ومعلومات عن الخطأ أكثر واقعية.

الطرائق التي نتناولها ضمن هذه الوحدة لا تعطي تقريبات مستمرة لحل مسألة القيمة الابتدائية. وبدلاً من ذلك، فإن التقريبات توجد عند نقاط معينة محددة، وغالبًا ما تكون متساوية التباعد. تستخدم بعض طرائق الاستكمال الداخلي كطريقة هرمايت إذا كان هناك حاجة إلى قيم وسطية.

نحتاج إلى بعض التعريفات والنتائج من مبرهنة المعادلات التفاضلية الاعتيادية قبل تناول طرائق لتقريب حلول مسائل القيمة الابتدائية. إن مسائل القيمة الابتدائية تظهر من خلال رصد ظاهرة فيزيائية مقاربة لحالة حقيقية عموما. لذلك نحتاج إلى معرفة تغييرات صغيرة في مضمون المسألة، مما يؤثر قليلا في الحل. هذا مهم أيضا بسبب المدخل للخطأ المقرب عندما تُستخدم الطرائق العددية.

تعريف 1.5 يقال للدالة $f(t, y)$ إنها تحقق شرط لبشتز Lipschitz condition في المتغير y على مجموعة أنها تحقق $D \subset \mathbb{R}^2$ إذا وجد ثابت $L > 0$ يحقق

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

ما دام $(t, y_1), (t, y_2) \in D$. يسمى الثابت L شرط لبشتز Lipschitz condition للدالة f. ■

مثال 1 إذا كان $D = \{(t, y) \mid 1 \leq t \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$ و $f(t, y) = t|y|$ فإن لكل زوج من النقاط (t, y_1) و (t, y_2) في D

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t|y_1| - t|y_2|| = |t|\,||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2|$$

وبذلك تحقق f شرط لبشتز على D في المتغير y مع ثابت لبشتز 2. إن أصغر قيمة محتملة لثابت لبشتز في هذه المسألة هو $L = 2$، لأنه على سبيل المثال

$$|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2|1 - 0|$$ ■

تعريف 2.5 يقال للمجموعة $D \subset \mathbb{R}^2$ بأنها محدبة convex متى انتمت كل من (t_1, y_1) و (t_2, y_2) إلى D، وأن λ في $[0,1]$ تكون النقطة $((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$ منتمية أيضا إلى D. ■

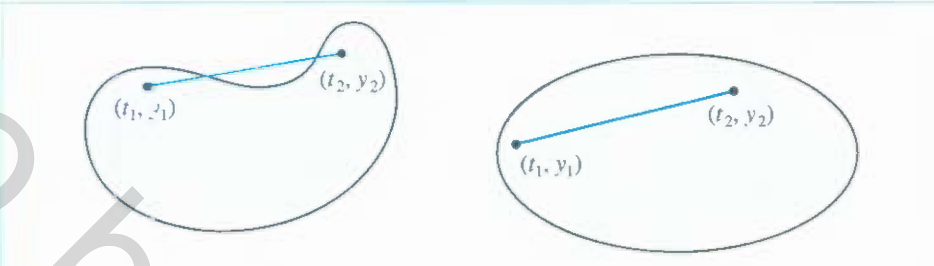
في المصطلحات الهندسية ينص التعريف (2.5) على أن المجموعة محدبة على أنه متى كانت نقطتان تنتميان إلى المجموعة فإن قطعة الخط المستقيم كاملة ما بين النقطتين وتنتمي أيضًا إلى المجموعة. (انظر شكل 1.5) تكون المجموعات التي نتناولها في هذا الفصل عمومًا بالصيغة $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ للثابتين a و b. ومن السهل التحقق (انظر التمرين 7) من أن هذه المجموعات محدبة.

مبرهنة 3.5 افترض أن $f(t, y)$ معرف على مجموعة محدبة $D \subset \mathbb{R}^2$. إذا وجد $L > 0$ يحقق

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \leq L \quad \text{لكل} \quad (t, y) \in D \qquad (1.5)$$

فإن f يحقق شرط لبشتز على D في المتغير y مع ثابت لبشتز L. ■

شكل 1.5



عمل رودلف لبشيز (1832 – 1903) Rudolf Lipschitz في فروع الرياضيات المختلفة. بصفتها مبرهنة الكرّاد. سلسلة فوريير. معادلات تفاضلية. الميكانيكا التحليلية. والمبرهنة الكامنة وهو معروف جدًا بتعميمه عمل أوغستن لويس كوشي (1789–1857) Augustin–Louis Cauchy وجوسيب بينو (1858–1932) Giuseppe Peano

إن برهان مبرهنة (3.5) يناقش في التمرين (6). وهو مشابه لبرهان التمهيدية المناظرة لها لدوال متغير واحد نوقشت ضمن التمرين (25) من الفصل (1.1).

وحسبما تبين لنا المبرهنة التالية. فغالبًا ما يتركز الاهتمام على تحديد ما إذا كان الدالة المعنية في مسألة القيمة الابتدائية يحقق شرط لبشتز في متغيره الثاني. ومن ثم فإن الشرط (1.5) عمومًا أكثر سهولة للتطبيق من التعريف. وعلى أي حال علينا ملاحظة أن المبرهنة (3.5) تعطي فقط شروطا وافية لتحقق شرط لبشتز. الدالة في مثال (1) مثلًا تحقق شرط لبشتز. لكن المشتقة الجزئية بالنسبة إلى y لا وجود لها عندما يكون $y = 0$.

