

وباستخدام صيغة ذات الحدين

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

نستطيع كتابة الصيغة عن $P_n(x)$ على نحو مدمج وعلى الصورة الآتية:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k] \quad (11.3)$$

إن صيغة نيوتن للفرق الأمامي Newton forward-difference formula تنشأ باعتماد تعبير الفرق الأمامي Δ الذي تناولناه في طريقة أيتكن Δ^2 . ومع هذه الصيغة

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h} \Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h} \left[\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h} \right] = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f(x_0)$$

وعموماً

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0)$$

وحيث إن $f[x_0] = f(x_0)$ ، فالصيغة (11.3) لها الصيغة الآتية:

صيغة نيوتن للفرق الأمامي Newton Forward-Difference Formula

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \quad (12.3)$$

فإذا أُعيد ترتيب نقاط الاستكمال الداخلي من الأخير إلى الأول بالشكل x_n, x_{n-1}, \dots, x_0 فإنه يمكننا كتابة صيغة الاستكمال الداخلي على النحو الآتي:

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + f[x_n, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)$$

وبالإضافة إلى ذلك، إذا كانت النقاط متساوية البعد فيما بينها مع $x = x_n + sh$ فإن $x = x_i + (s+n-i)h$ و

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_n + sh) \\ &= f[x_n] + sh f[x_n, x_{n-1}] + s(s+1)h^2 f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \dots \\ &\quad + s(s+1)\cdots(s+n-1)h^n f[x_n, \dots, x_0]. \end{aligned}$$

وهذا يستخدم لاشتقاق صيغة تطبيقية أكثر شيوعاً ومعروفة بـ (صيغة نيوتن للفرق المتراجع) "Newton backward-difference formula". ولشرح هذه الصيغة، نحتاج إلى التعريف الآتي:

تعريف 7.3

إذا كان لدينا المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ فنرمز للفرق المتراجع بالرمز ∇p_n (يقرأ $nabla p_n$)، حيث

$$\nabla p_n = p_n - p_{n-1} \quad \text{لكل } n \geq 1$$

وتعرف القوى العليا إرجاعياً كالآتي:

$$k \geq 2 \quad \nabla^k p_n = \nabla(\nabla^{k-1} p_n)$$

يؤدي تعريف (7.3) إلى

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h} \nabla f(x_n), \quad f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 f(x_n)$$

وعموماً

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!h^k} \nabla^k f(x_n)$$

وأخيراً

$$P_n(x) = f[x_n] + s \nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2} \nabla^2 f(x_n) + \dots + \frac{s(s+1) \dots (s+n-1)}{n!} \nabla^n f(x_n)$$

وإذا وسعنا صيغة ذات الحدين لتشمل قيم s الحقيقية جميعها يجعل

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1) \dots (-s-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{s(s+1) \dots (s+k-1)}{k!}$$

فإن

$$P_n(x) = f[x_n] + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla f(x_n) + (-1)^2 \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n) + \dots + (-1)^n \binom{-s}{n} \nabla^n f(x_n)$$

تعطي النتيجة الآتية:

صيغة نيوتن للفرق المتراجع Newton Backward-Difference Formula

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n) \quad (13.3)$$

يقابل جدول (9.3) للفرق المنقسم البيانات في مثال (1):

مثال 2

جدول 9.3

الفرق المنقسم للرابعة	الفرق المنقسم للثالثة	الفرق المنقسم الثانية	الفرق المنقسم الأولى		
				0.7651977	1.0
			-0.4837057		
		-0.1087339		0.6200860	1.3
	0.0658784		-0.5489460		
0.0018251		-0.0494433		0.4554022	1.6
	0.0680685		-0.5786120		
		0.0118183		0.2818186	1.9
			-0.5715210		
				0.1103623	2.2

تستخدم كثيرة حدود استكمال داخلي واحد فقط من الرتبة 4 في أكثر نقاط البيانات الخمس هذه. لكننا سننظم نقاط البيانات لإيجاد أفضل تقريبات استكمال داخلي برتب 1 و 2 و 3. وهذا سوف يعطينا تقريباً دقيقاً من الرتبة الرابعة لقيمة x المعلومة.

فإذا تطلب الأمر تقريباً إلى $f(1.1)$ فإن الاختيار المعقول للنقاط هو

$$x_0 = 1.0, x_1 = 1.3, x_2 = 1.6, x_3 = 1.9, x_4 = 2.2$$

لأن هذا الاختيار يعمل في اتجاه الاستخدام المبكر لنقاط البيانات الأقرب إلى $x = 1.1$. ويعمل في اتجاه استخدام الفرق المنقسم الرابع أيضاً. وهذا يؤدي إلى أن $h = 0.3$ و $s = \frac{1}{3}$ ، ومن ثم فإن صيغة نيوتن للفرق المنقسم المتراجع تستخدم مع الفروقات المنقسمة التي لها سيطرة قوية في جدول (9.3).

$$\begin{aligned} P_4(1.1) &= P_4(1.0 + \frac{1}{3}(0.3)) = 0.7651977 + \frac{1}{3}(0.3)(-0.4837057) \\ &+ \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(0.3)^2(-0.1087339) \\ &+ \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(0.3)^3(0.0658784) \\ &+ \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3})(0.3)^4(0.0018251) = 0.7196460 \end{aligned}$$

ولتقريب قيمة عندما تكون x قريبة من نهاية القيمة الجدولية، $x = 2.0$ على سبيل المثال، فإننا نرغب مرة أخرى في الاستخدام المبكر لنقاط البيانات الأقرب إلى x . ويتطلب هذا استخدام صيغة نيوتن للفرق المنقسم المتراجع مع $s = -\frac{2}{3}$ ، وتكون الفروقات المنقسمة في جدول (9.3) الموضوع تحتها خط هي

$$\begin{aligned} P_4(2.0) &= P_4(2.2 - \frac{2}{3}(0.3)) = 0.1103623 - \frac{2}{3}(0.3)(-0.5715210) \\ &- \frac{2}{3}(\frac{1}{3})(0.3)^2(0.0118183) - \frac{2}{3}(\frac{1}{3})(\frac{4}{3})(0.3)^3(0.0680685) \\ &- \frac{2}{3}(\frac{1}{3})(\frac{4}{3})(\frac{7}{3})(0.3)^4(0.0018251) = 0.2238754 \end{aligned}$$

ليست صيغ التقدم والتراجع مناسبة لتقريب $f(x)$ عندما تكون x قرب مركز الجدول؛ لأن استخدام أي من طريقتي التقدم أو التراجع في حالة وجود الفرق بأعلى مرتبة سوف يحول دون اقتراب x_0 من x . وهذه أعداد من صيغ الفرق المنقسم متوافرة لهذه الحالة، وكل واحدة منها لها ظروف يكون استخدامها أكثر إيجابية، وتعرف هذه الطرائق بـ "صيغ الفرق المركزي" "centered-difference formula". سنستعرض هنا صيغة فرق مركزي واحدة هي "طريقة ستيرلنك" "Stirling's method"، ونوجه القارئ مرة أخرى إلى [Hild] إذا أراد تغطية المادة تماماً.

نستخدم x_0 بالقرب من النقطة المراد تقريبها بالنسبة إلى صيغ الفرق المركزي. ونعنون النقاط مباشرة أقل من x_0 لتكون x_1, x_2, \dots ، وتلك التي تكون مباشرة أكبر من x_0 لتكون x_{-1}, x_{-2}, \dots . ووفقاً لهذا الأسلوب، فإن صيغة ستيرلنك تكون

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_{2m+1}(x) = f[x_0] + \frac{sh}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]) + s^2 h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] \quad (14.3) \\ &+ \frac{s(s^2 - 1)h^3}{2} f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2] + \dots \\ &+ s^2(s^2 - 1)(s^2 - 4) \dots (s^2 - (m - 1)^2) h^{2m} f[x_{-m}, \dots, x_m] \\ &+ \frac{s(s^2 - 1) \dots (s^2 - m^2) h^{2m+1}}{2} (f[x_{-m-1}, \dots, x_m] + f[x_{-m}, \dots, x_{m+1}]) \end{aligned}$$

نشر جيمس ستيرلنك

James Stirling (1770- 392)

هذا إلى جانب صيغ عديدة أخرى في

Methodus Differentialis عام

1730

وتضمن عمله هذا تقنيات لتسريع

تقارب سلاسل مختلفة

نستخدم الصيغة نفسها إذا كان $n = 2m + 1$ عددًا فرديًا، وإذا كان $n = 2m$ عددًا زوجيًا ولكننا نحذف السطر الأخير. والمدخلات المستخدمة لهذه الصيغة مخطوط تحتها في جدول (10.3).

الفروق المنقسمة الرابعة	الفروق المنقسمة الثالثة	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الأولى	$f(x)$	x
				$f[x_{-2}]$	x_{-2}
			$f[x_{-2}, x_{-1}]$	$f[x_{-1}]$	x_{-1}
	$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1]$	$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0]$	$f[x_{-1}, x_0]$	$f[x_0]$	x_0
$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2]$	$f[x_{-1}, x_0, x_1]$	$f[x_{-1}, x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_1]$	x_1
	$f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_2]$	x_2

جدول 10.3

افتراض وجود جدول للبيانات المعطاة في الأمثلة السابقة. لاستخدام صيغة ستيرنك لتقريب $f(1.5)$ مع $x_0 = 1.6$ ؛ نستخدم المدخلات المخطوط تحتها في جدول الفرون (11.3).

مثال 3

الفروق المنقسمة الرابعة	الفروق المنقسمة الثالثة	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الأولى	$f(x)$	x
				0.7651977	1.0
			-0.4837057	0.6200860	1.3
	0.0658784	-0.1087339	-0.5489460	0.4554022	1.6
0.0018251	0.0680685	-0.0494433	-0.5786120	0.2818186	1.9
		0.0118183	-0.5715210	0.1103623	2.2

جدول 11.3

والصيغة باستخدام $h = 0.3$ ، $x_0 = 1.6$ ، $s = -\frac{1}{3}$ تصبح

$$\begin{aligned}
 f(1.5) &\approx P_4\left(1.6 + \left(-\frac{1}{3}\right)(0.3)\right) \\
 &= 0.4554022 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{0.3}{2}\right)\left((-0.5489460) + (-0.5786120)\right) \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{3}\right)^2(0.3)^2(-0.0494433) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^3(0.0658784 + 0.0680685) \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^4(0.0018251) = 0.5118200
 \end{aligned}$$

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 2.3

1. استخدم الصيغة (10.3) أو الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3
1 ، 2 للبيانات الآتية، أجر تقريب القيم المحددة مستخدماً كل واحدة من كثيرات الحدود:

$$أ. f(8.4) = 18.82091 \text{ إذا كان } f(8.7) = 18.50515, f(8.6) = 17.56492, f(8.3) = 16.94410, f(8.1) = 16.94410.$$

ب. $f(0.9) = 0.65809197$ إذا كان $f(1.0) = 0.22363362, f(0.8) = 0.01375227, f(0.7) = -0.17694460, f(0.6) = -0.65809197$.

2. استخدم الصيغة (17.3) أو الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3
1 ، 2 للبيانات الآتية، أجر تقريب القيم المحددة مستخدماً كل واحدة من كثيرات الحدود:

$$أ. f(0.43) = 4.48169 \text{ إذا كان } f(0.75) = 2.71828, f(0.5) = 1.64872, f(0.25) = 1, f(0) = 1.$$

ب. $f(0) = 0.687500$ إذا كان $f(0.5) = 0.800781, f(0.25) = 1.33203, f(-0.25) = 1.93750, f(-0.5) = 1.93750$.

3. استخدم صيغة نيوتن للفرق الأمامي لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1
للبيانات الآتية، أجر تقريب القيم المحددة مستخدماً كل واحدة من كثيرات الحدود:

$$أ. f(-\frac{1}{3}) = 1.10100000 \text{ إذا كان } f(0) = 0.33493750, f(-0.25) = -0.0247500, f(-0.5) = -0.07181250, f(-0.75) = -0.07181250.$$

ب. $f(0.25) = 0.24842440$ إذا كان $f(0.4) = 0.00660095, f(0.3) = -0.28398668, f(0.2) = -0.62049958, f(0.1) = -0.62049958$.

4. استخدم صيغة نيوتن للفرق الأمامي لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1
للبيانات الآتية، أجر تقريب القيم المحددة مستخدماً كل واحدة من كثيرات الحدود:

$$أ. f(0.43) = 4.48169 \text{ إذا كان } f(0.75) = 2.71828, f(0.5) = 1.64872, f(0.25) = 1, f(0) = 1.$$

$$ب. f(0.18) = -0.81401972 \text{ إذا كان } f(0.3) = -0.56079734, f(0.2) = -0.29004986, f(0.1) = -0.29004986.$$

$$f(0.4) = -1.0526302$$

5. استخدم صيغة نيوتن للفرق الأمامي لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1
للبيانات الآتية، أجر تقريب القيم المحددة مستخدماً كل واحدة من كثيرات الحدود:

$$أ. f(-\frac{1}{3}) = 0.33493750 \text{ إذا كان } f(-0.25) = -0.02475000, f(-0.5) = -0.07181250, f(-0.75) = -0.07181250.$$

$$f(0) = 1.10100000$$

$$ب. f(0.25) = 0.24842440 \text{ إذا كان } f(0.3) = 0.00660095, f(0.2) = -0.28398668, f(0.1) = -0.62049958.$$

$$f(0.4) = 0.24842440$$

6. استخدم صيغة نيوتن للفرق المتراجع لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 ، 2 ، 1
للبيانات الآتية، أجر تقريب القيم المحددة مستخدماً كل واحدة من كثيرات الحدود:

$$أ. f(0.43) = 4.48169 \text{ إذا كان } f(0.75) = 2.71828, f(0.5) = 1.64872, f(0.25) = 1, f(0) = 1.$$

$$ب. f(0.25) = 1.0986123 \text{ إذا كان } f(0) = 1.0986123, f(-0.5) = 0.95802009, f(-1) = 0.86199480.$$

$$f(0.5) = 1.2943767$$

7. أ. استخدم الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 3 للنقاط غير

$f(x)$	x
5.30000	-0.1
2.00000	0.0
3.19000	0.2
1.00000	0.3

المتساوية التباعد والمعطاة في الجدول الآتي:

ب. أضف $f(0.35) = 0.97260$ إلى الجدول، وأنشئ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة 4.

8. أ. استخدم الخوارزمية (2.3) لإنشاء كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة 4 للنقطة غير المتساوية التباعد والمعطاة في الجدول الآتي:

$f(x)$	x
-6.00000	0.0
-5.89483	0.1
-5.65014	0.3
-5.17788	0.6
-4.28172	1.0

ب. أصف $f(1.1) = -3.99583$ إلى الجدول، وأنشئ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة 5.

9. أ. قرب $f(0.05)$ مستخدماً البيانات الآتية وصيغة نيوتن للفرق المنقسم الأمامي.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1.00000	1.22140	1.49182	1.82212	2.22554

ب. استخدم صيغة نيوتن للفرق المنقسم المتراجع لتقريب $f(0.65)$.

ج. استخدم صيغة ستيرنك لتقريب $f(0.43)$.

10. أثبت أن كثيرة الحدود التي تستكمل داخلياً هذه البيانات تكون من الرتبة 3.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	4	11	16	13	-4

11. أ. أثبت أن كثيرتي الحدود التكعيبتين

$$P(x) = 3 - 2(x+1) + 0(x+1)(x) + (x+1)(x)(x-1)$$

$$Q(x) = -1 + 4(x+2) - 3(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)(x)$$

كليهما تستكمل داخلياً البيانات الآتية:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

ب. لماذا لا تكون الفقرة (أ) مخالفة لخاصية وحدانية كثيرات حدود الاستكمال الداخلي؟

12. تحقق كثيرة الحدود $P(x)$ من الرتبة الرابعة ما يأتي: $\Delta^2 P(0) = 0$, $\Delta^3 P(0) = 6$, $\Delta^4 P(0) = 24$.

حيث $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$. احسب $\Delta^2 P(10)$.

13. البيانات الآتية معطاة لكثيرة حدود $P(x)$ مجهولة الرتبة

x	0	1	2
$P(x)$	2	-1	4

14. حدّد معامل x^2 في $P(x)$ إذا كانت الفروقات الأمامية جميعها من الرتبة لثالثة تساوي 1.

البيانات الآتية معطاة لكثيرة حدود $P(x)$ مجهولة الرتبة

x	0	1	2	3
$P(x)$	4	15	9	18

حدّد معامل x^3 في $P(x)$ إذا كانت الفروقات الأمامية جميعها من الرتبة الثالثة تساوي 1.

15. صيغة نيوتن للفرق الأمامي مستخدمة لتقريب $f(0.3)$ مع البيانات الآتية:

0.6	0.4	0.2	0.0	x
51.0	30.0	21.0	15.0	$f(x)$

لنفترض أننا اكتشفنا إنقاص $f(0.4)$ بمقدار 10 وزيادة $f(0.6)$ بمقدار 5. بأي مقدار سيتغير تقريب $f(0.3)$ ؟

16. تعطي صيغة نيوتن للفرق المنقسم كثيرة حدود استكمال داخلي بالنسبة إلى الدالة f

$$P_3(x) = 1 + 4x + 4x(x - 0.25) + \frac{16}{3}x(x - 0.25)(x - 0.5)$$

على النقاط $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75$. أوجد $f(0.75)$.

17. الفروقات المنقسمة الارتجاعية بالنسبة إلى الدالة f معطاة أدناه.

	$f[x_0]$	$x_0 = 0.0$
	$f[x_0, x_1]$	
$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$	$f[x_1]$	$x_1 = 0.4$
	$f[x_1, x_2] = 10$	
	$f[x_2] = 6$	$x_2 = 0.7$

حدّد المدخلات المفقودة في الجدول.

18. أ. تضمنت مقدمة هذا الباب جدولاً يضمّ عدد سكان الولايات المتحدة للأعوام 1940 حتى

1990. استخدم فروقات منقسمة مناسبة لتقريب عدد السكان في السنوات 1930 و 1965 و 2010.

ب. كان عدد السكان عام 1930 كالتالي 123,203,000 تقريباً. فما دقة أرقام السنوات 1965 و 2010 في رأيك؟

19. ليكن

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

استخدم $P_n(x_2)$ لإثبات أن $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$.

20. أثبت أن $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$ لبعض $\xi(x)$.

إرشاد: من الصيغة (3.3)

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

مفترضين كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة $n+1$ على x, x_0, x_1, \dots, x_n ، يكون لدينا

$$f(x) = P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_n).$$

21. ليكن i_0, i_1, \dots, i_n إعادة ترتيب للأعداد الصحيحة $0, 1, \dots, n$. أثبت أن

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

إرشاد: افترض أن المعاملات الأمامية لكثيرة حدود لاجرانج من الرتبة n على البيانات

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$$

Hermite Interpolation

3.3 استكمال هرمايث الداخلي

كثيرات حدود التذبذب Osculating polynomials تعمم كثيرات حدود تايلور وكثيرات حدود لاجرانج كلها. لنفترض أن لدينا $n + 1$ من الأعداد المختلفة x_0, x_1, \dots, x_n في $[a, b]$ مع أعداد صحيحة غير سالبة m_0, m_1, \dots, m_n و $m_i = \max\{m_0, m_1, \dots, m_n\}$. كثيرة حدود التذبذب التي تقرب الدالة $f \in C^m[a, b]$ عند x_i ولكل $i = 0, \dots, n$ هي كثيرة حدود بأقل رتبة مع خاصية كونها تتفق مع الدالة f واشتقاقاتها كلها من الرتبة تساوي أو أقل من m_i عند x_i ورتبة كثيرة حدود التذبذب هذه تكون على الأكثر

$$M = \sum_{i=0}^n m_i + n$$

وإن عدد الشروط المطلوب تحققها هو $\sum_{i=0}^n m_i + (n + 1)$. وكثيرة حدود من الرتبة $M + 1$ من المعاملات التي يمكن استخدامها لتحقيق هذه الشروط.

لتكن x_0, x_1, \dots, x_n أعداداً مختلفة عددها $n + 1$ تنتمي إلى الفترة $[a, b]$. ون m_i عدد صحيح غير سالب يقابل x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ و $f \in C^m[a, b]$. بحيث $m = \max_{0 \leq i \leq n} m_i$. إن كثيرة حدود التذبذب التي تقرب f هي كثيرة حدود $P(x)$ بأقل رتبة مع كون

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k} \quad \text{ولكل } k = 0, 1, \dots, m_i \text{ و } i = 0, 1, \dots, n$$

لاحظ أنه عندما $n = 0$. فإن كثيرة حدود التذبذب التي تقرب f هي كثيرة حدود تايلور من الرتبة m_0 لـ f عند x_0 . وحينما $m_i = 0$ لكل i . فإن كثيرة حدود التذبذب هي كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة n التي تستكمل f داخلياً على x_0, x_1, \dots, x_n . وتعطي الحالة عندما $m_i = 1$ لكل $i = 0, 1, \dots, n$ كثيرات حدود هرمايث. وتتفق كثيرات الحدود هذه مع الدالة f عند x_0, x_1, \dots, x_n ولدالة محددة f . بالإضافة إلى ذلك، بما أن مشتقاتها الأولى تتفق ومثيلاتها في الدالة f . فإن لهما شكل الدالة نفسه $(x_i, f(x_i))$ في واقع توافق خطوط التماس لكثيرة الحدود ولدالة. ستقتصر دراستنا لكثيرات حدود التماس على هذه الحالة. ونفترض أولاً أن مبرهنة ما توضح صيغة كثيرات حدود هرمايث بالتحديد.

إذا كانت $f \in C^1[a, b]$ و $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ فإن كثيرة الحدود الوحيدة وبأقل رتبة المنفصلة مع f و f' عند x_0, \dots, x_n هي كثيرة حدود هرمايث من الرتبة $2n + 1$ على الأكثر

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^n f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$$

حيث إن $\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L_{n,j}^2(x)$ و $H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)] L_{n,j}^2(x)$

الكلمة اللاتينية Osculum

تعني "الثغر الصغير" أو "قبلة" عند تطبيقها على منحنى. وتشير إلى تماسات فقط ولها نفس الشكل استيفاء هرمايث الداخلي له هذه الخاصية. لأن مطابقة منحنى معلوم ومشتقته تدفع بمنحنى الاستيفاء الداخلي لتقبيل المنحنى المعلوم.

تعريف 8.3

كان شارلس هرمايث

Charles Hermite (1822-1901) قد عمل اكتشافات في جوانب عديدة وخصوصاً التحليل المركب ونظرية الأعداد وكان معروفاً ببرهانه عام 1873 أن e عبارة عن عدد غير معرف وفي عام 1882 استخدم لندمان Lin demann برهاناً مماثلاً لإثبات كون π هي عدد غير معرف أيضاً والذي أوضح أن "تربيع الدائرة" غير ممكن مع أدوات إقليدس القياسية

مبرهنة 9.3

قد أعطى هرمايث Hermite توضيحاً لكثيرة حدود التذبذب ضمن رسالة إلى كارل بورشاردت

Carl W. Borchardt عام 1878

حيث اعتاد إرسال نتائجهم إليه. وكان توضيحه هذا ذا قيمة تطبيقية لاستخدام تقنيات التكامل المركب لحل مسألة القيمة الحقيقية. انظر الصفحة

{#303} من {#303}

وتمثل $L_{n,j}(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n لمعامل لاجرانج من الرتبة j والمعروفة في الصيغة (2.3). بالإضافة إلى ذلك. إذا كان $f \in C^{2n+2}[a, b]$ فإن

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x-x_0)^2 \dots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi(x))$$

لبعض $\xi(x)$ (مجهولة عموماً) في الفترة (a, b) .

البرهان تذكر أولاً أن

$$\left. \begin{array}{l} 0 \text{ إذا كان } i \neq j \\ 1 \text{ إذا كان } i = j \end{array} \right\} = L_{n,j}(x_i)$$

ولذلك عندما $j \neq i$ فإن

$$\hat{H}_{n,j}(x_i) = 0 \quad \text{و} \quad H_{n,j}(x_i) = 0$$

حيث

$$\hat{H}_{n,i}(x_i) = (x_i - x_i) \cdot 12 = 0 \quad \text{و} \quad H_{n,i}(x_i) = [1 - 2(x_i - x_i)L'_{n,i}(x_i)] \cdot 1 = 1$$

نتيجة لذلك

$$H_{2n+1}(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n f(x_j) \cdot 0 + f(x_i) \cdot 1 + \sum_{j=0}^n f'(x_j) \cdot 0 = f(x_i)$$

لذا H_{2n+1} يتفق مع f عند x_0, x_1, \dots, x_n

ولإثبات توافق H_{2n+1} مع f' عند الرؤوس، لاحظ أولاً أن $L_{n,j}(x)$ هو عامل $H'_{n,j}(x)$. لذا $H'_{n,j}(x_i) = 0$ عندما $j \neq i$. بالإضافة إلى ذلك. عندما $i = j$ و $L_{n,i}(x_i) = 1$ يكون لدينا

$$\begin{aligned} H'_{n,i}(x_i) &= -2L'_{n,i}(x_i) \cdot L_{n,i}^2(x_i) + [1 - 2(x_i - x_i)L'_{n,i}(x_i)]2L_{n,i}(x_i)L'_{n,i}(x_i) \\ &= -2L'_{n,i}(x_i) + 2L'_{n,i}(x_i) = 0 \end{aligned}$$

عندئذ $H'_{n,j}(x_i) = 0$ لكل i و j .

وأخيراً

$$\begin{aligned} \hat{H}'_{n,j}(x_i) &= L_{n,j}^2(x_i) + (x_i - x_j)2L_{n,j}(x_i)L'_{n,j}(x_i) \\ &= L_{n,j}(x_i)[L_{n,j}(x_i) + 2(x_i - x_j)L'_{n,j}(x_i)] \end{aligned}$$

لذا $\hat{H}'_{n,i}(x_i) = 1$ و $\hat{H}'_{n,j}(x_i) = 0$ إذا كان $j \neq i$ وبتجميع هذه الحقائق يكون لدينا

$$H'_{2n+1}(x_i) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot 0 + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n f'(x_j) \cdot 0 + f'(x_i) \cdot 1 = f'(x_i)$$

وأخيراً يتوافق H_{2n+1} مع f و H'_{2n+1} مع f' عند x_0, x_1, \dots, x_n . لقد طلب برهنة وحدانية كثيرة

الحدود هذه وصيغة الخطأ في التمرين (11).

استخدمت كثيرة حدود هرمايت المتوافقة مع البيانات الموجودة في جدول (12.2) لإيجاد تقريب

إلى $f(1.5)$.

مثال 1

جدول 12.3

$f'(x_k)$	$f(x_k)$	x_k	k
-0.5220232	0.6200860	1.3	0
-0.5698959	0.4554022	1.6	1
-0.5811571	0.2818186	1.9	2

نحسب أولاً كثيرات حدود لاجرانج ومشتقاتها. وهذا يعطي

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}, \quad L'_{2,0}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{175}{9}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}, \quad L'_{2,1}(x) = \frac{-200}{9}x + \frac{320}{9}$$

و

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}, \quad L'_{2,2}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}$$

إن كثيرات حدود $H_{2,j}(x)$ و $\hat{H}_{2,j}(x)$ هي

$$H_{2,0}(x) = [1 - 2(x-1.3)(-5)] \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9} \right)^2$$

$$= (10x - 12) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9} \right)^2$$

$$H_{2,1}(x) = 1 \cdot \left(\frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9} \right)^2$$

$$H_{2,2}(x) = 10(2-x) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9} \right)^2$$

$$\hat{H}_{2,0}(x) = (x-1.3) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9} \right)^2$$

$$\hat{H}_{2,1}(x) = (x-1.6) \left(\frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9} \right)^2$$

$$\hat{H}_{2,2}(x) = (x-1.9) \left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9} \right)^2$$

وأخيراً

$$H_5(x) = 0.6200860H_{2,0}(x) + 0.4554022H_{2,1}(x) + 0.2818186H_{2,2}(x)$$

$$- 0.5220232\hat{H}_{2,0}(x) - 0.5698959\hat{H}_{2,1}(x) - 0.5811571\hat{H}_{2,2}(x)$$

$$\begin{aligned}
H_5(1.5) &= 0.6200860 \left(\frac{4}{27} \right) + 0.4554022 \left(\frac{64}{81} \right) + 0.2818186 \left(\frac{5}{81} \right) \\
&\quad - 0.5220232 \left(\frac{4}{405} \right) - 0.5698959 \left(\frac{-32}{405} \right) - 0.5811571 \left(\frac{-2}{405} \right) \\
&= 0.5118277
\end{aligned}$$

نتيجة دقيقة لكل مدى.

ومع أن المبرهنة (9.3) تهيئ توضيحاً كاملاً لكثيرات حدود هرمائيت. فمن الواضح في المثال (1) أن الحاجة إلى تحديد كثيرات حدود لاجرانج وحسابها واشتقاقاتها تجعل العملية مملة حتى مع قيم n الصغيرة. إن الطريقة البديلة لتوليد تقريبات هرمائيت تنشأ على صيغة نيوتن للفرق المنقسم للاستكمال الداخلي عدد (10.3) لكثيرة حدود لاجرانج عند x_0, x_1, \dots, x_n هي

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$$

والربط ما بين الفرق المنقسم من الرتبة n واشتقاق f هو كما في المبرهنة (6.3) من الفصل (2.3).

افتراض أن الأعداد المختلفة x_0, x_1, \dots, x_n معطاة مع قيم f و f' عند هذه الأعداد معاً. عرّف متتالية جديدة $z_0, z_1, \dots, z_{2n+1}$ بالصيغة $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ لكل $i = 0, 1, \dots, n$ وأنشئ جدول الفرق المنقسم بصيغة جدول (7.3). حيث يستخدم $z_0, z_1, \dots, z_{2n+1}$.

وحيث إن $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ لكل i ، فإننا لا نستطيع تعريف $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ بصيغة الفرق المنقسم. فلو افترضنا بالاستناد إلى المبرهنة (6.3) أن التعويض المقبول في هذه الحالة هو

$$f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(z_{2i}) = f'(x_i)$$

$$f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_n)$$

بدلاً من الفروقات المنقسمة الأولى غير المعرفة

$$f[z_0, z_1], f[z_2, z_3], \dots, f[z_{2n}, z_{2n+1}]$$

تنتج بقية الفروقات المنقسمة كالمعتاد. وتوظف الفروقات المنقسمة المناسبة في صيغة نيوتن للفرق المنقسم لاستكمال داخلي. ويبين جدول (13.3) المدخلات المستخدمة في أول ثلاثة أعمدة للفرق المنقسم عند تحديد كثيرة حدود هرمائيت $H_5(x)$ لـ x_0, x_1, x_2 . تنتج المدخلات الباقية بنفس الأسلوب وعلى نحو جدول (7.3). وكثيرة حدود هرمائيت هي

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, \dots, z_k](x - z_0)(x - z_1) \cdots (x - z_{k-1})$$

ويمكن إيجاد برهان ذلك في [Po, p. 56].

الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الأولى	$f(z)$	z
		$f[z_0] = f(x_0)$	$z_0 = x_0$
	$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	$f[z_1] = f(x_0)$	$z_1 = x_0$
$f[z_0, z_1, z_2] = \frac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$	$f[z_1, z_2] = \frac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	$f[z_2] = f(x_1)$	$z_2 = x_1$
$f[z_1, z_2, z_3] = \frac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$	$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	$f[z_3] = f(x_1)$	$z_3 = x_1$
$f[z_2, z_3, z_4] = \frac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$	$f[z_3, z_4] = \frac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	$f[z_4] = f(x_2)$	$z_4 = x_2$
$f[z_3, z_4, z_5] = \frac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$	$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	$f[z_5] = f(x_2)$	$z_5 = x_2$

جدول 13.3

تستخدم مدخلات جدول (14.3) بيانات المثال (1). وإن المدخلات التي تحتها خط هي البيانات المعطاة، وقد نتج الباقي باستخدام صيغة الفرق المنقسم المعيارية (9.3):

مثال 2

$$\begin{aligned}
 H_5(1.5) &= 1.6200860 + (1.5 - 1.3)(-0.5220232) + (1.5 - 1.3)^2(-0.0897427) \\
 &\quad + (1.5 - 1.3)^2(1.5 - 1.6)(0.0663657) \\
 &\quad + (1.5 - 1.3)^2(1.5 - 1.6)^2(0.0026663) \\
 &\quad + (1.5 - 1.3)^2(1.5 - 1.6)^2(1.5 - 1.9)(-0.0027738) \\
 &= 0.5118277.
 \end{aligned}$$

			<u>0.6200860</u>	<u>1.3</u>
			<u>-0.5220232</u>	
		-0.0897427	<u>0.6200860</u>	<u>1.3</u>
	0.0663657		<u>-0.5489460</u>	
	<u>0.0026663</u>	-0.0698330	<u>0.4554022</u>	<u>1.6</u>
<u>-0.0027738</u>	0.0679655		<u>-0.5698959</u>	
	<u>0.0010020</u>	-0.0290537	<u>0.4554022</u>	<u>1.6</u>
	0.0685667		<u>-0.5786120</u>	
		-0.0084837	<u>0.2818186</u>	<u>1.9</u>
			<u>-0.5811571</u>	
			<u>0.2818186</u>	<u>1.9</u>

جدول 14.3

ويمكن توسيع الأسلوب المستخدم في الخوارزمية (3.3) ليستخدم في تحديد كثيرات حدود تماس أخرى. ونجد مناقشة مختصرة حول تلك العملية في [Po, pp. 53-57].

