولوصف الشروط الابتدائية؛ استخدم

```
>init2:=y(0)=-0.4, D(y)(0)=-0.6;
```

ويستخرج الحل من خلال الأمر

```
>sol2:=dsolve({def2,init2},y(t));
```

لإيجاد

$$\text{sol2} := y(t) = -\frac{2}{5}e^{2t} \cos(t) + \frac{1}{5}e^{2t} \sin(t)$$

ولحصر الحل في صيغة دالة باستخدام

```
>g:=rhs(sol2),
```

ولإيجاد $y(1.0) = g(1.0)$ ، أدخل

```
>evalf(subs(t=1.0,g));
```

الذي يعطي التمهيدية -0.3533943558 .

وطريقة Runge-Kutta-Fehlberg متوفرة أيضاً لمعادلات برتب أعلى من خلال الأمر `dsolve` خيار عددي. ندخل الأمر

```
>g:=dsolve({coef2,init2},y(t),numeric);
```

مع استجابة Maple

```
g := proc(rkf45_x)... end proc
```

```
>g(1.0);
```

ويمكننا تقريب $y(1.0)$ باستخدام الأمر

لنحصل على

$$\left[t = 1.0, y(t) = -0.353394346807534676, \frac{\partial}{\partial t} y(t) = 2.57874665940482072 \right]$$

يمكن توسيع طرائق الخطوة الواحدة الأخرى للنظم بالأسلوب نفسه. وعند توسيع طرائق سيطرة الخطأ مثل طريقة Runge-Kutta-Fehlberg، يجب فحص دقة كل مركبة من الحل العددي $(w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{mj})$. وفي حالة كون أيٍّ من هذه المركبات غير دقيقة، يجب إعادة حساب الحل العددي $(w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{mj})$ برمته.

ويمكن توسيع طرائق متعددة الخطوات وأساليب المتنبئ - المصحح أيضاً للنظم وفي حالة استخدام السيطرة على الخطأ مرة أخرى. فإن كل مركبة يجب أن تكون دقيقة. وإن توسيع أسلوب الاستكمال الخارجي للأنظمة ممكن أيضاً، لكن ستشمل الرموز إلى حد ما. وإذا كان هذا الموضوع يستقطب اهتمامك فانظر [HNW1].

إن نظريات التقارب وتقديرات الخطأ للأنظمة هي نفسها التي تناولناها في الفصل (5.10) لمعادلة مفردة. فضلاً عن أن الحدود معطاة بدلالة صيغ المتجه، وهو الموضوع الذي سنتناوله في الباب السابع. ([Gea1, pp. 45-72] مصدر جيد لهذه النظريات.

مجموعة التمارين 9.5

EXERCISE SET

1. استخدم طريقة Runge-Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأولى. وقارن النتائج بالحلول الحقيقية.

$$\begin{aligned} u_1' &= 3u_1 - 2u_2 - (2t^2 + 1)e^{2t}, & u_1(0) &= 1 \\ u_2' &= 4u_1 - u_2 + (t^2 + 2t - 4)e^{2t}, & u_2(0) &= 1; & 0 \leq t \leq 1; & h = 0.2 \end{aligned}$$

$$u_1(t) = \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} + e^{2t} \quad \text{و} \quad u_2(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} + t^2e^{2t} \quad \text{الحلول الحقيقية}$$

ب.

$$u_1' = -4u_1 - 2u_2 + \cos t + 4 \sin t, \quad u_1(0) = 0$$

$$u_2' = 3u_1 + u_2 - 3 \sin t, \quad u_2(0) = -1; \quad 0 \leq t \leq 2; \quad h = 0.1$$

$$u_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin t \quad \text{و} \quad u_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t} \quad \text{الحلول الحقيقية}$$

$$u_1' = u_2, \quad u_1(0) = 1$$

$$u_2' = -u_1 - 2e^t + 1, \quad u_2(0) = 0$$

$$u_3' = -u_1 - e^t + 1, \quad u_3(0) = 1; \quad 0 \leq t \leq 2; \quad h = 0.5$$

$$\text{و} \quad u_3(t) = -\sin t + \cos t \quad \text{الحلول الحقيقية}$$

$$u_1(t) = \cos t + \sin t - e^t + 1, \quad u_2(t) = -\sin t + \cos t - e^t$$

$$u_1' = u_2 - u_3 + t, \quad u_1(0) = 1$$

$$u_2' = 3t^2, \quad u_2(0) = 1$$

$$u_3' = u_2 + e^{-t}, \quad u_3(0) = -1; \quad 0 \leq t \leq 1; \quad h = 0.1$$

$$\text{و} \quad u_1(t) = -0.05t^5 + 0.25t^4 + t + 2 - e^{-t}, \quad u_2(t) = t^3 + 1 \quad \text{الحلول الحقيقية}$$

$$u_3(t) = 0.25t^4 + t - e^{-t}$$

2. استخدم طريقة Runge-Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأولى. وقارن النتائج بالحلول الحقيقية.

$$u_1' = u_1 - u_2 + 2, \quad u_1(0) = -1$$

$$u_2' = -u_1 + u_2 + 4t, \quad u_2(0) = 0; \quad 0 \leq t \leq 1; \quad h = 0.1$$

$$u_1(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + t^2 + 2t - \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad u_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + t^2 - \frac{1}{2} \quad \text{الحلول الحقيقية}$$

$$u_1' = \frac{1}{9}u_1 - \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{9}t^2 + \frac{2}{3}, \quad u_1(0) = -3$$

$$u_2' = u_2 + 3t - 4, \quad u_2(0) = 5; \quad 0 \leq t \leq 2; \quad h = 0.2$$

$$u_1(t) = -3e^t + t^2 \quad \text{و} \quad u_2(t) = 4e^t - 3t + 1 \quad \text{الحلول الحقيقية}$$

$$u_1' = u_1 + 2u_2 - 2u_3 + e^{-t}, \quad u_1(0) = 3$$

$$u_2' = u_2 + u_3 - 2e^{-t}, \quad u_2(0) = -1$$

$$u_3' = u_1 + 2u_2 + e^{-t}, \quad u_3(0) = 1; \quad 0 \leq t \leq 1; \quad h = 0.1$$

$$u_2(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{10} \sin t - \frac{21}{10} \cos t - \frac{2}{5}e^{2t} \quad \text{و} \quad u_1(t) = -3e^{-t} - 3 \sin t + 6 \cos t$$

$$u_3(t) = -e^{-t} + \frac{12}{5} \cos t + \frac{9}{5} \sin t - \frac{2}{5}e^{2t}$$

$$u_1' = 3u_1 + 2u_2 - u_3 - 1 - 3t - 2 \sin t, \quad u_1(0) = 5$$

$$u_2' = u_1 - 2u_2 + 3u_3 + 6 - t + 2 \sin t + \cos t, \quad u_2(0) = -9$$

$$u_3' = 2u_1 + 4u_3 + 8 - 2t, \quad u_3(0) = -5; \quad 0 \leq t \leq 2; \quad h = 0.2$$

$$u_3(t) = 2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-2t} - 2 \quad \text{الحلول الحقيقية}$$

$$u_1(t) = 2e^{3t} + 3e^{-2t} + 1, \quad u_2(t) = -8e^{-2t} + e^{4t} - 2e^{3t} + \sin t \quad \text{و}$$

3. استخدم خوارزمية Runge-Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأعلى. وقارن النتائج بالحلول الحقيقية.

$$h = 0.1 \quad \text{عند} \quad y'' - 2y' + y = te^t - t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\text{الحلول الحقيقية} \quad y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2$$

$$h = 0.1 \quad \text{عند} \quad t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3 \ln t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$$

$$\text{الحلول الحقيقية} \quad y(t) = \frac{7}{4}t + \frac{1}{2}t^3 \ln t - \frac{3}{4}t^3$$

$$h = 0.2 \quad \text{عند} \quad y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t, \quad 0 \leq t \leq 3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0$$

$$\text{الحلول الحقيقية} \quad y(t) = \frac{43}{36}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{1}{6}te^t$$

د. $t^3 y''' - t^2 y'' + 2ty' - 4y = 5t^3 \ln t + 9t^3$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 3$

مع $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = -t^2 + t \cos(\ln t) + t \sin(\ln t) + t^3 \ln t$

4. استخدم خوارزمية Runge-Kutta للأنظمة لتقريب حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الآتية من الرتبة الأعلى، وقارن النتائج بالحلول الحقيقية:

أ. $h = 0.1$ عند $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = y'(0) = 2$

الحلول الحقيقية $y(t) = 2e^{2t} - e^t + e^{-t}$

ب. $t = 0.2$ عند $t^2 y'' + ty' - 4y = -3t$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 4$, $y'(1) = 3$

الحلول الحقيقية $y(t) = 2t^2 + t + t^{-2}$

ج. $h = 0.2$ عند $y'' + y' - 4y' - 4y = 0$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 9$

الحلول الحقيقية $y(t) = e^{-t} + e^{2t} + e^{-2t}$

د. $h = 0.1$ عند $t^3 y' + t^2 y'' - 2ty' + 2y = 8t^3 - 2$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 8$, $y''(1) = 6$

الحلول الحقيقية $y(t) = 2t - t^{-1} + t^2 + t^3 - 1$

5. غيّر خوارزمية متنبئ-مصصح آدم من الرتبة 4 لإيجاد حلول تقريبية لأنظمة معادلات من الرتبة أولى.

6. كرّر التمرين (2) مستخدماً الخوارزمية التي طوّرت في التمرين (5).

7. كرّر التمرين (1) مستخدماً الخوارزمية التي طوّرت في التمرين (5).