المبرهنة التالية هي صورة جوهرية لحالة وجود وحدانية المبرهنة للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. وعلى الرغم من أن المبرهنة يمكن برهنتها مع بعض التقليص للفرضية. إلا أن صيغة المبرهنة هذه تفي بأغراضنا.

(يمكن إيجاد برهان المبرهنة بهذه الصيغة تقريبًا في [BiR,pp. 142–155] .

مبرهنة 4.5 افترض أن $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$. وأن $f(t, y)$ متصل على D. إذا كانت f تحقق شرط لبشتز على D في المتغير y، فإن مسألة القيمة الابتدائية

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

لها حل وحيد $y(t)$ حيث $a \le t \le b$. ■

مثال 2 افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = 1 + t\sin(ty), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$$

بالإبقاء على t ثابتا. وبتطبيق مبرهنة القيمة الوسيطية للدالة

$$f(t, y) = 1 + t\sin(ty)$$

نجد أنه عندما $y_1 < y_2$. فإن العدد ξ ضمن (y_1, y_2) يظهر مع

$$\frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial}{\partial y} f(t, \xi) = t^2 \cos(\xi t)$$

ومن ثم

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = |y_2 - y_1||t^2 \cos(\xi t)| \le 4|y_2 - y_1|$$

وتحقق f شرط لبسشتز في المتغير y مع ثابت لبسشتز $L = 4$. وبالإضافة إلى ذلك، حيث إن $f(t, y)$ متصل عندما $0 \le t \le 2$ و $-\infty < y < \infty$، فإن المبرهنة (4.5) توحي بوجود حل وحيد لمسألة القيمة الابتدائية هذه. ■

فإذا درست مقررًا في المعادلات التفاضلية، فقد تحاول إيجاد الحل الصحيح لهذه المسألة.

والآن وبعد أن عالجنا -إلى حد ما- التساؤل: "متى يكون لمسائل القيمة الابتدائية حلول وحيدة؟" يمكننا الانتقال إلى تساؤل آخر طرح مبكرًا في هذا الفصل وهو

" كيف يمكننا تحديد ما إذا كانت لمسألة معينة سمة كون تغييرات صغيرة (أو تشويش) في مضمونها يؤثر قليلا في الحل؟"

وكالمعتاد، فإننا نحتاج أولًا إلى إعطاء تعريف عملي لترسيخ هذا المفهوم.

تعريف 5.5 يقال لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \tag{2.5}$$

إنها مسألة عرض جيد well-posed problem إذا تحقق ما يلي:

- يوجد حل وحيد $y(t)$ للمسألة.
- يوجد ثابتان $\varepsilon_0 > 0$ و $k > 0$ بحيث إن لكل ε و $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$، ما دامت كانت $\delta(t)$ متصلة و $|\delta(t)| < \varepsilon$ لكل t في $[a, b]$. ومتى كانت $|\delta_0| < \varepsilon$ كذلك فإن مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t), \quad a \le t \le b, \quad z(a) = \alpha + \delta_0 \tag{3.5}$$

لها حل وحيد $z(t)$ يحقق

$$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon \quad \text{لكل } t \text{ في } [a, b]$$ ■

إن المسألة المعطاة بالمعادلة (3.5) تسمى المسألة المضطربة perturbed problem المرتبطة بالمسألة الأصلية (2.5). إنها تفترض إمكانية حدوث خطأ $\delta(t)$ المبين ضمن التعبير حول المعادلة التفاضلية. وبالإضافة إلى خطأ δ_0، فقد عرض ضمن الشرط الابتدائي.

تؤخذ الطرائق العددية دائمًا في الحسبان عند حل المسألة المضطربة، لأن أي خطأ تدوير يتم تناوله في التعبير يربك المسألة الأصلية. وما لم تُعرَض المسألة الأصلية جيدا. فثمة مبرر ضعيف لتوقع كون الحل العددي لمسألة مضطربة يقارب الحل للمسألة الأصلية بدقة.

وتحدد المبرهنة التالية شروطًا لضمان عرض واضح لمسألة القيمة الابتدائية. ويمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في [BiR, pp. 142–147].

مبرهنة 6.5 افتــرض أن $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$. إذا كانــت f متصلة وتحقق شــرط لبسشتز في المتغير y على المجموعة D فإن مسألة القيمة الابتدائية.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

جيدة العرض.

مثال 3 ليكن $D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 1,\ -\infty < y < \infty\}$. وافترض مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5 \tag{4.5}$$

وبما أن

$$\left|\frac{\partial(y - t^2 + 1)}{\partial y}\right| = |1| = 1$$

فإن المبرهنة (3.5) تؤدي إلى أن $f(t, y) = y - t^2 + 1$ يحقق شرط لبشتز في المتغير y على المجموعة D مع ثابت لبشتز 1. ولأن f متصلة على D فإن المبرهنة (6.5) تؤدي إلى أن مسألة القيمة الابتدائية جيدة العرض.