استكمال هرميات الداخلي Hermite Interpolation

لإيجاد معامل كثيرة حدود هرميات للاستكمال الداخلي $H(x)$ على $(n+1)$ من الأعداد المختلفة x_0, \dots, x_n للدالة f :

المدخلات: أرقام x_0, x_1, \dots, x_n ، قيم $f(x_0), \dots, f(x_n)$ و $f'(x_0), \dots, f'(x_n)$

المخرجات: الأعداد $Q_{0,0}, Q_{1,1}, \dots, Q_{2n+1,2n+1}$ حيث

$$H(x) = Q_{0,0} + Q_{1,1}(x - x_0) + Q_{2,2}(x - x_0)^2 + Q_{3,3}(x - x_0)^2(x - x_1) \\ + Q_{4,4}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 + \dots \\ + Q_{2n+1,2n+1}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_{n-1})^2(x - x_n)$$

الخطوة	المصون
1	عند $i = 0, 1, \dots, n$ نفذ الخطوتين 2 و 3.
2	ضع $z_{2i} = x_i$ $z_{2i+1} = x_i$ $Q_{2i,0} = f(x_i)$ $Q_{2i+1,0} = f(x_i)$ $Q_{2i+1,1} = f'(x_i)$
3	إذا كان $i \neq 0$ فضع $Q_{2i,1} = \frac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}$
4	لقيم $i = 2, 3, \dots, 2n+1$ ولقيم $j = 2, 3, \dots, i$ فضع $Q_{i,j} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}$
5	المخرجات $(Q_{0,0}, Q_{1,1}, \dots, Q_{2n+1,2n+1})$ توقف.

ALGORITHM

الخوارزمية

3.3

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 3.3

1. استخدم مبرهنة (9.3) أو الخوارزمية (3.3) لإنشاء كثيرة حدود التقريب للبيانات الآتية:

$f'(x)$	$f(x)$	x	ب.	$f'(x)$	$f(x)$	x	أ.
2.1691753	0.22363362	0.8		3.116256	17.56492	8.3	
2.0466965	0.65809197	1.0		3.151762	18.50515	8.6	
$f'(x)$	$f(x)$	x	د.	$f'(x)$	$f(x)$	x	ج.
3.58502082	-0.62049958	0.1		0.7510000	-0.0247500	-0.5	
3.14033271	-0.28398668	0.2		2.1890000	0.3349375	-0.25	
2.66668043	0.00660095	0.3		4.0020000	1.1010000	0	
2.16529366	0.24842440	0.4					

2. استخدم مبرهنة (9.3) أو الخوارزمية (3.3) لإنشاء كثيرة حدود التقريب للبيانات الآتية:

$f'(x)$	$f(x)$	x	ب.	$f'(x)$	$f(x)$	x	أ.
0.437500	1.33203	-0.25		2.00000	1.00000	0	
-0.625000	0.800781	0.25		5.43656	2.71828	0.5	

$f'(x)$	$f(x)$	x
0.15536240	0.86194480	-1
0.22249654	0.95802009	-0.5
0.33333333	1.098623	0
0.4516776	1.2943267	0.5

$f'(x)$	$f(x)$	x
-2.8019975	-0.29004996	0.1
-2.6159201	-0.56079734	0.2
-2.4533949	-0.81401972	0.3

3. البيانات في التمرين (1) باستخدام الدوال الآتية. استخدم كثيرة الحدود المنشأة في المثال

(1) لقيمة x المعطاة لتقريب $f(x)$. واحسب الخطأ المطلق:

أ. $f(x) = x \ln x$ وتقريب $f(8.4)$

ب. $f(x) = \sin(e^x - 2)$ وتقريب $f(0.9)$

ج. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$ وتقريب $f(-\frac{1}{3})$

د. $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$ وتقريب $f(0.25)$

4. أنتجت البيانات في التمرين (2) باستخدام الدوال الآتية. استخدم كثيرة الحدود المنشأة في المثال (1) لقيمة x المعطاة لتقريب $f(x)$. واحسب الخطأ المطلق:

أ. $f(x) = e^{2x}$ وتقريب $f(0.43)$

ب. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ وتقريب $f(0)$

ج. $f(x) = x^2 \cos x - 3x$ وتقريب $f(0.18)$

د. $f(x) = \ln(e^x + 2)$ وتقريب $f(0.25)$

5. أ. استخدم القيم الآتية وتدويرًا حسابيًا لأربع خانات من أجل إنشاء كثيرة حدود هرمائيت للاستكمال الداخلي لتقريب $\sin 0.34$.

$D_1 \sin x = \cos x$	$\sin x$	x
0.95534	0.29582	0.30
0.94924	0.31457	0.32
0.93937	0.34290	0.35

ب. حدّد حدًا لخطأ التقريب في (أ)، وقارنه بالخطأ الحقيقي.

ج. أضف $\sin 0.33 = 0.32404$ و $\cos 0.33 = 0.94604$ إلى البيانات، وكرّر الحسابات.

6. ليكن $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$

أ. استخدم كثيرة حدود هرمائيت للاستكمال الداخلي من رتبة لا تزيد على 3 لتقريب $f(1.03)$ مستخدمًا $x_0 = 1$ و $x_1 = 1.05$. قارن الخطأ الحقيقي بحدّ الخطأ.

ب. استخدم كثيرة حدود هرمائيت للاستكمال الداخلي من رتبة لا تزيد على 5 لتقريب $f(1.03)$ مستخدمًا $x_0 = 1$ ، $x_1 = 1.05$ و $x_2 = 1.07$. قارن الخطأ الحقيقي بحدّ الخطأ.

7. استخدم صيغة الخطأ و Maple لإيجاد حد للأخطاء عند تقريبات $f(x)$ في الرأسين (أ) و(ج) من التمرين (3).

8. استخدم صيغة الخطأ و Maple لإيجاد حد للأخطاء عند تقريبات $f(x)$ في الفقرتين (ب) و(ج) من التمرين (4).

9. يتضمن الجدول الآتي بيانات للدالة $f(x) = e^{0.1x^2}$. اعمل التقريب $f(1.25)$ باستخدام $H_3(1.25)$ و $H_5(1.25)$ حيث يستخدم H_5 النقاط $x_0 = 1$ ، $x_1 = 2$ ، $x_2 = 3$ ويستخدم H_3 المقاطنين $\bar{x}_0 = 1$ و $\bar{x}_1 = 1.5$. أوجد حدود خطأ هذه التقريبات.

$f'(x) = 0.2xe^{0.1x^2}$	$f(x) = e^{0.1x^2}$	x
0.2210341836	1.105170918	$x_0 = \bar{x}_0 = 1$
0.3756968148	1.252322716	$\bar{x}_1 = 1.5$
0.5967298792	1.491824698	$x_1 = 2$
1.475761867	2.459603111	$x_2 = 3$

10. تتحرك سيارة على طريق مستقيم، وتسجل بياناتها عند نقاط كثيرة. وتظهر هذه البيانات في الجدول الآتي. حيث يمثل الزمن (Time) بالثانية. والمسافة (Distance) بالقدم. والسرعة (Speed) بالقدم لكل ثانية.

الوقت	0	3	5	8	13
المسافة	0	225	383	623	993
السرعة	75	77	80	74	72

أ. استخدم كثيرة حدود هرايمت لتخمين موقع السيارة وسرعتها عند الثانية العاشرة $t = 10$ s.
 ب. استخدم مشتقة كثيرة حدود هرايمت لتحديد ما إذا كان من الممكن للسيارة أن تتجاوز سرعة 55 mi/h على الطريق. وإذا كان ذلك فما هي المرة الأولى التي تتجاوز فيها السيارة هذه السرعة؟

ج. ما السرعة القصوى المتوقعة لهذه السيارة؟

11. أ. أثبت أن كثيرة الحدود الوحيدة بأقل رتبة تتوافق مع f و f' عند x_0, \dots, x_n .
 إرشاد: افترض $P(x)$ كثيرة حدود أخرى. وافترض $D = H_{2n+1} - P$ و D' عند x_0, x_1, \dots, x_n .
 ب. اشتق حد الخطأ في المبرهنة (9.3). [إرشاد: استخدم طريقة لاجرانج نفسها لاشتقاق الخطأ].
 وتعرف المبرهنة (3.3)

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{(t - x_0)^2 \dots (t - x_n)^2}{(x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2} [f(x) - H_{2n+1}(x)]$$

مع استخدام حقيقة كون $g'(t)$ لها $(2n + 2)$ من الأصفار المختلفة ضمن $[a, b]$.

12. ليكن $z_0 = x_0, z_1 = x_0, z_2 = x_1, z_3 = x_1$ ومن جدول الفرق المنقسم الآتي

		$f[z_0] = f(x_0)$	$z_0 = x_0$
	$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	$f[z_1] = f(x_0)$	$z_1 = x_0$
$f[z_0, z_1, z_2]$	$f[z_1, z_2]$	$f[z_2] = f(x_1)$	$z_2 = x_1$
$f[z_1, z_2, z_3]$	$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	$f[z_3] = f(x_1)$	$z_3 = x_1$

أثبت أن كثيرة حدود هرايمت التكعيبية $H_3(x)$ يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$f[z_0] + f[z_0, z_1](x - x_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - x_0)^2 + f[z_0, z_1, z_2, z_3](x - x_0)^2(x - x_1)$$

4.3 استكمال الشريحة التكعيبية Cubic Spline Interpolation

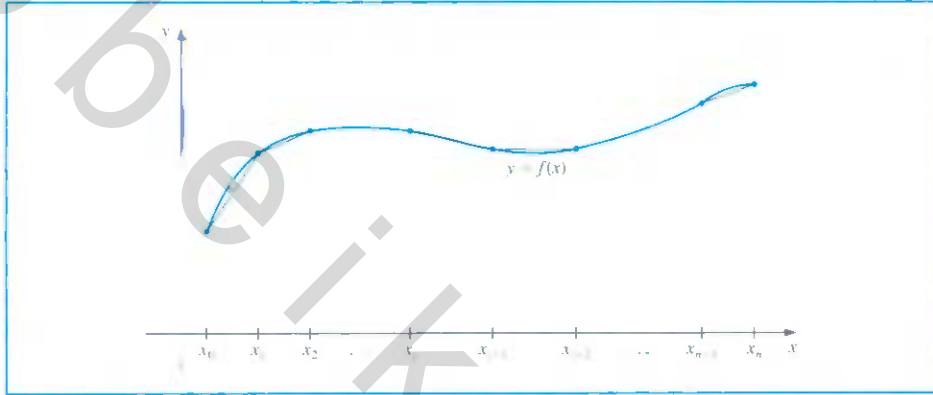
ركّزت البنود السابقة على تقريب دوال عشوائية ضمن فترات مغلقة مستخدمة كثيرات الحدود. ولأن طبيعة كثيرات الحدود ذات الرتبة العليا متذبذبة. ولأن هذا التذبذب ضمن جزء من الفترة يمكنه تحفيز تذبذبات كبيرة ضمن كامل المدى، فذلك يحد من استخدامها. وسوف نرى مثلاً جيداً لذلك في شكل (13.3) في نهاية هذا الفصل. ويعمل المنهج البديل على تقسيم الفترة إلى فترات جزئية. وإنشاء كثيرة حدود مختلفة عند كل فترة جزئية (عموماً). ويسمى التقريب بدوال من هذا النوع (التقريب بكثيرة حدود متقطعة)

(1) إن براهين المبرهنات في هذا الفصل تعتمد النتائج في الباب 6

piecewise-polynomial approximation. وأبسط تقريب بكثيرة حدود متقطعة هو استكمال داخلي خطي متقطع، الذي يتضمن ربط مجموعة من نقاط البيانات

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$$

من خلال سلسلة من الخطوط المستقيمة كما في شكل (7.3).



شكل 7.3

يمكن الجانب السلبي للتقريب بدالة خطية في عدم وجود التفاضل على الأُجح عند أطراف الفترات الجزئية الذي يعني أن دالة الاستكمال الداخلي ليست ملاء (نخمة) في النجوم الهندسي. وهذه النعومة مطلوبة وفقاً للشروط الفيزيائية، وأخيراً فإنه يجب في دالة التقريب أن تكون قابلة للتفاضل على نحو متصل. والإجراء البديل هو استخدام كثيرة حدود متقطعة من نوع هرمائيت. على سبيل المثال. إذا كانت قيم f و f' معروفة لكل من النقاط $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ فإن كثيرة حدود هرمائيت التكعيبية يمكن استخدامها على كل واحدة من المجموعات الجزئية $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ لإيجاد دالة ذات مشتقة متصلة على الفترة $[x_0, x_n]$. ولتحديد كثيرة حدود هرمائيت تكعيبية مناسبة على فترة معلومة؛ فإنها مجرد عملية حساب $H_3(x)$ لكل الفترة ببساطة. ولأن كثيرات حدود لأجراج للاستكمال الداخلي التي نحتاج إليها لغرض تحديد H_3 هي من الرتبة الأولى، فإن من السهل تحقيق ذلك. على أي حال لكي نستخدم كثيرات حدود هرمائيت المتقطعة للاستكمال الداخلي العام؛ نحتاج إلى معرفة مشتقة الدالة التي نعمل على تقريبها، وغير متوفر غالباً.

يتناول بقية هذا الفصل التقريب مستخدماً كثيرات حدود متقطعة لا تحتاج إلى معلومات اشتقاقية. إلا ربما عند أطراف الفترة التي تُقرب إليها.

وأبسط أنواع الدالة لكثيرة حدود متقطعة وقابلة للتفاضل على كامل الفترة $[x_0, x_n]$ هي الدالة الناتجة عن توفيق كثيرة حدود تكعيبية واحدة ما بين كل زوج متتال من الرؤوس. وهذا ينفذ من خلال إنشاء تكعيبي واحد على $[x_0, x_1]$ متوافق مع الدالة عند x_0 و x_1 . وتكعيبي آخر على $[x_1, x_2]$ متوافق مع الدالة عند x_0 و x_1 وهكذا. وحيث إن لكثيرة الحدود التكعيبية العامة ثلاثة ثوابت عشوائية (الثابت، معامل x ، ومعامل x^2)، وهناك حاجة إلى شرطين فقط لتوفيق البيانات على نقطتي

لفد طوز إسحق يعقوب شونبرغ

(1903-1990)

Isaac Jacob Schoenberg

عمله حول الأخاديد خلال الحرب العالمية الثانية في أثناء مغادرته جامعة بنسلفانيا للعمل في مختبر البحوث بالستية العسكري في أبردن/ميريلاند وتضمن عمله الأساسي عمليات عديدة لحل المعادلات للتفاضلية إن التطبيق الأوسع للأخاديد في مجالات موامة البيانات والتصميم الهندسي عن طريق الحاسوب قد أصبح واضحاً مع الانتشار الواسع للحاسبات خلال الفترة (1960s).

الطرفين لكل فترة جزئية، فثمة مرونة تسمح باختيار التكعيبية على أن يكون للاستكمال الداخلي مشتقة متصلة على $[x_0, x_n]$.

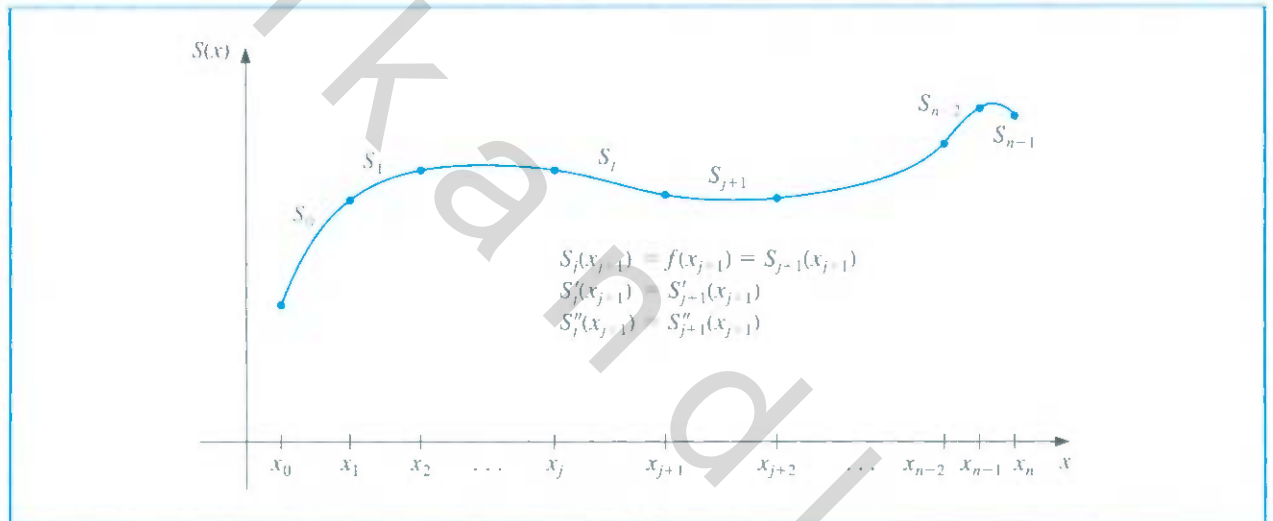
وثمة صعوبة تبرز عند الحاجة إلى توصيف شروط حول مشتقة الاستكمال الداخلي على نقطتي الطرفين x_0 و x_n .

ولا يوجد عدد مناسب من الثوابت لضمان كون الشروط ستتتحقق. (انظر تمرين 26).

يستخدم التقريب الشائع لكثيرة الحدود المتقطعة كثيرات حدود تكعيبية ما بين كل زوج متتال من النقاط ويُسمى "استكمال الشريحة التكعيبية Cubic Spline Interpolation". وتتضمن كثيرة الحدود التكعيبية العامة 4 ثوابت، ومن ثم توجد مرونة كافية في عملية الشريحة التكعيبية؛ لضمان كون الاستكمال الداخلي ليس قابلاً للاشتقاق على نحو متصل على الفترة فقط، وإنما له مشتقة متصلة ثانية أيضاً. إن عملية إنشاء الشريحة التكعيبية لا تفترض توافقاً ما بين مشتقة الاستكمال الداخلي وتلك المعدّة للدالة قيد التقريب، حتى عند الرؤوس. (انظر شكل 8.3).

إن أصل كلمة أهدود spline هو نفسه splint كان في الأصل عبارة عن شريط حسيبي يمكن استخدامه لربط لوحين وبعد ذلك استخدمت الكلمة للإشارة إلى شريط من وطويلا من المعدن على نحو عام. ويمكن استخدامه لرسم منحنيات متملم ومنظمة عن طريق جعل الشريط يمر عبر نقاط محددة واقعة على سطح المنحنى.

شكل 8.3



تعريف 10.3 لتكن الدالة f معرفة على $[a, b]$ ، وعند النقاط $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. عندئذ يكون

الاستكمال الداخلي للشريحة التكعيبية S للدالة f هو دالة تتحقق الشروط الآتية:

أ. $S(x)$ كثيرة حدود تكعيبية، ويكتب $S_j(x)$ على الفترة $[x_j, x_{j+1}]$ لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$

ب. $S_j(x_j) = f(x_j)$ و $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$

ج. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \dots, n-2$

د. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \dots, n-2$

هـ. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ لكل $j = 0, 1, \dots, n-2$

و. تتحقق إحدى المجموعات الآتية من شروط الحدود:

1. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (حدود طبيعية أو حرة).

2. $S'(x_0) = f'(x_0)$ و $S'(x_n) = f'(x_n)$ (حدود متشابهة).

وعلى الرغم من أن الشرائح التكميلية معرفة بشروط حدودية أخرى، فإن الشروط المبينة في (و) أعلاه تعدّ كافية لتحقيق أغراضنا. وعندما تظهر الشروط الحدودية الحرة تُدعى الشريحة بالشريحة الطبيعية الطبيعية natural spline، وإن رسمه البياني يقارب شكل قضيب طويل ومرن يدفع عبر نقاط البيانات $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$ وعموماً تؤدي شروط الحدود المتشابكة إلى تقريب أدق؛ لأنها تتضمن معلومات أكثر حول الدالة. ولكي يتحقق مثل هذا النوع من الشرط الحدودي، فمن الضروري معرفة إما قيمة الاشتقاق عند الأطراف، وإما تقريب دقيق لكثيرات الحدود التكميلية

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$

ولكون $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$ فإن الشرط (ج) يمكن تطبيقه للحصول على

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3$$

لكل $j = 0, 1, \dots, n-2$

ونظراً لاستخدام الحدود $x_{j+1} - x_j$ استخداماً متكرراً في هذا التطوير، يكون من المناسب تقديم تعبير أبسط

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$. وإذا ما عرفنا $f(x_n) = a_n$ أيضاً فإن الصيغة

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \quad (15.3)$$

تتحقق لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$.

وبالأسلوب نفسه عرف $S'_j(x_n) = b_n$ ولاحظ أن

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

تعطي $S'_j(x_j) = b_j$ لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$. وتطبيق الشرط (د) نحصل على

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \quad (16.3)$$

لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$

نحصل على علاقة أخرى ما بين معامل S_j من خلال تعريف $c_n = S''(x_n)/2$ وتطبيق الشرط

(ج). وأخيراً لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$ نجد أن

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \quad (17.3)$$

وعند حل d_j في الصيغة (17.3) وتعويض هذه القيمة في المعادلتين (15.3) و(16.3) نحصل على

الصيغة الجديدة الآتية لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \quad (18.3)$$

و

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \quad (19.3)$$

الشريحة الحرة ليست لها شروط مفروضة بشأن الاتجاه عند أطرافها. من ثم يأخذ المنحنى شكل الخط المستقيم بعد مروره عبر نقاط الاستكمال الداخلي وبالقرب من أطرافها. الشرائح الحرة هي الشكل الطبيعي المفترض من قبل الشريط المرن إذا مرّ عبر نقاط استكمال داخلي محددة ودون قيود إضافية

تشابك الشريحة يشير إلى تثبيت نهائي الشريط المرن لجعله يأخذ اتجاهها محددًا عند كل طرف هذا ضروري ومثال على ذلك حالة وجوب تطابق دالتي شريحتين عند أطرافهما. حيث يحدث ذلك رياضياً من خلال تحديد قيم المشتقة للمنحنى عند أطراف الشريحة

تتضمن العلاقة الأخيرة إيجاد المعامل من خلال حل الصيغة المناسبة بصيغة الصيغة (18.3).

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \quad (20.3)$$

ولـ b_j أولاً، ويكون حل b_{j-1} بتخفيض الدليل بعد ذلك. وهذا يعطي

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j)$$

وبتعويض هذه القيم في الصيغة (19.3) مع حصول تخفيض واحد للدليل، نحصل على نظام خطي من الصيغ

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \quad (21.3)$$

لكل $j = 1, 2, \dots, n-1$. يتضمن هذا النظام القيم المجهولة $\{c_j\}_{j=0}^n$ فقط. لأن قيم $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ و $\{a_j\}_{j=0}^n$ معلومة من خلال المبادعة ما بين النقاط $\{x_j\}_{j=0}^n$ وقيم f عند النقاط على التوالي.

لاحظ أنه حالما تحدد قيم $\{c_j\}_{j=0}^n$ ، يصبح من السهل إيجاد ما تبقى من الثوابت $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ من الصيغة (20.3) و $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ من الصيغة (17.3)، ومن ثم إنشاء كثيرات حدود تكعيبية $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$.

والسؤال الرئيس الذي يبرز عند الربط بهذا الإنشاء هو: هل يمكن إيجاد قيم $\{c_j\}_{j=0}^n$ باستخدام نظام الصيغ المبينة في (21.3)؟ وإذا كان كذلك فهل تكون هذه القيم وحيدة؟ تشير النظريات الآتية إلى أن الحالة هي نفسها عندما نفترض أيًا من شروط الحدود المبينة في (و) من التعريف.

وتتطلب براهين هذه النظريات مواد من الجبر الخطي سنناقشها في الفصل 6.

إذا كانت f معرفة عند $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ فإن لها استكمالاً داخلياً لشريحة طبيعية وحيدة S عند النقاط x_0, x_1, \dots, x_n . بمعنى أن استكمالاً داخلياً للشريحة يحقق الشروط الحدودية $S''(a) = 0$ و $S''(b) = 0$.

مبرهنة 11.3

البرهان تشير الشروط الحدودية في هذه الحالة إلى أن $c_n = S''(x_n)/2 = 0$ وأن

$$0 = S''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0)$$

وبذلك فإن $c_0 = 0$. المكررتان $c_0 = 0$ و $c_n = 0$ مع الصيغ في (21.3) تعطي معاً نظاماً خطياً يتضح من خلال $Ax = b$ ، حيث إن A هي المصفوفة $(n+1) \times (n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وكل من b و x عبارة عن المتجهات

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

يغلب على المصفوفة A سمة القطرية، لذلك فإنها تفي بفرضيات المبرهنة (9.6) من الفصل (6). وعندئذ فإن للنظام الخطي حلاً وحيداً لـ c_0, c_1, \dots, c_n . ويمكن إيجاد حل مسألة الشريحة التكميلية مع الشروط الحدودية $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ من خلال تطبيق الخوارزمية (4.3).

الشريحة التكميلية الطبيعية Natural Cubic Spline

لإنشاء الاستكمال الداخلي للشريحة التكميلية S الخاص بالدالة f ، معرفاً عند الأعداد $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ولتحقق $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ المدخلات: $a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \dots, a_n = f(x_n)$; المخرجات: a_j, b_j, c_j, d_j لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$ إرشاد:

$$S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad \text{لكل } x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 0, 1, \dots, n-1$ ضع $h_i = x_{i+1} - x_i$
2	عند $i = 1, 2, \dots, n-1$ ضع $a_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$
3	ضع $l_0 = 1$ (تنفذ الخطوات 3، 4، 5 وجزء من الخطوة 6 نظاماً خطياً ثلاثي القطر باستخدام الطريقة موضحة في الخوارزمية (7.6).) $\mu_0 = 0$ $z_0 = 0$
4	عند $i = 1, 2, \dots, n-1$ ضع $l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1}$ $\mu_i = h_i/l_i$ $z_i = (a_i - h_{i-1}z_{i-1})/l_i$



ضع	$l_n = 1$ $\bar{z}_n = 0$ $c_n = 0$	5
عند	$j = n - 1, n - 2, \dots, 0$	
ضع	$c_j = z_j - \mu_j c_{j+1}$ $b_j = (a_{j+1} - a_j) / h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j) / 3$ $d_j = (c_{j+1} - c_j) / (3h_j)$	6
المخرجات	($j = 0, 1, \dots, n - 1$ إلى a_j, b_j, c_j, d_j) توقف.	7



مثال 1 أعطينا في بداية الباب الثالث بعض كثيرات حدود تايلور لتقريب الدالة الأسية $f(x) = e^x$ وهنا

سنستخدم شريحة طبيعية ونقاط البيانات $(0, 1), (1, e), (2, e^2), (3, e^3)$ لغرض

أ. تكوين دالة تقريب $S(x)$

ب. مقارنة تكاملات f و S على الفترة $[0, 3]$.

(أ) لدينا $n = 3, h_0 = h_1 = h_2 = 1, a_0 = 0, a_1 = e, a_2 = e^2, a_3 = e^3$ لذا فالمصفوفة

والمتجهات \mathbf{x} و \mathbf{b} مبينة أدناه في المبرهنة (11.3).

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(e^2 - 2e + 1) \\ 3(e^3 - 2e^2 + e) \\ 0 \end{bmatrix}$$

وصيغة مصفوفة المتجه $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ مكافئة لنظام الصيغ

$$c_0 = 0$$

$$c_0 + 4c_1 + c_2 = 3(e^2 - 2e + 1)$$

$$c_1 + 4c_2 + c_3 = 3(e^3 - 2e^2 + e)$$

$$c_3 = 0$$

ذات الحل $c_0 = c_3 = 0$

$$c_1 = \frac{1}{5}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 0.756852643 \quad \text{و} \quad c_2 = \frac{1}{5}(4e^3 - 9e^2 + 6e - 1) = 5.83006675$$

وحل بقية الثوابت يعطينا

$$b_0 = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = (e - 1) - \frac{1}{15}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 1.465997614$$

$$b_1 = \frac{1}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1)$$

$$= (e^2 - e) - \frac{1}{15}(2e^3 + 3e^2 - 12e + 7) = 2.222850257$$

$$h_2 = \frac{1}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2)$$

$$= (e^3 - e^2) - \frac{1}{15}(8e^3 - 18e^2 + 12e - 2) = 8.809769651$$

$$d_0 = \frac{1}{3h_0}(c_1 - c_0) = \frac{1}{15}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) = 0.252284214$$

$$d_1 = \frac{1}{3h_1}(c_2 - c_1) = \frac{1}{3}(e^3 - 3e^2 + 3e - 1) = 1.691071368$$

$$d_2 = \frac{1}{3h_2}(c_3 - c_1) = \frac{1}{15}(-4e^3 + 9e^2 - 6e + 1) = -1.943355583$$

المبينة في جدول (15.3).

d_j	c_j	b_j	a_j	x_j	j
0.252284214	0	1.465997614	1	0	0
1.691071368	0.756852643	2.222850257	2.718281828	1	1
-1.943355583	5.83006675	8.809769651	7.389056099	2	2
			20.08553692	3	3

جدول 15.3

ويعطي استخدام قيم تقريبية للتوابت الشريحة التكميلية الطبيعية من خلال الصيغة

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x < 1 \text{ إن كان } & 1 + 1.46600x + 0.25228x^3 \\ 1 \leq x < 2 \text{ إن كان } & 2.71828 + 2.22285(x-1) + 0.75685(x-1)^2 + 1.69107(x-1)^3 \\ 2 \leq x \leq 3 \text{ إن كان } & 7.38906 + 8.80977(x-2) + 5.83007(x-2)^2 - 1.94336(x-2)^3 \end{aligned} \right\} = S(x)$$

مجزأة الشريحة وتوافقها مع $f(x) = e^x$ المبين في شكل (9.3).

(ب) لتقريب تكامل f على $[0, 3]$ ذي القيمة

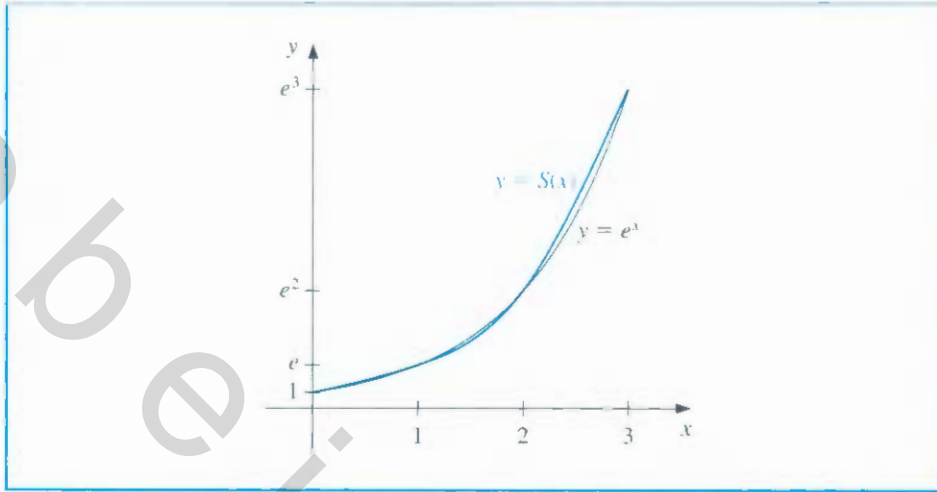
$$\int_0^3 e^x dx = e^3 - 1 = 20.08553692 - 1 = 19.08553692$$

نجمع الشريحة تجزيئياً لتعطي

$$\int_0^3 S(x) dx = \int_0^1 (1 + 1.46600x + 0.25228x^3) dx$$

$$+ \int_1^2 (2.71828 + 2.22285(x-1) + 0.75685(x-1)^2 + 1.69107(x-1)^3) dx$$

$$+ \int_2^3 (7.38906 + 8.80977(x-2) + 5.83007(x-2)^2 - 1.94336(x-2)^3) dx$$



شكل 9.3

وبتكامل القيم ذات القوى المتشابهة وتجميعها نحصل على

$$\begin{aligned} \int_0^3 S(x) dx &= x + 1.46600 \frac{x^2}{2} + 0.25228 \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \\ &+ 2.71828(x-1) + 2.22285 \frac{(x-1)^2}{2} + 0.75685 \frac{(x-1)^3}{3} + 1.69107 \frac{(x-1)^4}{4} \Big|_1^2 \\ &+ 7.38906(x-2) + 8.80977 \frac{(x-2)^2}{2} + 5.83007 \frac{(x-2)^3}{3} - 1.94336 \frac{(x-2)^4}{4} \Big|_2^3 \\ &= (1 + 2.71828 + 7.38906) + \frac{1}{2} (1.46600 + 2.22285 + 8.80977) \\ &+ \frac{1}{3} (0.75685 + 5.83007) + \frac{1}{4} (0.25228 + 1.69107 - 1.94336) \\ &= 19.55228750 \end{aligned}$$

وبسبب التباعد المتساوي ما بين النقاط في هذا المثال. فالتقريب التكاملي هو

$$\int_0^3 S(x) dx = (a_0 + a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2) + \frac{1}{3}(c_0 + c_1 + c_2) + \frac{1}{4}(d_0 + d_1 + d_2)$$

وفي حالة الشروط الحدودية المتشابهة لدينا نتيجة مشابهة لمبرهنة الشروط الحدودية الطبيعية الموضحة في المبرهنة (11.3).

مبرهنة 12.3 إذا كانت f معرفة عند $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ وقابلة للاشتقاق عند a و b فإن

لـ f استكمالاً داخلياً متشابكاً وحيداً للشريحة S عند النقاط x_0, x_1, \dots, x_n ، بمعنى أن استكمالاً

داخلياً للشريحة يحقق الشروط الحدودية $f'(a) = S'(a)$ و $f'(b) = S'(b)$.