8. افترض أن الرقاص الموضح في المثال السابق لهذا الفصل بطول 2 ft وأن $g = 32.17 \text{ ft/s}^2$ مع $h = 0.1 \text{ s}$. قارن الزاوية θ الناتجة من مسألتي القيمة الابتدائية الآتيتين عند $t = 0$ ، و $t = 2$

أ. $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$, $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$, $\theta'(0) = 0$

ب. $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$, $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$, $\theta'(0) = 0$

9. إن دراسة النماذج الرياضية للتنبؤ بديناميكية مجتمع تنافس الأنواع لها صلة بعمال مستقلة نُشرت في بدايات هذا القرن من قبل V. Volterra و A.J. Lotka. لنأخذ مسألة اتنبؤ بمجتمع من نوعين، أحدهما من النوع المفترس وحجم مجتمعه في الزمن t هو $x_2(t)$ ، وبقوات على النوع الآخر الذي هو الفريسة، وحجم مجتمعه $x_1(t)$. سنفترض توفر ما يكفي من اقوت لتتقات الفريسة عليه، وأن معدل تولده عند أي زمن يتناسب مع حجم المجتمع الحي في ذلك الوقت ويساوي $k_1 x_1(t)$. ويعتمد معدل وفيات الفريسة على عددها وعدد المفترسين الأحياء في ذلك الوقت. وللتبسيط، لنفترض أن معدل وفيات الفريسة هو $k_2 x_1(t) x_2(t)$ ، ومن جانب آخر يعتمد معدل ولادات المفترس على إمدادات الغذاء $x_1(t)$ ، بالإضافة إلى عدد المفترسين المتاح لأغراض التوالد. لذا نفترض أن معدل ولادات المفترس هو $k_3 x_1(t) x_2(t)$ ، ومعدل وفيات المفترس سوف يكون متناسباً مع عدد المفترسين الأحياء في زمن معين يساوي $k_4 x_2(t)$. ولما كان $x_2(t)$ و $x_1(t)$ يمثلان التغير في مجتمعي الفريسة والمفترس على التوالي نسبة إلى الزمن، فإن المسألة يمكن وضعها على صورة نظام معادلات تفاضلية لاختطية

$$x_1'(t) = k_1 x_1(t) - k_2 x_1(t) x_2(t) \quad \text{و} \quad x_2'(t) = k_3 x_1(t) x_2(t) - k_4 x_2(t)$$

حلّ هذا النظام لـ $0 \leq t \leq 4$ مفترضاً أن المجتمع الابتدائي للفريسة هو 1000 والمفترس 500، والنواتج هي $k_1 = 3$, $k_2 = 0.002$, $k_3 = 0.0006$, $k_4 = 0.5$. ارسم رسماً بيانياً لحلول هذه المسألة، ورسماً يعيّن للمجتمعين مع الزمن، ووضح الظاهرة الفيزيائية المثلة. وهل هناك حل مستقر لنموذج اجتماع هذا؟ وإذا كان كذلك فلأي قيم x_1 و x_2 يكون الحل مستقرًا؟

10. في التمرين (9) افترضنا مسألة التنبؤ للمجتمع في نموذج المفترس-الفريسة. وإن مسألة أخرى

من هذا النوع تأخذ في الحسبان تنافس النوعين على نفس كمية الغذاء. فإذا كانت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ترمزان إلى عدد الأحياء من النوعين عند الزمن t فإنه غالباً ما يفترض الآتي: على الرغم من أن معدل الولادات لكل نوع يتناسب مع عدد الأحياء من ذلك النوع عند ذلك الزمن، إلا أن معدل الوفيات لكل نوع يتناسب مع مجموع كلا النوعين. سنفترض أن مجتمع زوج معين من الأنواع موضح في المعادلتين

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)[4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t)]$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)[2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)] \quad \text{و}$$

فإذا كان معروفاً أن المجتمع الابتدائي لكل نوع هو 10000 فأوجد حلاً لهذا النظام $0 \leq t \leq 4$. هل هناك حل مستقر لنموذج المجتمع هذا؟ وإذا كان كذلك فلأي قيم x_1 و x_2 يكون الحل مستقرًا؟

Stability

10.5 الاستقرار

تناولنا عدداً من الطرائق ضمن هذا الباب لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية. وعلى الرغم من توفر العديد من الأساليب الأخرى، إلا أننا اخترنا الطرائق المبينة هنا، لأنها تحقق ثلاثة معايير عموماً:

- إن تكوينها عملية واضحة على نحو كافٍ لجعلك تفهم كيف تعمل. ولماذا.
- واحدة أو أكثر من هذه الطرائق ستعطي نتائج وافية لغالبية المسائل التي تواجه الطلبة في العلوم والهندسة.
- تستند غالبية الأساليب الأكثر تقدماً وتعقيداً إلى واحدة أو مجموعة من العمليات الموضحة هنا. ناقش في هذا الفصل لماذا تعطي هذه الطرائق نتائج وافية، حيث إن بعض الطرائق الأخرى المماثلة ليست كذلك.

وقبل بدء نقاشنا هذا، نحتاج إلى عرض تعريفين متعلقين بتقارب طرائق معادلة الفرق بخطوة واحدة لحل المعادلة التفاضلية مع تناقص سعة الخطوة.

نقول إن طريقة معادلة الفرق بخطوة واحدة مع خطأ قطع محلي $\tau_i(h)$ عند الخطوة i نقول متسقة مع المعادلة التفاضلية التي تقربها إذا كان

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} |\tau_i(h)| = 0$$

انظر أن هذا التعريف هو تعريف محلي؛ لأننا نفترض لكل من القيم $\tau_i(h)$ أن التقريب w_{i-1} والحل الصحيح $y(t_{i-1})$ هما نفس الشيء. وتكمن السبل الأخرى الواقعية لتحليل الآثار الناتجة عن جعل h صغيرة في تحديد الأثر الكلي للطريقة. وهذا الأثر هو أكبر خطأ للطريقة خلال كامل مدى التقريب، مقترضين فقط أن الطريقة تعطي التمهيدية الصحيحة عند القيمة الابتدائية.

يقال إن طريقة معادلة الفرق بخطوة واحدة متقاربة نسبة إلى المعادلة التفاضلية التي تقربها إذا كان

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} |w_i - y(t_i)| = 0$$

حيث يمثل $y_i = y(t_i)$ القيمة الصحيحة لحل المعادلة التفاضلية و w_i هو التقريب المستخرج من طريقة الفرق عند الخطوة i .

تعريف 18.5

طريقة الخطوة الواحدة تكون ثابتة عند تكون معادلة الفرق للطريقة تقرب من المعادلة التفاضلية مع اقتراب حجم الخطوة لمصفر

تعريف 19.5

تكون الطريقة تقاربية عندما يقترب حل معادلة الفرق من حل معادلة التفاضلية مع اقتراب حجم الخطوة للمصفر.

ومن خلال فحص المتباينة (10.5) من الفصل (2.5) بصيغة حد الخطأ لطريقة Euler، يمكننا التوهم إنه في ظل فرضيات البرهنة (9.5) يكون

$$\max_{1 \leq i \leq N} |w_i - y(t_i)| \leq \frac{Mh}{2L} |e^{L(b-a)} - 1|$$

وبذلك فإن طريقة Euler متقاربة بالنسبة إلى معادلة تفاضلية تحقق شروط هذا التعريف، ومعدل التقارب هو $O(h)$.

إن الطريقة المتسقة بخطوة واحدة تمتاز باقتراب معادلة الفرق لهذه الطريقة من المعادلة التفاضلية عندما تقترب سعة الخطوة إلى الصفر. لذا فإن خطأ القطع المحلي لطريقة متسقة يقترب إلى الصفر مع اقتراب سعة الخطوة من الصفر.

أما النوع الآخر من حد الخطأ لمسألة ما تظهر عند استخدام طرائق الفرق لتقريب حلول المعادلات التفاضلية فإنه ناتج عن عدم استخدام نتائج صحيحة. في التطبيق العملي، لا اشترط الابتدائية ولا العمليات الحسابية المتتبعه بعد ذلك تكون ممثلة بدقة بسبب خطأ التدوير المرتبط بالعمليات الحسابية محدودة المواقع العشرية. ولقد رأينا في الفصل (2.5) أن هذا الافتراض يمكن أن يؤدي إلى مصاعب حتى مع طريقة Euler المتقاربة. ولتحليل هذه الحالة جزئياً، سنحاول تحديد أي الطرائق مستقرة، لكون تغييرات أو تشويشات صغيرة في الشروط الابتدائية تنتج في المقابل تغييرات صغيرة في التقريبات التي تلي ذلك.

ولأن الأساس في استقرارية معادلة الفرق بخطوة واحدة يكون إلى حد ما مماثلاً لشروط المعتدلة التفاضلية الجيدة التقديم، فإنه ليس بمستغرب أن يظهر شرط Lipschitz هنا، كما حدث في البرهنة المقابلة للمعادلات التفاضلية، البرهنة (6.5).

إن الجزء (i) من البرهنة التالية يأخذ في الحسبان استقرارية طريقة الخطوة لواحدة، وبرهن هذه التمهيدية ليس صعباً وقد أخذ في الحسبان في التمرين (1). والجزء (ii) من البرهنة (20.5) يتضمن شروطاً وافية لطريقة متسقة لكي تكون متقاربة. ويبرر الجزء (iii) الملاحظة التي ظهرت في الفصل (5.5) حول السيطرة على الخطأ التام لطريقة ما من خلال السيطرة على خطأ القطع المحلي له. الذي يؤدي إلى أنه حينما يكون للخطأ بالقطع المحلي معدل تقارب $O(h^2)$ فسيكون للخطأ الكلي نفس معدل التقارب. وإن برهان الجزأين (ii) و (iii) أكثر صعوبة من الجزء (i)، ويمكن إيجاده ضمن موضوع عرض في [Geal, pp. 57-58].

لنفترض أن مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

تم تقريبها بطريقة الفرق بخطوة واحدة بالصيغة

$$w_0 = \alpha, \quad w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h)$$

لنفترض أيضاً وجود $h_0 > 0$ ، وأن $\phi(t, w, h)$ متصلة، وتحقق شرط Lipschitz في المتغير u مع ثابت L على المجموعة

$$D = \{(t, w, h) \mid a \leq t \leq b, -\infty < w < \infty, 0 \leq h \leq h_0\}$$

عندئذ

(i) الطريقة مستقرة.