وللتحقق من ذلك مباشرة، افترض المسألة المضطربة

$$\frac{dz}{dt} = z - t^2 + 1 + \delta, \quad 0 \le t \le 2, \quad z(0) = 0.5 + \delta_0 \tag{5.5}$$

حيث إن δ و δ_0 ثابتان. وحل المعادلة (4.5) والمعادلة (5.5) هو على التوالي

$y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$ و $z(t) = (t + 1)^2 + (\delta + \delta_0 - 0.5)e^t - \delta$

افترض أن ε أي عدد موجب. فإذا كان $|\delta| < \varepsilon$ و $|\delta_0| < \varepsilon$ فإن

$$|y(t) - z(t)| = |(\delta + \delta_0)e^t - \delta| \le |\delta + \delta_0|e^2 + |\delta| \le (2e^2 + 1)\varepsilon$$

لكل t. ولذلك فالمسألة (4.5) تكون جيدة العرض مع $k = 2e^2 + 1$ ولكل $\varepsilon > 0$.

ويمكن استخدام Maple لحل العديد من مسائل القيمة الابتدائية. افترض المسألة

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

مابل Maple يحتفظ بالحرف D للتعبير عن المشتقة

ولتعريف المعادلة التفاضلية، أدخل

```
>deq:=D(y)(t)=y(t)-t*t+1
```

والشرط الابتدائي

```
>init:=y(0)=0.5
```

وقد اختير المسميان deq و init من قبل المستخدم. والأمر لحل مسائل القيمة الابتدائية هو dsolve ولذلك

```
>deqsol:=dsolve({deq,init},y(t));
```

وتكون الاستجابة

$$\text{deqsol} := y(t) = 1 + t^2 + 2t - \tfrac{1}{2}e^t$$

ولغرض استخدام الحل لإيجاد قيمة محددة مثل $y(1.5)$، ندخل

```
>q:=rhs(deqsol); evalf(subs(t=1.5,q))
```

مع التمهيدية 4.009155465.

وتستخدم الدالة rhs (الجانب الأيمن) لتخصيص حل مسألة القيمة الابتدائية للدالة q التي سنقيمها عند $t = 1.5$. ويمكن أن تفشل الدالة dsolve إذا ما تعذّر إيجاد حل واضح لمسألة القيمة الابتدائية. على سبيل المثال، في مسألة القيمة الابتدائية المعطاة في مثال (1)، فإن الأمر الابتدائية

```
>deqsol2:=dsolve({D(y)(t)=1+t*sin(t*y(t)),y(0)=0},y(t));
```

لا ينجح لتعذر إيجاد حل واضح. في هذه الحالة يجب استخدام طريقة عددية.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 1.5

1. استخدم المبرهنة (4.5) لإثبات أن أيًا من مسائل القيمة الابتدائية الآتية لها حل وحيد. أوجد الحل:

أ. $y' = y\cos t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

ب. $y' = \dfrac{2}{t}y + t^2 e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$

ج. $y' = -\dfrac{2}{t}y + t^2 e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \sqrt{2}e$

د. $y' = \dfrac{4t^3 y}{1 + t^4}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

2. استخدم المبرهنة (4.5) لإثبات أن أيًا من مسائل القيمة الابتدائية الآتية لها حل وحيد. أوجد الحل:

أ. $y' = e^{t-y}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

ب. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty), \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$

ج. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 2$

د. $y' = \dfrac{ty + y}{ty + t}, \quad 2 \le t \le 4, \quad y(2) = 4$

3. لكل اختيار إلى $f(t, y)$ المعطاة للأقسام من (أ) – (د):

(أ) هل يحقق f شرط لبشتز على $D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$؟

(ب) هل يمكن استخدام المبرهنة (6.5) لإثبات أن مسألة القيمة الابتدائية

$y' = f(t, y), \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

جيدة العرض؟

أ. $f(t, y) = t^2 y + 1$ ب. $f(t, y) = ty$

ج. $f(t, y) = 1 - y$ د. $f(t, y) = -ty + \dfrac{4t}{y}$

4. لكل اختيار إلى $f(t, y)$ المعطاة للأقسام من (أ) – (د):

أ. هل يحقق f شرط لبشتز على $D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$؟

ب. هل يمكن استخدام المبرهنة (6.5) لإثبات أن مسألة القيمة الابتدائية

$y' = f(t, y), \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$

جيدة العرض؟

أ. $f(t, y) = e^{t-y}$ ب. $f(t, y) = \frac{1+y}{1+t}$ ج. $f(t, y) = \cos(yt)$ د. $f(t, y) = \frac{y^2}{1+t}$

5. لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية، أثبت أن المعادلة المعطاة تتضمن حلًّا. قرّب إلى $y(2)$ مستخدمًا طريقة نيوتن.

أ. $y^3t + yt = 2$ ؛ $y(1) = 1$ ، $1 \le t \le 2$ ، $y' = -\frac{y^3 + y}{(3y^2+1)t}$

ب. $y\sin t + t^2e^y + 2y = 1$ ؛ $y(1) = 0$ ، $1 \le t \le 2$ ، $y' = -\frac{y\cos t + 2te^y}{\sin t + t^2e^y + 2}$

6. برهن المبرهنة (3.5) من خلال تطبيق مبرهنة القيمة الوسطية لـ $f(t, y)$، مبقيًا t ثابتًا.