البرهان بما أن $f'(a) = S'(a) = S'(x_0) = b_0$ مع $j = 0$

$$f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

وبناءً على ذلك

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

وبالمثل

$$f'(b) = b_n = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n)$$

لذا فالصيغة (20.3) مع $j = n - 1$ تعطي

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n) \\ &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{3}(c_{n-1} + 2c_n) \end{aligned}$$

و

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

تحدد الصيغة (21.3) والصيغ معاً

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

و

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

النظام الخطي $Ax = b$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

و $x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

يغلب على المصفوفة A سمة القطرية. ولذلك فإنها تفي بفرضيات المبرهنة (19.6). من ثم فإن للنظام الخطي حلاً واحداً c_0, c_1, \dots, c_n .

يمكن إيجاد حل مسألة الشريحة التكعيبية مع الشروط الحدودية $S'(x_0) = f'(x_0)$ و $S'(x_n) = f'(x_n)$ من خلال تطبيق الخوارزمية (5.3).

الشريحة التكعيبية المتشابكة Clamped Cubic Spline

لإنشاء الاستكمال الداخلي للشريحة التكعيبية S الخاص بالدالة f . معرفاً عند الأعداد $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

$$\text{ولتحقق } S'(x_n) = f'(x_n) \text{ و } S'(x_0) = f'(x_0)$$

$$\text{المدخلات: } n; x_0, x_1, \dots, x_n; a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \dots, a_n = f(x_n)$$

المخرجات: a_j, b_j, c_j, d_j لكل $j = 0, 1, \dots, n-1$

إرشاد:

$$S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \text{ لكل } x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

الخطوة	المضمون
1	عند $i = 0, 1, \dots, n-1$ ضع $h_i = x_{i+1} - x_i$
2	ضع $\alpha_0 = 3(a_1 - a_0)/h_0 - 3FPO$ $\alpha_n = 3FPN - 3(a_n - a_{n-1})/h_{n-1}$
3	عند $i = 1, 2, \dots, n-1$ ضع $\alpha_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$
4	ضع $l_0 = 2h_0$ (تنفذ الخطوات 4.5, 6.5 وجزء من الخطوة 7 نظاماً خطياً ثلاثي القطر باستخدام طريقة موضحة في الخوارزمية (7.6).) $\mu_0 = 0.5$ $z_0 = \alpha_0/l_0$
5	عند $i = 1, 2, \dots, n-1$ ضع $l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1}$ $\mu_i = h_i/l_i$ $z_i = (\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1})/l_i$
6	ضع $l_n = h_{n-1}(2 - \mu_{n-1})$ $z_n = (\alpha_n - h_{n-1}z_{n-1})/l_n$ $c_n = z_n$
7	عند $j = n-1, n-2, \dots, 0$ ضع $c_j = z_j - \mu_j c_{j+1}$ $b_j = (a_{j+1} - a_j)/h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j)/3$ $d_j = (c_{j+1} - c_j)/(3h_j)$
8	المخرجات (a_j, b_j, c_j, d_j) $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ توقف.

ALGORITHM

الخوارزمية

5.3

مثال 2 استخدمنا في المثال (1) شريحة طبيعية ونقاط البيانات $(0, 1), (1, e), (2, e^2), (3, e^3)$ تكوين دالة تقريـب $S(x)$ إلى $f(x) = e^x$ ، ومن ثم استخدمناه لتقريب $\int_0^3 e^x dx$. سيف نقارن في هذا المثال بين أ. الشريحة المتشابهة لهذه الدالة على $[0, 3]$ وب. تقريب التكامل المعطى من خلال تكامل الشريحة المتشابهة.

أ. مرة أخرى لدينا $n = 3, h_0 = h_1 = h_2 = 1, a_0 = 0, a_1 = e, a_2 = e^2, a_3 = e^3$ ولدينا $f'(x) = e^x$ ، وأخيراً $f'(0) = 1$ و $f'(3) = e^3$. وعندئذ فإن المصفوفة A والمتجه b و x مبينة أدناه في البرهنة (12.3):

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3(e-2) \\ 3(e^2-2e+1) \\ 3(e^3-2e^2+e) \\ 3e^2 \end{bmatrix}$$

وصيغة مصفوفة المتجه $Ax = b$ مكافئة لنظام الصيغ

$$2c_0 + c_1 = 3(e-2)$$

$$c_0 + 4c_1 + c_2 = 3(e^2 - 2e + 1)$$

$$c_1 + 4c_2 + c_3 = 3(e^3 - 2e^2 + e)$$

$$c_2 + 2c_3 = 3e^2$$

ويحل هذا النظام لـ c_0, c_1, c_2, c_3 آتياً نحصل على

$$c_0 = \frac{1}{15}(2e^3 - 12e^2 + 42e - 59)$$

$$c_1 = \frac{1}{15}(-4e^3 + 24e^2 - 65e + 28)$$

$$c_2 = \frac{1}{15}(14e^3 - 39e^2 + 24e - 8)$$

$$c_3 = \frac{1}{15}(-7e^3 + 42e^2 - 12e + 4)$$

ويحل بقية الثوابت بالأسلوب نفسه في المثال (1) نحصل على

$$b_0 = 1.00000000, \quad b_1 = 2.70446053, \quad b_2 = 0.34932619,$$

$$d_0 = 0.26789687, \quad d_1 = 0.71223817, \quad d_2 = 1.95636455.$$

ونشاهد النتائج الكاملة في جدول (16.3).

c_j	c_j	b_j	a_j	x_j	j
0.26789687	0.45038496	1	1	0	0
0.71223817	1.25407557	2.70446053	2.718281828	1	1
1.95636455	3.39079008	7.34932619	7.389056099	2	2
			20.08553692	3	3

جدول 16.3

وباستخدام قيم تقريبية للثوابت نحصل على الشريحة التكعيبية المتشابهة الموصحة من خلال الصيغة المجزأة

$$\left. \begin{aligned} & \text{إذا كان } 0 \leq x < 1 \quad 1 + x + 0.45038x^2 + 0.26790x^3 \\ & \text{إذا كان } 1 \leq x < 2 \quad 2.71828 + 2.70446(x-1) + 1.25408(x-1)^2 + 0.71224(x-1)^3 \\ & \text{إذا كان } 2 \leq x \leq 3 \quad 7.38906 + 7.34933(x-2) + 3.39079(x-2)^2 + 1.95636(x-2)^3 \end{aligned} \right\} = S(x)$$

وإن الرسم البياني للشريحة المتشابكة و $f(x) = e^x$ متشابهان تماماً إلى رتبة عدم وجود أي فرق.

ب. لتقريب تكامل f على $[0, 3]$ الذي قيمته

$$\int_0^3 e^x dx = e^3 - 1 \approx 20.08553692 - 1 = 19.08553692$$

نجرئ تكامل الشريحة المتشابكة. وعلى صورة المثال السابق. يمكننا استخدام حقيقة كون النقاط متساوية التباعد لنستنتج أن

$$\int_0^3 S(x) dx = (a_0 + a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2) \\ + \frac{1}{3}(c_0 + c_1 + c_2) + \frac{1}{4}(d_0 + d_1 + d_2)$$

لذا فإن تقريب التكامل هو

$$\int_0^3 S(x) dx = (1 + 2.71828 + 7.38906) + \frac{1}{2}(1 + 2.70446 + 7.34933) \\ + \frac{1}{3}(0.45038 + 1.25408 + 3.39079) \\ + \frac{1}{4}(0.26790 + 0.71224 + 1.95636) \\ = 19.06677.$$

الخطأ المطلق في تقريب التكامل باستخدام الشريحتين المتشابكتين (Clamped) والطبيعي (Natural)

هو

$$\text{Natural: } |19.08554 - 19.55229| = 0.46675$$

$$\text{Clamped: } |19.08554 - 19.06677| = 0.01877$$

عندئذ ولأغراض التكامل. فإن الشريحة المتشابكة أحسن بكثير. وعلينا ألا نفاجأ بذلك، لأن الشروط الحدودية للشريحة المتشابكة تكون على نحو محكم. أما في الشريحة الطبيعية فإننا نفترض، ولكون $f''(x) = e^x$ أن

$$0 = S''(x) \approx f''(0) = e^0 = 1$$

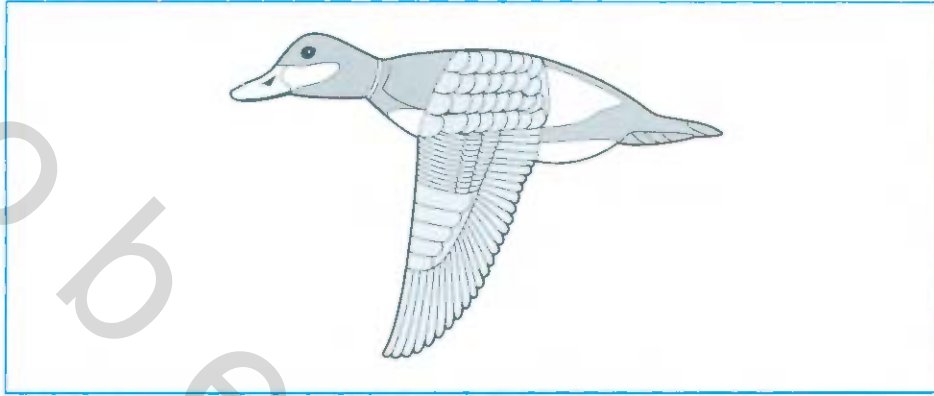
و

$$0 = S''(3) \approx f''(3) = e^3 \approx 20$$

ويستخدم المثال الآتي الشريحة لتقريب منحنى ليس له تمثيل دالي.

مثال 3

يبين الشكل (10.3) البطة الحمراء في حالة طيران. لتقريب المخطط العلوي للبطة، اخترنا نقاطاً على امتداد المنحنى عبر المواضع التي نرغب في أن يمر بها المنحنى المقرب. ويبيّن جدول (17.3) إحداثيات 21 نقطة مقارنة بنظام الإحداثيات المبين في شكل (11.3). لاحظ استخدام نقاط إضافية عندما يتغير المنحنى بسرعة أكبر مما لو تغير ببطء.

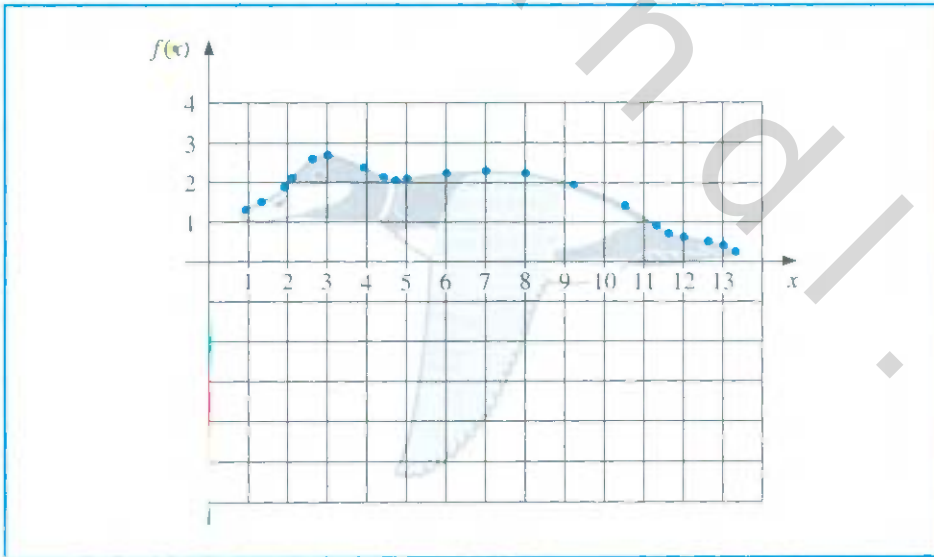


شكل 10.3

جدول 17.3

13.3	13.0	12.6	12.0	11.6	11.3	10.5	9.2	8.0	7.0	6.0	5.0	4.7	4.4	3.9	3.0	2.6	2.1	1.9	1.3	0.9	x
0.25	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9	1.4	1.95	2.25	2.3	2.25	2.1	2.05	2.15	2.4	2.7	2.6	2.1	1.85	1.5	1.3	$f(x)$

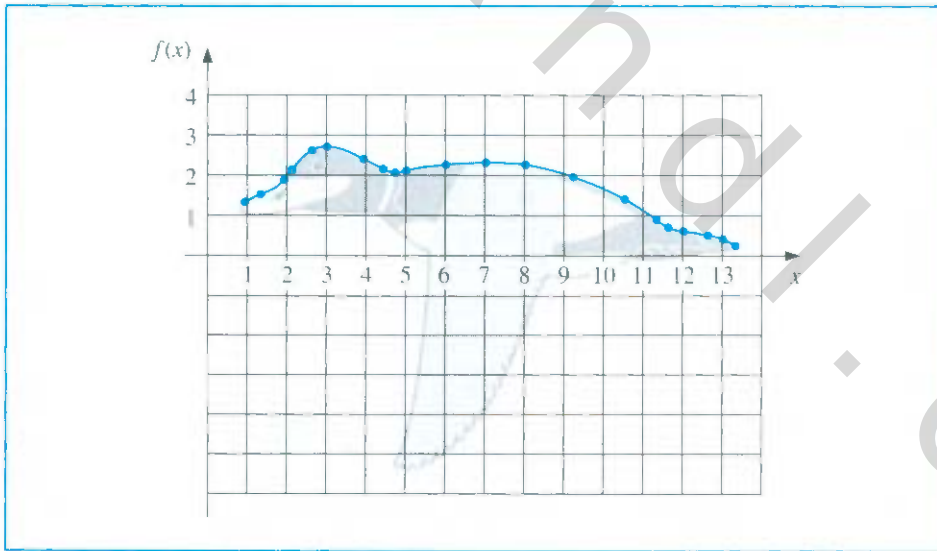
باستخدام الخوارزمية (4.3) لتوليد الشريحة التكميلية الحرة لهذه البيانات نحصل على المعطيات المبينة في الجدول (18.3). ومنحنى الشريحة هذا مشابه تقريبا للمخطط الموضح في شكل (12.3).



شكل 11.3

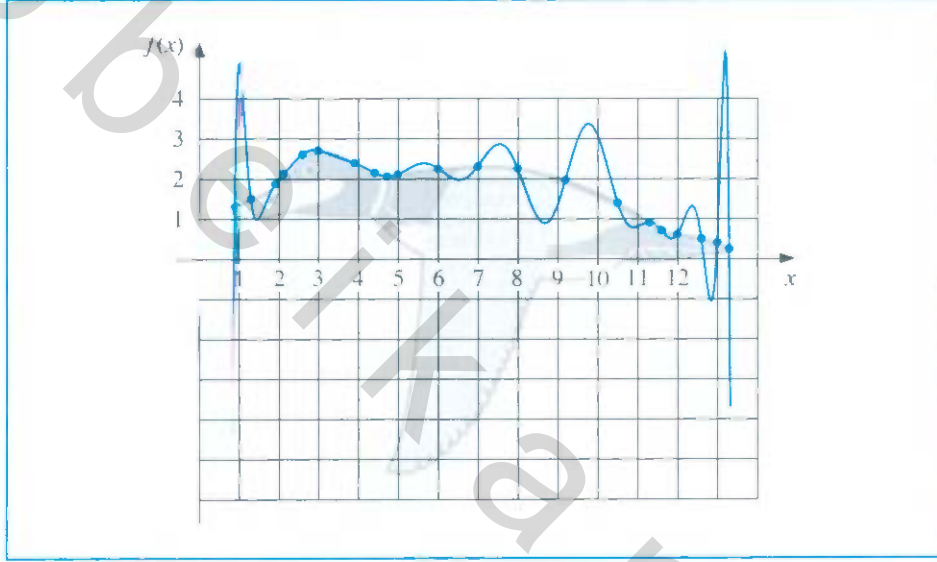
جدول 183

d_j	c_j	b_j	a_j	x_j	j
-0.25	0.00	5.44	1.3	0.9	0
0.95	-0.30	0.42	1.5	1.3	1
-2.96	1.41	1.09	1.85	1.9	2
-0.45	-0.37	1.29	2.1	2.1	3
0.45	-1.04	0.59	2.6	2.6	4
0.17	-0.50	-0.02	2.7	3.0	5
0.08	-0.03	-0.50	2.4	3.9	6
1.31	0.08	-0.48	2.15	4.4	7
-1.58	1.27	-0.07	2.05	4.7	8
0.04	-0.16	0.26	2.1	5.0	9
0.00	-0.03	0.08	2.25	6.0	10
-0.02	-0.04	0.01	2.3	7.0	11
0.02	-0.11	-0.14	2.25	8.0	12
-0.01	-0.05	-0.34	1.95	9.2	13
-0.02	-0.10	-0.53	1.4	10.5	14
1.21	-0.15	-0.73	0.9	11.3	15
-0.84	0.94	-0.49	0.7	11.6	16
0.04	-0.06	-0.14	0.6	12.0	17
-0.45	0.00	-0.18	0.5	12.6	18
0.60	-0.54	-0.39	0.4	13.0	19
			0.25	13.3	20



شكل 3.12

يعطي شكل (13.3) توضيحاً للمنحنى الذي وُلد مستخدماً كثيرة حدود جرانج للاستكمال الداخلي لتوفيق البيانات في جدول (17.3). وتتكوّن كثيرة حدود الاستكمال الداخلي في هذه الحالة من الرتبة 20. وتتغير بحدّة منتجة توضيحاً غريباً جدّاً لظهر لبطة سواءً عند طرّانها أو غير ذلك.



شكل 13.3

ولاستخدام الشريحة المتشابكة لتقريب هذا المنحنى، سنحتاج إلى تقريبات اشتقاقية للنهايات. وحتى لو توافرت هذه التقريبات، يمكننا توقّع تحسن طفيف؛ بسبب التوافق الكبير ما بين الشريحة التكميلية الحرّة ومنحنى أعلى المخطط.

■ إن إنشاء أهدود متشابك لتقريب أسفل المخطط للبطة الحمراء سيكون أصعب؛ لأن منحنى هذا الجزء لا يمكن صياغته على شكل دالة لـ x . وعند نقاط معينة لا يظهر المنحنى على نحو متّسق. ويمكن حل المشاكل باستخدام شرائح منفصلة لتمثيل نقاط مختلفة للمنحنى، ولكن الحل الأكثر فاعلية لمنحنيات من هذا النوع سنتناوله في الفصل الآتي.

شروط الحدود المتشابكة عموماً هي المفضلة عندما تُقَرَّب الدوال من خلال الشرائح التكميلية، لذا يجب تقدير مشتقة الدالة عند نهايات الفترة، وعند تساوي التباعد ما بين النقاط بالقرب من النهايتين. ويمكن إيجاد تقريبات باستخدام الصيغة (7.4) أو أيّ من الصيغ الأخرى المناسبة المذكورة في الفصلين (1.4 و 2.4). وعند عدم تساوي التباعد ما بين النقاط، فإن المسألة تعدّ أصعب.

وكي نختم هذا الفصل، فإننا ندرج صيغة حد الخطأ للشريحة التكميلية مع الشروط الحدودية المتشابكة. ويمكن إيجاد برهان هذه النتيجة في [Schul, pp. 57–58].

مبرهنة 13.3 ليكن $f \in C^4[a, b]$ وليكن $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| = M$. إذا كان S استكمالاً داخلياً للشريحة التكميلية المتشابكة الوحيدة لـ f بالنسبة إلى النقاط $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ، فإنه لكل

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{5M}{384} \max_{0 \leq j \leq n-1} (x_{j+1} - x_j)^4$$

في $[a, b]$ يكون لدينا وينتج أيضاً حد خطأ من الرتبة الرابعة، وينتج أيضاً في حالة الشروط الحدودية الحرة، ولكن من الصعوبة صياغتها. (انظر [BD, pp. 827–835]).

ستعطي الشروط الحدودية الحرة نتائج أقل دقة مقارنةً بالشروط المتشابكة قرب طرفي الفترة $[x_0, x_n]$ ما لم تكن الدالة f مقترية من تحقيق $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$. ثمة بديل للشرط الحدودي الحر - ولا يتطلب معلومات عن مشتقة f - هو شرط اللاعقدة *not-a-knot* انظر ([Deb2, pp. 55–56]). وهذا الشرط يتطلب كون $S'''(x)$ متصلة عند x_1 وعند x_{n-1} .

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 4.3

- حدّد الشريحة التكميلية الحرة S التي تستكمل داخلياً البيانات $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$.
- حدّد الشريحة التكميلية المتشابكة S التي تستكمل داخلياً البيانات $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$ وتحقق $s'(0) = s'(2) = 1$.

3. أنشئ الشريحة التكميلية الحرة للبيانات الآتية:

x	$f(x)$	ب.	x	$f(x)$	أ.
0.8	0.22363362		8.3	17.56492	
1.0	0.65809197		8.6	18.50515	
x	$f(x)$	د.	x	$f(x)$	ج.
0.1	-0.62049958		-0.5	-0.0247500	
0.2	-0.28398668		-0.25	0.3349375	
0.3	0.00660095		0	1.1010000	
0.4	0.24842440				

4. أنشئ الشريحة التكميلية الحرة للبيانات الآتية:

x	$f(x)$	ب.	x	$f(x)$	أ.
-0.25	1.33203		0	1.00000	
0.25	0.800781		0.5	2.71828	
x	$f(x)$	د.	x	$f(x)$	ج.
-1	0.86199480		0.1	-0.29004996	
-0.5	0.95802009		0.2	-0.56079734	
0	1.0986123		0.3	-0.81401972	
0.5	1.2943767				

- نتجت البيانات في التمرين (3) باستخدام الدوال الآتية، استخدم الشرائح التكميلية التي أنشئت في التمرين (3) لقيم x المبينة لتقريب $f(x)$ و $f'(x)$ ، واحسب الخطأ الحقيقي:

أ. $f(x) = x \ln x$ والتقريب إلى $f(8.4)$ و $f'(8.4)$

ب. $f(x) = \sin(e^x - 2)$ والتقريب إلى $f(0.9)$ و $f'(0.9)$

ج. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$ والتقريب إلى $f(-\frac{1}{3})$ و $f'(-\frac{1}{3})$

د. $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$ والتقريب إلى $f(0.25)$ و $f'(0.25)$

6. نتجت البيانات في التمرين (3) باستخدام الدوال الآتية. استخدم الشرائح التكميلية التي

أنشئت في التمرين (3) لقيم x المبينة لتقريب $f(x)$ و $f'(x)$ ، واحسب الخطأ لحقيقي:

أ. $f(x) = e^{2x}$ والتقريب إلى $f(0.43)$ و $f'(0.43)$

ب. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ والتقريب إلى $f(0)$ و $f'(0)$

ج. $f(x) = x^2 \cos x - 3x$ والتقريب إلى $f(0.18)$ و $f'(0.18)$

د. $f(x) = \ln(e^x + 2)$ والتقريب إلى $f(0.25)$ و $f'(0.25)$

7. أنشئ الشريحة التكميلية المتشابهة مستخدماً بيانات التمرين (4) وحقيقة كون:

أ. $f'(8.6) = 1.151762$ و $f'(8.3) = 1.116256$

ب. $f'(1.0) = 2.0466965$ و $f'(0.8) = 2.1691753$

ج. $f'(0) = 4.0020000$ و $f'(-0.5) = 0.7510000$

د. $f'(0.4) = 2.16529366$ و $f'(0.1) = 3.58502082$

8. أنشئ الشريحة التكميلية المتشابهة مستخدماً بيانات التمرين (4) وحقيقة كون:

أ. $f'(0.5) = 5.43656$ و $f'(0) = 2$

ب. $f'(0.25) = -0.625000$ و $f'(-0.25) = 0.437500$

ج. $f'(0.3) = -2.4533949$ و $f'(0.1) = -2.8004996$

د. $f'(0.5) = 0.45186276$ و $f'(-1) = 0.15536240$

9. كرر التمرين (5) مستخدماً الشرائح التكميلية المتشابهة التي أنشئت في التمرين (7).

10. كرر التمرين (6) مستخدماً الشرائح التكميلية المتشابهة التي أنشئت في التمرين (8).

11. تعرّف شريحة تكميلية طبيعية S على $[0, 2]$ من خلال

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x < 1 \text{ إذا كان } S_0(x) = 1 + 2x - x^3 \\ 1 \leq x \leq 2 \text{ إذا كان } S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 \end{array} \right\} = S(x)$$

جد b, c, d .

12. تعرّف شريحة تكميلية متشابهة S للدالة f على $[1, 3]$ من خلال

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq x < 2 \text{ إذا كان } s_0(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3 \\ 2 \leq x \leq 3 \text{ إذا كان } s_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3 \end{array} \right\} = s(x)$$

فإذا كان $f'(1) = f'(3)$ فجد a, b, c, d .

13. تعرّف شريحة تكميلية طبيعية S من خلال

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq x < 2 \text{ إذا كان } S_0(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3 \\ 2 \leq x \leq 3 \text{ إذا كان } S_1(x) = 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3 \end{array} \right\} = S(x)$$

فإذا كان S يستكمل البيانات داخلياً $(1, 1), (2, 1), (3, 0)$ فأوجد B, D, b, d .

14. تعرّف شريحة تكعيبية متشابكة S الخاص بالدالة f من خلال

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x < 1 \text{ إذا كان } s_0(x) &= 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 \\ 1 \leq x \leq 2 \text{ إذا كان } s_1(x) &= 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 \end{aligned} \right\} = s(x)$$

أوجد $f'(0)$ و $f'(2)$.

15. أنشئ شريحة تكعيبية حرّة لتقريب $f(x) = \cos \pi x$ مستخدماً القيم المعطاة من خلال $f(x)$ عند $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$.

أ. أنشئ تكاملاً للشريحة على امتداد $[0, 1]$. وقرن النتيجة بـ $\int_0^1 \cos \pi x dx = 0$.

ب. استخدم مشتقات الشريحة لتقريب $f'(0.5)$ و $f''(0.5)$. وقرن هذه التقريبات بالقيم الحقيقية.

16. أنشئ شريحة تكعيبية حرّة لتقريب $f(x) = e^{-x}$ باستخدام القيم المعطاة من خلال $f(x)$ عند $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$.

أ. أنشئ تكاملاً للشريحة على امتداد $[0, 1]$. وقرن النتيجة بـ $\int_0^1 e^{-x} dx = 1 - 1/e$.

ب. استخدم مشتقات الشريحة لتقريب $f'(0.5)$ و $f'''(0.5)$. وقرن هذه التقريبات بالقيم الحقيقية.

17. كرّر التمرين (15) بإنشاء شريحة تكعيبية متشابكة بدلاً من حرّة مستخدماً $f'(0) = f'(1) = 0$.

18. كرّر التمرين (16) بإنشاء شريحة تكعيبية متشابكة بدلاً من حرّة مستخدماً $f'(0) = -1$. $f'(1) = -e^{-1}$.

19. افترض أن $f(x)$ كثيرة حدود من الرتبة 3. أثبت أن $f(x)$ هي شريحتها التكعيبية المتشابكة نفسها. لكن لا يمكن أن تكون شريحتها التكعيبية الحرّة.

20. افترض أن البيانات $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$ تقع على خط مستقيم. ما الذي يمكن قوله حول الشريحتين التكعيبيتين الحرّة والمتشابكة للدالة f ؟ إرشاد: خذ تلميحاتاً عن نتائج التمرينين (1 و 2).

21. مفترضين التقسيمات $x_0 = 0, x_1 = 0.05, x_2 = 0.1$. أوجد دالة استكمال داخلي خطي مجزأً F إلى $f(x) = e^{2x}$. قرّب $\int_0^{0.1} e^{2x} dx$ بـ $\int_0^{0.1} F(x) dx$. وقرن النتائج بالقيمة الحقيقية.

22. ليكن $f \in C^2[a, b]$ ولتكن النقاط $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ معلومة. اشتقّ تقديراً للخطأ مشابهاً لما في المبرهنة (13.3)، لدالة استكمال داخلي خطي مجزأً f . استخدم هذا التقدير لاشتقاق حدود خطأ من التمرين (21).

23. أنشئ توسيعاً للخوارزميات (4.3) و (5.3) لتشمل -ضمن المخرجات- المشتقتين الأولى والثانية للشريحة عند النقاط.

24. أنشئ توسيعاً للخوارزميتين (4.3) و (5.3) لتشمل -ضمن المخرجات- تكامل الشريحة على امتداد الفترة $[x_0, x_n]$.

25. مفترضين التقسيمات $x_0 = 0, x_1 = 0.05, x_2 = 0.1$ و $f(x) = e^{2x}$:

أ. أوجد الشريحة التكعيبية S مع الشروط الحدودية المتشابكة التي تستكمل داخلياً f .

ب. أوجد تقريباً إلى $\int_0^{0.1} e^{2x} dx$ من خلال حساب $\int_0^{0.1} s(x) dx$.

ج. استخدم المبرهنة (13.3) لتقدير $\max_{0 \leq x \leq 0.1} |f(x) - s(x)|$ و $\left| \int_0^{0.1} f(x) dx - \int_0^{0.1} s(x) dx \right|$.

د. حدّد الشريحة التكعيبية S مع شروط حدودية حرّة، وقارن $S(0.02)$ ، $e^{0.04} = 1.04081077$ ، وقارن $S(0.02)$ ، $e^{0.04}$.
26. لتكن الدالة f معرفة على $[a, b]$ ، ولتكن النقاط $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$ معلومة. أثبت أن

دالة شريحة الاستكمال الداخلي التربيعية S تتشكل من كثيرة حدود تربيعية

$$\text{وكثيرة حدود تربيعية } S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 \text{ في } [x_0, x_1]$$

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 \text{ في } [x_1, x_2]$$

بحيث

$$S(x_0) = f(x_0), S(x_1) = f(x_1) \text{ و } S(x_2) = f(x_2) \text{ (i)}$$

$$S \in C^1[x_0, x_2] \text{ (ii)}$$

أثبت أن الشرطين (i) و (ii) يؤديان إلى خمس صيغ في ستة مجاهيل $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$

تكمّن المشكلة في تقرير الشرط الإضافي الذي نفترضه لجعل الحل وحيثاً. فهل الشرط

$S \in C^2[x_0, x_2]$ يؤدي إلى حل ذي معنى؟

27. استخدم التمرين (26) لتحديد شريحة تكعيبية S تستكمل داخلياً البيانات $f(1) = 1, f(0) = 0$

$$f(2) = 2 \text{ وتحقق } S'(0) = 2.$$

28. أ. تضمّنّت مقدمة هذا الباب جدولاً يضم عدد السكان للولايات المتحدة للأعوام 1940 إلى

1990. استخدم استكمالاً داخلياً للشريحة التكعيبية لتقريب عدد السكان في السنوات 1930

و 1965 و 2010.

ب. عدد السكان عام 1930 كان تقريباً 123,203,000. فما دقة أرقام السنتين 1965 و 2010؟

29. تتحرك سيارة على طريق مستقيم. وتسجل بياناتها عند نقاط كثيرة. وتظهر هذه البيانات

في الجدول الآتي، حيث يظهر الزمن (Time) بالثانية، المسافة (Distance) بالقدم، والسرعة

الوقت	0	3	5	8	13
المسافة	0	225	383	623	993
السرعة	75	77	80	74	72

أ. استخدم شريحة تكعيبية متشابكة لتخمين موقع السيارة وسرعتها عند الثانية العشرة

$$t = 10 \text{ s}$$

ب. استخدم مشتقة الشريحة لتحديد ما إذا كان يمكن للسيارة أن تتجاوز سرعة 55-mi/h على

الطريق. وإذا كان ذلك فما المرة الأولى التي تتجاوز فيها السيارة هذه السرعة؟

ج. ما السرعة القصوى المتوقعة لهذه السيارة؟

30. فاز حصان يدعى Smart Jones في سباق الخيول (Kentucky Derby) لعام 2004 في وقت

2:04.06 (دقيقتين و 4.06) في سباق 1.25 ميل. والزمن عند نقطة (علامة) ربع الميل، نصف الميل،

والميل، كانت 0:22.99 و 0:46.73 و 1:37.35 على التوالي.

أ. استخدم هذه القيم معاً عند وقت الانطلاق لإنشاء شريحة تكعيبية حرّة سباق Smart Jones.

ب. استخدم الشريحة لتخمين الزمن عند نقطة ثلاثة أرباع الميل، وقارن ذلك بالزمن الحقيقي

$$1:11.80.$$

ج. استخدم الشريحة لتقريب سرعة انطلاق Smart Jones وسرعته عند خط النهاية.

31. من المعتقد أن الكميات العالية من حمض التنتلك في أوراق أشجار البُوط البالغة تعيق سوّ

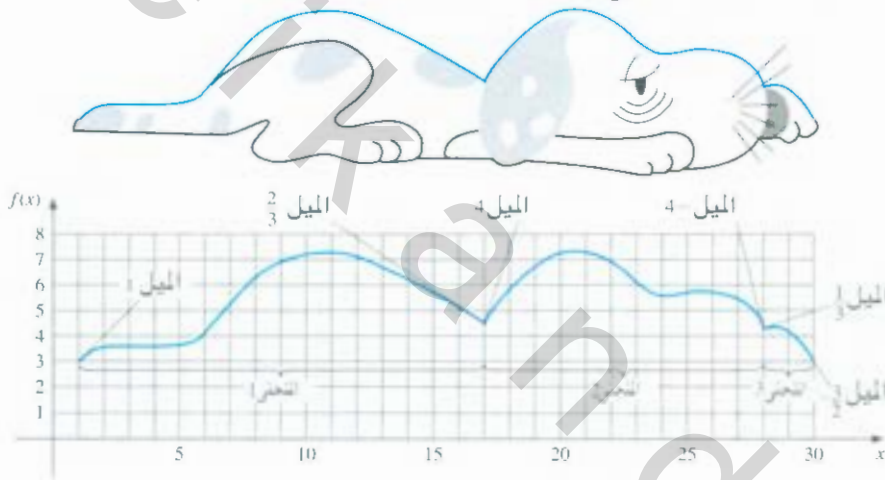
يرقات عثة الشتاء (*Operophtera bromata* L., Geometridae) التي تؤذي هذه الأشجار كثيراً في

سنوات معينة. يبيّن الجدول الآتي معدل وزن عينتين من هذه اليرقات خلال الأيام 28 الأولى

بعد ولادتها. أخذت العينة الأولى من يرقات تربت على أوراق بلوط طرية (حديثة)، حيث تربت العينة الثانية على أوراق بالغة (عتيقة) من نفس الشجرة.
 أ. استخدم شريحة تكعيبية حرّة لتقريب منحنى معدل الوزن لكل عينة.
 ب. أوجد أعلى معدل وزن تقريبي لكل عينة من خلال إيجاد القيمة القصوى للشريحة.