(ii) طريقة الفرق متقاربة إذا فقط إذا كانت متسقة. وتكافئ

الطريقة المستقرة هي التي تعتمد نتائجها باستمرار على البيانات الابتدائية.

مبرهنة 20.5

$$a \leq t \leq b \text{ لكل } \phi(t, y, 0) = f(t, y)$$

(iii) إذا كانت الدالة τ موجودة، ولكل $i = 1, 2, \dots, N$ يكون خطأ القطع المحلي $\tau_i(h)$ محققاً $|\tau_i(h)| \leq \tau(h)$ ، حيث $0 \leq h \leq h_0$ فإن

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{\tau(h)}{L} e^{L(t_i - a)}$$

افتراض طريقة Modified Euler المعطاة من خلال **مثال 1**

$$w_0 = \alpha, \quad w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} [f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))]$$

عند $i = 0, 1, \dots, N-1$ سنتحقق من أن هذه الطريقة hypothesis تحقق فرضية البرهنة (20.5). ولهذه الطريقة

$$\phi(t, w, h) = \frac{1}{2} f(t, w) + \frac{1}{2} f(t+h, w + hf(t, w))$$

إذا كانت f تحقق شرط Lipschitz على $\{(t, w) \mid a \leq t \leq b, -\infty < w < \infty\}$ في المتغير w مع ثابت L فإن

$$\begin{aligned} \phi(t, w, h) - \phi(t, \bar{w}, h) &= \frac{1}{2} f(t, w) + \frac{1}{2} f(t+h, w + hf(t, w)) \\ &\quad - \frac{1}{2} f(t, \bar{w}) - \frac{1}{2} f(t+h, \bar{w} + hf(t, \bar{w})) \end{aligned}$$

وإن شرط Lipschitz على f يؤدي إلى

$$\begin{aligned} |\phi(t, w, h) - \phi(t, \bar{w}, h)| &\leq \frac{1}{2} L |w - \bar{w}| + \frac{1}{2} L |w + hf(t, w) - \bar{w} - hf(t, \bar{w})| \\ &\leq L |w - \bar{w}| + \frac{1}{2} L |hf(t, w) - hf(t, \bar{w})| \\ &\leq L |w - \bar{w}| + \frac{1}{2} h L^2 |w - \bar{w}| \\ &= (L + \frac{1}{2} h L^2) |w - \bar{w}|. \end{aligned}$$

لذا فإن ϕ تحقق شرط Lipschitz في w على المجموعة

$$\{(t, w, h) \mid a \leq t \leq b, -\infty < w < \infty, 0 \leq h \leq h_0\}$$

ولأي $h_0 > 0$ مع ثابت

$$L' = L + \frac{1}{2} h_0 L^2$$

وأخيراً إذا كانت f متصلة على $\{(t, w) \mid a \leq t \leq b, -\infty < w < \infty\}$ ، فإن ϕ متصلة على

$$\{(t, w, h) \mid a \leq t \leq b, -\infty < w < \infty, 0 \leq h \leq h_0\}$$

ومن ثم فالبرهنة (20.5) تؤدي إلى أن طريقة Modified Euler متسقة. وبوضع $h = 0$ ، يكون

$$\phi(t, w, 0) = \frac{1}{2} f(t, w) + \frac{1}{2} f(t+0, w+0 \cdot f(t, w)) = f(t, w) \text{ لدينا}$$

ولذا فإن شرط الاتساق المنوّه عنه في الجزء (ii) من البرهنة (20.5) يتحقق، وبذلك فالطريقة متقاربة. والأكثر من ذلك لاحظنا أن خطأ القطع المحلي لهذه الطريقة يكون $O(h^2)$ ، ولذلك فإن $O(h^2)$ تقارب طريقة Modified Euler هو أيضاً $O(h^2)$.

أما الطرائق المتعددة الخطوات، فإن المسائل ذات العلاقة بالاتساق، والاستمرارية، والاستقرار تكون مركبة بسبب عدد التقريبات الداخلة في كل خطوة. ونجد في طرائق الخطوة الواحدة أن التقريب w_{i+1} يعتمد مباشرة على التقريب السابق w_i ، حيث تستخدم طرائق متعددة الخطوات على الأقل اثنين من التقريبات السابقة، وتتضمن الطرائق الاعتيادية المطبقة أكثر من ذلك. ويمكن كتابة الطريقة المتعددة الخطوات العامة لتقريب حل معادلة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha \quad (53.5)$$

بالصيغة

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

$$\tau_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \dots + a_0w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \dots, w_{i+1-m}), \quad (54.5)$$

لكل من $i = m-1, m, \dots, N-1$ حيث إن a_0, a_1, \dots, a_{m-1} ثوابت و $h = (b-a)/N$ كالعادة و $t_i = a + ih$

إن خطأ القطع المحلي للطريقة المتعددة الخطوات وفقاً لهذه الصيغة يكون

$$\tau_{i-1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - a_{m-1}y(t_i) - \dots - a_0y(t_{i+1-m})}{h} - F(t_i, h, y(t_{i+1}), y(t_i), \dots, y(t_{i+1-m})),$$

لكل من $i = m-1, m, \dots, N-1$ وكما في طريقة الخطوة الواحدة، فإن خطأ القطع المحلي يقيس فشل الحل y للمعادلة التفاضلية في تحقيق معادلة الفرق.

لقد لاحظنا في طريقة Adams-Bashforth بأربع خطوات أن

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{251}{720}y^{(6)}(\mu_i)h^4$$

أما الطريقة Adams-Moulton بثلاث خطوات فلها

$$\tau_{i+1}(h) = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\mu_i)h^4$$

مع تحقق كون $y \in C^5[a, b]$ على أي حال.

ومن خلال التحليل، افترضنا افتراضين يتعلقان بالدالة F :

1. إذا كان $f \equiv 0$ (بمعنى أنه إذا كانت المعادلة التفاضلية متجانسة)، فإن $f \equiv 0$ أيضاً.

2. تحقق F شرط Lipschitz بالنسبة إلى $\{w_j\}$ ، في ضوء وجود الثابت L ، وأنه لكل من أزواج

المتتاليات $\{v_j\}_{j=0}^N$ و $\{\bar{v}_j\}_{j=0}^N$ ، وعند $i = m-1, m, \dots, N-1$ ، يكون لدينا

$$|F(t_i, h, v_{i+1}, \dots, v_{i+1-m}) - F(t_i, h, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_{i+1-m})| \leq L \sum_{j=0}^m |v_{i+1-j} - \bar{v}_{i+1-j}|$$

إن طرائق Adams-Bashforth الواضحة و Adams-Moulton الضمنية تحقق كلا الشرطين.

مفترضين أن f تحقق شرط Lipschitz. (انظر التمرين 2).

إن مفهوم تقارب الطرائق متعددة الخطوات هو نفسه في طرائق الخطوة الواحدة والطرائق متعددة الخطوات متقاربة إذا كان حل معادلة الفرق يقترب من حل المعادلة التفاضلية كلما اقتربت سعة الخطوة من الصفر. معنى ذلك أن $\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} |w_i - y(t_i)| = 0$ وبالنسبة إلى الاتساق، فهناك حالة مختلفة قليلاً. ومرةً أخرى نريد للطريقة المتعددة الخطوات أن تكون متسقة على أن تقترب معادلة الفرق من المعادلة التفاضلية كلما اقتربت سعة الخطوة من الصفر، بمعنى أن خطأ القطع المحلي يقترب من الصفر كلما اقتربت سعة الخطوة منه. ويظهر الشرط الخارجي هنا بسبب عدد نقاط البداية التي تتطلبها الطرائق متعددة الخطوات. ولأن قيمة البداية الأولى $w_0 = \alpha$ فقط تكون موجودة عادةً، فإننا نحتاج - كمتطلب - إلى اقتراب الأخطاء في قيم البداية $\{\alpha_i\}$ جميعها من الصفر كلما اقتربت سعة الخطوة منه. ولذلك فإن كلاً من:

$$i = m, m+1, \dots, N \quad \text{لكل} \quad \lim_{h \rightarrow 0} |\tau_i(h)| = 0 \quad (55.5)$$

و

$$i = 1, 2, \dots, m-1 \quad \text{لكل} \quad \lim_{h \rightarrow 0} |\alpha_i - y(t_i)| = 0 \quad (56.5)$$

يجب أن تكون صحيحة. لكي تكون الطريقة متعددة الخطوات بصيغة المعادلة (54.5) متسقة. انظر إلى المعادلة (56.5) التي تشير إلى أن الطريقة المتعددة الخطوات لن تكون متسقة ما لم تكن طريقة الخطوة الواحدة التي تولد قيم البداية متسقة أيضاً.

وإن المبرهنة التالية للطرائق المتعددة الخطوات مشابهة للمبرهنة (20.5) الجزء (iii). وتعطي علاقة ما بين خطأ القطع المحلي والخطأ التام لطريقة متعددة الخطوات. إنها تعطي التبرير النظري لمحاولة السيطرة على الخطأ التام من خلال السيطرة على خطأ القطع المحلي. ويمكن إيجاد برهان صيغة لهذه المبرهنة أعم قليلاً في [IK, pp. 387-388].