7. في الثابتين a و b. أثبت أن المجموعة $L = \{(t, y) \mid a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$ محدبة.

8. افترض الاضطراب $\delta(t)$ نسبيًا إلى t. بمعنى أن $\delta(t) = \delta t$ ثابت ما ع. أثبت مباشرةً أن مسائل القيمة الابتدائية الآتية جيدة العرض:

أ. $y' = 1 - y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$

ب. $y' = t + y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -1$

ج. $y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$

د. $y' = -\frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \sqrt{2}e$

9. طريقة بيكارد لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y) \qquad a \le t \le b \qquad y(a) = \alpha$$

يكون وفقًا للشرح الآتي: ليكن $y_0(t) = \alpha$ لكل t ضمن $[a, b]$. عرف متتالية الدّوال $\{y_k(t)\}$

$$y_k(t) = \alpha + \int_a^t f(\tau, y_{k-1}(\tau))\, d\tau \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

أ. اعمل التكامل $y' = f(t, y(t))$، واستخدم الشرط الابتدائي لاشتقاق طريقة بيكارد.

ب. اعمل التوليد $y_0(t), y_1(t), y_2(t)$ و $y_3(t)$ لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -y + t + 1 \qquad 0 \le t \le 1 \qquad y(0) = 1$$

ج. قارن التمهيدية في الفقرة (ب) مع سلسلة ماكلورين للحل الحقيقي $y(t) = t + e^{-t}$.

2.5 طريقة أويلر Euler's Method

على الرغم من قلة استخدام طريقة أويلر، إلا أنه لبساطة اشتقاقها يمكن توظيفها في توضيح الأساليب المستخدمة في إنشاء بعض الأساليب الأكثر تعقيدًا، دون اللجوء إلى التعقيدات الجبرية المرافقة لعملية الإنشاء هذه.

وتهدف طريقة أويلر إلى إيجاد تقريب لمسألة القيمة الابتدائية ذات العرض الجيد

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \tag{6.5}$$

في الحقيقة. إن تقريبًا متصلًا للحل $y(t)$ لن يظهر. وبدلًا من ذلك فإن تقريبات إلى y ستتولد عند قيم مختلفة تدعى نقاط ميش (نقاطًا متناغمة) mesh points في الفترة $[a, b]$. وبمجرد إيجاد الحل التقريبي عند النقاط. فإنه يمكن إيجاد الحل التقريبي عند النقاط الأخرى في الفترة من خلال الاستكمال الداخلي.

في البداية نشترط توزع النقاط المتناغمة بالتساوي في الفترة $[a, b]$. وهذا الشرط مضمون من خلال اختيار عدد صحيح موجب N واختيار النقاط المتناغمة mesh points لكلٍّ من

$$t_i = a + ih \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N$$

المسافة الموحدة ما بين النقاط $h = (b - a)/N = t_{i+1} - t_i$ تسمى سعة الخطوة step size.

يُعد ليونارد أويلر (1707 – 1783) Leonhard Euler من أكثر المتميزين الرياضيين. وكان أول من عرض للمجتمع الرياضي استخدام طرق الفرق الابتدائي لتقريب حل المعادلات التفاضلية.

سنستخدم مبرهنة تايلور لاشتقاق طريقة أويلر. افترض أن $y(t)$ الحل الوحيد للمعادلة (6.5) له مشتقتان متصلتان على $[a, b]$. من ثم فإنه لكلٍّ من $i = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\xi_i)$$

لعدد ما ξ_i ضمن (t_i, t_{i+1}). وحيث $h = t_{i+1} - t_i$ يكون لدينا

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

ولأن $y(t)$ يحقق المعادلة التفاضلية (6.5)، فإن

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i) \tag{7.5}$$

طريقة أويلر تبني $w_i \approx y(t_i)$ لكلٍّ من $i = 1, 2, \ldots, N$ ومن خلال حذف الجزء المتبقي فإن طريقة أويلر تكون

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{8.5}$$

تسمى المعادلة (8.5) بمعادلة الفرق difference equation وهي مرافقة لطريقة أويلر. كذلك وكما سنرى مؤخرًا في هذا الفصل. فإن المبرهنة وحل معادلات الفرق توازي –بجوانب عدة– المبرهنة وحل المعادلات التفاضلية. تنفذ الخوارزمية (5.1) طريقة أويلر.

ALGORITHM
الخوارزمية
5.1

طريقة أويلر Euler's Method

لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

عند $(N + 1)$ من الكرّات متساوية التباعد في الفترة $[a, b]$:

المدخلات: نقاط نهاية a و b، عدد صحيح N، شرط ابتدائي α.

المخرجات: التقريب w إلى y عند $(N + 1)$ من القيم لـ t.