اليوم	0	6	10	13	17	20	28
معدل وزن العينة (2) باللجم	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
معدل وزن العينة (1) باللجم	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

32. طلب تقدير الجزء العلوي من هذا الوحش الأرسقراطي باستخدام استكمالات داخلية لشريحة تكعيبية متشابكة. وقد رسم المنحنى على مخطط شبكي، وبني الجدول منه. استخدم الخوارزمية (5.3) لإنشاء الشرائح التكعيبية المتشابكة الثلاثة.



المنحنى 3				المنحنى 2				المنحنى 1			
$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	x_i	i	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	x_i	i	$f'(x_i)$	$f(x_i)$	x_i	i
0.33	4.1	27.7	0	3.0	4.5	17	0	1.0	3.0	1	0
	4.3	28	1		7.0	20	1		3.7	2	1
	4	29	2		6.1	23	2		3.9	5	2
-1.5	3.0	30	3		5.6	24	3		4.2	6	3
					5.8	25	4		5.7	7	4
					5.2	27	5		6.6	8	5
				-4.0	4.1	27.7	6		7.1	10	6
									6.7	13	7
									4.5	17	8
								-0.67			

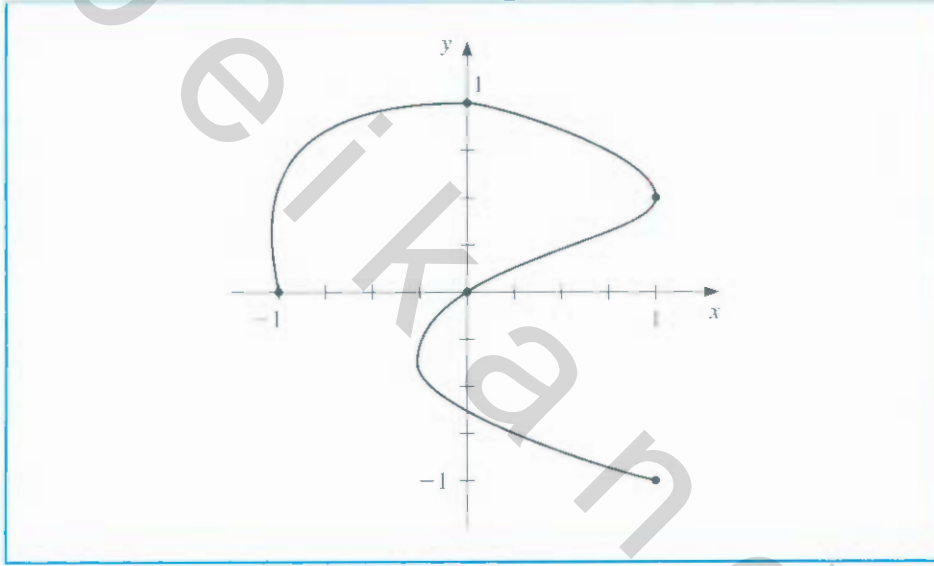
33. كرّر التمرين (32)، ولكن بإنشاء ثلاث شرائح طبيعية مستخدماً الخوارزمية (4.3).

Parametric Curves

5.3 المنحنيات الوسيطة

ليس ممكناً استخدام أي من الأساليب التي تطوّرت في هذا الفصل لتوليد منحنيات بالصيغة التي نراها في شكل (14.3)؛ لأن هذا المنحنى لا يمكن الصيغة عنه بوصفه دالة لأحد الوسيطات التنسيقية بدلالة الآخر. سوف نرى في هذا الفصل كيف تمثل منحنيات عامة باستخدام وسيط

للتعبير عن كل من متغيري إحداثيات x - و y . ويمكن توسيع هذا الأسلوب ليمثل منحنيات عامة وأسطحاً في فضاء. ويكون أسلوب الوسيط المباشر لتحديد كثيرة حدود أو كثيرة حدود مجزأة لربط النقاط $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ وفق ترتيب محدد مستخدماً وسيطاً على فترة $[t_0, t_n]$ مع $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ثم إنشاء دوال تقريب مع $x_i = x(t_i)$ و $y_i = y(t_i)$ لكل $i = 0, 1, \dots, n$. يعرض المثال الآتي ذلك الأسلوب في حالة كون كل من دالتي التقريب كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي.



شكل 14.3

أنشئ زوجاً من كثيرات حدود لاجرانج لتقريب المنحنى على صورة الشكل (14.3) مستخدماً نقاط البيانات الظاهرة على المنحنى. هناك مرونة في اختيار المتغير. وسوف نختار النقاط $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ المتساوية التباعد في $[0, 1]$. اعني تعطي البيانات في جدول (19.3).

مثال 1

i	0	1	2	3	4
t_i	0	0.25	0.5	0.75	1
x_i	-1	0	1	0	1
y_i	0	1	0.5	0	-1

جدول 19.3

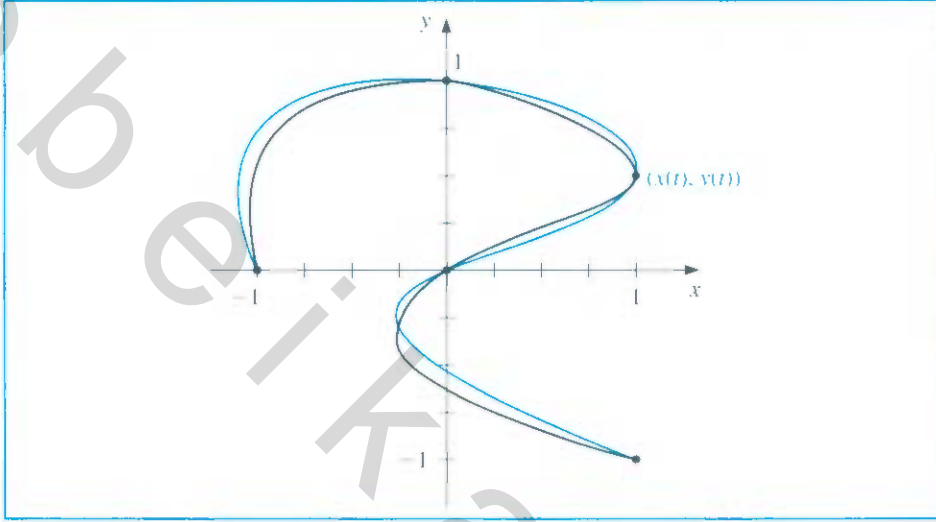
وهذا ينتج كثيرات حدود استكمال داخلي متداخلة

$$x(t) = \left(\left(\left(\left(64t - \frac{352}{3} \right) t + 60 \right) t - \frac{14}{3} \right) t - 1 \right)$$

و

$$y(t) = \left(\left(\left(\left(-\frac{64}{3}t + 48 \right) t - \frac{116}{3} \right) t + 11 \right) t \right)$$

وعند رسم هذا النظام الوسيط نحصل على الشكل البياني الموضح بالأزرق في شكل (15.3). ومع أنه يمر عبر النقاط المطلوبة، وله الشكل الرئيس نفسه، فإنه لا يتعدى التقريب الخام (الابتدائي) للمنحنى الأصلي. سيتطلب التقريب الأدق نقاطاً إضافية، مع زيادة مرافقة بالحسابات.



شكل 15 3

ويمكن توليد منحنيات هرمايت والشريحة بالأسلوب نفسه، ولكنها تتطلب جهوداً حسابية واسعة أيضاً. تتطلب التطبيقات في الرسوم الحاسوبية توليداً سريعاً لمنحنيات ملساء يمكن تعديلها بسهولة وسرعة. ولغرض حسابي وجمالي، فإن تغيير جزء واحد من هذه المنحنيات يجب ألا يكون له أثر ولو قليلاً في بقية أجزائها. يلغي هذا استخدام كثيرات حدود استكمال داخلي أو الشرائح؛ لأن تغيير أحد الأجزاء يؤثر في المنحنى كله. إن اختيار منحنى الاستخدام في الرسم الحاسوبي يكون غالباً عبارة عن صيغة لكثيرة حدود هرمايت التكعيبية المجزأة. ويحدد كل جزء من كثيرة حدود هرمايت التكعيبية كلياً من خلال وصف أطرافها والمشتقات عند الأطراف هذه. ويمكن لجزء واحد من المنحنى أن يتغير نتيجة لذلك، حيث يترك غالبية المنحنى على حاله. وتحتاج الأجزاء المتجاورة إلى التعديل. لضمان الملوسة عند الأطراف فقط. ويمكن تنفيذ الحسابات سريعاً، ويمكن تعديل المنحنى جزءاً بعد آخر. تحتاج مشكلة استكمال هرمايت الداخلي إلى وصف المشتقات عند الأطراف لكل جزء من المنحنى. لنفترض أن المنحنى له $n + 1$ من نقاط البيانات $(x(t_0), y(t_0)), \dots, (x(t_n), y(t_n))$. ونرغب في تحديد معالم المكعب لاستيعاب سمات معقدة. ويجب وصف $x'(t_i)$ و $y'(t_i)$ لكل $i = 0, 1, \dots, n$ بعد ذلك.

هذا ليس صعباً على الصورة التي تبدو لنا، لأن كل جزء ينتج مستقلاً. وعلينا ضمان أن المشتقات عند الأطراف لكل جزء تماثل تلك التي في الجزء المجاور فقط. وأخيراً نستطيع تبسيط العملية لتكون عبارة عن تحديد زوج من كثيرات حدود هرمايت التكعيبية في الوسيط t في الأساس، حيث إن $t_0 = 0$ و $t_1 = 1$ علماً أن بيانات الأطراف $(x(0), y(0))$ و $(x(1), y(1))$ والمشتقات dy/dx (at $t = 0$) و dy/dx (at $t = 1$).

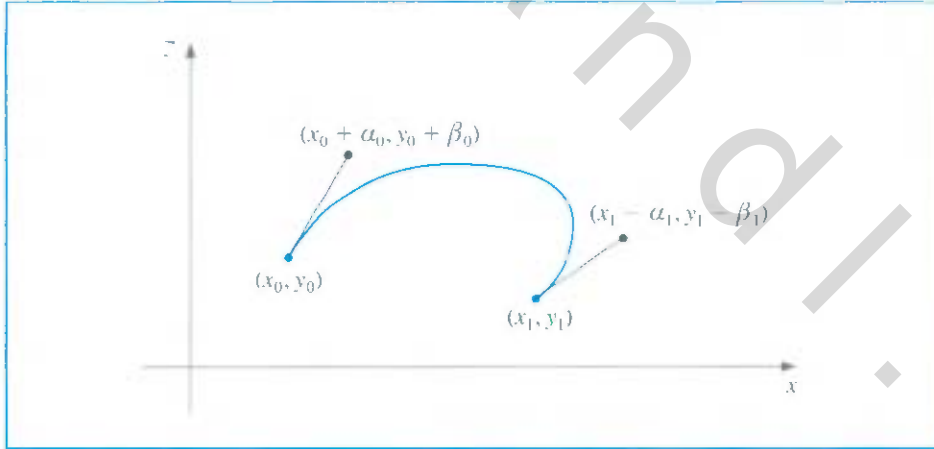
إن نظاماً ناجحاً لرسم الحاسوب يحتاج لأن يكون مبنياً على أساس مبرهنة رياضية منتظمة بحيث تكون النتائج متوقعة. ولكن هذه البرهنة يجب تطبيقها ضمن لخلفية بحيث يتمكن الرسام من تأسيس لتصميم وفقاً لافتراض.

لاحظ أننا نعرّف ستة شروط فقط، وأن كثيرات الحدود التكعيبية في $x(t)$ و $y(t)$ لكل منها أربعة وسيطات. ليصبح المجموع ثمانية. وهذا يوفر مرونة في اختيار زوج من كثيرات حدود هرايمت التكعيبية لتحقيق الشروط. كون الصيغة الطبيعية لتحديد $x(t)$ و $y(t)$ تتطلب منا وصف $x'(0), x'(1), y'(0), y'(1)$. يتطلب منحنى هرايمت الواضح في x و y وصف امحصلات

$$\frac{dy}{dx}(t=1) = \frac{y'(1)}{x'(1)} \text{ و } \frac{dy}{dx}(t=0) = \frac{y'(0)}{x'(0)} \text{ فقط.}$$

وعند ضرب $x'(0)$ و $y'(0)$ في عامل قياس مشترك، فإن خط المماس للمنحنى عند $(x(0), y(0))$ يبقى نفسه، لكن يتغير شكل المنحنى. وكلما كان عامل القياس أكبر، يكون المنحنى أقرب في تقريب خط المماس من $(x(0), y(0))$. وتظهر حالة مشابهة عند نقطة النهاية الأخرى $(x(1), y(1))$. ولزيادة حول تبسيط العملية في الرسوم الحاسوبية المتداخلة، فإن المشتقة عند نقطة نهاية تبسط مستخدمة نقطة ثانية (وتدعى نقطة الدلالة *guidepoint*) على خط التماس المطلوب. وكلما كانت نقطة الدلالة بعيدة عن النقطة، أصبح بإمكان المنحنى تقريب خط المماس أكثر من النقاط. تظهر النقاط عند (x_0, y_0) و (x_1, y_1) في شكل (16.3). ونقطة الدلالة لـ (x_0, y_0) هي $(x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0)$ ونقطة الدلالة لـ (x_1, y_1) هي $(x_1 - \alpha_1, y_1 - \beta_1)$. إن كثيرة حدود هرايمت التكعيبية $x(t)$ على $[0, 1]$ تحقق

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \quad x'(0) = \alpha_0, \quad x'(1) = \alpha_1$$



شكل 16.3

وكثيرة الحدود الوحيدة التي تحقق هذه الشروط هي

$$x(t) = [2(x_0 - x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - (\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + \alpha_0 t + x_0 \quad (22.3)$$

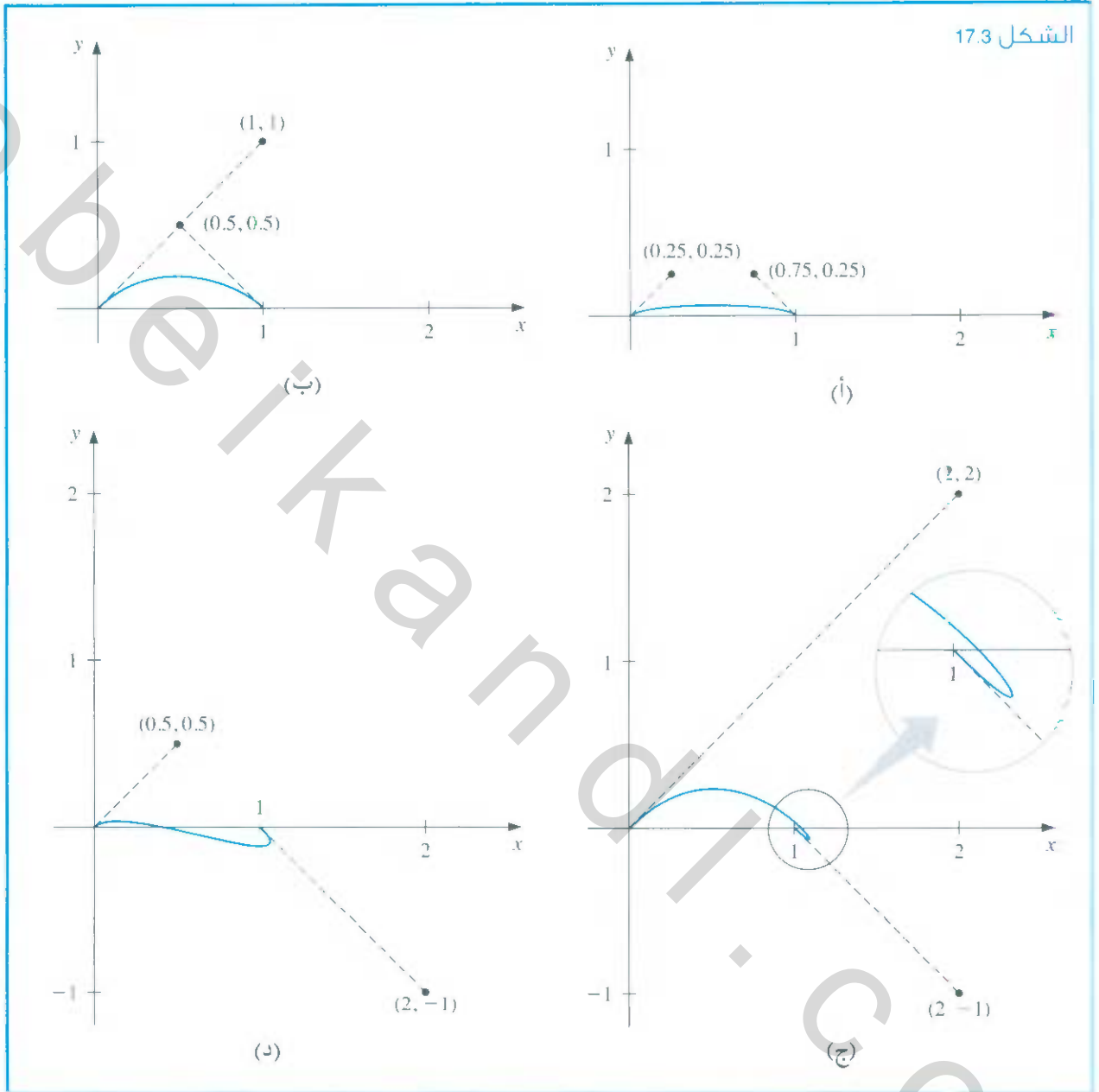
وبالأسلوب نفسه، فإن كثيرة الحدود التكعيبية الوحيدة التي تحقق

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad y'(0) = \beta_0, \quad y'(1) = \beta_1$$

تكون

$$y(t) = [2(y_0 - y_1) + (\beta_0 + \beta_1)]t^3 + [3(y_1 - y_0) - (\beta_1 + 2\beta_0)]t^2 + \beta_0 t + y_0 \quad (23.3)$$

الشكل 17.3



مثال 2 تبين الرسوم البيانية في الشكل 17.3 بعض الإمكانيات لمنحنيات أنتجت من خلال الصيغ (22.3)

و (23.3) عندما تكون النقاط هي $(0, 0)$ و $(1, 0)$ ومقدار الميل عند هذه النقاط 1 و -1 على التوالي.

إن تبيان الميل عند الأطراف يتطلب كون $\alpha_0 = \beta_0$ و $\alpha_1 = \beta_1$ فقط؛ لأن النسب α_0/β_0 و α_1/β_1

تعطي على التوالي الميل عند يسار الأطراف وبيمينها.

والأسلوب المعياري لتحديد منحنيات في حالة رسوم بيانية متداخلة هو استخدام الفأة أولاً أو كرة المسار trackball لتحديد النقاط ونقاط الدلالة لتوليد التقريب الأول للمنحنى. ويمكن تحديد هذه يدوياً، ولكن معظم أنظمة الرسوم البيانية تسمح لك باستخدام جهاز الإدخال لرسم المنحنى على الشاشة تلقائياً، وسوف تختار النقاط ونقاط الدلالة المناسبة لهذا المنحنى التلقائي.

ويمكن المناورة بالنقاط ونقاط الدلالة فيما بعد لمواقع تستطيع إنتاج منحنى ذي شكل مقبول. ولكن الحسابات بعدها الأدنى. فإن المنحنى يمكن تحديده سريعاً، حيث يمكن فضلاً عن ذلك ملاحظة التغيير الناتج حالاً. والأكثر من ذلك، فإن جميع البيانات المطلوبة لحساب المنحنيات بتوقع وجيدها في الإحداثيات ونقاط الدلالة. ولا يتطلب الأمر معرفة تحليلية لمستخدم النظام أحياناً.

وتستخدم برامج الرسوم البيانية المشهورة هذا النوع من الأنظمة لتمثيل رسمها البياني التلقائي بصيغة صيغة إلى حد ما. وتكعيبات هرايت موضحة على أنها كثيرات حدود بيزير E-z e-r التي تدخل عامل قياس 3 عند حساب الاشتقاق عند نقاط النهاية. وهذا يختزل الصيغ الوسيطة إلى

$$x(t) = [z(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + 3\alpha_0 t + x_0 \tag{24.3}$$

كان بيير آيتن بيزير (1910-1999) PierreEtienne Bezier رئيساً للتصميم والإنتاج في شركة رينو للسيارات معظم حياته المهنية بدأ بحثه في التصميم المدعم بالحاسوب والتصنيع عام 1960. مطوراً أدوات فاعلة في تصميم المنحنى والسطح وأسس طريقة توليد حاسوبية في ثلاثة اتجاهات (3D) لنماذج السيارات

من إيجابيات منحنيات بيزير Bezier التي تحمل اسمه. أنها تستند إلى مبرهنة رياضية دقيقة، ولا تحتاج لأن تكون ماثلة كلياً أمام النقطة بالتطبيق الذي يريد عمل منحنى أو سطح تتحقق فيه الافتراضات. هذه المنحنيات هي القاعدة لنظام هوامشر Adobe Postscript القوي، حيث تنتج المنحنيات آلياً، وتظهر في العديد من برمجيات التصميم الحاسوبية.

$$y(t) = [z(y_0 - y_1) + 3(\beta_0 + \beta_1)]t^3 + [3(y_1 - y_0) - 3(\beta_1 + 2\beta_0)]t^2 + 3\beta_0 t + y_0 \tag{25.3}$$

إلى $0 \leq t \leq 1$ لكن هذا التغيير يكون واضحاً لمستخدم النظام.

تُنشئ الخوارزمية (6.3) مجموعة منحنيات بيزير معتمدة على الصيغ الوسيطة في المعادلتين (24.3) و (25.3).

منحنى بيزير Bezier Curve

لإنشاء منحنيات بيزير التكعيبية C_0, \dots, C_{n-1} بصيغة متغيرة، بحيث C_i ممثلة كآتي:

$$(x_i(t), y_i(t)) = (a_0^{(i)} + a_1^{(i)}t + a_2^{(i)}t^2 + a_3^{(i)}t^3, b_0^{(i)} + b_1^{(i)}t + b_2^{(i)}t^2 + b_3^{(i)}t^3)$$

لـ $0 \leq t \leq 1$ حيث إنها محددة بنقطة الطرف الأيسر (x_i, y_i) ، نقطة الدلالة اليسرى (x_i^-, y_i^-) ونقطة الطرف الأيمن (x_{i+1}, y_{i+1}) ، ونقطة الدلالة اليمنى (x_{i+1}^+, y_{i+1}^+) لكل $i = 0, 1, \dots, n-1$

المدخلات: $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n); (x_0^+, y_0^+), \dots, (x_{n-1}^+, y_{n-1}^+); (x_1^-, y_1^-), \dots, (x_n^-, y_n^-)$ المخرجات: المعاملات $\{a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}\}$ لكل $0 \leq i \leq n-1$

الخطوة	المضمون
1	لكل $i = 0, 1, \dots, n-1$ ، انشئ الخطوتين 2 و 3.
2	ضع $a_0^{(i)} = x_i$ $b_0^{(i)} = y_i$ $a_1^{(i)} = 3(x_{i+1}^+ - x_i)$



$b_1^{(i)} = 3(y_i^+ - y_i)$ $a_2^{(i)} = 3(x_i + x_{i+1}^- - 2x_i^+)$ $b_2^{(i)} = 3(y_i + y_{i+1}^- - 2y_i^+)$ $a_3^{(i)} = x_{i+1} - x_i + 3x_i^+ - 3x_{i+1}^-$ $b_3^{(i)} = y_{i+1} - y_i + 3y_i^+ - 3y_{i+1}^-$	2
المخرجات $(a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)})$	3
توقف.	4



تتكون المنحنيات الثلاثية الأبعاد بطريقة مماثلة بواسطة تعيين مركبات إضافية لـ \bar{z}_0 و \bar{z}_1 للعقد. و $\bar{z}_0 + \gamma_0$ و $\bar{z}_1 - \gamma_1$ للنقاط الدالة. وتعتبر المسألة الصعبة المتضمنة تمثيل المنحنيات ثلاثية الأبعاد في فقدان البعد الثالث عند رسم المنحنى على شاشة الحاسوب ثنائية الأبعاد. تستخدم تقنيات متعددة ومختلفة، ولكن هذا الموضوع يقع ضمن واقع الرسوم البيانية الحاسوبية. وللحصول على مقدمة لهذا الموضوع وطرق إمكانية تعديل هذه التقنيات عند تمثيلها على السطوح المستوية. يرجى الرجوع إلى الكتب المتعددة حول أساليب رسومات الحاسوب البيانية مثل [Hill, F] أو [FVFH].

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 5.3

- لتكن $(x_0, y_0) = (0, 0)$ و $(x_1, y_1) = (5, 2)$ نقاط نهاية منحنى. استخدم نقاط الدلالة أدناه لإنشاء تقريبات هرميات التكعيبية الوسيطة $(x(t), y(t))$ للمنحنى، وارسم التقريبات:
 - أ. $(1, 1)$ و $(6, 1)$ ب. $(5.5, 1.5)$ و $(0.5, 0.5)$
 - ج. $(1, 1)$ و $(6, 3)$ د. $(7, 0)$ و $(2, 2)$
- كرّر التمرين (1) مستخدماً كثيرات حدود بيزير التكعيبية.
- أنشئ كثيرات حدود بيزير التكعيبية معتمداً الأطراف ونقاط الدلالة الآتية وارسمها:
 - أ. النقطة $(1, 1)$ مع نقطة دلالة $(1.5, 1.25)$ للنقطة $(6, 2)$ مع نقطة دلالة $(7, 3)$.
 - ب. النقطة $(1, 1)$ مع نقطة دلالة $(1.25, 1.5)$ للنقطة $(6, 2)$ مع نقطة دلالة $(5, 3)$.
 - ج. النقطة $(0, 0)$ مع نقطة دلالة $(0.5, 0.5)$ للنقطة $(4, 6)$ مع نقطة دلالة داخلية $(3.5, 7)$ ونقطة دلالة خارجة $(4.5, 5)$ للنقطة $(6, 1)$ مع نقطة دلالة $(7, 2)$.
 - د. النقطة $(0, 0)$ مع نقطة دلالة $(0.5, 0.5)$ للنقطة $(2, 1)$ مع نقطة دلالة داخلية $(3, 1)$ ونقطة دلالة $(3, 1)$ للنقطة $(4, 0)$ مع نقطة دلالة داخلية (1.5) ونقطة دلالة $(3, -1)$ للنقطة $(6, -1)$ مع نقطة دلالة $(6.5, -0.25)$.
- استخدم البيانات في الجدول الآتي والخوارزمية (6.3) لتقريب شكل الحرف \mathcal{M} :

i	x_i	y_i	α_i	β_i	α'_i	β'_i
0	3	6	3.3	6.5		
1	2	2	2.8	3.0	2.5	2.5
2	6	6	5.8	5.0	5.0	5.8
3	5	2	5.5	2.2	4.5	2.5
4	6.5	3			6.4	2.8

5. افترض أن كثيرة حدود بيزير التكعيبية قد وضعت عبر النقاط (u_0, v_0) و (u_1, v_1) مع نقاط دلالة (u_2, v_2) و (u_3, v_3) على التوالي.

أ. اشتق الصيغ الوسيطة لـ $u(t)$ و $v(t)$ مفترضاً أن

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_3, \quad u'(0) = u_1 - u_0, \quad u'(1) = u_3 - u_2$$

$$\text{و} \quad v(0) = v_0, \quad v(1) = v_3, \quad v'(0) = v_1 - v_0, \quad v'(1) = v_3 - v_2$$

ب. لتكن $f(\frac{1}{3}i) = u_i$ لكل $i = 0, 1, 2, 3$ وكثيرة حدود برنستاين من الرتبة 3 في t هي $u(t)$. أثبت أن كثيرة حدود $g(\frac{1}{3}i) = v_i$ لكل $i = 0, 1, 2, 3$. أثبت أن كثيرة حدود برنستاين من الرتبة 3 في t هي f في t هي g في t هي $g(t)$.
(انظر تمرين 29 من الفصل 1.3)

Survey Methods and Software

6.3 مسح الطرائق والبرمجيات

بحثنا في هذا الباب تقريب دالة باستخدام كثيرات حدود وكثيرات حدود مجردة. ويمكن وصف الدالة من خلال صيغة تعريفية أو من خلال تهيئة نقاط في السطح يمر من خلالها الشكل البياني للدالة.

إن مجموعة النقاط x_0, x_1, \dots, x_n معطاة في كل حالة، وإن معلومات أخرى كقيمة مشنقات مختلفة، يمكن أن تكون ضمن المتطلبات أيضاً. نحن بحاجة إلى إيجاد دالة تقريبية تحقق الشروط المحددة من قبل هذه البيانات. إن كثيرة حدود استكمال داخلي $P(x)$ هي كثيرة حدود ذات أقل رتبة وتحقق للدالة f

$$P(x_i) = f(x_i) \quad \text{لكل } i = 0, 1, \dots, n$$

ومع أن كثيرة الحدود هذه هي استكمال داخلي وحيد، فإنه يمكن أن تأخذ صيغاً مختلفة. وصيغة لاجرانج غالباً ما تستخدم في جداول استكمال داخلي عندما تكون n صغيرة. وفي اشتقاق صيغ لتقريب المشتقات والتكاملات أيضاً. وتستخدم طريقة نيفيل في حساب الكثير من كثيرات الحدود المستكملة داخلياً عند نفس القيمة لـ x . وتكون صيغ نيوتن لكثيرات الحدود أكثر تناسباً للحساب، وتستخدم على نحو واسع لاشتقاق صيغ لحل الصيغ التفاضلية أيضاً. ويتسم استكمال داخلي كثيرة حدود بحالة ضعف تكمن في التذبذب، خصوصاً إذا كان عدد النقاط كبيراً. ويمكن تطبيق طرائق أخرى في هذه الحالة.

تستكمل كثيرات حدود هرايميت الدالة ومشتقاتها عند النقاط داخلياً. ويمكن أن تكون نقطة جداً، لكن ذلك يتطلب معلومات أكثر حول الدالة المراد تقريبها. وعندما يكون هناك عدد كبير من النقاط، فإن كثيرات حدود هرايميت معرضة لحالة ضعف التذبذب أيضاً.

أكثر صيغ الاستكمال الداخلي شيوعاً في الاستخدام هي استكمال داخلي كثيرة حدود مجردة. فإذا توفرت قيم الدالة والمشتقة، فإنه ينصح باستخدام هرايميت الداخلي التكعيبية. إنها الطريقة الفضلى لقيم استكمال داخلي الدالة، التي تمثل حل صيغة الاشتقاق. وعندما لا يتوافر سوى قيم الدالة، فإنه يمكن استخدام استكمال داخلي الشريحة التكعيبية الحرة. هذا يجبر المشتقة الثانية للشريحة لتصبح صفراً عند الأطراف. وتتطلب شرائح تكعيبية أخرى بيانات إضافية. ويحتاج الشريحة التكعيبية التشابكية إلى قيم مشتقة الدالة عند الأطراف للفترة على سبيل المثال. هناك طرائق استكمال داخلي أخرى شائعة الاستخدام مثل الاستكمال داخلي مثلثاتي، وبالتحديد

تحول فورير السريع Fast Fourier Transform الذي سيتناول في الباب الثامن، ويستخدم مع كميات كبيرة من البيانات عندما تكون الدالة ذا طبيعة دورية. ويستخدم الاستكمال الداخلي من خلال دوال معقولة أيضاً. وإذا حصل شك في دقة البيانات، فإن أساليب الملوسة يمكن تطبيقها، وينصح عندئذ باستخدام بعض صيغ المربعات الصغرى Least Squares لتوفيق البيانات مثل كثيرات حدود، دوال مثلثاتية. دوال معقولة. وشرائح يمكن استخدامها في المربعات الصغرى لتوفيق البيانات. وسوف نتناول هذه المواضيع في الباب الثامن. تستند برامج نمطية الاستكمال الداخلي في مكتبة IMSL إلى الكتاب

"A Practical Guide to Splines by Carl de Boor [Deb2]" واستخدام استكمال داخلي من خلال شرائح تكعيبية. ويستخدم النمط البرامجي CSDEC لاستكمال داخلي من خلال شرائح تكعيبية مع شروط إنهاء نتاج للمستخدم. CSPER هو لاستكمال داخلي من خلال شرائح تكعيبية مع شروط إنهاء دورية. وCSHER هو لاستكمال داخلي من خلال كثيرات حدود هرميات شبه المجزأة. والنمط البرامجي CSDEC يدمج ما بين الخوارزميتين (4.3 و 5.3). والنمط البرامجي CSINT يستخدم شرط اللاعقدة الذي ذكر في نهاية الفصل (4.3). وهناك شرائح تكعيبية لتقليل التذبذبات والإبقاء على التقعر أيضاً. وطرائق استكمال داخلي في اتجاهين من خلال شرائح ثنائية التكعيب موجودة أيضاً.