لنفترض أنه تم تقريب مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

بطريقة متنبئ - مصحح آدمز الواضحة مع معادلة متنبئ Adams-Bashforth في m من

$$w_{i+1} = w_i + h[b_{m-1}f(t_i, w_i) + \dots + b_0f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})] \quad \text{الخطوات}$$

بخطأ قطع محلي $\tau_{i+1}(h)$ ومعادلة المصحح Adams-Moulton الضمنية في $(m-1)$ من الخطوات

$$w_{i+1} = w_i + h[\bar{b}_{m-1}f(t_i, w_{i+1}) + \bar{b}_{m-2}f(t_i, w_i) + \dots + \bar{b}_0f(t_{i+2-m}, w_{i+2-m})]$$

بخطأ قطع محلي $\bar{\tau}_{i+1}(h)$. بالإضافة إلى ذلك لنفترض أن $f(t, y)$ و $f_y(t, y)$ متصلان على $D = (t, y) | a \leq t \leq b$ و $-\infty < y < \infty$ ، وأن f_y محددة، لذا فإن خطأ القطع المحلي

$\sigma_{i+1}(h)$ لطريقة متنبئ - مصحح هو

$$\sigma_{i+1}(h) = \bar{\tau}_{i+1}(h) + \tau_{i+1}\bar{b}_{m-1}\frac{\partial f}{\partial y}(t_{i+1}, \theta_{i+1})$$

مبرهنة 21.5

حيث إن θ_{i+1} عبارة عن عدد ما بين الصفر و $h\tau_{i+1}(h)$ بالإضافة إلى ذلك يوجد ثابتان k_1 و k_2 بحيث

$$|w_i - y(t_i)| \leq \left[\max_{0 \leq j \leq m-1} |w_j - y(t_j)| + k_1 \sigma(h) \right] e^{k_2 t_i - a}$$

حيث إن $\sigma(h) = \max_{m \leq j \leq N} |\sigma_j(h)|$.

وقبل مناقشة الروابط ما بين الاتساق، والتقارب، واستقرارية الطرائق المتعددة الخطوات، علينا أن نأخذ في الحسبان تفصيلات أكثر لمعادلة الفرق للطريقة متعددة الخطوات. وبذلك سنكتشف سبب اختيار طرائق Adams بمثابة الطرائق المتعددة الخطوات المعيارية المعتمدة. وبالربط بمعادلة الفرق (54.5) المعطاة في بداية هذا النقاش، فإن

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \dots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

$$w_{i+1} = c_m w_i - a_{m-2} w_{i-1} + \dots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \dots, w_{i+1-m})$$

كثيرة حدود، وتسمى كثيرة حدود الميزة Characteristic polynomial للطريقة، ويكون

$$P(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1} \lambda^{m-1} - a_{m-2} \lambda^{m-2} - \dots - a_1 \lambda - a_0 \quad (57.5)$$

إن استقرارية الطريقة المتعددة الخطوات بالنسبة إلى خطأ التدوير تكون مختلفة من حيث مقادير الأصفار لكثيرة حدود الميزة. ولكي نرى ذلك، افترض تطبيق الطريقة المتعددة الخطوات المعيارية في المعادلة (54.5) لمسألة القيمة الابتدائية الاعتيادية

$$y' = 0, \quad y(a) = \alpha \quad (58.5)$$

لهذه المسألة حل صحيح $y(t) \equiv \alpha$. ومن خلال فحص المعادلتين (26.5) و (27.5) في الفصل (6.5)

نستطيع أن نرى بأن أي طريقة المتعددة الخطوات سوف تنتج نظرياً الحل الصحيح $w_n = \alpha$ لك

قيم n . الانحراف الوحيد عن الحل الصحيح هو تمهيدية خطأ التدوير للطريقة

الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية في (58.5) له $f(t, y) \equiv 0$. ولذلك من خلال الافتراض (1)

يكون لدينا $F(t_i, h, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_{i+1-m}) = 0$ في معادلة الفرق (54.5). وتمهيدية لتلك

تصبح الصيغة المعيارية لمعادلة الفرق

$$w_{i+1} = a_{m-1} w_i + a_{m-2} w_{i-1} + \dots + a_0 w_{i+1-m} \quad (59.5)$$

لنفترض أن λ أحد أصفار كثيرة حدود الميزة المرتبطة بالمعادلة (54.5). لذا فإن $w_i = \lambda^i$ وكل

هو حل للمعادلة (59.5)، لأن

$$\lambda^{i+1} - a_{m-1} \lambda^i - a_{m-2} \lambda^{i-1} - \dots - a_0 \lambda^{i+1-m} = \lambda^{i+1-m} [\lambda^m - a_{m-1} \lambda^{m-1} - \dots - a_0] = 0$$

وفي الحقيقة إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ أصفاراً مختلفة لكثيرة حدود الميزة لمعادلة (54.5)

فمن الممكن ملاحظة أن كل حل للمعادلة (59.5) يمكن وضعه بالصيغة

$$w_n = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i^n \quad (60.5)$$

لمجموعة وحيدة من الثوابت c_1, c_2, \dots, c_m .

ولما كان الحل الصحيح للمعادلة (58.5) هو $y(t) = \alpha$. فإن اختيار $w_n = \alpha$ لقيه n كلها هو حل

للمعادلة (59.5). وباستخدام هذه الحقيقة في المعادلة (59.5) نحصل على

$$0 = \alpha - \alpha a_{m-1} - \alpha a_{m-2} - \dots - \alpha a_0 = \alpha (1 - a_{m-1} - a_{m-2} - \dots - a_0)$$

هذا يشير إلى أن $\lambda = 1$ هو أحد أصفار كثيرة حدود الميزة (57.5). سنفترض توضيح الحل في التمثيل (60.5) من خلال $\lambda_1 = 1$ و $c_1 = \alpha$. ولذلك فإن كل حلول المعادلة (59.5) يعبر عنها بالصيغة

$$w_n = \alpha + \sum_{i=2}^m c_i \lambda_i^n \quad (61.5)$$

فإذا كانت الحسابات جميعها صحيحة فستكون أصفاراً. وفي التطبيق العملي لا تكون الثوابت c_2, c_3, \dots, c_m أصفاراً؛ بسبب خطأ التدوير. وخطأ التدوير في الحقيقة ينمو أسياً ما لم يكن $|\lambda_i| \leq 1$ للجدور c_2, c_3, \dots, c_m جميعها. وكلما كانت قيم هذه الجذور صغيرة $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ زادت استقرارية الطريقة بالنسبة إلى نمو خطأ التدوير.

عند اشتقاق المعادلة (61.5) افترضنا افتراضاً تبسيطياً بأن أصفار كثيرة حدود الميزة مختلفة. والحالة k مماثلة عندما تظهر أصفار متعددة. وعلى سبيل المثال إذا كان $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+p}$ لقيم k و p المعينة، فإن ذلك يتطلب استبدال المجموع

$$c_k \lambda_k^n + c_{k+1} \lambda_{k+1}^n + \dots + c_{k+p} \lambda_{k+p}^n$$

في المعادلة (61.5) بالمقدار

$$c_k \lambda_k^n + c_{k+1} n \lambda_k^{n-1} + c_{k+2} n(n-1) \lambda_k^{n-2} + \dots + c_{k+p} [n(n-1) \dots (n-p+1)] \lambda_k^{n-p} \quad (62.5)$$

(انظر [He2, pp. 119–145]) وعلى الرغم من تعديل صيغة الحل، إلا أن خطأ التدوير يستمر في النمو أسياً إذا كان $|\lambda_k| > 1$.

وعلى الرغم من أننا افترضنا الحالة الخاصة فقط لتقريب مسائل القيمة الابتدائية بصيغة المعادلة (58.5). إلا أن سمات استقرارية هذه المعادلة تحدد استقرارية الحالة عندما لا تكون $f(t, y)$ صفراً بالتحديد، وهذا بسبب كون حل المعادلة المتجانسة (58.5) جزءاً من حل أي معادلة. وقد صيغت التعريفات الآتية من خلال هذا النقاش.

تعريف 22.5 لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ جذور المعادلة الميزة (ليس بالضرورة أن تكون مختلفة).

$$P(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1} \lambda^{m-1} - \dots - a_1 \lambda - a_0 = 0$$

المرتبطة بطريقة الفرق متعددة الخطوات

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

$$w_{i+1} = a_{m-1} w_i + a_{m-2} w_{i-1} + \dots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \dots, w_{i+1-m})$$

فإذا كانت $|\lambda_i| \leq 1$ لكل من $i = 1, 2, \dots, m$ والجذور جميعها ذات القيمة المطلقة 1 هي جذور بسيطة، فإن طريقة الفرق توصف بأنها تحقق شرط الجذر root condition.

(i) الطرائق التي تحقق شرط الجذر وفيها $\lambda = 1$ بمنزلة الجذر الوحيد للمعادلة الميزة بقيمة 1

تسمى مستقرة بقوة strongly stable.

مبرهنة 23.5

(ii) الطرائق التي تحقق شرط الجذر ولها أكثر من جذر واحد مختلف بقيمة 1 تسمى مستقرة بضعف weakly stable.

(iii) الطرائق التي لا تحقق شرط الجذر تسمى غير مستقرة unstable. الاتساق والتقارب للطريقة متعددة الخطوات مرتبطان باستقرارية التدوير بطريقة. تعطي المبرهنة الآتية تفصيلاً لهذه الارتباطات. ولبرهنة هذه النتائج والمبرهنة المستندة إليها، انظر [IK, pp. 410–417].

الطريقة المتعددة الخطوات بالصيغة مبرهنة 24.5

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

حيث إن

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \dots + a_0w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \dots, w_{i+1-m})$$

مستقرة إذا وفقط إذا تحقق شرط الجذر. والأكثر من ذلك، إذا كانت طريقة امخرق متسقة مع المعادلة التفاضلية، فإن الطريقة مستقرة إذا وكانت متقاربة.

قد لاحظنا أن طريقة Adams–Bashforth من الرتبة الرابعة يمكن وضعها بالصيغة مثال 2

$$w_{i+1} = w_i + hF(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \dots, w_{i-3})$$

حيث إن

$$F(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \dots, w_{i-3}) = \frac{h}{24} [55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

وبذلك فإن $m = 4$ ، $a_0 = 0$ ، $a_1 = 0$ ، $a_2 = 0$ ، $a_3 = 1$

إن المعادلة المميزة لطريقة Adams–Bashforth هذه تعطينا

$$0 = P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 1)$$

التي لها جذور $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 0$ ، $\lambda_3 = 0$ ، $\lambda_4 = 0$ ، وإنها تحقق شرط الجذر ومستقرة بقوة. ولطريقة Adams–Bashforth نفس كثيرة حدود المميزة $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2$ مع أصفار $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 0$ ، $\lambda_3 = 0$ ، وإنها أيضاً مستقرة بقوة.