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = (b - a)/N$

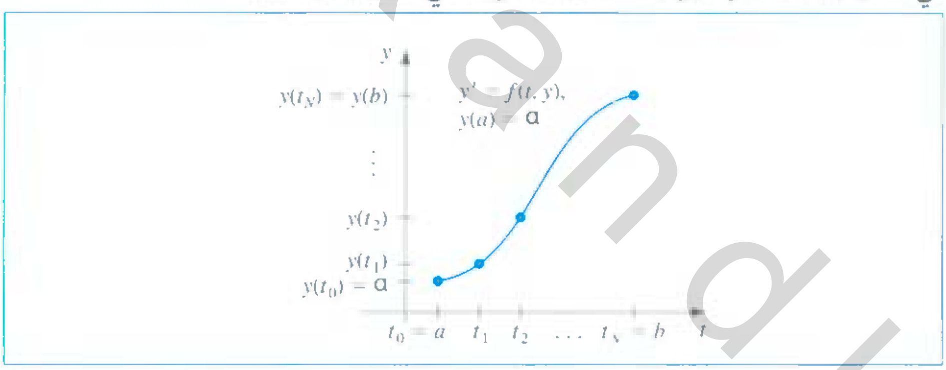
	$t = a$ $w = \alpha$ المخرجات (t, w).
2	لكلِّ من $i = 1, 2, \dots, N$ طبق الخطوتين 3 و4.
3	ضع $w = w + hf(t, w)$ (احسب w_i). $t = a + ih$ (احسب t_i).
4	المخرجات (t, w).
5	توقف.

ولتفسير طريقة أويلر هندسيًا، انظر أنه عندما يكون التقريب w_i قريبًا من $y(t_i)$، بأن افترض كون المسألة جيدة العرض يؤدي إلى

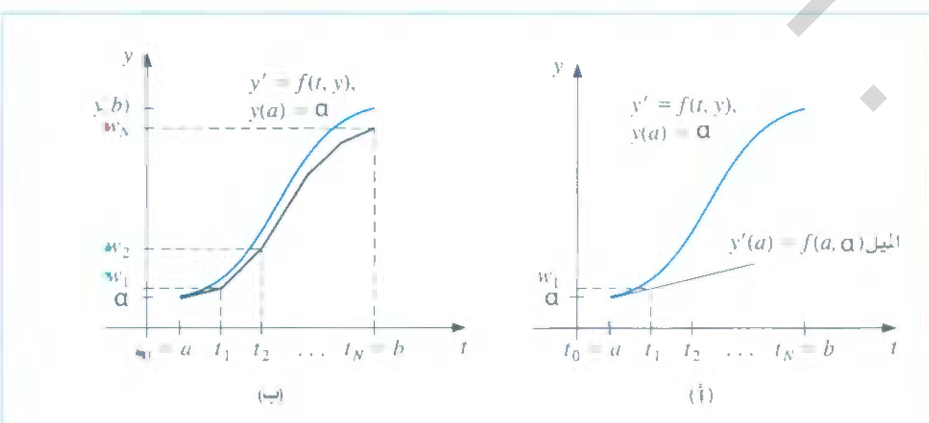
$$f(t_i, w_i) \approx y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$$

انظر الرسم البياني للدالة $y(t_i)$ الذي يبرز في شكل (2.5). وإحدى خطوات طريقة أويلر تظهر في شكل (أ) (3.5). وتظهر سلسلة من الخطوات في شكل (ب) (3.5)

شكل 2.5



شكل 3.5



مثال 1 افترض استخدام طريقة أويلر لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y - t^2 + 1 \quad ,0 \le t \le 2 \quad ,y(0) = 0.5$$

مع $N = 10$. لذا فإن $h = 0.2, t_i = 0.2i, w_0 = 0.5$

و $w_{i+1} = w_i + h(w_i - t_i^2 + 1) = w_i + 0.2[w_i - 0.04i^2 + 1] = 1.2w_i - 0.008i^2 + 0.2$

لكلّ من $i = 0, 1, \ldots, 9$. الحل الصحيح هو $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$. يبين جدول (1.5) المقارنة ما بين القيم المقربة t_i والقيم الحقيقية. ■

جدول 1.5

t_i	w_i	$y_i = y(t_i)$	$\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874

انظر أن الخطأ يزداد تدريجيًا كلما ازداد t. وإن نمو هذا الخطأ تحت السيطرة هو تمهيدية ثبات طريقة أويلر، التي تؤدي إلى أنه من المتوقع نمو الخطأ على نحو ليس أسوأ من المنحنى الخطي.

وعلى الرغم من أن طريقة أويلر ليست دقيقة كفاية للتحذير من استخدامها عند التطبيق، إلا أنها مبدئيًا وافية لتحليل الخطأ الناتج من تطبيقها. وسنتطرق إلى تحليل الخطأ لطرائق أدق في فصول آتية تتبع نفس المنحنى، لكنها أكثر تعقيدًا.

لاشتقاق حد للخطأ لطريقة أويلر، نحتاج إلى نتيجتين حسابيتين.