تتضمن مكتبة NAG <http://www.netlib.org> برامج نمطية فرعية مثل subroutines EO1AEF لاستكمال داخلي كثيرات حدود وهرمايت، EO1BAF لاستكمال داخلي شرائح تكعيبية و EO1BEF لاستكمال داخلي هرمايت التكعيبية المجزأة. يُستخدم النمط البرامجي الفقرة EO1ABF لاستكمال داخلي لبيانات عند نقاط متساوية التباعد. أما النمط البرامجي الفقرة EO1AAF فيطبق على بيانات عند نقاط غير متساوية التباعد. ويتضمن NAG برامج نمطية جزئية لاستكمال داخلي من دوال بمتغيرين أيضاً.

وتحتوي المكتبة netlib على البرامج النمطية الجزئية cubsp1.f من خلال الحزمة pppack لحساب الشريحة التكعيبية مع شروط مختلفة الأطراف. ومن خلال الحزمة slatec، فإن polint.f يعطي معامل فروقات نيوتن المنقسمة لنقاط بيانات منقطعة (منفصلة). ونجد برامج نمطية فرعية مختلفة لحساب كثيرات حدود هرمايت المجزأة من خلال الحزمة slatec/pchip.

ويمكن استخدام دالة MATLAB التي هي INTERP1 لاستكمال داخلي لمجموعة نقاط بيانات منقطعة. باستخدام أقرب استكمال داخلي مجاور، أو استكمال داخلي خطي، أو استكمال شريحة داخلي تكعيبية. أو استكمال داخلي تكعيبية. مخرجات INTERP1 كثيرة حدود قيد الحساب عند مجموعة نقاط منقطعة. ويمكن استخدام POLYFIT المبني على تقريب المربعات الصغرى (انظر الفصل 1.8) لإيجاد دالة استكمال داخلي من الرتبة n على الأكثر. ويمر عبر $n+1$ من النقاط المحددة. ويمكن إنتاج شرائح تكعيبية مع الدالة SPLINE. يمكن استخدام Maple لإنشاء

>interp(X,Y,x);

[x[0], x[1],..., x[n]]

[f(x[0]), f(x[1]),..., f(x[n])]

كثيرة حدود استكمال داخلي مستخدماً الأوامر

حيث X عبارة عن النقطة

وY عبارة عن النقطة

و x هو المتغير قيد الاستخدام. ويمكن إنشاء الشريحة التكميبيية الطبيعية مع Maple أيضاً. أدخل أولاً

```
>readlib(spline)
```

لجاهزية الحزمة. ومع X و Y اسبينين في المقطع السابق. فإن الأمر

```
>spline(X,Y,s,3);
```

تنشأ الشريحة التكميبيية الطبيعية التي تستكمل داخلياً

$$Y = [y[0], \dots, y[n]] \text{ و } X = [x[0], \dots, x[n]]$$

حيث X هو المتغير. والعدد 3 يشير إلى رتبة الشريحة التكميبيية. ويمكن إيجاد شرائح خطية وتربيعية أيضاً.

المراجع العامة للطرائق في هذا الفصل من تأليف Powell [Po] و Davis [Da] وتعود الورقة حول الشرائح إلى Schoenberg [Scho]. هذه كتب مهمة حول الشرائح من تأليف Schultz [Schul], De Boor [Deb2], Dierckx [Di], Schumaker [Schum]

الاشتقاق والتكامل العدديان

Numerical Differentiation and Integration

مقدمة

يُصنع السقف المَوْج بضغط لوح الألمنيوم المستوي ليصبح مموّجًا، مقطعه العرضي على شكل موجة الجيب.



افتراض أنك بحاجة إلى صفيحة مموّجة طولها 4 ft، وارتفاع كل موجة منها 1 in من الخط المركزي. وقيمة كل موجة ذات دورة 2π in تقريبًا.

إن مسألة إيجاد طول الصفيحة الأصلية تكمن في إيجاد طول المنحنى $f(x) = \sin x$ من $x = 0$ in إلى $x = 48$ in. ومن حساب التفاضل والتكامل نعرف أن الطول هو

$$L = \int_0^{48} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx$$

وبذلك تختزل المسألة إلى إيجاد هذا التكامل.

وعلى الرغم من أن دالة الجيب هي أحد أكثر الدوال الرياضية شيوعًا، إلا أن حساب طولها يتضمن تكاملًا ناقصيًا (بيضاوي الشكل) من النوع الثاني الذي لا يمكن إيجاد قيمته بالطرائق العادية. وهناك طرائق قد طوّرت في هذا الباب لإيجاد حلول تقريبية لمثل هذا النوع من المسائل. ولقد أخذت هذه المسألة في الحسبان في التمرين (25) من استخدام الفصل (4.4) وفي التمرين (12) من الفصل (5.4).

لقد ذكرنا في مقدمة الباب (3) أن أحد أسباب استخدام كثيرات الحدود الجبرية لتقريب أي مجموعة من البيانات هو معرفة دالة متصلة على فترة مغلقة هي كثيرة حدود قريبة قدر ما نريد من الدالة عند كل نقطة في الفترة. وبالإضافة إلى ذلك فإنه يمكن إيجاد مشتقات كثيرات الحدود وتكاملاتها بسهولة. فليس غريبًا أن معظم عمليات تقريب التكاملات والمشتقات تستخدم كثيرات الحدود التي تقرب الدالة.

Numerical Differentiation

1.4 الاشتقاق العددي

مشتقة الدالة f عند x_0 هي

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

تعد هذه الصيغة طريقة واضحة لتوليد تقريب للمشتقة $f'(x)$ وذلك بحساب

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

لقيم صغيرة للعدد h .

وعلى الرغم من أن هذا الأمر واضح، إلا أنه غير ناجح، بسبب وجود خطأ التدوير المأخوذ. ولكنها نقطة البداية بالتأكيد. ولكي تجد تقريباً للمشتقة $f'(x_0)$ افترض أولاً أن $x_0 \in (a, b)$ ، حيث $f \in C^2[a, b]$ ، وأن $x_1 = x_0 + h$ لقيمة ما $h \neq 0$ التي تكون صغيرة على نحو كافٍ لتضمن أن $x_1 \in [a, b]$.

أنشأ أول كثيرة حدود لاجرانج Lagrange $P_{0,1}(x)$ للدالة f المحدد بالقيمتين x_0 و x_1 ، ويحتوي على حد الخطأ

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{0,1}(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\xi(x)) \\ &= \frac{f(x_0)(x-x_0-h)}{-h} + \frac{f(x_0+h)(x-x_0)}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} f''(\xi(x)) \end{aligned}$$

لبعض قيم $\xi(x)$ في الفترة $[a, b]$. ويعطي الاشتقاق ما يلي

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + D_x \left[\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} f''(\xi(x)) \right] \\ &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{2(x-x_0)-h}{2} f''(\xi(x)) \\ &\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2} D_x(f''(\xi(x))) \\ f'(x) &\approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

ومن ثم

إن إحدى الصعوبات في هذه الصيغة هي عدم حصولنا على أي معلومات عن $D_x f''(\xi(x))$ ، ومن ثم لا يمكن تقدير خطأ القطع.

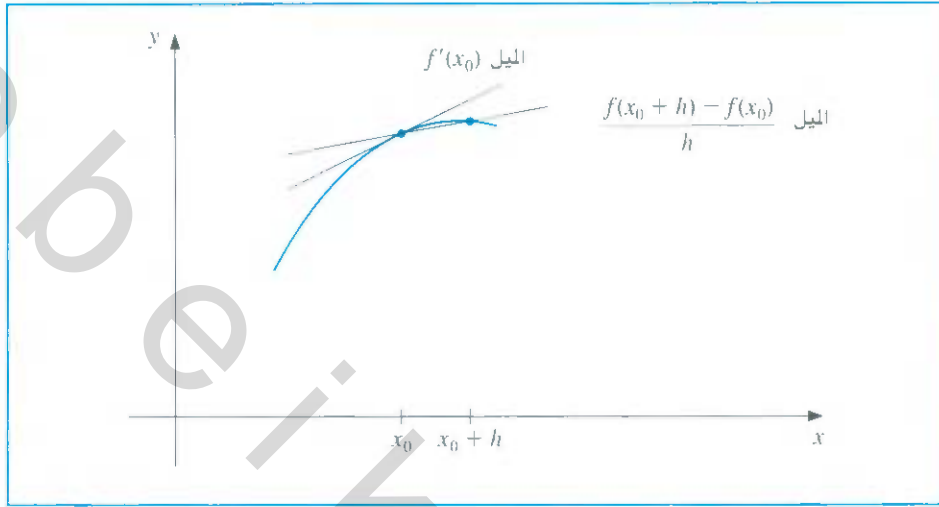
على كل حال عندما تكون x هي x_0 ، فإن معامل $D_x f''(\xi(x))$ يكون صفراً. وتكتب الصيغة على الصورة المبسطة الآتية:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{h}{2} f''(\xi) \quad (1.4)$$

ولقيم h الصغيرة، يمكننا استخدام الفرق الكسري $[f(x_0+h) - f(x_0)]/h$ لتقريب $f'(x_0)$ بخطأ محدود بالقيمة $M|h|/2$ ، حيث M هو حد على $|f''(x)|$ لكل $x \in [a, b]$. تُعرف هذه الصيغة بصيغة الفرق الأمامي forward-difference formula إذا كانت $h > 0$ (انظر شكل 1.4).

استخدم إسحق نيوتن Isaac Newton معادلات الفرق، ودعا إلى شيوعتها في الربع الأخير من القرن السابع عشر. ولكن كثيراً من هذه التقنيات قد طورها توماس هاريوت Thomas Harriot (1561-1621) وهنري برجس Henry Briggs (1561-1631) لقد تقدم هاريوت تقدماً مهماً في تقنيات البحث. وكان برجس مسؤولاً عن قبول اللوغارتمات ليكون لها دور في الحسابات

حيث تعرف بصيغة الفرق الخلفي backward-difference formula إذا كانت $h < 0$.



شكل 1.4

مثال 1 ليكن $f(x) = \ln x$ و $x_0 = 1.8$. نستخدم صيغة الفرق الأمامي

$$\frac{f(1.8 + h) - f(1.8)}{h}$$

لإيجاد تقريب للقيمة $f'(1.8)$ بخطأ مقداره

$$\frac{|hf''(\xi)|}{2} = \frac{|h|}{2\xi^2} \leq \frac{|h|}{2(1.8)^2}$$

لكل $1.8 < \xi < 1.8 + h$

حُسبت النتائج في جدول (1.4) عندما $h = 0.1, 0.01, 0.001$

$\frac{ h }{2(1.8)^2}$	$\frac{f(1.8 + h) - f(1.8)}{h}$	$f(1.8 + h)$	h
0.0154321	0.5406722	0.64185389	0.1
0.0015432	0.5540180	0.59332685	0.01
0.0001543	0.5554013	0.58834207	0.001

جدول 1.4

وبما أن $f'(x) = 1/x$ فإن القيمة الصحيحة للمشتقة $f'(1.8)$ هي 0.555. وإن حدود الخطأ قريبة جداً من خطأ التقريب الحقيقي.

ولكي نجد صيغة عامة لتقريب المشتقة، نفترض أن $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ هي $(n + 1)$ من الأعداد المميزة. عددها. وموجودة في فترة ما I . وأن $f \in C^{n+1}(I)$. ومن المبرهنة 3.3 يكون

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) + \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

لقيمة ما $\xi(x)$ في I . حيث ترمز $L_k(x)$ إلى كثيرة حدود لمعاملات لاجرانج من لرتبة k **مثال** f على x_0, x_1, \dots, x_n . وباشتقاق هذا التعبير نجد أن

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L'_k(x) + D_n \left[\frac{(x-x_0) \cdots (x-x_n)}{(n+1)!} \right] f^{(n+1)}(\xi(x)) + \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_n)}{(n+1)!} D_x [f^{(n+1)}(\xi(x))]$$

وقد وُجِدَت معضلة في تقدير خطأ القطع مرّة أخرى. إلا إذا كان x أحد الأعداد x_j . وفي هذه الحالة فإن الحد الذي يُضرب فيه $D_x [f^{(n+1)}(\xi(x))]$ هو صفر. وتصبح لصيغة

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L'_k(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k) \quad (2.4)$$

التي تسمى صيغة النقاط التي عددها $(n+1)$ لتقريب $f'(x_j)$. وعموماً فإن استخدام نقاط أكثر للتقييم في الصيغة (2.4) يؤدي إلى دقة أعلى على الرغم من أن عدد الحسابات الدالية **يصو** خطأ التقريب لا يشجعان على ذلك إلى حد ما.

إن الصيغ الأكثر شيوعاً هي تلك التي تستخدم ثلاث نقاط لتقييم أو خمس.

نبدأ أولاً باشتقاق صيغ مناسبة ذات ثلاث نقاط. ونأخذ في الحسبان الأخطاء المرتبطة بها.

وحيث إن $L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$ فإن $L'_0(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

وبالطريقة نفسها $L'_1(x) = \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$ و $L'_2(x) = \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

ولذلك من المبرهنة (2.4) يكون

$$f'(x_j) = f(x_0) \left[\frac{2x_j-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \right] + f(x_1) \left[\frac{2x_j-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \right] + f(x_2) \left[\frac{2x_j-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right] + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 (x_j - x_k) \quad (3.4)$$

كل $j = 0, 1, 2$ حيث يعبر الرمز ξ_j عن اعتماد هذه النقطة على x_j .

إن الصيغ الثلاث من الصيغة (3.4) تصبح مناسبة. وخصوصاً إذا كانت المسافات بين الرؤوس

متساوية، أي عندما $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ و $h \neq 0$.

سنفترض أن المسافات بين الرؤوس متساوية التباعد فيما سنقدمه حتى نهاية هذا الفصل.

باستخدام الصيغة (3.4)، وبافتراض $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ نجد أن

$$f''(x_0) = \frac{1}{h} \left[-\frac{3}{2} f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2} f(x_2) \right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0)$$

وبالعمل نفسه للقيمة $x_1 = x_0 + h$ فإن

$$f'(x_1) = \frac{1}{h} \left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_2) \right] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

وللقيمة $x_2 = x_0 + 2h$ فإن

$$f'(x_2) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_1) + \frac{3}{2}f(x_2) \right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_2).$$

وبما أن $x_1 = x_0 + h$ و $x_2 = x_0 + 2h$ فإنه يمكن التعبير عن هذه الصيغ كالتالي

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_0 + h) - \frac{1}{2}f(x_0 + 2h) \right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0)$$

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{h} \left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0 + 2h) \right] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

و

$$f'(x_0 + 2h) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_0 + h) + \frac{3}{2}f(x_0 + 2h) \right] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_2)$$

وللتبسيط، نعوض x_0 بدلاً من $x_0 + h$ في وسط الصيغة، لإعطاء حلّ تقريبيّ للمشتقة $f'(x_0)$. وبطريقة مماثلة نعوض x_0 بدلاً من $x_0 + 2h$ في الصيغة الأخيرة. إن هذه الطريقة تعطي ثلاث صيغ لتقريب $f'(x_0)$ وهي:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

و

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_2)$$

وأخيراً لاحظ أن الصيغة الأخيرة من هذه الصيغ يمكن الحصول عليها بتعويض $-h$ بدلاً من h ، وعليه فهناك في الحقيقة معادلتان فقط.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0) \quad (4.4)$$

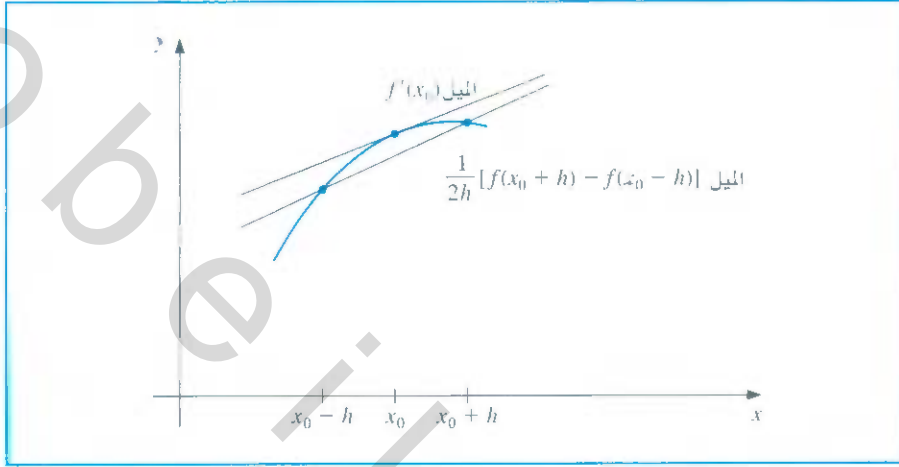
حيث تقع ξ_0 بين x_0 و $x_0 + 2h$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1) \quad (5.4)$$

حيث تقع ξ_1 بين $(x_0 - h)$ و $(x_0 + h)$.

على الرغم من أن الأخطاء في كلا المعادلتين (4.4) و (5.4) هي $O(h^2)$ إلا أن الخطأ في الصيغة (5.4) يساوي تقريباً نصف الخطأ في الصيغة (4.4). ويحدث هذا لأن الصيغة (5.4) تستخدم بيانات على جهتي x_0 ، والصيغة (4.4) تستخدم بيانات على جهة واحدة فقط.

لاحظ أيضًا أن f يحتاج إلى نقطتين فقط في الصيغة (5.4). حيث توجد حاجة إلى ثلاثة حسابات في الصيغة (4.4). ويُظهر شكل (2.4) شرحًا للتقريب الحاصل من الصيغة (5.4).



شكل 2.4

إن التقريب باستخدام الصيغة (4.4) مناسب بالقرب من نهايتي الفترة؛ لأن المعلومات عن f خارج الفترة قد تكون غير متاحة.

إن الطرائق المشروحة في المعادلتين (4.4) و (5.4) تسمى صيغ الثلاث نقاط (على الرغدة من أن النقطة الثالثة $f(x_0)$ لا تظهر في الصيغة (5.4)). وبأسلوب مماثل فهناك صيغ الخمس نقاط، التي تستخدم قيمة الدالة على نقطتين أخريين. إذ يكون حد الخطأ فيهما $O(h^4)$ وإحدى هذه الصيغ

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi) \quad (6.4)$$

حيث تقع ξ بين $x_0 - 2h$ و $x_0 + 2h$ ، ويعطى اشتقاق هذه الصيغة في الفصل 2.4. وإن صيغة الخمس نقاط الأخرى مناسبة لتقريبات نقطة الطرف، خصوصًا بشأن استكمال الشريحة التكعيبية التي درست في الفصل (3.4).

هذه الصيغة هي

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)] + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi) \quad (7.4)$$

حيث تقع ξ بين x_0 و $x_0 + 4h$.

يمكن إيجاد التقريبات على نقطة النهاية اليسرى باستخدام هذه الصيغة و $h > 0$ ، أما التقريبات على نقطة الطرف الأيمن فيمكن إيجادها باستخدام $h < 0$.

يُظهر جدول (2.4) قيمًا للدالة $f(x) = xe^x$. بما أن المشتقة هي $f'(x) = (x + 1)e^x$ فإن استخدام صيغ الثلاث نقاط والخمس نقاط يظهر النتائج الآتية.

مثال 2

صيغة الثلاث نقاط Three-Point Formulas

$$\begin{aligned} \frac{1}{0.2}[-3f(2.0) + 4f(2.1) - f(2.2)] &= 22.032310 : h = 0.1 \text{ مع استخدام (4.4)} \\ \frac{1}{-0.2}[-3f(2.0) + 4f(1.9) - f(1.8)] &= 22.054525 : h = -0.1 \text{ مع استخدام (4.4)} \\ \frac{1}{0.2}[f(2.1) - f(1.9)] &= 22.228790 : h = 0.1 \text{ مع استخدام (5.4)} \\ \frac{1}{0.4}[f(2.2) - f(1.8)] &= 22.414163 : h = 0.2 \text{ مع استخدام (5.4)} \end{aligned}$$

إن الأخطاء في هذه الصيغة هي تقريبا 1.35×10^{-1} و 1.13×10^{-1} و 6.16×10^{-2} و 2.47×10^{-1} على التوالي.

صيغة الخمس نقاط Five-Point Formula

$$\text{باستخدام الصيغة (6.4) مع } h = 0.1 \text{ (صيغة الخمس نقاط الوحيدة الممكنة تطبيقها)}$$

$$\frac{1}{1.2}[f(1.8) - 8f(1.9) + 8f(2.1) - f(2.2)] = 22.166999$$

إن الخطأ في هذه الصيغة يساوي 1.69×10^{-4} تقريبا.

من الواضح أن صيغة الخمس نقاط أفضل من الأخريات.

لاحظ أيضا أن الخطأ في الصيغة (5.4) و $h = 0.1$ يساوي تقريبا نصف قيمة الخطأ الناتج عن استخدام الصيغة (4.4) باختيار $h = 0.1$ أو $h = -0.1$.

يمكن اشتقاق طرائق صالحة لإيجاد تقريبات للمشتقات العليا للدالة. وذلك باستخدام قيم للدالة عند نقاط مختلفة وموضوعة على شكل جدول.

وعلى كل حال فالاشتقاق مضمّن جبريا. ولذلك سنشرح فقط طريقة ممثلة لهذه العمليات.

أبدأ بتمثيل الدالة f بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة حول نقطة x_0 . وأوجد التقييم عند $x_0 + h$ و $x_0 - h$. إذن

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)h^4$$

و

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_{-1})h^4$$

حيث $x_0 - h < \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$

إذا جمعنا هذه الصيغ فإن الحدود التي تحوي $f'(x_0)$ و $f'''(x_0)$ يلغى بعضها بعضا ونحصل

$$\text{على } f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \frac{1}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]h^4$$

وبحل هذه الصيغة لإيجاد $f''(x_0)$ نحصل على

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})] \quad (8.4)$$

افترض أن $f^{(4)}$ متصلة عند $[x_0 - h, x_0 + h]$.

بما أن $\frac{1}{2}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]$ تقع بين $f^{(4)}(\xi_1)$ و $f^{(4)}(\xi_{-1})$. فإن مبرهنة القيمة الوسطية تضمن وجود عدد ξ بين ξ_1 و ξ_{-1} ، ومن ثم ففي الفترة $(x_0 - h, x_0 + h)$ يكون

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]$$

إن هذا يسمح لنا بإعادة كتابة الصيغة (8.4) على الصيغة

جدول 2.4

$f(x)$	x
0.889365	1.8
2.703199	1.9
4.778112	2.0
7.148957	2.1
19.855030	2.2

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi) \quad (9.4)$$

لقيمة ما ξ حيث $x_0 - h < \xi < x_0 + h$. بما أن $f^{(4)}$ متصلة على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$ فإنها محدودة، ومن ثم يكون التقريب $O(h^2)$.

مثال 3 بالعودة إلى البيانات في مثال (2) للدالة $f(x) = xe^x$ يمكن أن نستخدم الصيغة (9.4) لتقريب $f''(2.0)$. وبما أن $f''(x) = (x+2)e^x$ فإن القيمة الحقيقية هي $f''(2.0) = 29.556224$. باستخدام الصيغة (9.4) و $h = 0.1$ نحصل على

$$f''(2.0) \approx \frac{1}{0.01}[f(1.9) - 2f(2.0) + f(2.1)] = 29.593200$$

باستخدام الصيغة (9.4) و $h = 0.2$ نجد أن

$$f''(2.0) \approx \frac{1}{0.04}[f(1.8) - 2f(2.0) + f(2.2)] = 29.704275$$

وتكون الأخطاء 3.70×10^{-2} و 1.48×10^{-1} تقريباً على التوالي. إنه من المهم على نحو خاص أن نهتم بتدوير الخطأ عند تقريب المشتقات. ولشرح هذا يضع دعنا نتفحص الصيغة (5.4) على نحو أدق.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

افترض أنه عند إيجاد قيمة $f(x_0 + h)$ و $f(x_0 - h)$ حصلنا على أخطاء التدوير $e(x_0 + h)$ و $e(x_0 - h)$. عندئذ تكون القيم التي حسبناها $\tilde{f}(x_0 + h)$ و $\tilde{f}(x_0 - h)$ مرتبطة بالقيم الحقيقية $f(x_0 + h)$ و $f(x_0 - h)$ في الصيغ الآتية

$$f(x_0 + h) = \tilde{f}(x_0 + h) + e(x_0 + h)$$

و

$$f(x_0 - h) = \tilde{f}(x_0 - h) + e(x_0 - h)$$

إن الخطأ التام في التقريب، أي

$$f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h} = \frac{e(x_0 + h) - e(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

يحصل جزئياً بسبب خطأ التقدير، وبسبب جزئي آخر هو خطأ القطع. إذا افترضنا أن أخطاء التدوير $e(x_0 \pm h)$ محدودة بعدد ما $\varepsilon > 0$ ، وأن المشتقة الثالثة للدالة f محدودة بعدد ما $M > 0$ فإن

$$\left| f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h} \right| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$$

ولتخفيض خطأ القطع $h^2M/6$ يجب تخفيض h . ولكن بتخفيض h فإن خطأ التدوير ε/h يزداد. وفي الحالات العملية فإن من النادر وجود ميزة في اختيار قيمة صغيرة جداً للعدد h ؛ وذلك لأن خطأ التدوير يسيطر على الحسابات.

مثال 4

افترض القيم في جدول (3.4) التي حسبت لتقريب $f'(0.900)$ حيث $f(x) = \sin x$. إن القيمة الحقيقية هي $\cos 0.900 = 0.62161$. باستخدام الصيغة

$$f'(0.900) \approx \frac{f(0.900 + h) - f(0.900 - h)}{2h}$$

وباختبار قيم مختلفة للعدد h ، نحصل على الإجابات التقريبية في جدول (4.4).

جدول 3.4

الخطأ	التقدير إلى $f'(0.900)$	h	$\sin x$	x	$\sin x$	x
0.00339	0.62500	0.001	0.78395	0.901	0.71736	0.800
0.00089	0.62250	0.002	0.78457	0.902	0.75128	0.850
0.00039	0.62200	0.005	0.78643	0.905	0.77074	0.880
-0.00011	0.62150	0.010	0.78950	0.910	0.77707	0.890
-0.00011	0.62150	0.020	0.79560	0.920	0.78021	0.895
-0.00021	0.62140	0.050	0.81342	0.950	0.78208	0.898
-0.00106	0.62055	0.100	0.84147	1.000	0.78270	0.899

جدول 4.4

إن الاختبار الأمثل للعدد h يظهر أنه يقع بين 0.005 و 0.05. وإذا ما أجرينا بعض التحليلات

$$\text{على حد الخطأ} \quad e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M$$

فبإمكاننا استخدام حساب التفاضل والتكامل (انظر التمرين 29) للتحقق من أن أصغر قيمة للخطأ e يحدث عندما $h = \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$ حيث

$$M = \max_{x \in [0.800, 1.00]} |f'''(x)| = \max_{x \in [0.800, 1.00]} |\cos x| = \cos 0.8 \approx 0.69671$$

وبما أن قيم f معطاة لخمس منازل، فإننا نفترض أن خطأ التدوير محدود بالقيمة $\varepsilon = 0.000005$ ولذلك فالاختيار الأمثل للعدد h يكون تقريبا

$$h = \sqrt[3]{\frac{3(0.000005)}{0.69671}} \approx 0.028$$

الذي هو متلائم مع النتائج في جدول (4.4).

من جانب عملي لا نستطيع حساب قيمة h الفضلى لمستخدمها لإيجاد تقريب للمشتقة، وذلك لعدم وجود أي معرفة لدينا عن المشتقة الثالثة للدالة.

ولكن يجب أن نبقي يقظين من أن تقليل حجم الخطوات لا يحسن دائما التقريب الذي نحصل عليه.

لقد ناقشنا فقط مسائل خطأ التدوير الناتجة من استخدام صيغة النقاط الثلاث (5.4). ولكن هناك صعوبات مماثلة تحدث مع جميع صيغ الاشتقاق.

يمكن تتبع السبب حتى نصل إلى مدى الحاجة إلى القسمة على قوى h . وكما وجدنا في الفصل (2.1) (انظر المثال (3) خصوصا) فإن القسمة على أعداد صغيرة تميل إلى المبالغة في خطأ التدوير ويجب تجنب هذه العملية إذا أمكن.

وفي حالة الاشتقاق العددي لا يمكن تجنب المسألة بالكامل. مع أن الطرائق ذات الرتب الأعلى تحد من هذه الصعوبة.

وبالنظر إلى الاشتقاق العددي بوصفه طرائق تقريب نجده غير مستقر، لأن قيم h الصغيرة التي نحتاج إليها لتصغير خطأ القطع تجعل خطأ التدوير يزداد أيضا.

تذكر أن طرائق الفرق للتقريب يمكن أن تكون غير مستقرة.

إن هذه أول مجموعة من الطرائق غير المستقرة التي تعرضنا لها. ويجب تجنب هذه الطرائق إذا كان ذلك ممكناً. وعلى كل حال فبالإضافة إلى أن هذه الصيغ تستخدم لأغراض حسابية. فإننا نحتاج إليها لتقريب حلول الصيغ التفاضلية العادية والصيغ التفاضلية الجزئية.

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 1.4

1. استخدم صيغ الفرق الأمامي والفرق الخلفي لتحديد كل مدخل ناقص في الجداول الآتية:

$f'(x)$	$f(x)$	x	أ.	$f'(x)$	$f(x)$	x
	0.00000	0.0	ب.	0.4794	0.5	
	0.74140	0.2		0.5646	0.6	
	1.3718	0.4		0.6442	0.7	

2. استخدم صيغ الفرق الأمامي والفرق الخلفي لتحديد المدخل المفقود في الجداول الآتية:

$f'(x)$	$f(x)$	x	ب.	$f'(x)$	$f(x)$	x
	1.0000	1.0		1.9507	-0.3	
	1.2625	1.2		2.0421	-0.1	
	1.6595	1.4		2.0601	-0.1	

3. إن البيانات في التمرين (1) أخذت من الدوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (1) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

$$f(x) = \sin x \quad \text{أ.} \quad f(x) = e^x - 2x^2 + 3x - 1 \quad \text{ب.}$$

4. إن البيانات في التمرين (2) أخذت من الدوال الآتية، احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (2) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

$$f(x) = 2 \cos 2x - x \quad \text{أ.} \quad f(x) = x^2 \ln x + 1 \quad \text{ب.}$$

5. استخدم صيغة النقاط الثلاث الأديق لتحديد كل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

$f'(x)$	$f(x)$	x	ب.	$f'(x)$	$f(x)$	x
	16.94410	8.1		9.025013	1.1	أ.
	17.56492	8.3		11.02318	1.2	
	18.19056	8.5		13.46374	1.3	
	18.82091	8.7		16.44465	1.4	

$f'(x)$	$f(x)$	x	د.	$f'(x)$	$f(x)$	x
	3.6887983	2.0		-4.827866	2.9	ج.
	3.6905701	2.1		-4.240358	3.0	
	3.6688192	2.2		-3.496009	3.1	
	3.6245909	2.3		-2.596792	3.2	

6. استخدم صيغة النقاط الثلاث الأديق لتحديد كل مدخل مفقود في الجداول الآتية:

$f'(x)$	$f(x)$	x	ب.	$f'(x)$	$f(x)$	x
	-68.3193	7.4		-0.27552	-0.3	أ.
	-71.6982	7.6		-0.25074	-0.2	
	-75.1576	7.8		-0.16134	-0.1	
	-78.6974	8.0		0	0	

x	$f(x)$	$f'(x)$	x	$f(x)$	$f'(x)$
7.4	-68.3193		-0.3	-0.27652	
7.6	-71.6982		-0.2	-0.25074	
7.8	-75.1576		-0.1	-0.16134	
8.0	-78.6974		0	0	

7. إن البيانات في التمرين (5) أخذت من الدوال الآتية. احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (5) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

ب. $f(x) = x \ln x$

أ. $f(x) = e^{2x}$

د. $f(x) = 2(\ln x)^2 + 3 \sin x$

ج. $f(x) = x \cos x - x^2 \sin x$

8. إن البيانات في التمرين (5) أخذت من الدوال الآتية. احسب الأخطاء الفعلية في التمرين (5) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

ب. $f(x) = \ln(x+2) - (x+1)^2$

أ. $f(x) = e^{2x} - \cos 2x$

د. $f(x) = (\cos 3x)^2 - e^{2x}$

ج. $f(x) = x \sin x + x^2 \cos x$

9. استخدم الصيغ المعطاة في هذا الفصل لتحديد التقريب بالدقة الممكنة لكل مدخل مفقود في

$f'(x)$	$f(x)$	x	$f'(x)$	$f(x)$	x
	9.367879	-3.0		-1.709847	2.1
	8.233241	-2.8		-1.373823	2.2
	7.180350	-2.6		-1.119214	2.3
	6.209329	-2.4		-0.9160143	2.4
	5.320305	-2.2		-0.7470223	2.5
	4.513417	-2.0		-0.6015966	2.6

10. استخدم الصيغ المعطاة في هذا الفصل لتحديد التقريب بالدقة الممكنة لكل مدخل مفقود

$f'(x)$	$f(x)$	x	$f'(x)$	$f(x)$	x
	16.08554	-3.0		-1.709847	1.05
	12.64465	-2.8		-1.373823	1.10
	9.863738	-2.6		-1.119214	1.15
	7.623176	-2.4		-0.9160143	1.20
	5.825013	-2.2		-0.7470223	1.25
	4.389056	-2.0		-0.6015966	1.30

11. إن البيانات في تمرين (9) أخذت من الدوال الآتية. احسب الأخطاء الفعلية في تمرين (9) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

ب. $f(x) = e^{x/3} + x^2$

أ. $f(x) = \tan x$

12. إن البيانات في تمرين (10) أخذت من الدوال الآتية. احسب الأخطاء الفعلية في تمرين (10) أوجد حدود الخطأ باستخدام صيغ الخطأ:

ب. $f(x) = e^{-x} - 1 + x$

أ. $f(x) = \tan 2x$

13. استخدم البيانات الآتية والمعلومة: المشتقات الخمس الأولى للدالة f محدودة على الفترة $[1, 5]$ بالقيم 2، 3، 6، 12 و 23 على التوالي. وذلك لتقريب $f'(3)$ بالدقة الممكنة.