إن الطريقة متعددة الخطوات الواضحة المعطاة من خلال مثال 3

$$w_{i-1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3} [2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

قد تناولناها في الفصل (5.6) على أنها طريقة Milne من الرتبة رابعة. وحيث إن المعادلة المميزة لهذه الطريقة $P(\lambda) = \lambda^4 - 1 = 0$ لها أربعة جذور بقيمة $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = -1$ ، $\lambda_3 = i$ ، $\lambda_4 = -i$ فإن الطريقة تحقق شرط الجذر، لكنها فقط مستقرة بضعف. افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -6y + 6, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 2$$

التي لها حل صحيح $y(t) = 1 + e^{-6t}$. ولأغراض المقارنة فإن طريقة Adams–Bashforth من الرتبة الرابعة والمستقرة بقوة وطريقة Milne المستقرة بضعف تُستخدمان في تقريب حل هذه المسألة عند $h = 0.1$ مع قيم بداية صحيحة. وتبين النتائج في جدول (19.5) تأثيرات الطريقة المستقرة بضعف لهذه المسألة مقابل الطريقة المستقرة بقوة.

جدول 19.5

الخطأ	طريقة مالين	الخطأ	طريقة آدمز - باشفورت	الصحيحة	
$ y_i - w_i $	w_i	$ y_i - w_i $	w_i	$y(t_i)$	t_i
	1.5488116		1.5488116		0.10000000
	1.3011942		1.3011942		0.20000000
	1.1652989		1.1652989		0.30000000
7.661×10^{-3}	1.0983785	8.906×10^{-3}	1.0996236	1.0907180	0.40000000
8.053×10^{-3}	1.0417344	1.548×10^{-3}	1.0513350	1.0497871	0.50000000
2.132×10^{-2}	1.0486438	1.524×10^{-2}	1.0425614	1.0273237	0.60000000
5.154×10^{-2}	0.9634506	1.020×10^{-2}	1.0047990	1.0149956	0.70000000
1.208×10^{-1}	1.1289977	2.768×10^{-2}	1.0359090	1.0082297	0.80000000
2.762×10^{-1}	0.7282684	3.872×10^{-2}	0.9657936	1.0045166	0.90000000
6.426×10^{-1}	1.6450917	6.845×10^{-2}	1.0709304	1.0024788	1.00000000

إن سبب اختيارنا Adams–Bashforth–Moulton ليكون أسلوب التنبئ - المصحح المعياري من الرتبة الرابعة، الذي نعتمده في الفصل (6.5) والمقدم على طريقة Milne–Simpson بنفس الرتبة هو أن كلاً من طريقتي Adams–Bashforth و Adams–Moulton مستقرة بقوة. وهما أكثر احتمالاً لإعطاء تقريبات دقيقة لصنف أوسع من المسائل مقارنة بالتنبئ - المصحح المستند إلى أساليب Milne و Simpson. حيث إن كلاً منهما مستقر بضعف.

EXERCISE SET

مجموعة التمرين 10.5

1. لبرهنة المبرهنة (20.5) الفقرة (i)، أثبت أن الفرضيات تؤدي إلى وجود ثابت $K > 0$ بحيث

$$|u_i - v_i| \leq K|u_0 - v_0| \quad \text{لكل } 1 \leq i \leq N$$

متى ما حققت $\{u_i\}_{i=1}^N$ و $\{v_i\}_{i=1}^N$ معادلة الفرق $u_{i+1} = u_i + h\phi(t_i, u_i, h)$

2. لكل من طريقتي Adams–Bashforth و Adams–Moulton من الرتبة الرابعة

أ. أثبت أنه إذا كانت $f = 0$ فإن

$$F(t_i, h, w_{i+1}, \dots, w_{i+1-m}) = 0$$

ب. أثبت أنه إذا كانت f تحقق شرط Lipschitz بثابت L فإن ثابت C موجود مع

$$|F(t_i, h, w_{i+1}, \dots, w_{i+1-m}) - F(t_i, h, v_{i+1}, \dots, v_{i+1-m})| \leq C \sum_{j=0}^m |w_{i+1-j} - v_{i+1-j}|$$

3. استخدم نتائج التمرين (31) في الفصل (4.5) لإثبات أن طريقة Runge–Kutta من الرتبة الرابعة المتسقة.

4. افترض المعادلة التفاضلية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = a$$

أ. أثبت أن

$$y'(t_i) = \frac{-3y(t_i) + 4y(t_{i+1}) - y(t_{i-2}))}{2h} + \frac{h^2}{3} y'''(\xi_i)$$

لـ ξ_i معينة، حيث $t_i < \xi_i < t_{i+2}$

ب. تقترح الفقرة (أ) طريقة الفرق الآتية:

$$i = 0, 1, \dots, N-2 \quad \text{لكل} \quad w_{i+2} = 4w_{i+1} - 3w_i - 2hf(t_i, w_i)$$

استخدم هذه الطريقة لحل المسألة

$$y' = 1 - y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0$$

مع $h = 0.1$. استخدم قيم البداية $w_0 = 0$ و $w_1 = y(t_1) = 1 - e^{-0.1}$

ج. كرر الفقرة (ب) مع $h = 0.01$ و $w_1 = 1 - e^{-0.01}$

د. حلل هذه الطريقة بالنسبة إلى الاتساق، الاستقرار، والتقارب.

5. لنفترض طريقة متعددة الخطوات

$$i = 2, \dots, N-1 \quad \text{لكل} \quad w_{i+1} = -\frac{3}{2}w_i + 3w_{i-1} - \frac{1}{2}w_{i-2} + 3hf(t_i, w_i)$$

مع قيم بداية w_0, w_1, w_2 :

أ. أوجد خطأ القطع المحلي.

ب. علق على حالات الاتساق، الاستقرار، والتقارب.

6. أوجد حلاً تقريبياً للمعادلة التفاضلية

$$y' = -y, \quad 0 \leq t \leq 10, \quad y(0) = 1$$

مستخدمًا طريقة Milne مع $h = 0.1$ ، ثم مع $h = 0.01$ ، وقيم بداية $w_0 = 1$ و $w_1 = e^{-h}$ للحالتين.

كيف يظهر تأثير انخفاض h من 0.1 إلى 0.01 في عدد الخانات الصحيحة في تقريب الحلول عند $t = 1$ و $t = 10$ ؟

7. تحقق من استقرارية طريقة الفرق

$$w_{i+1} = -4w_i + 5w_{i-1} + 2h[f(t_i, w_i) + 2hf(t_{i-1}, w_{i-1})]$$

عند $i = 1, 2, \dots, N-1$ مع قيم بداية w_0, w_1 .

8. افترض المسألة $y' = 0, 0 \leq t \leq 10, y(0) = 0$ التي لها حل $y \equiv 0$. فإننا كانت طريقة الفرق

في التمرين (4) هي المطبقة على المسألة فإن

$$i = 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{لكل} \quad w_{i+1} = 4w_i - 3w_{i-1}$$

$$w_1 = \alpha_1 \quad \text{و} \quad w_0 = 0$$

افترض $w_1 = \alpha_1 = \varepsilon$ ، حيث إن ε خطأ تدوير صغير. احسب w_i بدقة عند $i = 2, 3, \dots, 6$ للوقوف على كيفية تضخم الخطأ ε .

11.5 المعادلات التفاضلية الشديدة Stiff Differential Equations

للطرائق المستخدمة في تقريب حل مسائل القيمة الابتدائية حدود خطأ تتضمن مشتقة عالية لحل المعادلة. فإذا كان بالإمكان وضع حدود معقولة للمشتقة فإن الطريقة سيكون لها حد خطأ متوقع يمكن استخدامه في تقدير دقة التقريب. وحتى لو أن المشتقة تنمو مع زيادة الخطوات، فإنه يمكن إبقاء الخطأ ضمن سيطرة نسبية، مع تحقق نمو الحل من حيث القيمة. على أي حال فغالبا ما تظهر مشاكل عندما تزداد قيمة المشتقة، ولكن لا يكون الحل كذلك. ويمكن للخطأ في هذه الحالة أن ينمو نموًا كبيرًا لرتبة تجعله يسيطر على الحسابات. إن مسائل القيمة الابتدائية التي من المحتمل أن يحصل لها مثل ذلك تسمى معادلات شديدة stiff equations. وهي شائعة إلى حد ما، وخصوصًا في دراسة الاهتزازات، التفاعلات الكيميائية، والدوائر الكهربائية. تتميز المعادلات التفاضلية الشديدة بأن لحلها الصحيح حدًا بالصيغة e^{-ct} . حيث c ثابت كبير موجب.

وهذا عادةً يشكّل جزءًا فقط من الحل، ويُسمى الحل العابر transient solution. الجزء الأكثر أهمية في الحل يسمى حل الحالة المستقرة steady-state solution. الجزء العابر من المعادلة الشديدة سيتضاءل بسرعة نحو الصفر مع زيادة t ، ولكن لما كان للمشتقة من الرتبة n لهذا الجزء قيمة e^{-ct} ، فإن المشتقة لن تتضاءل بمثل هذه السرعة. وفي الحقيقة لما كانت المشتقة في حد الخطأ فإنها لا تقيّم عند t ، بل عند عدد ما بين الصفر و t ، فإن حدود المشتقة يمكن أن تزداد مع زيادة t وبسرعة كبيرة في الواقع. ولحسن الحظ، فالمعادلات الشديدة عمومًا يمكن التنبؤ بها من طبيعة المسألة التي اشتقت المعادلة منها، ويمكن إبقاء الخطأ تحت السيطرة مع الحذر. وسنتناول في هذا الفصل الأسلوب الذي يمكن من خلاله عمل ذلك.