تمهيدية 7.5 لكل $x \ge -1$ ولكل عدد موجب m، لدينا $0 \le (1+x)^m \le e^{mx}$. ■

البرهان بتطبيق مبرهنة تايلور مع $f(x) = e^x, x_0 = 0$، و $n = 1$ نحصل على

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 e^{\xi}$$

حيث ξ ما بين x وصفر. لذا

$$0 \le 1 + x \le 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 e^{\xi} = e^x$$

ولكون $1 + x \ge 0$، فإن

$$0 \le (1+x)^m \le (e^x)^m = e^{mx}$$

■ ■ ■

تمهيدية 8.5

إذا كان s و t عددين حقيقيين. وكانت $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ متتالية تحقق $a_0 \geq -t/s$. وكان

$$a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \tag{9.5}$$

فإن

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

البرهان عند عدد صحيح محدد i. تؤدي المتباينة (9.5) إلى

$$\begin{aligned} a_{i+1} &\leq (1+s)a_i + t \\ &\leq (1+s)[(1+s)a_{i-1} + t] + t \\ &\leq (1+s)\{(1+s)[(1+s)a_{i-2} + t] + t\} + t \\ &\vdots \\ &\leq (1+s)^{i+1}a_0 + [1 + (1+s) + (1+s)^2 + \cdots + (1+s)^i]t \end{aligned}$$

ولكن

$$1 + (1+s) + (1+s)^2 + \cdots + (1+s)^i = \sum_{j=0}^{i}(1+s)^j$$

عبارة عن سلسلة هندسية تتناسب مع $(1+s)$ ومجموعها

$$\frac{1-(1+s)^{i+1}}{1-(1+s)} = \frac{1}{s}[(1+s)^{i+1} - 1]$$

لذا يكون

$$a_{i+1} \leq (1+s)^{i+1}a_0 + \frac{(1+s)^{i+1}-1}{s}t = (1+s)^{i+1}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

وباستخدام التمهيدية (7.5) مع $x = s$ و $m = i+1$ نحصل على

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

■ ■ ■

مبرهنة 9.5

افترض f متصلة وتحقق شرط لبسشتز بثابت L على

$$D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

وافترض وجود ثابت M يحقق

$$|y''(t)| \leq M \quad \text{لكل} \quad t \in [a, b]$$

ولنفترض أن $y(t)$ الحل الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

وأن $w_0, w_1, \ldots, w_N$ عبارة عن تقريبات مولدة بطريقة أويلر لعدد صحيح موجب N. عندئذ، لكل $i = 0, 1, 2, \ldots, N$، لدينا

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i-a)} - 1\right] \tag{10.5}$$

البرهان عندما $i = 0$ فإن النتائج صحيحة تمامًا، لأن $y(t_0) = w_0 = \alpha$.

من المعادلة (7.5)، لدينا لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N-1$،

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

ومن المعادلات في (8.5)، لدينا

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

وبناءً على ذلك، يكون لدينا باستخدام التعبير $y_i = y(t_i)$ و $y_{i+1} = y(t_{i+1})$

$$y_{i+1} - w_{i+1} = y_i - w_i + h[f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)] + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

و

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq |y_i - w_i| + h|f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_i)|$$

وحيث يحقق f شرط لبشتز في المتغير الثاني مع الثابت L وإن $|y''(t)| \leq M$، يكون لدينا

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq (1 + hL)|y_i - w_i| + \frac{h^2M}{2}$$

وبالرجوع إلى التمهيدية (8.5) وجعل $s = hL, t = h^2M/2$ و $a_j = |y_j - w_j|$، لكلٍّ من $j = 0, 1, \ldots, N$، نرى أن

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq e^{(i+1)hL}\left(|y_0 - w_0| + \frac{h^2M}{2hL}\right) - \frac{h^2M}{2hL}$$

ولأن $|y_0 - w_0| = 0$ و $(i+1)h = t_{i+1} - t_0 = t_{i+1} - a$، يكون لدينا

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq \frac{hM}{2L}\left(e^{(t_{i+1}-a)L} - 1\right)$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

وتكمن نقطة الضعف في المبرهنة (9.5) في المتطلب المتضمن وجوب معرفة الحد للمشتقة الثانية للحل. وعلى الرغم من أن هذا الشرط يمنعنا من إيجاد حد خطأ منطقي، إلا أنه يجب ملاحظة إذا كان كل من $\partial f/\partial t$ و $\partial f/\partial y$ موجودًا، وعندئذ فإن قاعدة السلسلة للتفاضل الجزئي تؤدي إلى

$$y''(t) = \frac{dy'}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \cdot f(t, y(t))$$

لذلك فمن المحتمل في بعض الأحيان إيجاد حد خطأ لـ $y''(t)$ دون معرفة صريحة لـ $y(t)$.

ورجوعًا إلى مسألة القيمة الابتدائية

مثال 2

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

نرى من مثال (1) أنه ما دام $f(t, y) = y - t^2 + 1$. فلدينا $\partial f(t, y)/\partial y = 1$ لكل قيم y لذا $L = 1$. الحل الصحيح لهذه المسألة هو $y(t) = (t+1)^2 - \frac{1}{2}e^t$ لذلك $y''(t) = 2 - 0.5e^t$ و $|y''(t)| \le 0.5e^2 - 2,$ لكل $t \in [0, 2]$.