5	4	3	2	1	x
3.2804	3.0976	2.8974	2.6734	2.4142	$f(x)$

14. كرّر تمرين (13) ولكن على فرض أن المشتقة الثالثة للدالة f على $[1, 5]$ محدودة بالعدد 4.

15. كرّر تمرين (1) باستخدام حساب التدوير لأربعة أرقام. وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (3).

16. كرّر تمرين (5) باستخدام حساب القطع لأربعة أرقام. وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (7).

17. كرّر تمرين (9) باستخدام حساب التدوير لأربعة أرقام، وقارن الأخطاء بتلك التي حصلت عليها في التمرين (11).

18. لديك البيانات في جدول الآتي:

0	0.8	0.6	0.4	0.2	x
0.3843735	0.6386093	0.808038	0.9177710	0.9798652	$f(x)$

أ. استخدم الصيغ المناسبة جميعها في هذا الفصل لتقريب $f'(0.4)$ و $f''(0.4)$.

ب. استخدم الصيغ المناسبة جميعها في هذا الفصل لتقريب $f'(0.6)$ و $f''(0.6)$.

19. ليكن $f(x) = \cos \pi x$. استخدم الصيغة (9.4) وقيم $f(x)$ على النقاط $x = 0.25, 0.5, 0.75$ لتقريب $f''(0.5)$. قارن هذه النتيجة بالقيمة الحقيقية وكذلك بالتقريب الناتج في التمرين (15) من الفصل (3.4). اشرح سبب كون هذه الطريقة على نحو خاص دقيقة في حل هذه المسألة أوجد حدًا للخطأ.

20. ليكن $f(x) = 3xe^x - \cos x$ استخدم البيانات الآتية والصيغة (9.4) لتقريب $f''(1.3)$ باختيار $h = 0.01$ و $h = 0.1$

1.40	1.31	1.30	1.29	1.20	x
15.86187	14.30741	14.04276	13.78176	11.59006	$f(x)$

قارن نتائجك بقيمة $f''(1.3)$.

21. لديك جدول البيانات الآتية:

10	0.8	0.6	0.4	0.2	x
0.3843735	0.6386093	0.8080348	0.9177710	0.9798652	$f(x)$

أ. استخدم الصيغة (4.7) لتقريب $f'(0.2)$.

ب. استخدم الصيغة (4.7) لتقريب $f'(1.0)$.

ج. استخدم الصيغة (4.6) لتقريب $f'(0.6)$.

22. اشتق صيغة خمس نقاط من الرتبة $O(h^4)$ لتقريب $f'(x_0)$ التي تستخدم

$$f(x_0 + 3h), f(x_0 + 2h), f(x_0 + h), f(x_0), f(x_0 - h), f(x_0 - 2h)$$

[إضاءة: خذ التعبير $Af(x_0 - h) + Bf(x_0 + h) + Cf(x_0 + 2h) + Df(x_0 + 3h)$ استخدم أعداد كثيرة حدود تايلور الرابعة. واختر قيم A, B, C, D اختياريًا مناسبًا.]

23. استخدم الصيغة التي اشتقت في التمرين (22) والبيانات في التمرين (21) لتقريب $f''(0.8)$ و $f'''(0.8)$.

24. أ. حلل أخطاء التدوير كما في المثال (4) للصيغة $f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_0)$ ب. أوجد أفضل $h > 0$ للدالة في المثال (2).

25. لقد أعطيت في التمرين (10) من الفصل (3.3) بيانات تصف سيارة تسير على طريق مستقيم. لقد طلب ذلك التمرين التنبؤ بمكان السيارة وسرعتها عند $t = 10$ s. استخدم الأوقات والأمتعة الآتية للتنبؤ بالسرعة عند كل زمن معطى.

13	10	8	5	3	0	الوقت
993	742	623	383	225	0	المسافة

26. يعطي القانون الأول لكيرتشفوف (Kirchoff) العلاقة $\xi(t) = L \frac{di}{dt} + Ri$

وذلك في الدائرة الكهربائية التي فيها جهد مكثف $\xi(t)$ ، وتوصيل L ، ومقاومة في الدائرة R والتبديل i .

افترض أننا قسنا التيار لقيم متعددة لـ t ، وحصلنا على

t	1.00	1.01	1.02	1.03	1.0
i	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

حيث قيست t بالثواني و i بالأمبيرات، وثابت التوصيل $L = 0.98$ هنري والمقاومة تساوي 0.142 أوم. أعط تقريباً لقيمة الجهد $\xi(t)$ عندما $t = 1.00, 1.01, 1.02, 1.03, 1.04$.

27. يعرف طلاب التفاضل والتكامل جميعهم أنه يمكن تعريف مشتقة أي f عند x ، ومن ثم

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اختر دالة f المفضل f ، وقيمة x غير الصفرية، واستخدم الحاسوب أو حساب التفاضل والتكامل. ولد تقريبات $f'_n(x)$ للمشتقة $f'(x)$ باستخدام الصيغة

$$f'_n(x) = \frac{f(x + 10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}}$$

للقيم $n = 1, 2, \dots, 20$ جميعها، وصف ماذا يحدث.

28. اشتق طريقة لتقريب $f'''(x_0)$ بحيث يكون حد الخطأ من الرتبة h^2 ، وذلك بفك الدالة f

بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة حول x_0 وإيجاد القيم عند $x_0 \pm h$ و $x_0 \pm 2h$.

29. لديك الدالة $e(h) = \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M$ حيث M هي للمشتقة الثالثة لدالة ما.

برهن أن $e(h)$ لها قيمة صغرى عند $\sqrt[3]{3\epsilon/M}$.

استكمال ريتشاردسون الخارجي Richardson's Extrapolation

2.4

تستخدم استكمال ريتشاردسون الخارجي لتوليد نتائج عالية الدقة. ولكن باستخدام صيغ ذات رتب منخفضة.

وعلى الرغم من أن اسم الطريقة مرتبط ببحث نشره ريتشاردسون غونت [RG] عام 1927، إلا أن فكرتها قديمة. فهناك مقالة ممتعة حول تاريخ الاستكمال الخارجي، وتطبيقاته موجودة في [Joy].

ويمكننا استخدام الاستكمال الخارجي عندما نعلم أن طريقة التقريب تنتج حد خطأ ذا شكل قابل للتنبؤ. وهي الطريقة التي تعتمد على الوسيط (براميتز) الذي عادة ما تكون الخطوة h . افترض أن لدينا لكل عدد $h \neq 0$ صيغة $N(h)$ الذي تعطي تقريباً للقيمة M . وأن خطأ القطع المرتبط بالتقريب له الصيغة

$$M - N(h) = K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \dots$$

لنظومة من الثوابت المجهولة K_1, K_2, K_3, \dots

بما أن خطأ القطع $O(h)$ فإننا نتوقع على سبيل المثال أن

$$M - N(0.1) \approx 0.1K_1, \quad M - N(0.01) \approx 0.01K_1$$

وعموماً $M - N(h) \approx K_1 h$ إلا إذا كان هناك تغير كبير في المقدار بين الثوابت K_1, K_2, K_3, \dots وإن الغرض من الاستكمال الخارجي هو إيجاد طريقة سهلة لدمج التقريبات غير الصحيحة إلى

لويس فري ريتشاردسون

Lewis Fry Richard- (1881- 953)

son من أول شخص طمس الرياضيات

على هو منظم على موضوع التنبؤ الجوي

بينما كان يعمل لمكتب الأحوال الجوية

في إنجلترا. وبوصفه معارضا خلاقياً

للحرب العالمية الأولى فقد كتب على نحو

مستفيض عن التدمير الاقتصادي الناشئ

عن الحرب. مستخدماً نظم المعادلات

التفاضلية لإيجاد أنموذج منطقي

للتفاضل بين الدول

إن طبيعة الاستيفاء الخارجي مقترنة

بأنه كانت إعادة اكتشاف طريقة ليعود

جزوياً على الأقل إلى عصر كريستيان

هاجيس

Huygens (1629-1695) Christian

and برهمن إلى عصر أرخميدس

Archimedes (287-212 BC)

حد ما $O(h)$ بطريقة مناسبة للحصول على صيغ ذات خطأ قطع من الرتبة العالية، افترض على سبيل المثال أن بإمكاننا دمج صيغ $N(h)$ للحصول على صيغة تقريب $\hat{N}(h)$ للقيمة M بحيث تكون ذات رتبة $O(h^2)$ وعلى الصيغة

$$M - \hat{N}(h) = \hat{K}_2 h^2 + \hat{K}_3 h^3 + \dots$$

لمنظومة من الثوابت المجهولة $\hat{K}_1, \hat{K}_2, \dots$

نحصل عندئذ على $M - \hat{N}(0.1) \approx 0.01 \hat{K}_2$, $M - \hat{N}(0.01) \approx 0.0001 \hat{K}_2$ وهكذا.

إذا كان للثابتين K_1 و K_2 القيمة نفسها تقريباً فإن التقريبات $\hat{N}(h)$ تكون أفضل بكثير من التقريبات المقابلة $N(h)$. يستمر الاستكمال الخارجي عن طريق دمج التقريبات $\hat{N}(h)$ بطريقة تنتج صيغ بخطأ قطع من الرتبة $O(h^3)$ وهكذا. وكي ترى بالتحديد كيف نولد هذه الصيغ الأعلى رتبة، نفترض أن الصيغة التي تعطي التقريب للقيمة M على الصيغة

$$M = N(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \dots \quad (10.4)$$

وبما أنه يفترض صحة الصيغة لقيم h الموجبة جميعها، فانظر إلى النتيجة عندما عوض الوسيط h بنصف قيمتها. وعندئذ نحصل على الصيغة

$$M = N\left(\frac{h}{2}\right) + K_1 \frac{h}{2} + K_2 \frac{h^2}{4} + K_3 \frac{h^3}{8} + \dots$$

وبطرح الصيغة (10.4) من مثلي هذه الصيغة نتخلص من الحد الذي يحوي K_1 ونحصل على

$$M = \left[2N\left(\frac{h}{2}\right) - N(h) \right] + K_2 \left(\frac{h^2}{2} - h^2 \right) + K_3 \left(\frac{h^3}{4} - h^3 \right) + \dots$$

ولتسهيل النقاش، نعرّف $N_1(h) \equiv N(h)$

$$N_2(h) = \left[2N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) \right] = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) \right]$$

وعندئذ نحصل على صيغة ذات رتبة $O(h^2)$ لتقريب M على الصيغة

$$M = N_2(h) - \frac{K_2}{2} h^2 - \frac{3K_3}{4} h^3 - \dots \quad (11.4)$$

وإذا عوضنا h بدلاً من $h/2$ في هذه الصيغة فإننا نحصل على

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{K_2}{8} h^2 - \frac{3K_3}{32} h^3 - \dots \quad (12.4)$$

يمكننا دمج هذا مع صيغة (11.4) للتخلص من الحد h^2 . وبالتحديد فإن طرح الصيغة (11.4) من

4 أمثال الصيغة (12.4) يعطي

$$3M = 4N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h) + \frac{3K_3}{8} h^3 + \dots$$

وبالقسمة على 3 نحصل على صيغة من الرتبة $O(h^3)$ لتقريب M على الصيغة

$$M = \left[N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2(h/2) - N_2(h)}{3} \right] + \frac{K_3}{8} h^3 + \dots$$

وبتعريف

$$N_3(h) \equiv N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2(h/2) - N_2(h)}{3}$$

نحصل على الصيغة من الرتبة $O(h^3)$

$$M = N_3(h) + \frac{K_3}{8}h^3 + \dots$$

تستمر في هذه العملية بإنشاء تقريب من الرتبة $O(h^4)$ على الصيغة

$$N_4(h) = N_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_3(h/2) - N_3(h)}{7}$$

وتقريب من الرتبة $O(h^5)$ على هذه الصيغة

$$N_5(h) = N_4\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_4(h/2) - N_4(h)}{15}$$

وهكذا.

وعموماً إذا أمكن كتابة M على الصيغة

$$M = N(h) + \sum_{j=1}^{m-1} K_j h^j + O(h^m) \quad (13.4)$$

فمن الممكن إيجاد تقريب من الرتبة $O(h^j)$ لكل $j = 2, 3, \dots, m$ على الصيغة

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1} \quad (14.4)$$

لقد تولدت هذه التقريبات في سطور، وبالترتيب الظاهرة في المدخلات المعدة في جدول (5.4)، وذلك نتيجة لاستغلال أفضل النتائج للصيغ ذات الرتب العليا.

جدول 5.4

$O(h^4)$	$O(h^3)$	$O(h^2)$	$O(h)$
			$N_1(h) \equiv N(h):1$
		$N_2(h):3$	$N_1(\frac{h}{2}) \equiv N(\frac{h}{2}):2$
	$N_3(h):6$	$N_2(\frac{h}{2}):5$	$N_1(\frac{h}{4}) \equiv N(\frac{h}{4}):4$
$N_4(h):10$	$N_3(\frac{h}{2}):9$	$N_2(\frac{h}{4}):8$	$N_1(\frac{h}{8}) \equiv N(\frac{h}{8}):7$

يمكن تطبيق الاستكمال الخارجي كلما كان خطأ القطع على الصيغة

$$\sum_{j=1}^{m-1} K_j h^{\alpha_j} + O(h^{\alpha_m})$$

لمنظومة من الثوابت K_j وعندما $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_m$ في المثال الآتي نستخدم $\alpha_j \equiv 2j$.

يمكن التعبير عن صيغة الفرق المركزية المعطاة في الصيغة (5.4) لتقريب $f'(x_0)$ بصيغة خطأ

مثال 1

بالصيغة

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) - \dots$$

وبما أن صيغة الخطأ هذه تحوي قوى h الزوجية فقط. فإن الاستكمال الخارجي يكون أكثر كفاءة مما لخص في بداية النقاش.

في هذه الحالة يكون لدينا التقريب من الرتبة $O(h^2)$

$$f'(x_0) = N_1(h) - \frac{h^2}{6} f'''(x_0) - \frac{h^4}{120} f^{(5)}(x_0) - \dots \quad (15.4)$$

حيث

$$N_1(h) \equiv N(h) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$$

وإن تعويض $h/2$ بدلاً من h في هذه الصيغة ينتج التقريب

$$f'(x_0) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{24} f'''(x_0) - \frac{h^4}{1920} f^{(5)}(x_0) - \dots$$

وبطرح الصيغة (15.4) من 4 أمثال هذه الصيغة نتخلص من الحد $O(h^2)$ الذي يحتوي $f'''(x_0)$ ويعطي

$$3f'(x_0) = 4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) + \frac{h^4}{160} f^{(5)}(x_0) + \dots$$

وبالقسمة على 3 نحصل على صيغة من الرتبة $O(h^4)$ بالصيغة

$$f'(x_0) = N_2(h) + \frac{h^4}{480} f^{(5)}(x_0) + \dots$$

حيث

$$N_2(h) = \frac{1}{3} \left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) \right] = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_1(h/2) - N_1(h)}{3}$$

وباستمرار هذه العملية يعطى لكل $j = 2, 3, \dots$ صيغة تقريب من الرتبة $O(h^{2j})$ بالصيغة

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1}$$

لاحظ أن مقام الكسر هو $4^{j-1} - 1$ بدلاً من $2^{j-1} - 1$ لأننا في هذه الحالة نتخلص من قوى h^2 بدلاً من قوى h .

وبما أن $(h/2)^2 = h^2/4$ فإن عوامل الضرب المستخدمة للتخلص من قوى h^2 هي قوى 4 بدلاً من قوى 2.

افترض أن $x_0 = 2.0$, $h = 0.2$ و $f(x) = xe^x$ فإن

$$N_1(0.2) = N(0.2) = \frac{1}{0.4} [f(2.2) - f(1.8)] = 22.414160$$

$$N_1(0.1) = N(0.1) = 22.228786, \quad \text{و} \quad N_1(0.05) = N(0.05) = 22.182564$$

إن جدول الاستكمال الخارجي لهذه البيانات يظهر في جدول (6.4).

إن القيمة الصحيحة للمشتقة $f'(x) = xe^x + e^x$ عند $x_0 = 2.0$ مقربة إلى ست خانة عشرية هي 22.167168. ومن ثم فإن أعداد $N_3(0.2)$ جميعها صحيحة على الرغم من أن أمثل تقريب أصلي

$N_1(0.05)$ يحوي منزلة عشرية واحدة دقيقة.

ولما حصلنا على كل عمود بعد العمود الأول في جدول (6.4) بطريقة إيجاد أوساط بسيطة، فإنها قد تؤدي إلى تقريبات عالية الرتبة. باستخدام الحد الأدنى من التكلفة الحسابية. وعموماً كلما ازدادت k ، ازداد خطأ التدوير في $N_1(h/2^k)$ ؛ لأن عدم استقرار الاشتقاق العددي مرتبط بحجم الخطوة $h/2^k$.

جدول 6.4

$N_1(0.2) = 22.41160$	$N_2(0.2) = N_1(0.1) + \frac{N_1(0.1) - N_1(0.2)}{3}$	$N_1(0.1) = 22.23786$
$N_2(0.2) = 22.166995$	$N_2(0.1) = N_1(0.05) + \frac{N_1(0.05) - N_1(0.1)}{3}$	$N_1(0.05) = 22.12564$
$N_3(0.2) = N_2(0.1) + \frac{N_2(0.1) - N_2(0.2)}{15}$	$N_2(0.1) = 22.167157$	
$N_3(0.2) = 22.167168$		

لقد ناقشنا في الفصل (1.4) طريقتي الثلاث نقاط والخمس نقاط لتقريب $f'(x_0)$ عند معرفة قيم متعددة للدالة f . وقد تم اشتقاق طريقة الثلاثة نقاط عن طريق تمييز كثيرة حدود لاجرانج للدالة f . ويمكن الحصول على طرائق الخمس نقاط بطريقة مماثلة. ولكن الاشتقاق مضمّن. ويمكن استخدام الاستكمال الخارجي لاشتقاق هذه الصيغ بسهولة أكثر.

افترض أننا كتبنا مفكوك الدالة f في كثيرة حدود تايلور الرابعة حول x_0 . إذن

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi)(x - x_0)^5$$

لعدد ما ξ بين x و x_0 .

إن إيجاد قيمة f عند $x_0 + h$ و $x_0 - h$ يعطي

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi_1)h^5 \quad (16.4)$$

و

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(\xi_2)h^5 \quad (17.4)$$

حيث $x_0 - h < \xi_2 < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$ وبطرح الصيغة (17.4) من الصيغة (16.4) ينتج

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{h^5}{120}[f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)] \quad (18.4)$$

إذا كانت $f^{(5)}$ متصلة على $[x_0 - h, x_0 + h]$ ، فإن مبرهنة القيمة الوسطية تضمن وجود عدد ξ

$$f^{(5)}(\xi) = \frac{1}{2}[f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)]$$

ونتيجة لهذا يمكن حل الصيغة (4.18) لإيجاد $f'(x_0)$ والحصول على التقريب من الرتبة $O(h^2)$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(\xi) \quad (19.4)$$

وعلى الرغم من أن التقريب في الصيغة (19.4) هو التقريب نفسه المعطى في صيغة الثلاث نقاط (5.4). إلا أن نقطة التقييم الآن تحدث في $f^{(5)}$ بدلاً من f''' .

إن الاستكمال الخارجي يستفيد من هذا بوجود $2h$ بدلاً من h في الصيغة (19.4) ليعطي الصيغة الجديدة

$$f'(x_0) = \frac{1}{-h}[f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)] - \frac{4h^2}{6} f'''(x_0) - \frac{16h^4}{120} f^{(5)}(\xi) \quad (20.4)$$

حيث ξ بين $x_0 - 2h$ و $x_0 + 2h$ بضرب الصيغة (19.4) في أربعة وطرح الصيغة (20.4) ينتج

$$3f'(x_0) = \frac{2}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{1}{4h}[f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)] - \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi) + \frac{2h^4}{15} f^{(5)}(\xi)$$

إذا كان $f^{(5)}$ متصلاً على $[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$ فإنه يمكن استخدام طريقة بديلة لبرهنة أنه يمكن الاستعاضة عن $f^{(5)}(\xi)$ و $f^{(5)}(\xi)$ بقيمة مشتركة $f^{(5)}(\xi)$. استخدام هذه النتيجة واقسمة على 3 تنتج صيغة الخمس نقاط

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$$

التي هي صيغة الخمس نقاط المعطاة في صيغة (6.4).

وبطريقة مماثلة يمكن اشتقاق الصيغ الأخرى للمشتقة الأولى والمشتقات العليا. وستناقش بعض هذه الصيغ في التمارين.

وستستخدم طريقة الاستكمال الخارجي على مدى هذا الكتاب. وإن التطبيقات الأكثر شهرة تظهر في تقريب التكاملات في الفصل (5.4). وتلك التي تعطي الحلول التقريبية لحل الصيغ التفاضلية في الفصل (8.4).

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 2.4

1. استخدم عملية الاستكمال الخارجي الموصوفة في المثال (1) لتحديد التقريب $N_3(h)$ للقيمة $f'(x_0)$ لكل من الدوال الآتية وحجم الخطوة:

أ. $f(x) = \ln x, x_0 = 1.0, h = 0.4$ ب. $f(x) = x + e^x, x_0 = 0.0, h = 0.4$

ج. $f(x) = 2^x \sin x, x_0 = 1.05, h = 0.4$ د. $f(x) = -3 \cos x, x_0 = 2.3, h = 0.4$

2. أضف سطراً آخر إلى جدول الاستكمال في التمرين (1) للحصول على التقريب $N_4(h)$.

3. كرّر تمرين (1) مستخدماً حساب التدوير لأربعة أرقام.

4. كرّر تمرين (2) مستخدماً حساب التدوير لأربعة أرقام.

5. البيانات الآتية تعطي تقريبات للتكامل $M = \int_0^\pi \sin x \, dx$

$$N_1\left(\frac{h}{8}\right) = 1.993570, \quad N_1\left(\frac{h}{4}\right) = 1.974232, \quad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = 1.896119, \quad N_1(h) = 1.570796$$

على فرض أن $M = N_1(h) + K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6 + K_4 h^8 + O(h^{10})$ اكتب جدول استكمال لتحديد $N_4(h)$.

6. يمكن استخدام البيانات الآتية لتقريب التكامل $M = \int_0^{3\pi/2} \cos x \, dx$

$$N_1(h) = 2.356194, \quad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = -0.4879837$$

$$N_1\left(\frac{h}{4}\right) = -0.8815732, \quad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = -0.9709157$$

افتراض أنه يوجد صيغة من النوع نفسه في التمرين 5. وحدد $N_4(h)$.

7. أثبت أن تطبيق صيغة الخمس نقط (6.4) على الدالة $f(x) = xe^x$ على النقطة $x_0 = 2.0$ يعطي

$N_2(0.2)$ في جدول (6.4) عندما $h = 0.1$ ، ويعطي $N_2(0.1)$ عندما $h = 0.05$.

8. من الممكن تمثيل صيغة الفرق إلى الأمام بالصيغة

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(x_0) + \frac{h^2}{6}f'''(x_0) + O(h^3)$$

استخدم الاستكمال لاشتقاق صيغة من رتبة $O(h^3)$ للقيمة $f'(x_0)$.

9. افترض أن $N(h)$ تقريب للمقدار M لكل $h > 0$. وأن

$$M = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \dots$$

استخدم قيم $N(h/3)$ و $N(h)$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^3)$ للمقدار M .

10. افترض أن $N(h)$ تقريب للمقدار M لكل $h > 0$. وأن

$$M = N(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + \dots$$

استخدم قيم $N(h/9)$ و $N(h/3)$ و $N(h)$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^6)$ للمقدار M .

11. تعلمنا في حساب التفاضل والتكامل أن $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$

أ. أوجد تقريبات e المقابلة لاستخدام $h = 0.04, 0.02$ و $h = 0.01$

ب. استخدم الاستكمال على التقريبات مقترضا وجود ثوابت K_1, K_2, \dots

و $e = (1+h)^{1/h} + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \dots$ لإيجاد تقريب من رتبة $O(h^3)$ للقيمة e . حيث

$$h = 0.04$$

ج. هل تعتقد أن الافتراض في (ب) صحيح؟

12. أ. أثبت أن

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2+h}{2-h} \right)^{1/h} = e$$

ب. احسب تقريبات للعدد e باستخدام الصيغة

$$N(h) = \left(\frac{2+h}{2-h} \right)^{1/h}$$

والأعداد $h = 0.04, 0.02$ و $h = 0.01$

ج. افترض أن $e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \dots$ استخدم الاستكمال الخارجي بدرجة دقة

لغاية 16 عدداً على الأقل لتحسب تقريباً من رتبة $O(h^3)$ للقيمة e مستخدماً $h = 0.04$ هل تعتقد

أن الافتراض صحيح؟

د. أثبت أن $N(-h) = N(h)$

هـ. استخدم الفقرة (د) لإثبات أن $K_1 = K_3 = K_5 = \dots = 0$ في الصيغة

$$e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + K_4h^4 + K_5h^5 + \dots$$

وعليه تختزل الصيغة لتصبح

$$e = N(h) + K_2h^2 + K_4h^4 + K_6h^6 + \dots$$

و. استخدم نتائج الفقرة (هـ) والاستيفاء لتحسب تقريباً من رتبة $O(h^6)$ للعدد e باستخدام $h = 0.04$.
 13. افترض أن جدول للاستكمال الآتي قد بُني لتقريب العدد M المعطى في لصيغة

$$M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6$$

		$N_1(h)$
	$N_2(h)$	$N_1(\frac{h}{2})$
$N_3(h)$	$N_2(\frac{h}{2})$	$N_1(\frac{h}{4})$

أ. أثبت أن كثرة الحدود للاستكمال الداخلي الخطي $P_{0,1}(h)$ المار بالنقطتين $(h^2, P_{0,1}(h))$ و $(h^4, P_{0,1}(h))$ يحقق $P_{0,1}(0) = N_2(h)$ وبطريقة مماثلة. أثبت أن $P_{1,1}(0) = N_2(h/2)$.
 ب. أثبت أن كثرة الحدود للاستيفاء الداخلي الخطي $P_{0,2}(h)$ المار بالنقطتين $(h^4, N_2(h))$ و $(h^2, P_{0,2}(h))$ يحقق $P_{0,2}(0) = N_3(h)$.

14. افترض أن صيغة تنتج تقريبات من الرتبة $O(h)$ لتقريب M . وأن

$$M = N_1(h) + K_1h + K_2h^2 + \dots$$

لمنظومة من الثوابت الموجبة K_1, K_2, \dots لذلك فإن $N_1(h/4), N_1(h/2), N_1(h), \dots$ تكون جميعها حدوداً دنياً للمقدار M . ماذا يمكن أن نقول عن التقريبات الاستكمالية $N_2(h), N_3(h), \dots$ ؟

15. استخدمت أنصاف محيطات أكبر المضلعات المنتظمة ذات k من الأضلاع التي ترسم داخل دائرة الوحدة. وأنصاف محيطات المضلعات المنتظمة ذات $\{p_k\}$ من الأضلاع التي ترسم خارج دائرة الوحدة، وتكون مماسة لها من قبل أرخميدس Archimedes لتقريب π نصف محيط دائرة الوحدة. وكان ذلك قبل 200 قبل الميلاد.

يمكن استخدام الهندسة لإثبات أن متتاليات أنصاف المحيطات الداخلية والخارجية (كما هو

أعلاه) $\{p_k\}$ و $\{P_k\}$ على التوالي تحقق

$$P_k = k \tan\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad \text{و} \quad p_k = k \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

و $P_k < \pi < p_k$ لكل $k \geq 4$.

أ. أثبت أن $p_4 = 2\sqrt{2}$ و $P_4 = 4$.

ب. أثبت أنه عند $k \geq 4$ فإن المتتاليات تحقق العلاقات الرجعية

$$P_{2k} = \sqrt{P_k P_{4k}} \quad \text{و} \quad P_{2k} = \frac{2P_k P_k}{p_k + P_k}$$

ج. قَرِّب π ضمن 10^{-4} بحساب p_k و P_k حتى يكون $P_k - p_k < 10^{-4}$.

د. استخدم متتالية تايلور لإثبات أن

$$\pi = p_k + \frac{\pi^3}{3!} \left(\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{\pi^5}{5!} \left(\frac{1}{k}\right)^4 + \dots$$

و

$$\pi = P_k - \frac{\pi^3}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{2\pi^5}{15} \left(\frac{1}{k}\right)^4 - \dots$$

هـ. استخدم لاستكمال الخارجي $h = 1/k$.

3.4 مبادئ التكامل العددي Elements of Numerical Integration

غالبًا ما نحتاج إلى إيجاد قيمة التكامل المحدود لدالة ليس لها دالة أصلية صريحة أو أن دالته الصريحة يصعب الحصول عليها. إن الطريقة الرئيسة في تقريب $\int_a^b f(x) dx$ تسمى الطريقة العددية numerical quadrature وتستخدم الجمع

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i) \quad \text{لتقريب } \int_a^b f(x) dx$$

إن الطرائق العددية في هذا الفصل تركز على كثيرات الحدود للاستكمال التي بحث فيها في الفصل الثالث.

نختار أولاً مجموعة من النقاط المتميزة $\{x_0, \dots, x_n\}$ من الفترة $[a, b]$. ثم تكامل كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

وتكامل خطأ القطع على $[a, b]$ لنحصل على

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx + \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} dx \\ &= \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx \end{aligned}$$

حيث $\xi(x)$ في $[a, b]$ لكل x

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx \quad \text{لكل } i = 0, 1, \dots, n$$

إن صيغة التكامل العددي quadrature تكون

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

ويكون الخطأ معطى بالصيغة

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx$$

وقبل شرح الحالة العامة لصيغ التكامل العددي، دعنا نبحث في الصيغ التي نحصل عليها باستخدام كثيرات حدود لاجرانج الأولى والثانية ونقاط متساوية التباعد.

إن هذا يعطي قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal rule وقاعدة سمبسون Simpson's rule اللتين

تقدّمان في مقررات التفاضل والتكامل، ولاشتقاق قاعدة شبه المنحرف لتقريب $\int_a^b f(x) dx$

افتراض $x_0 = a, x_1 = b, h = b - a$. واستخدم كثيرة حدود لاجرانج الخطية

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1) \right] dx \quad (21.4)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1) dx$$

وبما أن $(x-x_0)(x-x_1)$ لا تتغير إشارتها في الفترة $[x_0, x_1]$ فإنه يمكن تطبيق برهنة **لقيمة** الوسطية الموزونة للتكامل على حد التكامل لتعطي لقيمة ما ξ ضمن (x_0, x_1)

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1) dx = f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) dx$$

$$= f''(\xi) \left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_1+x_0)}{2} x^2 + x_0 x_1 x \right]_{x_0}^{x_1}$$

$$= -\frac{h^3}{6} f''(\xi)$$

ومن ثم فإن الصيغة (21.4) تعطي

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$= \frac{(x_1-x_0)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

وبما أن $h = x_1 - x_0$ فلدينا القاعدة الآتية.

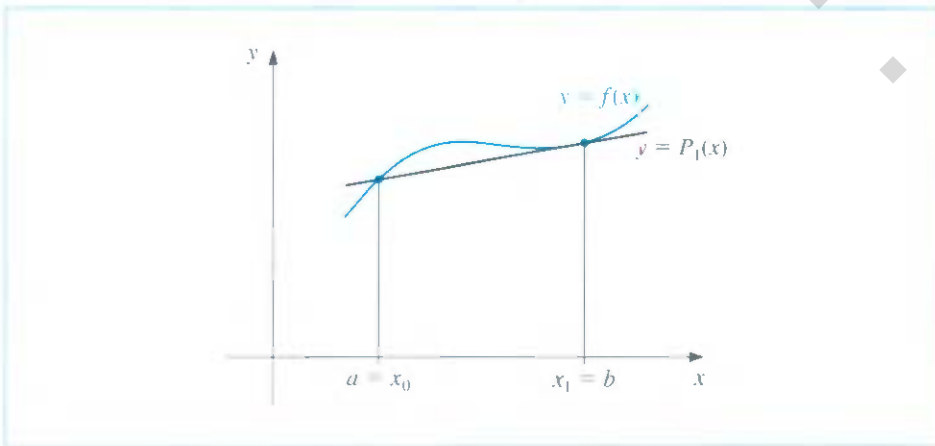
قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

وتسمى هذه بقاعدة شبه المنحرف، لأن f عندما تكون دالة قيمتها موجبة فإن $\int_a^b f(x) dx$ يكون تقريبًا بمساحة شبه المنحرف. (كما يظهر في شكل 3.4).