إن نظام مسائل القيمة الابتدائية

$$\begin{aligned} u_1' &= 9u_1 + 24u_2 + 5 \cos t - \frac{1}{3} \sin t, & u_1(0) &= \frac{4}{3} \\ u_2' &= -24u_1 - 51u_2 - 9 \cos t + \frac{1}{3} \sin t, & u_2(0) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

له حل وحيد

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3} \cos t \\ u_2(t) &= -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3} \cos t \end{aligned}$$

إن الحد العابر e^{-39t} في الحل يدفع هذا النظام إلى أن يكون شديدًا. وتطبيق الخوارزمية (7.5) فإن طريقة Runge-Kutta للأنظمة من الرتبة الرابعة تعطي النتائج المبينة في جدول (20.5). وعندما $h = 0.05$ ، نحصل على الاستقرار. وتكون التقريبات دقيقة. وعلى أي حال تؤدي زيادة سعة الخطوة لـ $h = 0.1$ إلى نتائج خطيرة تُنظر في جدول.

وعلى الرغم من أن الشدة ترتبط عادةً بأنظمة المعادلات التفاضلية، فإن خصائص التقريب لطريقة عددية معينة تطبق على نظام شديد يمكن التنبؤ به من خلال فحص الخطأ الناتج عند تطبيق الطريقة على معادلة اختبار بسيطة

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = \alpha \quad (63.5) \quad \text{حيث } \lambda < 0$$

النظم الشديدة تستقي اسمها من حركة النابض ونظم الكتلة التي لها ثوابت ناضجة كبيرة.

مثال 1

جدول 20.5

$w_2(t)$ $h = 0.1$	$w_2(t)$ $h = 0.05$	$u_2(t)$	$w_1(t)$ $h = 0.1$	$w_1(t)$ $h = 0.05$	$u_1(t)$	t
-7.844527	-7.8705152	-1.032001	-2.645169	1.712219	1.793061	0.1
-8.87631	-8.8550148	-0.8746809	-18.45158	1.414070	1.423901	0.2
-75.4828	-75.4225910	-0.7249984	-87.47221	1.130523	1.131575	0.3
-782.3540	-782.3079475	-0.6082141	-934.0722	0.9092763	0.9094086	0.4
-3520.00	-3515.5810	-0.5156575	-1760.016	0.7387506	0.7387877	0.5
-5697.84	-5697.4405558	-0.4404108	-7848.550	0.6056833	0.6057094	0.6
-9379.87	-9379.3773540	-0.3774038	-34989.63	0.4998361	0.4998603	0.7
-1959.5	-1959.3229078	-0.3229535	-155979.4	0.4136490	0.4136714	0.8
-30664.	-30664.2743673	-0.2744088	-695332.0	0.3415939	0.3416143	0.9
-19352.	-19352.2296511	-0.2298877	-3099671.	0.2796568	0.2796748	1.0

وحلُّ هذه المعادلة هو $y(t) = \alpha e^{\lambda t}$ ، الذي يتضمن الحل العابر $e^{\lambda t}$. إن حل الحالة المستقرة هو صفر، ولذلك فمن السهل تحديد خصائص تقريب الطريقة. (تتطلب مناقشة أكثر تمهولية لخطأ التدوير المرتبط بالأنظمة الشديدة فحص معادلة الاختبار عندما تكون λ عدداً معاداً جزءاً حقيقي سالب، انظر (Gea1, p. 222).

افترض أولاً طريقة أويلر Euler مطبقة على معادلة الاختبار. وبجعل $h = (\lambda - a)/N$ و $t_j = jh$ عند $j = 0, 1, 2, \dots, N$ فإن المعادلة (5.8) تعطي

$$w_{j+1} = w_j + h(\lambda w_j) = (1 + h\lambda)w_j \text{ و } w_0 = \alpha$$

ومن ثم فإن

$$w_{j+1} = (1 + h\lambda)^{j+1} w_0 = (1 + h\lambda)^{j+1} \alpha \quad (64.5) \text{ لكل } j = 0, 1, \dots, N-1$$

وحيث إن الحل الصحيح هو $y(t) = \alpha e^{\lambda t}$ ، فإن الخطأ المطلق هو

$$y(t_j) - w_j = |e^{jh\lambda} - (1 + h\lambda)^j| |\alpha| = |(e^{h\lambda})^j - (1 + h\lambda)^j| |\alpha|$$

وتُحدّد الدقة من خلال أي مدى يكون الحد $1 + h\lambda$ يقرب $e^{h\lambda}$. وعندما $0 < \lambda < 1$ ، فإن الحل الصحيح $(e^{h\lambda})^j$ يتضاءل نحو الصفر مع تزايد j ، ولكن من خلال المعادلة (5.64)، ستكون هذه السمة التقريب فقط إذا كان $|1 + h\lambda| < 1$ التي تعطي $0 < h\lambda < 2$. وهذا يجعل سعة الخطوة h لطريقة Euler مقتصرة على تحقق $h < 2/|\lambda|$.

لنفترض الآن أن خطأ التدوير δ_0 قد أدخل ضمن الشرط الابتدائي لطريقة Euler، $w_0 = \alpha + \delta_0$ ، وعند الخطوة j يكون خطأ التدوير

$$\delta_j = (1 + h\lambda)^j \delta_0$$

ولأن $\lambda < 0$ فإن شرط السيطرة على نمو خطأ التدوير هو نفسه شرط السيطرة على خطأ المطلق $|1 + h\lambda| < 1$ ، الذي يؤدي إلى أن $h < 2/|\lambda|$.

والحالة شبيهة بطرائق خطوة واحدة أخرى. وعموماً فالدالة Q موجودة مع خاصية وجود طريقة فالدالة الفرق، وعند تطبيقها على معادلة الاختبار تعطي

$$w_{i+1} = Q(h\lambda)w_i \quad (65.5)$$

وتعتمد دقة الطريقة على أي مدى تكون $Q(h\lambda)$ أقرب إلى $e^{h\lambda}$ ، وعلى أن الخط سوف ينمو بلا حدود إذا كانت $|Q(h\lambda)| > 1$. وسيكون لطريقة Taylor من الرتبة n على سبيل مثل استقرارية

بالنسبة إلى كل من نمو خطأ التدوير والخطأ المطلق، على شرط اختيار h لتحقيق

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \dots + \frac{1}{n!}h^n\lambda^n \right| < 1$$

يختبر التصرين (10) الحالة الخاصة حينما تكون الطريقة هي طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة الاعتيادية، وهي طريقة Taylor من الرتبة الرابعة.

وعند تطبيق طريقة كثيرة الحدود من صيغة المعادلة (54.5) في معادلة الاختبار، فإن التمهيدية هي

$$w_{j+1} = a_{m-1}w_j + \dots + a_0w_{j+1-m} + h\lambda(b_mw_{j+1} + b_{m-1}w_j + \dots + b_0w_{j+1-m})$$

عند $j = m - 1, \dots, N - 1$ أو

$$(1 - h\lambda b_m)w_{j+1} - (a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})w_j - \dots - (a_0 + h\lambda b_0)w_{j+1-m} = 0$$

وترتبط بمعادلة الفرق المتجانس هذه كثيرة حدود المميزة

$$Q(z, h\lambda) = (1 - h\lambda b_m)z^m - (a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})z^{m-1} - \dots - (a_0 + h\lambda b_0)$$

وكثيرة الحدود هذه تشبه كثيرة حدود المميزة (57.5)، لكنها تشمل معادلة الاختبار أيضاً.

والمبرهنة هنا توازي نقاش الاستقرار في الفصل (10.5).

افرض أنك أعطيت w_0, \dots, w_{m-1} ، وعند ثبوت $h\lambda$ ، لتعبر β_1, \dots, β_m عن أصفار كثيرة حدود

$Q(z, h\lambda)$. فإذا كانت β_1, \dots, β_m مختلفة فإن c_1, \dots, c_m موجودة مع

$$w_j = \sum_{k=1}^m c_k (\beta_k)^j \quad \text{لكل } j = 0, \dots, N \quad (66.5)$$

إذا كانت $Q(z, h\lambda)$ أصفار متعددة فإن w_j تعرف بنفس الأسلوب. (انظر المعادلة (62.5) في

الفصل (10.5). وإذا كانت w_j تقرب $e^{jh\lambda} = e^{jh\lambda}$ بدقة فإن على الأصفار β_k جميعها

أن تحقق $|\beta_k| < 1$ ، وبخلاف ذلك، فإن اختيارات معينة لـ α ستنتج $c_k \neq 0$ ، وإن الحد

$c_k (\beta_k)^j$ لن يتضاءل نحو الصفر.

إن معادلة الاختبار التفاضلية

مثال 1

$$y' = -30y, \quad 0 \leq t \leq 1.5, \quad y(0) = \frac{1}{3}$$

لها حل صحيح $y = \frac{1}{3}e^{-30t}$ باستخدام $h = 0.1$ لخوارزمية Euler (1.5)، وخوارزمية Runge-Kutta

(2.5) من الرتبة الرابعة، وخوارزمية متنبئ- مصحح آدم Adams Predictor-Correcto

(4.5). وتعطي عند $t = 1.5$ النتائج المبينة في جدول (5.21).

طريقة	الخطأ
الحل الصحيح	9.54173×10^{-21}
طريقة أويلر	-1.09225×10^4
طريقة رونج كوتا	3.95730×10^1
طريقة توفع - المصحح	8.03840×10^5

جدول 21.5

إن عدم الدقة في مثال (2) يعود إلى حقيقة كون $|Q(h\lambda)| > 1$ لطريقتي Euler و Runge-Kutta.

وإن لـ $Q(z, h\lambda)$ أصفاراً مع معامل تزيد على 1 لطريقة المتنبئ- المصحح. ولتطبيق هذه الطرائق

على هذه المسألة، يجب إنقاص سعة الخطوة. ويُستخدم التعريف الآتي لتوضيح مقدار الإنقاص

المطلوب لسعة الخطوة.