واستخدام اللامساواة في حد الخطأ لطريقة أويلر مع $h = 0.2, L = 1$ و $M = 0.5e^2 - 2$ يعطينا

$$|y_i - w_i| \le 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{t_i} - 1)$$

يعطي جدول (2.5) الخطأ الحقيقي المستخرج في مثال (1) معًا مع حد الخطأ هذا. انظر أنه حتى مع استخدام الحد الصحيح للمشتقة الثانية للحل، يتضح أن حد الخطأ أكبر من الخطأ الحقيقي. ■

جدول 2.5

t_i	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
الخطأ الفعلي	0.02930	0.06209	0.09854	0.13875	0.18268	0.23013	0.28063	0.33336	0.38702	0.43969
حد الخطأ	0.03752	0.08334	0.13931	0.20767	0.29117	0.39315	0.51771	0.66985	0.85568	1.08264

إن أهمية صيغة حد الخطأ المعطاة في المبرهنة (9.5) تكمن في أن الحد يعتمد خطيًا على سعة الخطوة h. وبناءً على ذلك فإن اضمحلال سعة الخطوة يحتم في المقابل عطاء دقة أكبر للتقريبات.

أما الذي تم تجاهله في تمهيدية المبرهنة (9.5) فهو الأثر الذي يلعبه خطأ التدوير في اختيار سعة الخطوة. وكلما كانت h أصغر، فإن حسابات أكثر ستغدو ضرورية وخطأ تدوير أكبر سيكون متوقعا. إذن فإن صيغة معادلة الفرق هي

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

لا تستخدم لحساب y_i التقريب للحل عند نقطة الشبكة t_i. وبدلًا من ذلك نستخدم معادلة على الصيغة

$$u_0 = \alpha + \delta_0$$

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i) + \delta_{i+1} \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (11.5)$$

حيث ترمز δ_i إلى خطأ التدوير المترافق مع u_i. وباستخدام طرائق مشابهة لتلك التي في برهان المبرهنة (9.5)، نتمكن من إنتاج حد خطأ لتقريبات إلى y_i محدودة الخانات ومعطاة من خلال طريقة أويلر.

مبرهنة 10.5

ليكن $y(t)$ الحل الوحيد وحيد لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha \qquad (12.5)$$

و $u_0, u_1, \ldots, u_N$ التقريبات التي وُجِدت باستخدام المعادلة (11.5). إذا كان $|\delta_i| < \delta$ لكلٍّ من

$i = 0, 1, \ldots, N$ وفرضيات المبرهنة (9.5) متحققة في المعادلة (12.5)، فإن

$$|y(t_i) - u_i| \le \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)\left[e^{L(t_i-a)} - 1\right] + |\delta_0| e^{L(t_i-a)} \qquad (13.5)$$

لكلٍّ من $i = 0, 1, \ldots, N$. ■

إن حد الخطأ (13.5) لم يعد خطيًا في h. ولأن

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right) = \infty$$

فمن المتوقع أن يكون الخطأ كبيرا مقابل قيم صغيرة نسبيًا لـ h. ويمكن استخدام التفاضل والتكامل لتحديد حد أدنى لسعة الخطوة h. وبجعل $E(h) = (hM/2) + (\delta/h)$. هذا يؤدي إلى $E'(h) = (M/2) - (\delta/h^2)$.

إذا كان $h < \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$ فإن $E'(h) < 0$ و $E(h)$ يكون متناقصًا.

إذا كان $h > \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$ فإن $E'(h) > 0$ و $E(h)$ يكون متزايدًا.

الحد الأدنى لقيمة $E(h)$ تظهر عندما

$$h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}} \qquad (14.5)$$

وتخفيض h عن هذه القيمة يميل نحو زيادة الخطأ التام في التقريب. ومن الطبيعي أن تكون قيمة δ صغيرة نسبيًا. لرتبة أن حد الخطأ هذا لـ h لا يؤثر في عمل طريقة أويلر.

مجموعة التمارين 2.5 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$ عند $h = 0.5$

ب. $y' = 1 + (t-y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1$ عند $h = 0.5$

ج. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.25$

د. $y' = \cos 2t + \sin 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.25$

2. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = e^{t-y}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.5$

ب. $y' = \dfrac{1+t}{1+y}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.5$

ج. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 2$ عند $h = 0.25$

د. $y' = t^{-2}(\sin 2t - 2ty), \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$ عند $h = 0.25$

3. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (1) معطاة هنا. قارن الخطأ الحقيقي بحد الخطأ عند كل خطوة:

أ. $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ ب. $y(t) = t + (1/1 - t)$

ج. $y(t) = t\ln t + 2t$ د. $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$

4. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (2) معطاة هنا. قارن الخطأ الحقيقي بحد الخطأ عند كل خطوة:

أ. $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$ ب. $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$

ج. $y(t) = \left(t - 2 + \sqrt{2}ee^{-\frac{t}{2}}\right)^2$ د. $y(t) = \dfrac{4 + \cos 2 - \cos 2t}{2t^2}$

5. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$ عند $h = 0.2$

ج. $y' = -(y + 1)(y + 3), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -2$ عند $h = 0.2$

د. $y' = -5y + 5t^2 + 2t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}$ عند $h = 0.1$

6. استخدم طريقة أويلر لتقريب الحلول لكلٍّ من مسائل القيمة الابتدائية الآتية:

أ. $y' = \dfrac{2 - 2ty}{t^2 + 1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

ب. $y' = \dfrac{y^2}{1 + t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \dfrac{-1}{\ln 2}$ عند $h = 0.1$

ج. $y' = t^{-1}(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$ عند $h = 0.2$

د. $y' = -ty + 4ty^{-1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$ عند $h = 0.1$

7. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (5) معطاة هنا. احسب الخطأ الحقيقي في تقريبات التمرين (5)

أ. $y(t) = \dfrac{t}{1 + \ln t}$ ب. $y(t) = t\tan(\ln t)$

ج. $y(t) = -3 + \dfrac{2}{1 + e^{-2t}}$ د. $y(t) = t^2 + \dfrac{1}{3}e^{-5t}$

8. الحلول الحقيقية لمسائل القيمة الابتدائية في التمرين (6) معطاة هنا. احسب الخطأ الحقيقي في تقريبات التمرين (5):

أ. $y(t) = \dfrac{2t + 1}{t^2 + 1}$ ب. $y(t) = \dfrac{-1}{\ln(t + 1)}$ ج. $y(t) = \dfrac{2t}{1 - 2t}$ د. $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$

9. افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0$$

مع حل صحيح $y(t) = t^2(e^t - e)$.

أ. استخدم طريقة أويلر مع $h = 0.1$ لتقريب الحل. وقارنه بالقيمة الحقيقية لـ y.

ب. استخدم الجواب الذي نتج في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم y الآتية. وقارنها بالقيم الحقيقية:

1. $y(1.04)$ 2. $y(1.55)$ 3. $y(1.97)$

ج. احسب قيمة h الضرورية لـ $|y(t_i) - w_i| \le 0.1$، مستخدمًا المعادلة (10.5).

10. افترض مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -1$$

مع حل صحيح $y(t) = -1/t$:

أ. استخدم طريقة أويلر مع $h = 0.05$ لتقريب الحل، وقارنه بالقيمة الحقيقية لـ y.

ب. استخدم الجواب الذي نتج في الفقرة (أ) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم y الآتية وقارنها بالقيم الحقيقية:

1. $y(1.052)$ 2. $y(1.555)$ 3. $y(1.978)$

ج. احسب قيمة h الضرورية لـ $|y(t_i) - w_i| \le 0.05$، مستخدماً المعادلة (10.5).

11. افترض مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \le t \le 5, \quad y(0) = 1$$

مع حل صحيح $y(t) = e^{-t} + t$:

أ. اكتب تقريباً إلى $y(5)$ مستخدماً طريقة أويلر مع $h = 0.2, h = 0.1$ و $h = 0.05$.

ب. حدّد قيمة h المثلى لاستخدامها في حساب $y(5)$، مفترضاً $\delta = 10^{-6}$، وأن المعادلة (14.5) متحققة.

12. افترض مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -10y, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 1$$

التي لها حل $y(t) = e^{-10t}$. ماذا يحدث عند تطبيق طريقة أويلر لهذه المسألة مع $h = 0.1$؟ هل هذا السلوك يخالف المبرهنة (9.5)؟

13. استخدم نتائج التمرين (5) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$ الآتية، وقارن التقريبات الناتجة بالقيم الحقيقية الناتجة من استخدام الدوال المعطاة في التمرين (7):

أ. $y(1.25)$ و $y(1.93)$ ب. $y(2.1)$ و $y(2.75)$

ج. $y(1.4)$ و $y(1.93)$ د. $y(0.54)$ و $y(0.94)$

14. استخدم نتائج التمرين (6) والاستكمال الداخلي الخطي لتقريب قيم $y(t)$ الآتية، وقارن التقريبات الناتجة بالقيم الحقيقية الناتجة من استخدام الدوال المعطاة في التمرين (8):

أ. $y(0.25)$ و $y(0.93)$ ب. $y(1.25)$ و $y(1.93)$

ج. $y(2.10)$ و $y(2.75)$ د. $y(0.54)$ و $y(0.94)$

15. ليكن $E(h) = \dfrac{hM}{2} + \dfrac{\delta}{h}$:

أ. لمسألة القيمة الابتدائية $y' = -y + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$

احسب قيمة h لتصغير $E(h)$. افترض $\delta = 5 \times 10^{-(n+1)}$ لو استخدمت حساب n-digit في الفقرة (ج).

ب. للقيمة المثلى لـ h والمحسوبة في (أ). استخدم المعادلة (13.5) لحساب الخطأ الأدنى الذي يمكن إيجاده.

ج. قارن الخطأ الحقيقي الناتج باستخدام $h = 0.1$ و $h = 0.01$ بالخطأ الأدنى في الفقرة (ب). هل بإمكانك تفسير النتائج؟

16. في دائرة كهربائية معرضة لفولتية ξ لها مقاومة R، ومعامل حث L، وسعة كهربائية C في وضع التوازي، فإن التيار i يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{L}\xi$$

افترض $C = 0.3$ farads، $R = 1.4$ ohms، $L = 1.7$ henries، وأن الفولتية معطاة من خلال

$$\xi(t) = e^{-0.06\pi t}\sin(2t - \pi)$$