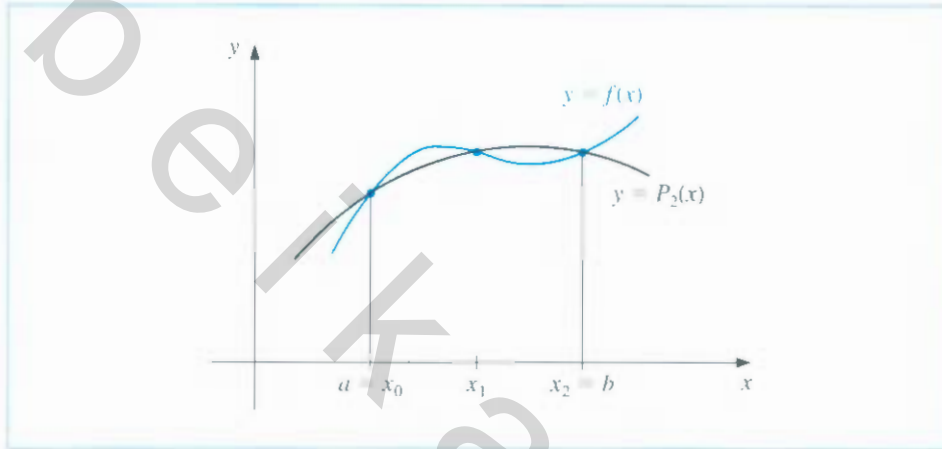
عند استخدام مصطلح شبه المنحرف، فإننا نقصد أي شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان على الأقل. إن المصطلح الأوروبي لهذا شكل هو "trapezium" ولزيادة الأمر تعقيداً، فإن الكلمة الأوروبية "trapezoid" تشير إلى أي شكل رباعي ليس فيه أي ضلعين متساويين. والكلمة الأمريكية المقابلة لهذا شكل هي "trapezium".

شكل 3.4



وبما أن حد الخطأ في قاعدة شبه المنحرف تحتوي على f'' ، فإن القاعدة تعطي النتائج الدقيقة عندما تطبق على أي دالة مشتقتها الثانية مطابقة للصفر. أي لأي كثيرة حدود من الرتبة 1 أو أقل.

إن قاعدة سمبسون تنتج من تكامل كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة الثانية على الفترة $[a, b]$ باستخدام $x_0 = a, x_2 = b$ و $x_1 = a + h$ حيث $h = (b - a)/2$ (انظر شكل 4.4)



شكل 4.4

ولذلك فإن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \right. \\ \left. + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx \\ + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} f^{(3)}(\xi(x)) dx$$

وعلى كل حال فإن اشتقاق قاعدة سمبسون بهذه الطريقة يعطي فقط خطأً من رتبة $O(h^4)$ محتويًا $f^{(3)}$.

وبمحاولة حل المسألة بطريقة أخرى، يمكننا اشتقاق حد ذي رتبة أعلى تحتوي $f^{(4)}$. ولشرح هذه الصيغة البديلة، نفترض f مفكوكًا بكثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة حول x_1 . عندئذ كل x في $[x_0, x_2]$ يوجد العدد $\xi(x)$ في (x_0, x_2) بحيث

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_1)^4$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \left[f(x_1)(x-x_0) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 \right. \\ \left. + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx \quad (22.4)$$

وبما أن $(x - x_1)^4$ لا يكون سالبا أبداً في $[x_0, x_2]$ ، فإن مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة تعطي

$$\frac{1}{2h} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120} (x - x_1)^5 \Big|_{x_0}^{x_2}$$

لعدد ما ξ_1 في (x_0, x_2)

على كل حال، $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ ، ولذلك فإن

$$(x_2 - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2 = (x_2 - x_1)^4 - (x_0 - x_1)^4 = 0$$

حيث

$$(x_2 - x_1)^3 - (x_0 - x_1)^3 = 2h^3 \quad \text{و} \quad (x_2 - x_1)^5 - (x_0 - x_1)^5 = 2h^5$$

وعليه يمكن كتابة الصيغة (22.4) على الصيغة

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60} h^5$$

وإذا عوضنا عن $f''(x_1)$ بالقيمة التقريبية المعطاة في الصيغة (9.4) في الفصل (1.4) نجد أن

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} \left\{ \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_2) \right\} + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60} h^5 \\ &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{12} \left[\frac{1}{3} f^{(4)}(\xi_2) - \frac{1}{5} f^{(4)}(\xi_1) \right] \end{aligned}$$

من الممكن استخدام طرائق بديلة (أنظر التمرين 24) لبرهنة أن القيمتين ξ_1 و ξ_2 في هذا التعبير يمكن الاستعاضة عنهما بقيمة مشتركة ξ في (x_0, x_2) . إن هذا يعطي قاعدة سمبسون.

قاعدة سمبسون Simpson's Rule

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

وبما أن حد الخطأ فيه المشتقة الرابعة للدالة f ، فإن قاعدة سمبسون تعطي نتائج صحيحة لكل كثيرة حدود من الرتبة الثالثة أو أقل.

قاعدة شبه المنحرف للدالة f على الفترة $[0, 2]$ هي

$$\int_0^2 f(x) dx \approx f(0) + f(2)$$

وقاعدة سمبسون للدالة f على الفترة $[0, 2]$ هي

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

يظهر ملخص النتائج مقرباً إلى ثلاث خانوات لبعض الدوال الابتدائية في جدول (7.4). لاحظ أن قاعدة سمبسون هي الأفضل في كل حالة.

توماس سمبسون

Thomas Simpson

1710 - 1761 عالم رياضيات
قد تعلمها بنفسه، وكان يعمل
نساجاً لكسب رزقه. كان اهتمامه
الأساس بمبرهنة الاحتمال. إلا
أنه في عام 1750 نشر كتاباً في
التفاضل والتكامل في مجلدين
اسمه

The Doctrine and
Application of Fluxions.

مثال 1

e^x	$\sin x$	$\sqrt{1+x^2}$	$1/(x+1)$	x^4	x^2	$f(x)$
6.389	1.416	2.958	1.099	6.400	2.667	القيمة الصحيحة
8.389	0.909	3.326	1.333	16.000	4.000	شبه المنحرف
6.421	1.425	2.964	1.111	6.667	2.667	سمبسون

جدول 7.4

إن الاشتقاق العادي لصيغ الخطأ يبني على كثيرات الحدود التي تنتج نتائج صحيحة لتطبيق هذه الصيغ عليها. ويستخدم التعريف الآتي لتسهيل شرح هذا الاشتقاق.

تعرف درجة الدقة لصيغة عددية على أنها أكبر عدد صحيح موجب n بحيث تكون جميع قيم الصيغة غير مقربة عند x^k لكل $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

تعريف 1.4

ويبين تعريف (1.4) أن قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون لهما درجات دقة واحدة وثلاثة على التوالي.

إن كلاً من التكامل والجمع عملية خطية. أي أن

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$\sum_{i=0}^n (\alpha f(x_i) + \beta g(x_i)) = \alpha \sum_{i=0}^n f(x_i) + \beta \sum_{i=0}^n g(x_i) \quad \text{و}$$

لكل زوج من الدوال القابلة للتكامل f و g وأي زوج من الثوابت α, β . وهذا يتضمن (انظر التمرين 25) أن رتبة الدقة لأي صيغة تكامل هي n إذا فقط إذا كان الخطأ $E(P(x)) = 0$ لكثيرات الحدود $P(x)$ جميعها من الرتبة $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ، ولكن $E(P(x)) \neq 0$ لكثيرات حدود ما من الرتبة $n+1$.

إن قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون هي أمثلة لعائلة من الطرائق تعرف بصيغ نيوتن - كوتس Newton - Cotes formulas.

هناك نوعان من صيغ نيوتن - كوتس: مفتوحة ومغلقة.

إن صيغة نيوتن - كوتس المغلقة ذات $(n+1)$ نقطة تستخدم $x_i = x_0 + ih$ لكل $i = 0, 1, \dots, n$. (انظر شكل 5.4).

تسمى هذه الصيغة مغلقة، لأن نقطتي الحدود للفترة المغلقة $[a, b]$ متضمنة في نقاط التقييم.

تأخذ هذه الصيغة الصورة

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

حيث

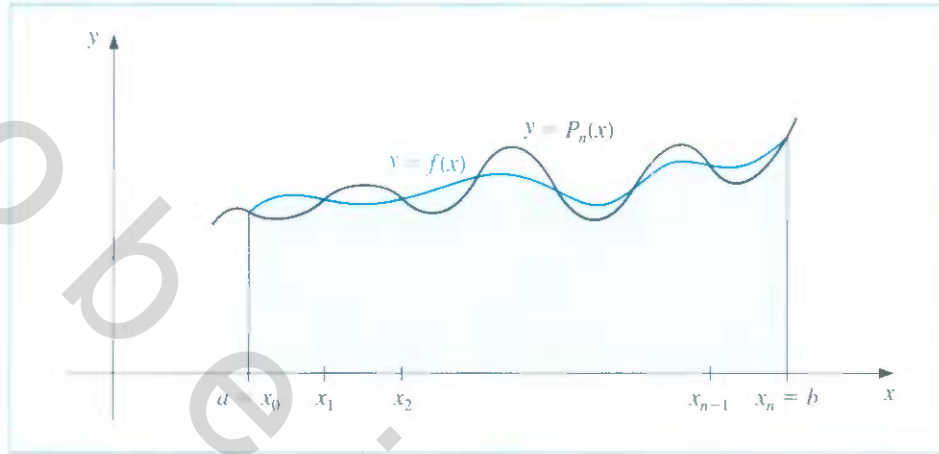
$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx$$

وتصف المبرهنة الآتية تفاصيل تحليل الخطأ المرتبط بصيغ نيوتن - كوتس.

انظر برهان هذه المبرهنة [IK, p. 313].

إن الحسن في الدقة لقاعدة سمبسون على قاعدة شبه المنحرف يفتر عفوياً بحقيقة أن قاعدة سمبسون تحتوي على التقييم عند نقطة متوسطة تؤدي إلى توازن أفضل للتقريب.

إن المصطلح مفتوحة ومغلقة لطرائق إيجاد التكامل تعني أن الطرق المفتوحة تستخدم لتقييم النقاط في الفترة المفتوحة (a, b) عند إيجاد تقريبات للتكامل $\int_a^b f(x) dx$. أما الطرائق المغلقة فهي تستخدم لتقييم نقطتي النهاية في الفترة المغلقة $[a, b]$.



شكل 5.4

مبرهنة 2.4 افترض أن $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ هي صيغة نيوتن - كوتس ذات $(n+1)$ نقطة حيث $x_0 = a, x_n = b$ و $h = (b-a)/n$. عندئذ، يوجد عدد $\xi \in (a, b)$ يحقق

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1) \cdots (t-n) dt$$

إذا كان n عددا زوجياً و $f \in C^{n+2}[a, b]$. أما إذا كان n عدداً فردياً و $f \in C^{n+1}[a, b]$ فإن

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1) \cdots (t-n) dt$$

لاحظ أنه عندما يكون n عدداً صحيحاً زوجياً، فإن رتبة الدقة $n+1$ على الرغم من أن كثيرة الحدود للاستيفاء الداخلي interpolation هي من رتبة n على الأكثر.

عندما يكون n عدداً فردياً فإن رتبة الدقة هي فقط n .

بعض صيغ نيوتن - كوتس المغلقة الشائعة closed Newton-Cotes formulas. حدود الخطأ لها هي كما يلي:

$n = 1$ قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal rule

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \quad (23.4) \quad \text{حيث } x_0 < \xi < x_1$$

$n = 2$ قاعدة سمبسون Simpson's rule

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad (24.4) \quad \text{حيث } x_0 < \xi < x_2$$

$n = 3$ قاعدة الثلاثة أثمان لسبسون Simpson's Three-Eighths rule

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi) \quad (25.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_3$.

$n = 4$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi) \quad (26.4)$$

حيث $x_0 < \xi < x_4$.

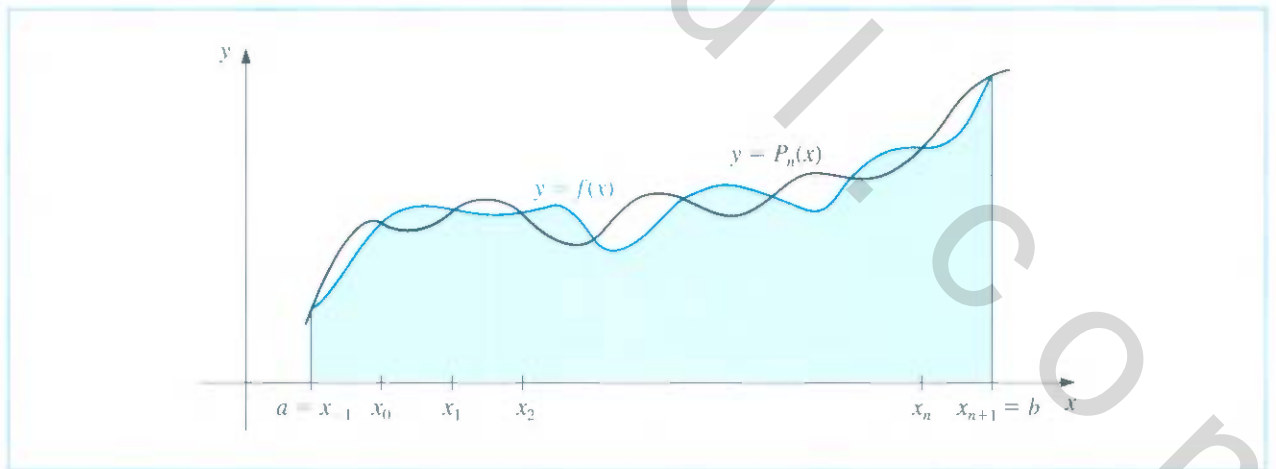
إن صيغ نيوتن - كوتس المفتوحة *open Newton-Cotes formulas* تستخدم لتقييم النقاط $x_i = x_0 + ih$ لكل $i = 0, 1, \dots, n$ حيث $h = (b - a)/(n + 2)$ و $x_0 = a + h$. إن هذا يعطي $x_n = b - h$ ، ولذلك نحدد نقاط النهاية بوضع $x_{-1} = a$ و $x_{n+1} = b$ (كما يظهر في شكل 6.4).

إن الصيغ المفتوحة تحوي النقاط المستخدمة جميعها في التقريب في الفترة المفتوحة (a, b) .
تصبح الصيغ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

حيث $a_i = \int_a^b L_i(x) dx$ أيضاً.

شكل 6.4



المبرهنة الآتية ماثلة للمبرهنة (2.4). وبرهانها موجود في [JK, p. 314].

مبرهنة 3.4 افترض أن $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ هي صيغة نيوتن - كوتس المفتوحة ذات $(n + 1)$ نقطة حيث $x_{-1} = a, x_{n+1} = b$ و $h = (b - a)/(n + 2)$. عندئذ، يوجد عدد $\xi \in (a, b)$ بحيث

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n + 2)!} \int_{-1}^{n+1} t^2(t - 1) \cdots (t - n) dt$$

إذا كان n زوجيًا و $f \in C^{n+2}[a, b]$ ، وأما إذا كان n فرديًا و $f \in C^{n+1}[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \int_{-1}^{n+1} t(t - 1) \cdots (t - n) dt$$

بعض صيغ نيوتن - كوتس المفتوحة مع حد الخطأ هي

$n = 0$ قاعدة النقطة الوسيطة Midpoint rule

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x) dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi) \quad (27.4)$$

حيث $x_{-1} < \xi < x_1$ **$n = 1$**

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x) dx = \frac{3h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \quad (28.4)$$

حيث $x_{-1} < \xi < x_2$ **$n = 2$**

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x) dx = \frac{4h}{3}[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi) \quad (29.4)$$

حيث $x_{-1} < \xi < x_3$

$n = 3$

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x) dx = \frac{5h}{24}[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95}{144} h^5 f^{(4)}(\xi) \quad (30.4)$$

حيث $x_{-1} < \xi < x_4$

إن استخدام صيغ نيوتن - كوتس المفتوحة والمغلقة المدرجة في الصيغ (26.4) - (28.4) و (30.4) - (27.4) لإيجاد تقريب للتكامل $\int_0^1 \ln x dx = 1 - \sqrt{2}/2 \approx 0.29289322$ يعطي النتائج المدونة في جدول (8.4).

مثال 2

جدول 8.4

n	0	1	2	3	4
المعادلات المغلقة	0.27768018	0.29293264	0.29291070	0.29289318	0.29289318
الخطأ	0.01521303	0.00003942	0.00001748	0.00000004	0.00000000
المعادلات المفتوحة	0.29798754	0.29285866	0.29286923	0.29286923	0.29286923
الخطأ	0.00766565	0.00509432	0.00003456	0.00002399	0.00002399

EXERCISE SET

3.4 مجموعة التمارين

1. أوجد تقريباً للتكاملات الآتية باستخدام قاعدة شبه المنحرف:

$$\begin{aligned} \text{أ.} \quad & \int_{0.5}^1 x^4 dx \quad \text{ب.} \quad \int_0^{0.5} \frac{2}{x-4} dx \quad \text{ج.} \quad \int_1^{1.5} x^2 \ln x dx \quad \text{د.} \quad \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \\ \text{هـ.} \quad & \int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2-4} dx \quad \text{و.} \quad \int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4} dx \quad \text{ز.} \quad \int_0^{n/4} x \sin x dx \quad \text{ح.} \quad \int_0^{n/4} e^{3x} \sin 2x dx \end{aligned}$$

2. أوجد تقريباً للتكاملات الآتية باستخدام قاعدة شبه المنحرف

$$\begin{aligned} \text{أ.} \quad & \int_{-0.5}^0 x \ln(x+1) dx \quad \text{ب.} \quad \int_{-0.25}^{0.25} (\cos x)^2 dx \\ \text{ج.} \quad & \int_e^{e+1} \frac{1}{x \ln x} dx \quad \text{د.} \quad \int_{0.75}^{1.3} ((\sin x)^2 - 2x \sin x + 1) dx \end{aligned}$$

3. أوجد حدًا للخطأ في التمرين (1) باستخدام صيغة الخطأ. وقارن ذلك بالخطأ الفعلي.

4. أوجد حدًا للخطأ في التمرين (2) باستخدام صيغة الخطأ. وقارن ذلك بالخطأ الفعلي.

5. أعد حل التمرين (1) باستخدام قاعدة سمبسون.

6. أعد حل التمرين (2) باستخدام قاعدة سمبسون.

7. أعد حل التمرين (3) باستخدام قاعدة سمبسون ونتائج التمرين (5).

8. أعد حل التمرين (4) باستخدام قاعدة سمبسون ونتائج التمرين (6).

9. أعد حل التمرين (1) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطة.

10. أعد حل التمرين (2) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطة.

11. أعد حل التمرين (3) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطة ونتائج التمرين (9).

12. أعد حل التمرين (4) باستخدام قاعدة النقطة الوسيطة ونتائج التمرين (10).

13. إن تطبيق قاعدة شبه المنحرف لإيجاد $\int_0^2 f(x) dx$ يعطي القيمة 4. أما قاعدة سمبسون فتعطي القيمة 2. فما قيمة $f(1)$ ؟

14. إن تطبيق قاعدة شبه المنحرف لإيجاد $\int_0^2 f(x) dx$ يعطي القيمة 5. وقاعدة النقطة الوسيطة تعطي القيمة 4. فما القيمة التي تعطيها قاعدة سمبسون؟

15. أوجد رتبة الدقة التي تعطيها قاعدة التكامل

$$\int_1^3 f(x) dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

16. افترض أن $x_2 = b$ و $h = (b-a)/3$. $x_0 = a$. $x_1 = a+h$ أوجد رتبة الدقة التي تعطيها

$$\text{قاعدة التكامل} \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2)$$

17. إن قاعدة التكامل $\int_{-1}^1 f(x) dx = c_0f(-1) + c_1f(0) + c_2f(1)$ تعطي نتائج صحيحة لكثيرات جميعها الحدود من الرتبة الثانية أو أقل. حدد قيم c_2, c_1, c_0 .

18. إن قاعدة التكامل $\int_0^2 f(x) dx = c_0f(0) + c_1f(1) + c_2f(2)$ تعطي نتائج صحيحة لكثيرات الحدود جميعها من الرتبة الثانية أو أقل. حدد قيم c_2, c_1, c_0 .

19. أوجد الثوابت c_0, c_1, x_1 بحيث تعطي صيغة التكامل $\int_0^1 f(x) dx = c_0f(0) + c_1f(x_1)$ أعلى رتبة ممكنة من الدقة.

20. أوجد الثوابت x_0, x_1, c_1 بحيث تعطي صيغة التكامل $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}f(x_0) + c_1f(x_1)$ أعلى رتبة ممكنة من الدقة.

21. أوجد قيمًا تقريبية للتكاملات الآتية باستخدام الصيغ (23.4) حتى (30.4).

هل درجات الدقة في التقريبات متلائمة مع صيغ الخطأ؟

أي الفقرتين (د) و (هـ) يعطي التقريب الأفضل؟

$$\begin{array}{ll} \text{أ. } \int_0^{0.1} \sqrt{1+x} dx & \text{ب. } \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx \\ \text{د. } \int_1^{10} \frac{1}{x} dx & \text{هـ. } \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx \end{array}$$

22. لديك قيم الدالة f على القيم الآتية:

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

أوجد التقريب للتكامل $\int_{1.8}^{2.6} f(x) dx$ باستخدام جميع صيغ التكامل المناسبة التي درست في هذا الفصل.

23. افترض أن في بيانات التمرين (22) أخطاء تدوير كما في جدول الآتي

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
الخطأ في $f(x)$	2×10^{-6}	-2×10^{-6}	-0.9×10^{-6}	-0.9×10^{-6}	2×10^{-6}

احسب الأخطاء الناتجة من التدوير عند حل التمرين (22).

24. اشتق قاعدة سمبسون مع حد الخطأ باستخدام

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi)$$

أوجد a_2, a_1, a_0 من حقيقة أن قاعدة سمبسون تكون صحيحة للدالة $f(x) = x^n$ عندما $n = 1, 2, 3$. ثم أوجد k بتطبيق صيغة التكامل على $f(x) = x^4$.

25. برهن العبارة الواردة بعد تعريف (1.4). أي برهن أن صيغة التكامل لها رتبة دقة إذا وفقط إذا كان حد الخطأ $E(P(x)) = 0$ كثيرات الحدود $P(x)$ جميعها من الرتبة n و $k = 0, 1, \dots, n$ ولكن $E(P(x)) \neq 0$ لبعض كثيرات الحدود $P(x)$ من الرتبة $n+1$.

26. اشتق قاعدة الثلاثة أثمان لسمبسون. الصيغة (25.4). مع حد الخطأ باستخدام المبرهنة (2.4).

27. اشتق الصيغة (28.4) مع حد الخطأ باستخدام المبرهنة (3.4).

Composite Numerical Integration

التكامل العددي المركب

44

غالبًا ما يكون التقريب المتقطع ذا فاعلية تذكر أن هذا قد استخدم في استيفاء بيزيه Bézier.

إن صيغ نيوتن-كوتس عمومًا تصلح للاستخدام على فترات تكامل كبيرة. هناك حاجة إلى صيغ ذات رتبة عالية، لكن يصعب في هذه الصيغ إيجاد قيمها. بالإضافة إلى ذلك فإن صيغ نيوتن-كوتس مبنية على كثيرات حدود استكمالية مستخدمة نقاطًا متساوية الأبعاد، وذلك بسبب طبيعة ذبذبة كثيرات الحدود عالية الدرجة. وسناقش في هذا الفصل المنحني المتقطع (piecewise) للتكامل العددي باستخدام صيغ نيوتن-كوتس ذات الرتب المتدنية.

إن هذه هي الطرائق الأكثر استخدامًا.

افترض إيجاد تقريب للتكامل $\int_0^4 e^x dx$. إن قاعدة سمبسون على فرض $h = 2$ تعطي

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{2}{3}(e^0 + 4e^2 + e^4) = 56.76958$$

وبما أن الجواب الدقيق في هذه الحالة هو $e^4 - e^0 = 53.59815$ فإن الخطأ يساوي 3.17143 وهو أكثر كثيراً مما نقبله عادة. ولتطبيق تقنية متقطعة لهذه المسألة، قسّم $[0, 4]$ بين $[0, 2]$ و $[2, 4]$ واستخدم قاعدة سمبسون مرتين باستخدام $h = 1$. إن هذا يعطيك

$$\begin{aligned} \int_0^4 e^x dx &= \int_0^2 e^x dx + \int_2^4 e^x dx \approx \frac{1}{3}(e^0 + 4e + e^2) + \frac{1}{3}(e^2 + 4e^3 + e^4) \\ &= \frac{1}{3}(e^0 + 4e + 2e^2 + 4e^3 + e^4) \\ &= 53.86385 \end{aligned}$$

لقد تقلص الخطأ إلى -0.26570 وهذه النتائج تدفعنا إلى تقسيم الفترتين $[0, 2]$ و $[2, 4]$ واستخدام قاعدة سمبسون بالقيمة $h = \frac{1}{2}$ فنحصل على

$$\begin{aligned} \int_0^4 e^x dx &= \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx \\ &\approx \frac{1}{6}(e_0 + 4e^{1/2} + e) + \frac{1}{6}(e + 4e^{3/2} + e^2) \\ &\quad + \frac{1}{6}(e^2 + 4e^{5/2} + e^3) + \frac{1}{6}(e^3 + 4e^{7/2} + e^4) \\ &= \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{1/2} + 2e + 4e^{3/2} + 2e^2 + 4e^{5/2} + 2e^3 + 4e^{7/2} + e^4) \\ &= 53.61622 \end{aligned}$$

ويقدر الخطأ لهذا التقريب بالقيمة -0.01807 .

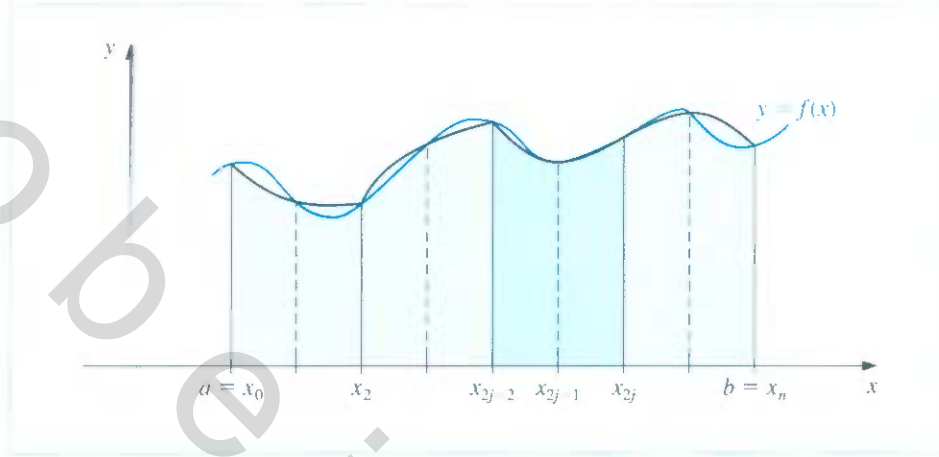
ولتعميم هذه الطريقة، سنختار عدداً صحيحاً زوجياً. قسّم الفترة $[a, b]$ إلى n من الفترات الجزئية. وطبق قاعدة سمبسون على كل فترتين جزئيتين متتاليتين. (انظر شكل 7.4) خذ $h = (b - a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \dots, n$ فنحصل على

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^{n/2} \left\{ \frac{h}{3} [f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_j) \right\} \end{aligned}$$

لبعض ξ_j حيث $x_{2j-2} < \xi_j < x_{2j}$ شريطة أن $f \in C^4[a, b]$.

باستخدام حقيقة أنه لكل $j = 1, 2, \dots, (n/2) - 1$ يكون $f(x_{2j})$ ظاهراً في الحد المقابل للفترة $[x_{2j-2}, x_{2j}]$ وكذلك في الحد المقابل للفترة $[x_{2j}, x_{2j+2}]$.

شكل 7.4



فيمكننا تقليص هذا المجموع إلى

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right] - \frac{h^5}{90} \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)$$

ويكون الخطأ المرتبط بهذا التقريب

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)$$

حيث $x_{2j-2} < \xi_j < x_{2j}$ لكل $j = 1, 2, \dots, n/2$

إذا كان $f \in C^4[a, b]$ فإن مبرهنة القيمة القصوى تتضمن أن $f^{(4)}$ يتخذ قيمته العظمى وقصوته الصغرى في الفترة $[a, b]$

بما أن

$$\min_{x \in [a, b]} f^{(4)}(x) \leq f^{(4)}(\xi_j) \leq \max_{x \in [a, b]} f^{(4)}(x)$$

فسنحصل على

$$\frac{n}{2} \min_{x \in [a, b]} f^{(4)}(x) \leq \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) \leq \frac{n}{2} \max_{x \in [a, b]} f^{(4)}(x)$$

و

$$\min_{x \in [a, b]} f^{(4)}(x) \leq \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) \leq \max_{x \in [a, b]} f^{(4)}(x)$$

ومن مبرهنة القيمة الوسطية فإنه يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث

$$f^{(4)}(\mu) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)$$

وهكذا فإن

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) = -\frac{h^5}{180} n f^{(4)}(\mu)$$

أو بما أن $h = (b - a)/n$ فإن

$$E(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$$

إن هذه المشاهدات تؤدي إلى النتيجة الآتية:

ليكن $f \in C^4[a, b]$ عدد زوجي n ، $h = (b - a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \dots, n$ فإنه يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث إن قاعدة سمبسون المركبة يمكن كتابتها مع حد الخطأ فيها إلى

مرهنة 4.4

من الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(b) \right] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$$

تستخدم الخوارزمية (1.4) قاعدة سمبسون المركبة على n من الفترات الجزئية، وإن هذه الخوارزمية هي الأكثر استخداماً، لكونها خوارزمية عرض عام للتكامل.

قاعدة سمبسون المركبة Composite Simpson's Rule

لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x) dx$

المدخلات: نقطتا النهاية a, b ، عدد صحيح موجب زوجي.

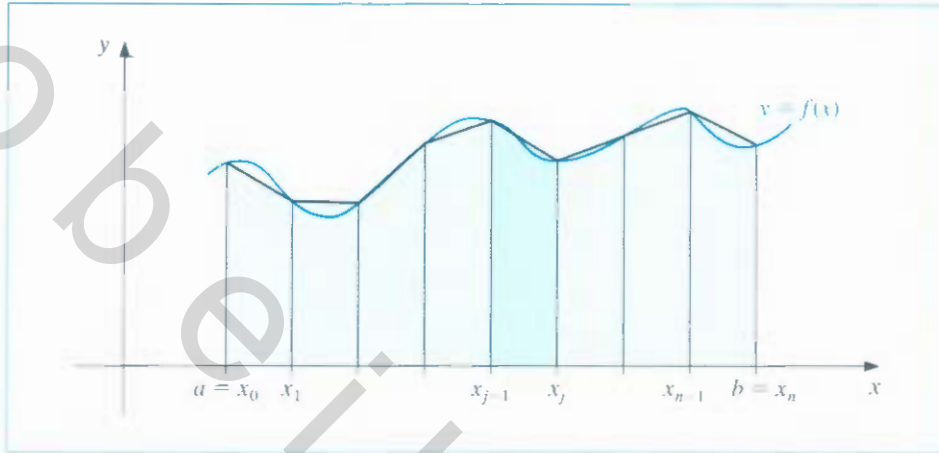
المخرجات: تقريب XI إلى I

المضمون	الخطوة
	1
ضع $h = (b - a)/n$.	
ضع $XI0 = f(a) + f(b)$	
(مجموع الدالة $f(x_{2i-1})$)	2
$XI1 = 0$	
(مجموع الدالة $f(x_{2i})$)	
$XI2 = 0$	
كرر الخطوتين 4 و 5 لكل $i = 1, \dots, n - 1$	3
ضع $X = a + ih$.	4
إذا كان i عدداً زوجياً فضع	
$XI2 = XI2 + f(X)$	5
وإلا فضع $XI1 = XI1 + f(X)$.	
ضع $XI = h(XI0 + 2 \cdot XI2 + 4 \cdot XI1)/3$	6
المخرجات (XI) توقف.	7

يمكن تطبيق طريقة التجزئة لأي من صيغ نيوتن-كوتس.



إن تعميمات قاعدة شبه المنحرف (انظر شكل 8.4) وقاعدة النقطة الوسيطة أعصيت دون برهان.



شكل 8.4

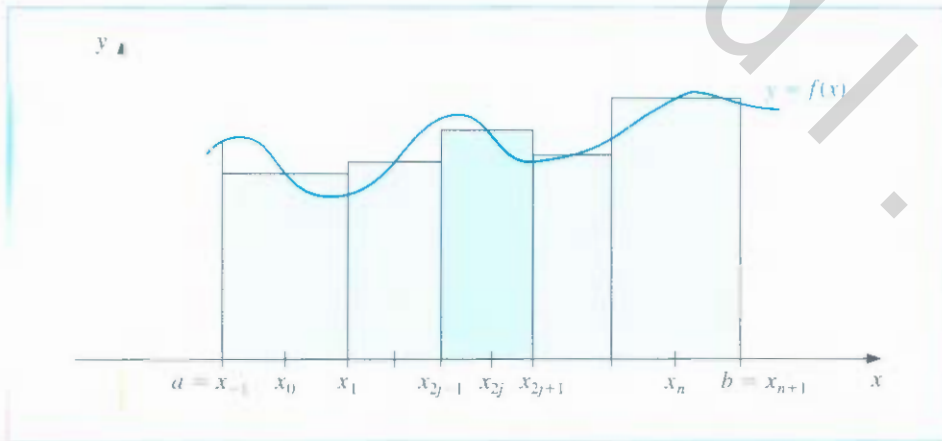
بما أن قاعدة شبه المنحرف تتطلب فترة واحدة لكل تطبيق. فإن العدد الصحيح n يمكن أن يكون فردياً أو زوجياً.