تعريف 25.5

المنطقة R للاستقرارية المطلقة لطريقة بخطوة واحدة هو $R = \{h\lambda \in \mathbb{C} \mid |Q(h\lambda)| < 1\}$ ، وللطرائق

متعددة الخطوات فهو $R = \{h\lambda \in \mathbb{C} \mid |\beta_k| < 1\}$ لجميعها $Q(z, h\lambda)$.
 تشير المعادلتان (65.5) و(66.5) إلى إمكانية تطبيق طريقة ما بكفاءة على معادلة شديدة فقط إذا كانت $h\lambda$ ضمن حقل الاستقرارية المطلقة، الذي يضع قيوداً على السعة h لمسألة ما. وعلى الرغم من أن الحد الآسي في الحل الصحيح يتضاءل بسرعة نحو الصفر، إلا أن h يجب أن تبقى ضمن حقل الاستقرارية المطلقة عبر فترة قيم t لجعل التقريب يتضاءل نحو الصفر. وليتني نمو الخطأ تحت السيطرة. هذا يعني أنه على الرغم من أن h يمكن أن يزداد طبيعياً بسبب افتراضات خطأ القطع، إلا أن المعيار يدفع h ليبقى صغيراً. وتكون الطرائق متعيرة سعة الحسوة غير حصينة تجاه هذه المشكلة؛ لأن فحص خطأ القطع المحلي قد يشير إلى إمكانية زيادة سعة الخطوة، التي قد تعطي من غير قصد قيماً لـ $h\lambda$ خارج حقل الاستقرارية المطلقة ولما كان حقل الاستقرارية المطلقة لطريقة ما هو عموماً العامل الحرج في الحصول على تقريبات دقيقة للأنظمة الشديدة، فإن الطرائق العددية يؤمل أن تكون ذات حقل كبير للاستقرارية المطلقة قدر الإمكان.

يقال للطريقة العددية: إنها A-stable إذا كان حقلها للاستقرارية المطلقة يتضمن نصف السطح الأيسر كاملاً.

إن طريقة شبه المنحرف الضمني Implicit Trapezoidal المعطاة من خلال

$$w_{j+1} = a, \quad (67.5)$$

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2} [f(t_{j+1}, w_{j+1}) + f(t_j, w_j)], \quad 0 \leq j \leq N-1$$

تكون A-stable. (انظر التمرين 15) وهي الطريقة متعددة الخطوات الوحيدة بصفة A-stable. وعلى الرغم من أن طريقة شبه المنحرف لا تعطي تقريبات دقيقة عند سعات كبيرة للخطوة، إلا أن خطأها لا ينمو أسياً.

إن أساليب الأنظمة الشديدة المستخدمة عادة هي طرائق ضمنية متعددة الخطوات. ونحصل عموماً على w_{j+1} من خلال حل معادلة لاخطية أو نظام لاخطي على نحو تكراري. وغالباً من خلال طريقة نيوتن. افترض على سبيل مثال طريقة شبه المنحرف الضمني

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2} [f(t_{j+1}, w_{j+1}) + f(t_j, w_j)]$$

لقيم محسوبة لـ t_j, t_{j+1} و w_j . فإننا نحتاج إلى تحديد w_{j+1} . وهو الحل لـ

$$F(w) = w - w_j - \frac{h}{2} [f(t_{j+1}, w) + f(t_j, w_j)] = 0 \quad (68.5)$$

ولتقريب هذا الحل، نختار $w_{j+1}^{(0)}$ وهو عادةً w_j ، وتنتج $w_{j+1}^{(k)}$ من خلال تطبيق طريقة نيوتن

للمعادلة (68.5)

$$\begin{aligned} w_{j+1}^{(k)} &= w_{j+1}^{(k-1)} - \frac{F(w_{j+1}^{(k-1)})}{F'(w_{j+1}^{(k-1)})} \\ &= w_{j+1}^{(k-1)} - \frac{w_{j+1}^{(k-1)} - w_j - \frac{h}{2} [f(t_j, w_j) + f(t_{j+1}, w_{j+1}^{(k-1)})]}{1 - \frac{h}{2} f_y(t_{j+1}, w_{j+1}^{(k-1)})} \end{aligned}$$

حتى نحصل على $|w_{j+1}^{(k)} - w_{j+1}^{(k-1)}|$ صغيرة بما يكفي. وتستخدم هذه العملية في الخوارزمية

هذه الطريقة ضمنية لكونها تتضمن w_{j+1} بطرفي المعادلة.

(8.5). ومن الطبيعي أن يتطلب هذا 3 أو 4 فقط من الإعادات لكل خطوة. إن طريقة القاطع يمكن استخدامها بديلاً لطريقة نيوتن في المعادلة (8.5). ولكن هذا يتطلب تقريبين ابتدائيين مختلفين لـ w_{j+1} . ولتطبيق طريقة القاطع، فإن الإجراء المعتاد هو جعل $w_{j+1}^{(0)} = w_j$ وإيجاد $w_{j+1}^{(1)}$ من طريقة ما متعددة الخطوات الواضحة. وعندما يكون نظام معادلات شديدة ضمن العملية، فإن ذلك يتطلب تعميماً ما لطريقة نيوتن أو طريقة القاطع. وسنتناول هذه المواضيع في الباب العاشرة.

شبه المنحرف مع إعادة نيوتن Trapezoidal with Newton iteration

لتقريب الحل لنظام من رتبة m لمسائل القيمة الابتدائية من الرتبة أولى $y'(a) = \alpha$ عند $a \leq t \leq b$ لكل $y' = f(t, y)$ عند $(N + 1)$ من الأرقام المتساوية التباعد في الفترة $[a, b]$: المدخلات: نقاط نهاية a, b ، عدد صحيح N ، شرط ابتدائي α ، حد سماح TOL ، أكبر عدد إعادات M عند أي من الخطوات. المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N + 1)$ من القيم لـ t ، أو عبارة فشل.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a) / N$ $t = a$ $w = \alpha$ المخرجات (t, w)
2	عند $i = 1, 2, \dots, N$ طبق الخطوات 3 - 7.
3	ضع $k_1 = w + \frac{h}{2} f(t, w)$ $w_0 = k_1$ $j = 1$ $FLAG = 0$
4	ما دام $FLAG = 0$ ، فطبق الخطوتين 5 و 6.
5	ضع $w = w_0 - \frac{w_0 - \frac{h}{2} f(t + h, w_0) - k_1}{1 - \frac{h}{2} f_y(t + h, w_0)}$
6	إذا كان $ w - w_0 < TOL$ فضع $FLAG = 1$ وما عدا ذلك ضع $j = j + 1$ $w_0 = w$ وإذا كان $j > M$ فإن المخرجات (تم تجاوز أكبر عدد من الإعادات). توقف.
7	ضع $t = a + ih$; المخرجات (t, w)
8	توقف.



إن مسألة القيمة الابتدائية الشديدة

$$y' = 5e^{5t}(y - t)^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = -1$$

مثال 3

لها حل $y(t) = t - e^{-5t}$. وللوقوف على آثار الشدة، نطبّق طريقة شبه المنحرف الضمنية وطريقة Runge-Kutta من الرتبة رابعة مع $N = 4$ ، لتعطي $h = 0.25$ ، و $h = 0.20$ لتعطي $N = 5$ ، $TOL = 10^{-6}$ ، $M = 10$ إن أداء طريقة شبه المنحرف جيد في كلا الحالتين مستخدمين $h = 0.25$ و $h = 0.20$ ، وعلى أي حال تقع $h = 0.25$ خارج حقل الاستقرار المطلقة لطريقة Runge-Kutta، وهو ما تثبته النتائج في جدول (22.5).

جدول 22.5

طريقة شبه المنحرف		طريقة رونج - كوتا		t_i
$h = 0.2$		$h = 0.2$		
w_i	$ y(t_i) - w_i $	w_i	$ y(t_i) - w_i $	
-1.000000	0	-1.000000	0	0.0
-0.1414969	2.6383×10^{-2}	-0.1488521	1.9027×10^{-2}	0.2
0.2743614	1.0197×10^{-2}	0.2684884	3.8237×10^{-3}	0.4
0.5532328	3.7700×10^{-3}	0.5519927	1.7798×10^{-3}	0.6
0.7833720	1.3876×10^{-3}	0.7822857	6.0131×10^{-4}	0.8
0.9937726	5.1050×10^{-4}	0.9934905	2.2845×10^{-4}	1.0
$h = 0.25$		$h = 0.25$		
w_i	$ y(t_i) - w_i $	w_i	$ y(t_i) - w_i $	t_i
-1.000000	0	-1.000000	0	0.0
0.0054557	4.1961×10^{-2}	0.4014315	4.37936×10^{-1}	0.25
0.4267572	8.8422×10^{-3}	3.4374753	3.01956×10^0	0.5
0.7294528	2.6706×10^{-3}	1.44639×10^{23}	1.44639×10^{23}	0.75
0.9941199	7.5790×10^{-4}	فيض	فيض	1.0

لقد قدمنا هنا كمية صغيرة فقط مما يجب على القارئ معرفته حول المعادلات التفاضلية الشديدة وللمزيد من التفاصيل، راجع ([Lam], [Gea2], أو [SGe]).

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 11.5

1. حلّ مسائل القيمة الابتدائية الشديدة الآتية مستخدماً طريقة Euler، يقارن النتائج بالحل

الحقيقي:

أ. $y' = -9y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = e$ عند $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = e^{1-9t}$.

ب. $y' = -20(y - t^2) + 2t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = \frac{1}{3}$ عند $h = 0.1$

الحل الحقيقي $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-20t}$

ج. $y' = -20y + 20 \sin t + \cos t$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 1$ عند $h = 0.25$

الحل الحقيقي $y(t) = \sin t + e^{-20t}$

د. $y' = 50/y - 50y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = \sqrt{2}$ عند $h = 0.1$

الحل الحقيقي $y(t) = (1 + e^{-100t})^{1/2}$

2. حل مسائل القيمة الابتدائية الشديدة الآتية مستخدماً طريقة Euler. وقارن النتائج بالحل الحقيقي:

أ. $y' = -5y + 6e^t$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 2$ عند $h = 0.1$ الحل الحقيقي $y(t) = e^{-5t} + e^t$

ب. $y' = -10y + 10t + 1$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = e$ عند $h = 0.1$

الحل الحقيقي $y(t) = e^{-10t+1} + t$

ج. $y' = -15(y - t^{-3}) - 3/t^4$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0.9999997$ عند $h = 0.25$

الحل الحقيقي $y(t) = -e^{-15t} + t^{-3}$

د. $y' = -20y + 20 \cos t - \sin t$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 0$ عند $h = 0.25$

الحل الحقيقي $y(t) = -e^{-20t} + \cos t$

3. كرر تمرين (1) مستخدماً طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة.

4. كرر تمرين (2) مستخدماً طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة.

5. كرر تمرين (1) مستخدماً طريقة Adams fourth-order predictor-corrector.

6. كرر تمرين (2) مستخدماً طريقة Adams fourth-order predictor-corrector.

7. كرر تمرين (1) مستخدماً خوارزمية شبه المنحرف مع $TOL = 10^{-5}$.

8. كرر تمرين (2) مستخدماً خوارزمية شبه المنحرف مع $TOL = 10^{-5}$.

9. حل مسائل القيمة الابتدائية الشديدة الآتية مستخدماً طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة، مع (أ) $h = 0.1$ و (ب) $h = 0.025$.

$u'_1 = 32u_1 + 66u_2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}$, $0 \leq t \leq 0.5$, $u_1(0) = \frac{1}{3}$

$u'_2 = -66u_1 - 133u_2 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$, $0 \leq t \leq 0.5$, $u_2(0) = \frac{1}{3}$

قارن النتائج بالحل الحقيقي:

$u_1(t) = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-100t}$ and $u_2(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-100t}$

10. أثبت أن طريقة Runge-Kutta من الرتبة الرابعة

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + h/2, w_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(t_i + h/2, w_i + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, w_i + k_3)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

يمكن كتابتها حين تطبق على المعادلة التفاضلية $y' = \lambda y$ بالصيغة

$$w_{i+1} = (1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4) w_i$$

11. ناقش: الاتساق، الاستقرار، والتقارب لطريقة شبه المنحرف الضمنية

$i = 0, 1, \dots, N-1$ لكل $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}(f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i))$

مع $w_0 = \alpha$ بتطبيقها على المعادلة التفاضلية

$$y' = f(t, y) \quad a \leq t \leq b \quad y(a) = a$$

12. تعرف طريقة Backward Euler one-step بخطوة واحدة من خلال

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_{i+1}, w_{i+1}) \quad i = 0, \dots, N-1$$

أثبت أن $Q(h\lambda) = 1/(1-h\lambda)$ لطريقة Backward Euler one-step.

13. طبّق طريقة Backward Euler على المعادلة التفاضلية المعطاة في تمرين (1) استخدم طريقة

نيوتن لإيجاد حل لـ w_{i+1} .

14. طبّق طريقة Backward Euler على المعادلة التفاضلية المعطاة في تمرين (2) استخدم طريقة

نيوتن لإيجاد حل لـ w_{i+1} .

15. أ. أثبت أن طريقة شبه المنحرف الضمنية (67.5) هي A-stable.

ب. أثبت أن طريقة Backward Euler في تمرين (12) هي A-stable.

12.5 مسح للطرائق والبرمجيات Survey of Methods and Software

تناولنا في هذا الباب طرائق لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية لمعادلات تفاضلية عادية ولقد بدأنا بمناقشة الأسلوب العددي الأكثر أولوية وهو طريقة Euler. وهذه العملية ليست دقيقة بما يكفي لاستخدامها في التطبيقات. ولكنها توضح السلوك العام للأساليب الأكثر قوة دين الدخول في مصعب جبرية. لذلك فقد افترضت طرائق Taylor بمنزلة تعميمات لطريقة Euler. ولقد تبين أنها كانت دقيقة، ولكنها بطيئة بسبب الحاجة إلى تحديد اشتقاق جزئية واسعة للدالة الموصوفة للمعادلة التفاضلية. إن صيغ Runge-Kutta تبسّط طرائق Taylor، حيث لا تزيد الخطأ معنوياً. وعند هذا الحد فقد كان اهتمامنا بطرائق الخطوة الواحدة أساليب تستخدم البيانات فقط عند النقاط التي حُسبتت. وقد تناولنا الطرائق متعددة الخطوات في الفصل (6.5). حيث افترضت طرائق واضحة من نوع Adams-Bashforth وطرانق ضمنية من نوع Adams-Moulton. وتوجت هذه في طرائق المتنبئ-المصحح التي تستخدم طرائق واضحة مثل Adams-Bashforth للتنبؤ بالحل، ومر ثم تطبيق طريقة ضمنية مقابلة لها مثل Adams-Moulton لتصحيح التقريب. أوضح الفصل (8.5) كيفية استخدام هذه الأساليب لحل مسائل القيمة الابتدائية برتب أعلى وأنظمة مسائل القيمة الابتدائية.

وتستند الطرائق الأذق والمتبناة إلى أساليب بخطوة واحدة وبعده خطوات وغير عقدة سعياً. وقد لاحظنا في الفصل (5.5) خصوصاً أن طريقة Runge-Kutta-Fehlberg هي عملية بخطوة واحدة تتحرى اختيار مبادعة شبكية لإبقاء خطأ التقريب المحلي تحت المعطرة. إن طريقة المتنبئ-المصحح بسعة خطوات متغيرة التي عرضت في الفصل (7.5) تستند إلى طريقة Adams-Bashforth من الرتبة الرابعة وطريقة Adams-Moulton من الرتبة الثالثة. وهي أيضاً تغير من سعة الخطوة لإبقاء الخطأ المحلي ضمن حد السماح المحدد. إن طريقة الاستكمال الخارجي التي نوقشت في الفصل (8.5) تستند إلى تعديل طريقة النقطة لسطية، وتشمل استكمالاً خارجياً للإبقاء على الدقة المطلوبة للتقريب. وتتناول المادة الأخيرة في الفصل الصحية

الملازمة لتقريب حل المعادلة الشديدة. أو المعادلة التفاضلية التي يتضمن حلها الصحيح جزءاً بصيغة $e^{-\lambda t}$ ، حيث إن λ ثابت موجب. ويجب الحذر عند التعامل مع مسائل من هذا النوع، أو أن تغطي النتائج على خطأ التدوير.

إن طرائق من نوع Runge-Kutta-Fehlberg تكون وافية عموماً لمسائل غير شديدة، وتتطلب دقة وسيطية. وعمليات الاستكمال الخارجي تعتمد على مسائل غير شديدة، وتتطلب دقة عالية. وتستخدم توسعات طريقة شبه المنحرف الضمنية لطرائق متغيرة الرتبة ومتغيرة سعة الخطوة من نوع Adams الضمنية لمسائل القيمة الابتدائية الشديدة.

وتتضمن مكتبة IMSL اثنين من البرامج الفرعية لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية. وكل واحد منها يحل نظاماً من m من المعادلات من الرتبة الأولى في m من المتغيرات. والمعادلات ذات صيغة

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \quad \text{لكل } i = 1, 2, \dots, m$$

حيث إن $u_i(t_0)$ معطاة عند كل i . ويستند البرنامج الفرعي سعة الخطوة المتغيرة IVPK إلى طرائق Runge-Kutta-Verner من الرتبين 5 و 6 الموضحتين في التمرين (4) من الفصل (5.5). ويستخدم برنامج فرعي من نوع Adams في المعادلات الشديدة يعود إلى C. William Gear ومعطى من خلال IVPAG. هذه الطريقة تستخدم طرائق ضمنية متعددة الخطوات من رتبة حتى 12 وصيغ تفاضلية تراجعية من رتبة حتى 5.

وتحتوي مكتبة NAG عمليات من نوع Runge-Kutta تسمى D02PCF، D02BHF، D02BGF و D02PDF، D02BGF و D02BHF تستند إلى صيغة Merson لطريقة Runge-Kutta. وطريقة Adams متغيرة الرتبة ومتغيرة سعة الخطوة متضمنة في العملية D02CJF. وطرائق الفرق المتراجع متغيرة الرتبة ومتغيرة سعة الخطوة لنظام شديد متضمنة في العملية D02EJF. وتتضمن برامج فرعية أخرى نفس الطرائق. ولكن بإعادات حتى تقترب مكونة الحل لقيمة معطاة أو حتى يكون دالة الحل صفراً. إن مكتبة netlib تتضمن برامج فرعية متعددة لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية في الحزمة ODE الموجودة عند الموقع <http://www.netlib.org>. والبرنامج الفرعي dverk f يستند إلى طرائق Runge-Kutta-Verner من الرتبين 5 و 6. والبرنامج الفرعي rkf45 f يستند إلى طرائق Runge-Kutta-Fehlberg من الرتبين 4 و 5. وكما وُضح في الفصل (5.5)، ولمسائل القيمة الابتدائية لمعادلة تفاضلية شديدة اعتيادية. يمكن استخدام البرنامج الفرعي epsode.f المستند إلى صيغة التفاضل التراجعي المتغيرة المعامل. وهناك العديد من الكتب مختصة في الحل العددي لمسائل القيمة الابتدائية، يتقدمها اثنان ككتابي Henrici [He1] و Gear [Ge1]. وتتناول كتب أخرى هذا الحقل مثل Botha، Ortega Pinder [BP]، Golub, Poole [OP]، Ortega [GO] و Warner [Sh]، Dor-mand [Do]، وهناك أيضاً كتابان لـ Hairer, Nörsett و Burrage [Bur] نقاشاً مستفيضاً حول مسائل [HNW1] عديمة الشدة و [HNW2] الشديدة، وكتاب لـ Burrage يوضح طرائق التوازي والتتابع.

obeykandi.com