ليكن $f \in C^2[a, b]$, $h = (b - a)/n$ و $x_j = a + jh$ لكل $j = 0, 1, \dots, n$. عندئذ يوجد الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

مبرهنة 5.4

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\mu)$$

أما قاعدة النقطة الوسيطة المركبة فإن n يجب أن يكون أيضاً زوجياً. (انظر شكل 9.4)



شكل 9.4

ليكن $f \in C^2[a, b]$, n عدداً زوجياً، $h = (b - a)/(n + 2)$ و $x_j = a + (j + 1)h$ لكل $j = -1, 0, \dots, n + 1$. عندئذ يوجد $\mu \in (a, b)$ بحيث يمكن كتابة قاعدة النقطة الوسيطة

مبرهنة 6.4

المركبة مع حد الخطأ فيها لكل $(n + 2)$ من الفترات الجزئية على الصيغة الآتية:

$$\int_a^b f(x) dx = 2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{b-a}{6} h^2 f''(\mu)$$

ليكن المطلوب تقريب $\int_0^\pi \sin x dx$ بخطأ مطلق أقل من 0.00002 باستخدام قاعدة سمبسون

المركبة. إن قاعدة سمبسون المركبة تعطي لعدد ما $\mu \in (a, b)$ الصيغة الآتية:

$$\int_0^\pi \sin x dx = \frac{h}{3} \left[2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} \sin x_{2j} + 4 \sum_{j=1}^{n/2} \sin x_{2j-1} \right] - \frac{\pi h^4}{180} \sin \mu$$

وبما أن الخطأ المطلق يجب أن يكون أقل من 0.00002 فعلياً أن نستخدم المتراجحة الآتية

$$\left| \frac{\pi h^4}{180} \sin \mu \right| \leq \frac{\pi h^4}{180} = \frac{\pi^5}{180n^4} < 0.00002 \quad \text{لتحديد } n \text{ و } h:$$

وباستكمال هذه الحسابات نحصل على $n \geq 18$. إذا كان $n = 20$ فإن الناتج هو $h = \pi/20$ وتعطينا الصيغة

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx \frac{\pi}{60} \left[2 \sum_{j=1}^9 \sin \left(\frac{j\pi}{10} \right) + 4 \sum_{j=1}^{10} \sin \left(\frac{(2j-1)\pi}{20} \right) \right] = 2.000006$$

وللتأكد من رتبة الدقة هذه، فإن استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة تستلزم أن

$$\left| \frac{\pi h^2}{12} \sin \mu \right| \leq \frac{\pi h^2}{12} = \frac{\pi^3}{12n^2} < 0.00002$$

أو أن $n \geq 360$. وبما أن هذا يتطلب حسابات أكثر كثيراً من تلك التي نحتاج إليها لقاعدة سمبسون المركبة، فإننا لا نريد استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة لهذه المسألة.

وبهدف المقارنة، فإن قاعدة شبه المنحرف المركبة باستخدام $n = 20$ و $h = \pi/20$ تعطي

$$\int_0^\pi \sin x dx \approx \frac{\pi}{40} \left[2 \sum_{j=1}^{19} \sin \left(\frac{j\pi}{20} \right) + \sin 0 + \sin \pi \right] = \frac{\pi}{40} \left[2 \sum_{j=1}^{19} \sin \left(\frac{j\pi}{20} \right) \right] = 1.9958860$$

إن الجواب الصحيح هو 2، ولذلك فإن قاعدة سمبسون تعطينا جواباً ضمن الخطأ، أما قاعدة

شبه المنحرف باستخدام $n = 20$ فمن الواضح أنها لا تعطينا هذا الجواب.

إن معظم برامج CAS تتضمن قاعدة سمبسون المركبة وقاعدة شبه المنحرف المركبة.

أما في Maple فعليك أولاً الدخول إلى المكتبة حيث تكون معرفة بالأمر

>with(student)

أما طلبات طرائق الحل فهي $\text{trapezoid}(f,x=a..b,n)$ و $\text{simpson}(f,x=a..b,n)$

أما مثلاً

>f:=sin(x)

```
f := sin(x)
```

```
> trapz(f, x=C..Pi, 20)
```

$$\frac{1}{20} \pi \left(\sum_{i=1}^{19} \sin \left(\frac{1}{20} i \pi \right) \right)$$

```
> evalf(%)
```

```
1.995885974
```

```
> evalf(simpson(f, x=0..Pi, 20))
```

```
2.000006785
```

فإن قاعدة النقطة الوسيطة موجودة كذلك في مكتبة Maple ويمكن الوصول إليها بالأمر

```
> evalf(middlesum(f, x=0..Pi, 10))
```

التي تعطي التقريب 2.008248408

ولإيضاح رموز Maple لطريقة النقطة الوسيطة نعرّف $f(x)$, a , b , n , h بالأوامر

```
> f:=x->sin(x)
```

```
> a:=0; b:=Pi; n:=18; h:=(b-a)/(n+2)
```

ونحتاج أيضاً إلى متغير لحساب الجمع الدوّار الذي نضع له القيمة الابتدائية 0.

```
> To:=0
```

وفي Maple تعرّف الحلقة المحكمة بالعد كما يلي:

```
for loop control variable from initial-value to terminal value do
```

```
statement;
```

```
statement;
```

```
:
```

```
statement;
```

```
od;
```

نضع متغير تحكم الحلقة j , الذي يبدأ من 0 وينتهي في $n/2 = 9$ بخطوات متساوية مقارها

1.

كل قيمة $j = 0, 1, \dots, 9$ تستكمل الحلقة، ويُنجز كل حساب داخل حلقة حتى نصل إلى

كلمة `od`. أما الكلمات المستخدمة المخزونة فهي `od, to, do, for, from`. انتبه لي عدم استخدام

(j) بعد كلمة `do`

```
> for j from 0 to n/2 do
```

```
> xj:=a+(2*j+1)*h;
```

```
> To:=evalf(To+f(xj))
```

```
> od
```


إن هذا ينتج سلسلة من النتائج تنتهي بالمجموع

$$Tot = \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) = \sum_{j=0}^9 f(x_{2j}) = 6.392453222$$

ثم نضرب في العدد $2h$ لإنهاء طريقة النقطة الوسيطة المركبة

>Tot:=evalf(2*h*Tot)

$$Tot := 2.008248408$$

هناك خاصية مهمة تشترك بها طرائق التكامل المركبة جميعها ألا وهي الاستقرار المتعلق بخطأ التدوير. ولشرح ذلك، افترض أننا طبقنا قاعدة سمبسون المركبة باستخدام n من الفترات الجزئية لتكامل دالة ما f على $[a, b]$. وجدنا الحد الأعلى لخطأ التدوير. افترض أنه قَرِبَ بالمقدار $f(x_i)$ وأن $\bar{f}(x_i)$

$$f(x_i) = \bar{f}(x_i) + e_i \quad \text{لكل } i = 0, 1, \dots, n$$

حيث تعبر e_i عن خطأ التدوير المصاحب لاستخدام $\bar{f}(x_i)$ بصفته تقريباً للمقدار $f(x_i)$. وعندئذ فإن الخطأ التراكمي $e(h)$ باستخدام قاعدة سمبسون المركبة يساوي

$$\begin{aligned} e(h) &= \left| \frac{h}{3} \left[e_0 + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} e_{2j} + 4 \sum_{j=1}^{n/2} e_{2j-1} + e_n \right] \right| \\ &\leq \frac{h}{3} \left[|e_0| + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} |e_{2j}| + 4 \sum_{j=1}^{n/2} |e_{2j-1}| + |e_n| \right] \end{aligned}$$

إذا كانت أخطاء التدوير محدودة تجانسياً بالقيمة ε ينتج

$$e(h) \leq \frac{h}{3} \left[\varepsilon + 2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \varepsilon + 4 \left(\frac{n}{2} \right) \varepsilon + \varepsilon \right] = \frac{h}{3} 3n\varepsilon = nh\varepsilon$$

ولكن $nh = b - a$ ولذلك $e(h) \leq (b - a)\varepsilon$ وهو حدّ مستقل عن h (n و).

إن هذا يعني أنه على الرغم من حاجتنا إلى تقسيم فترة إلى أجزاء عديدة لضمان الدقة، فإن الحساب الزائد اللازم لا يزيد خطأ التدوير.

وهذا يعني أن الطريقة مستقرة عندما تقترب h من الصفر.

تذكر أن هذا ليس صحيحاً في عمليات الاشتقاق العددي التي بحث فيها في بداية هذا الفصل.

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 4.4

1. استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة بقيم n المشار إليها لإيجاد تقريب لكل من التكاملات الآتية:

$$\begin{aligned} \text{أ.} \quad & \int_1^2 x \ln x \, dx, \quad n = 4 \quad \text{ب.} \quad \int_{-2}^2 x^3 e^x \, dx, \quad n = 4 \quad \text{ج.} \quad \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx, \quad n = 6 \\ \text{د.} \quad & \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx, \quad n = 6 \quad \text{هـ.} \quad \int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx, \quad n = 8 \quad \text{و.} \quad \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx, \quad n = 8 \end{aligned}$$

$$\int_0^{3\pi/8} \tan x \, dx, \quad n = 8 \quad \text{و} \quad \int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx, \quad n = 8 \quad \text{ز.}$$

2. استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة بقيم n المشار إليها لإيجاد تقريب لكل من التكاملات

$$\int_{-0.5}^{0.5} x \ln(x+1) \, dx, \quad n = 6 \quad \text{ب.} \quad \int_{-0.5}^{0.5} \cos^2 x \, dx, \quad n = 4 \quad \text{أ.}$$

$$\int_e^{e+2} \frac{1}{x \ln x} \, dx, \quad n = 8 \quad \text{د.} \quad \int_{0.75}^{1.75} (\sin^2 x - 2x \sin x + 1) \, dx, \quad n = 8 \quad \text{ج.}$$

3. استخدم قاعدة سمبسون المركبة لتقريب التكاملات في التمرين (1).

4. استخدم قاعدة سمبسون المركبة لتقريب التكاملات في التمرين (2).

5. استخدم قاعدة النقطة الوسيطة بفترات جزئية، عددها $n + 2$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (1).

6. استخدم قاعدة النقطة الوسيطة بفترات جزئية، عددها $(n + 2)$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (2).

7. أوجد تقريباً للتكامل $\int_0^2 x^2 \ln(x^2 + 1) \, dx$ مستخدماً $h = 0.25$. استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة.

ب. قاعدة سمبسون المركبة.

ج. قاعدة النقطة الوسيطة المركبة.

8. قرب التكامل $\int_0^2 x^2 e^{-x^2} \, dx$ مستخدماً $h = 0.25$. استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة.

ب. قاعدة سمبسون المركبة.

ج. قاعدة النقطة الوسيطة المركبة.

9. ليكن $f(0) = 1, f(0.5) = 2.5, f(1) = 2$ و $f(0.25) = f(0.75) = a$. أوجد a إذا كانت قاعدة شبه المنحرف المركبة باستخدام $n = 4$ تعطي القيمة 1.75 للتكامل $\int_0^1 f(x) \, dx$.

10. تعطي قاعدة النقطة الوسيطة القيمة 12، لكونها تقريباً للتكامل $\int_{-1}^1 f(x) \, dx$. وتعطي قاعدة النقطة الوسيطة المركبة باستخدام $n = 2$ القيمة 5، وتعطي قاعدة سمبسون المركبة القيمة 6.

استخدم الحقائق $f(1) = f(-1) = 1$ و $f(0.5) = f(-0.5) = 1$ لإيجاد قيم $f(-1), f(-0.5), f(0.5), f(1)$.

11. أوجد قيم n و h اللازمة لتقريب $\int_0^2 e^{2x} \sin 3x \, dx$ ضمن 10^{-4} . استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة.

ب. قاعدة سمبسون المركبة.

ج. قاعدة النقطة الوسيطة المركبة.

12. كرر تمرين (11) للتكامل $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$.

13. أوجد قيم n و h اللازمة لتقريب $\int_0^2 \frac{1}{x+4} \, dx$ ضمن 10^{-5} ، واحسب قيمة التقريب. استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة.

ب. قاعدة سمبسون المركبة.

ج. قاعدة النقطة الوسيطة المركبة.

14. كرر التمرين 13 للتكامل $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

15. ليكن f معرفاً بما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x \leq 0.1, \\ 1.201 + 0.03(x - 0.1) + 0.3(x - 0.1)^2 + 2(x - 0.1)^3, & 0.1 \leq x \leq 0.2 \\ 1.209 + 0.15(x - 0.2) + 0.9(x - 0.2)^2 + 2(x - 0.2)^3, & 0.2 \leq x \leq 0.3 \end{cases}$$

أ. ادرس الاتصال لمشتقات f .

ب. استخدم قاعدة شبه المنحرف لتقريب $\int_0^{0.3} f(x) dx$ مستخدماً $n = 6$ ، وقدّر الخطأ باستخدام حدّ الخطأ.

ج. استخدم قاعدة سمبسون المركبة مستخدماً $n = 6$ لتقريب $\int_0^{0.3} f(x) dx$. هل النتائج أدقُّ مما هي في (ب)؟

16. أثبت أن الخطأ $E(f)$ لقاعدة سمبسون المركبة يمكن تقريبه بالمقدار

$$-\frac{h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)]$$

[إضاءة: $\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)(2h)$ هي مجموع ريمان للتكامل $\int_a^b f^{(4)}(x) dx$]

17. أ. اشتق تقديراً للخطأ $E(f)$ في قاعدة شبه المنحرف المركبة مستخدماً الطريقة في التمرين (16).

ب. كرّر الفقرة (أ) لقاعدة النقطة الوسيطة المركبة.

18. استخدم تقدير الخطأ في التمرينين (16) و (17) لتقدير الأخطاء في التمرين (12).

19. استخدم تقدير الخطأ في التمرينين (16) و (17) لتقدير الأخطاء في التمرين (14).

20. يُبرهن في حساب التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات، وفي مقررات الإحصاء أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2} dx = 1$$

لأي قيمة موجبة σ .

إن الدالة $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2}$ تسمى دالة الكثافة الاحتمالية الطبيعية ذات المعدل $\mu = 0$ والانحراف المعياري σ .

إن احتمال وقوع أي قيمة مختارة عشوائياً خاضعة لهذا التوزيع في الفترة $[a, b]$ هو $\int_a^b f(x) dx$.

أعط التقريب ضمن 10^{-5} لاحتمال أن أي قيمة مختارة عشوائياً وخاضعة لهذا التوزيع ستقع في كل فترة مما يلي:

أ. $[-\sigma, \sigma]$ ب. $[-2\sigma, 2\sigma]$ ج. $[-3\sigma, 3\sigma]$

21. أوجد ضمن 10^{-6} طول منحنى القطع الناقص الذي معادلته $4x^2 + 9y^2 = 36$.

22. تقطع سيارة طريق السباق في 84 ثانية، وتحدّد سرعة السيارة في كل فترة مدتها 6 ثوانٍ باستخدام مسدس رادار، ويعطى مع بداية السباق بالقدم/ثانية كما في جدول الآتي

الوقت	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
السرعة	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

ما طول طريق السباق؟

23. جسيم كتلته m يتحرك في سائل، ويخضع لمقاومة لزوجة R التي هي دالة في السرعة v

تعطى العلاقة بين المقاومة R والسرعة v ، والزمن t بالصيغة الآتية:

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)} du$$

افترض أن $R(v) = -v\sqrt{v}$ لسائل ما، حيث وحدة R نيوتن والسرعة متر/الثانية.

إذا كان $m = 10 \text{ kg}$ ، $v(0) = 10 \text{ m/s}$ ، فأوجد تقريباً للزمن اللازم للجسيم ليتباطأ وتصل سرعته إلى $v = 5 \text{ m/s}$.

24. لتوليد محاكاة خصائص قرص الكوايخ (انظر شكل الآتي). احتاج سيكرست وهورنيك

D.A. Secrist and R.W. Hornbeck [SH] لإيجاد تقريب عددي لقيمة «الحرارة الداخلية معدلة

بحسب المساحة» T ، إلى لبادة الكايخ المعطاة بالصيغة

$$T = \frac{\int_{r_e}^{r_0} T(r)r\theta_p dr}{\int_{r_e}^{r_0} r\theta_p dr}$$

حيث تمثل r_e نصف القطر التي تبدأ عندها ملامسة لبادة القرص، وتمثل r_0 نصف القطر الخارجي للبادة القرص، أما θ_p فتمثل قياس الزاوية المقابلة لقطاع لبادة الكايج ورتبة الحرارة على كل نقطة من اللبادة التي تحسب عددياً من تحليل صيغة الحرارة (انظر الفصل 2.12)

افترض $r_0 = 0.478$ ft ، $r_e = 0.308$ ft ، $\theta_p = 0.7051$ رادين، ودرجات الحرارة كما في الجدول الآتي حيث حسبت على نقاط متعددة على القرص. أوجد تقريباً لقيمة T .



r (ft)	$T(r)$ (F)
0.308	640
0.325	794
0.342	885
0.359	943
0.376	1034
0.393	1064
0.410	1114
0.427	1152
0.444	1204
0.461	1222
0.478	1239

25. أوجد تقريباً ضمن 10^{-4} لقيمة التكامل الآتي الذي نوقش في بداية الفصل لأول

$$\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx$$

26. يمكن حل الصيغة الآتية لإيجاد x

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0.45$$

باستخدام طريقة نيوتن مع

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt - 0.45$$

و

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

ولتقييم f عند التقريب p_k نحتاج إلى صيغة تربيعية لتقريب

$$\int_0^{p_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

أ. أوجد حلاً دقيقاً لـ $f(x) = 0$ لغاية 10^{-5} مستخدماً طريقة نيوتن مع $p_0 = 0.5$ وقاعدة سمبسون المركبة.

ب. أعد الفقرة (أ) مستخدماً قاعدة شبه المنحرف المركبة بدلاً من قاعدة سمبسون المركبة.

Romberg Integration

تكامّل رومبرج 5.4

يستخدم تكامل رومبرج قاعدة شبه المنحرف المركبة لإيجاد تقريبات ابتدائية، ثم يطبق عملية استكمال ريتشاردسون لتحسين التقريبات. تذكر من الفصل (2.4) أن استكمال ريتشاردسون يمكن تطبيقه على أي عملية تقريب على الصيغة

$$M - N(h) = K_1h + K_2h^2 + \dots + K_nh^n$$

حيث K_1, K_2, \dots, K_n ثوابت و $N(h)$ هو تقريب للقيمة غير المعلومة M . إن خطأ القطع في هذه الصيغة محدود بالقيمة K_1h عندما تكون h صغيرة، ولذلك فإن هذه الصيغة تعطي تقريبات من نوع $O(h)$. يستخدم استكمال ريتشاردسون تقنية تعديل لتعطي صيغ ذات خطأ قطع من رتب أعلى.

لقد رأينا في الفصل (2.4) كيفية استخدام ذلك للحصول على تقريبات المشتقة. سنستخدم في هذا الفصل طريقة الاستكمال الخارجي لتقريب التكاملات المحدودة. للبدء بشرح طريقة تكامل رومبرج، تذكر أن طريقة شبه المنحرف لتقريب تكامل دالة ما f على الفترة $[a, b]$ باستخدام m فترة جزئية هي

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j) \right] - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\mu)$$

حيث $x_j = a + jh$ و $a < \mu < b$, $h = (b-a)/m$ لكل من $j = 0, 1, \dots, m$. ليكن n عدداً صحيحاً موجباً، وإن أول خطوة في عملية رومبرج هي التوصل إلى تقريبات قاعدة شبه المنحرف بأخذ $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4, \dots, m_n = 2^{n-1}$. إن حجم الخطوة h_k المقابلة لـ m_k هي $h_k = (b-a)/m_k = (b-a)/2^{k-1}$. باستخدام هذه الرموز تصبح قاعدة شبه المنحرف

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h_k}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \left(\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k) \right) \right] - \frac{(b-a)}{12} h_k^2 f''(\mu_k) \quad (31.4)$$

حيث لكل k يكون μ_k عدداً ما في (a, b) . فإذا استخدمنا الرمز $R_{k,1}$ ليعبر عن جزء الصيغة (31.4) المستخدم للتقريب بقاعدة شبه المنحرف فإن

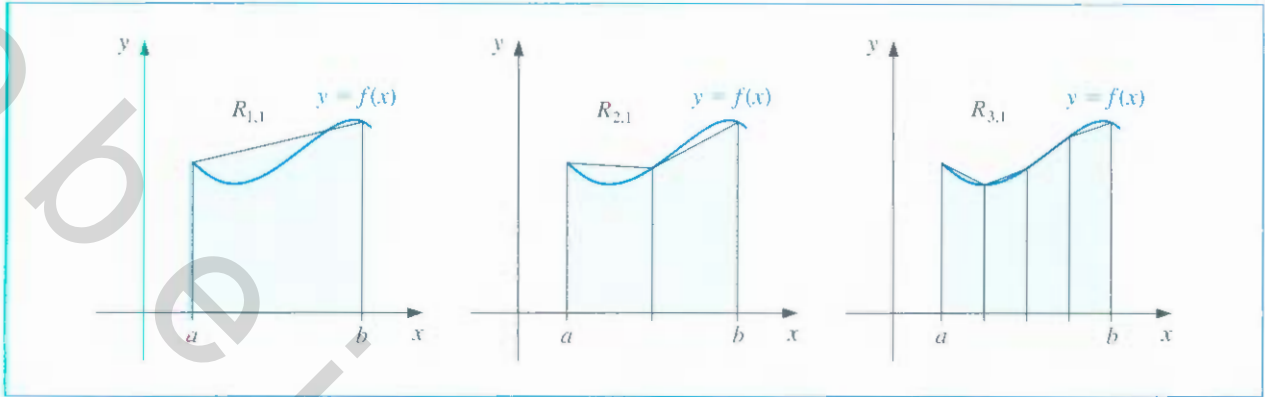
$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$\begin{aligned} R_{2,1} &= \frac{h_2}{2} [f(a) + f(b) + 2f(a+h_2)] \\ &= \frac{(b-a)}{4} \left[f(a) + f(b) + 2f\left(a + \frac{(b-a)}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [R_{1,1} + h_1 f(a+h_2)]$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} \{R_{2,1} + h_2 [f(a+h_3) + f(a+3h_3)]\}$$

شكل 10.4



وعموماً (انظر شكل 10.4) يكون

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i-1)h_k) \right] \quad (32.4)$$

لكل $k = 2, 3, \dots, n$ (انظر التمرينين 14, 15).

مثال 1 إن استخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة لتنفيذ الخطوة الأولى من طريقة تكامل رومبرج لتقريب $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ بأخذ $n = 6$ يؤدي إلى:

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2} [\sin 0 + \sin \pi] = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} \left[R_{1,1} + \pi \sin \frac{\pi}{2} \right] = 1.57079633$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} \left[R_{2,1} + \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right] = 1.89611890$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2} \left[R_{3,1} + \frac{\pi}{4} \left(\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{8} \right) \right] = 1.97423160$$

$$R_{5,1} = 1.99357034$$

$$R_{6,1} = 1.99839336 \text{ و}$$

وبما أن القيمة الصحيحة للتكامل في المثال (1) هي 2، فإن التقارب بطيء. سنستخدم استكمال ريتشاردسون الخارجي لتسريع التقارب.

يمكن برهنة -ولو أن ذلك ليس بسهولة- (انظر [RR, pp. 136-138]) أنه إذا كان $f \in C^{\infty}[a, b]$ فإنه يمكن كتابة قاعدة شبه المنحرف المركبة ذات حد خطأ بديل على الصيغة

$$\int_a^b f(x) \, dx - R_{k,1} = \sum_{i=1}^{\infty} K_i h_k^{2i} = K_1 h_k^2 + \sum_{i=2}^{\infty} K_i h_k^{2i} \quad (33.4)$$

حيث كل K_i مستقلة عن h_k ومعتمدة على $f^{(2i-1)}(a)$ و $f^{(2i-1)}(b)$.

ومن قاعدة شبه المنحرف على هذه الصيغة، يمكننا حذف الحد المحتوي على h_k^2 بدمج هذه الصيغة مع تلك المماثلة لها، وبوضع $h_{k+1} = h_k/2$ بدلاً من h_k لنحصل على

$$\int_a^b f(x) dx - R_{k+1,1} = \sum_{i=1}^{\infty} K_i h_{k+1}^{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i h_k^{2i}}{2^{2i}} = \frac{K_1 h_k^2}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i h_k^{2i}}{4^i} \quad (34.4)$$

وبطرح الصيغة (33.4) من 4 أمثال الصيغة (34.4) وبالتبسيط نحصل على الصيغة بدرجة $O(h_k^4)$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \left[R_{k+1,1} + \frac{R_{k+1,1} - R_{k,1}}{3} \right] &= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i}{3} \left(\frac{h_k^{2i}}{4^{i-1}} - h_k^{2i} \right) \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{K_i}{3} \left(\frac{1 - 4^{i-1}}{4^{i-1}} \right) h_k^{2i} \end{aligned}$$

ثم يمكن تطبيق الاستكمال الخارجي على هذه الصيغة للحصول على نتيجة من الرتبة $O(h_k^6)$ وهكذا. ولتبسيط الرموز نعرّف

$$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3}$$

لكل $k = 2, 3, \dots, n$ ونطبق استكمال ريتشاردسون الخارجي لهذه القيم.

وبالاستمرار في هذه الرموز. ولكل $k = 2, 3, 4, \dots, n$ و $j = 2, \dots, k$ نحصل على صيغة تقريب من الرتبة $O(h_k^{2j})$ معرفة على الصورة

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \quad (35.4)$$

تظهر النتائج التي نتجت من هذه الصيغ في جدول (9.4).

					$R_{1,1}$
					$R_{2,2}$
				$R_{3,3}$	$R_{3,2}$
		$R_{4,4}$	$R_{4,3}$	$R_{4,2}$	$R_{4,1}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$R_{n,n}$	\dots	$R_{n,4}$	$R_{n,3}$	$R_{n,2}$	$R_{n,1}$

جدول 9.4

إن طريقة رومبرج تحظى بميزة إضافية مرغوب فيها ألا وهي إمكانية حساب صف جديد كامل في جدول عن طريق تطبيق قاعدة شبه المنحرف مرة إضافية واحدة فقط. وبعد ذلك تستخدم لإيجاد بقية مدخلات الصف.

إن الطريقة المستخدمة لإنشاء جدول من هذا النوع تحسب المدخلات صفًا صفًا أي على الترتيب $R_{1,1}, R_{2,1}, R_{2,2}, R_{3,1}, R_{3,2}, R_{3,3}, R_{4,1}, R_{4,2}, R_{4,3}, R_{4,4}, \dots$.

تصف الخوارزمية (2.4) هذه الطريقة.

رومبرج Romberg

لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x) dx$ ؛ اختر عددًا صحيحًا $n > 0$

ALGORITHM
الخوارزمية

2.4

المدخلات: نقاط النهاية a و b و n عدد صحيح.
المخرجات: مصفوفة R (احسب R وفق الصفوف : يُحفظ آخر صفين فقط).

الخطوة	المضمون
1	ضع $h = b - a;$ $R_{1,1} = h/2(f(a) + f(b))$
2	المخرجات $(R_{1,1})$.
3	عند $n, \dots, 2, i$. طبق الخطوات 4 - 8.
4	ضع $R_{2,i} = \frac{1}{2} \left[R_{1,i} + h \sum_{k=1}^{2^i-2} f(a + (k-0.5)h) \right]$ (تقريب من طريقة شبه المنحرف).
5	عند $i, \dots, 2, j$ ضع $R_{2,j} = R_{2,j-1} + \frac{R_{2,j-1} - R_{1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$ (استيفاء خارجي).
6	المخرجات $(R_{2,j})$ عند $i, \dots, 2, j$.
7	ضع $h = h/2$
8	عند $i, \dots, 2, j$ ضع $R_{1,j} = R_{2,j}$ (تحديث الصف الأول من R).
9	توقف.



مثال 2

في المثال (1)، حسبت القيم $R_{1,i}$ حتى $R_{6,1}$ لإيجاد التقريب للتكامل $\int_0^1 \sin x dx$. نشاهد مع الخوارزمية (2.4) جدول رومبرج في جدول (10.4).
وعلى الرغم من وجود 21 من المدخلات في هذا الجدول، إلا أن الستة في العمود الأول فقط تتطلب إيجاد قيم دالة، لأن هذه القيم فقط هي التي تنتج باستخدام قاعدة شبه الحرف المركبة. ونجد المدخلات الأخرى باستخدام طريقة المعدل.
لاحظ أن القيم الناتجة جميعها بالاستكمال الخارجي عدا الأولى (في الصف الأول للعمود الثاني) هي أدق من أحسن تقريب ناتج من قاعدة شبه المنحرف المركبة (في الصف الأخير للعمود الأول).

جدول 10.4

					0
				2.09439511	1.57079633
		1.99857073		2.00455976	1.89611890
	2.00000555	1.99998313		2.00026917	1.97423160
1.99999999	2.00000001	1.99999975		2.00001659	1.99357034
2.00000000	2.00000000	2.00000000		2.00000103	1.99839336

تتطلب الخوارزمية (2.4) عددًا صحيحًا n يُحدَد مسبقًا؛ وذلك لتحديد عدد الصفوف التي يجب توليدها. ويمكننا أيضًا تحديد الخطأ المقبول للتقريب، ومن ثم توليد n ضمن حد أعلى، إلى أن تقع المدخلات القطرية المتتالية $R_{n,n}$ و $R_{n-1,n-1}$ ضمن حد الخطأ المقبول.

ولكي نضمن عدم تساوي أي قيمتين متتاليتين في صف واحد دون تطابقهما مع قيمة التكامل الجاري تقريبا؛ فقد جرت العادة بتوليد تقريبات حتى لا يكون $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}|$ فقط ضمن حد الخطأ المقبول. بل ينطبق ذلك أيضاً على $|R_{n-2,n-2} - R_{n-1,n-1}|$. وعلى الرغم من أن هذا ليس احتياطاً عالمياً، إلا أنه يضمن أن مجموعتين من التقريب تولدتا بطريقتين مختلفتين قد تطابقتا ضمن حد الخطأ المقبول قبل قبول $R_{n,n}$ بوصفها قيمة صحيحة بدرجة كافية. إن تطبيق تكامل رومبرج على f المعروف على $[a, b]$ يعتمد على افتراض أن لقاعدة شبه المنحرف المركبة حد خطأ يمكن التعبير عنه بصيغة الصيغة (4.33). بمعنى وجود توليد $f \in C^{2k+2}[a, b]$ للصف رتبة k . خوارزمية الغرض العام باستخدام تكامل رومبرج تتضمن تدقيقاً عند كل خطوة لضمان تحقق هذا الافتراض. هذه الطرائق معروفة باسم *cautious Romberg algorithms* وهي موضحة في [Joh]. وهذا المصدر يوضح أيضاً طرائق لاستخدام أسلوب رومبرج بصفتها عملية متبناة، مثلما الحال مع قاعدة سمبسون التي سنتناولها في الفصل (6.4).

إن صفة "حذر" المستخدمة في طريقة عددية ما تظهر أن فحصاً يستخدم لتحديد ما إذا كانت فريسات الاتصال من المحتمل أن تكون صحيحة

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 5.4

1. استخدم تكامل رومبرج لحساب $R_{3,3}$ للتكاملات الآتية:

$$\begin{aligned} \text{أ.} & \int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx & \text{ب.} & \int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx & \text{ج.} & \int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4} \, dx \\ \text{د.} & \int_0^{n-4} x^2 \sin x \, dx & \text{هـ.} & \int_0^{n-4} e^{3x} \sin 2x \, dx & \text{و.} & \int_1^{16} \frac{2x}{x^2-4} \, dx \\ \text{ز.} & \int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \, dx & \text{ح.} & \int_0^{n-4} (\cos x)^2 \, dx \end{aligned}$$

2. استخدم تكامل رومبرج لحساب $R_{3,3}$ للتكاملات الآتية:

$$\begin{aligned} \text{أ.} & \int_{-1}^1 (\cos x)^2 \, dx & \text{ب.} & \int_{-0.75}^{0.75} x \ln(x+1) \, dx \\ \text{ج.} & \int_1^4 ((\sin x)^2 - 2x \sin x + 1) \, dx & \text{د.} & \int_e^{2e} \frac{1}{x \ln x} \, dx \end{aligned}$$

3. احسب $R_{4,4}$ للتكاملات في التمرين (1).

4. احسب $R_{4,4}$ للتكاملات في التمرين (2).

5. استخدم تكامل رومبرج لتقريب التكاملات في التمرين (1) ضمن 10^{-6} . احسب جدول رومبرج

حتى يصبح $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$ أو $n = 10$ قارن نتائجك بالقيم الصحيحة للتكاملات.

6. استخدم تكامل رومبرج لتقريب التكاملات في التمرين (2) ضمن 10^{-6} . احسب جدول رومبرج

حتى يصبح $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$ أو $n = 10$. قارن نتائجك بالقيم الصحيحة للتكاملات.

7. استخدم البيانات الآتية لتقريب $\int_1^5 f(x) \, dx$ لأكبر دقة ممكنة:

5	4	3	2	1	x
3.2804	3.0976	2.8974	2.6734	2.4142	$f(x)$

8. استخدم تكامل رومبرج لتقريب

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} \, dx$$

إذا كان $R_1 = 0.250$ و $R_{22} = 0.2315$ أوجد R_{21} .

9. استخدم تكامل رومبرج لتقريب $\int_2^3 f(x) dx$.
 إذا كان $R_{31} = 0.43687$ ، $R_{31} = 0.36788$ ، $f(2) = 0.51342$ ، $f(3) = 0.43662$ و R_{23} حدد $f(2.5)$.
10. يعطي تكامل رومبرج لتقريب $\int_0^1 f(x) dx$ ما يلي: $R_{11} = 4$ و $R_{22} = 5$. أوجد $f(\frac{1}{2})$.
11. يعطي تكامل رومبرج لتقريب $\int_a^b f(x) dx$ ما يلي $R_{11} = 8$ ، $R_{22} = \frac{10}{3}$ و $R_{33} = \frac{208}{45}$. أوجد $f(\frac{2}{3})$.
12. استخدم تكامل رومبرج لحساب التقريبات الآتية لتكامل $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx$.
 [ملحوظة: إن نتائج هذا التمرين مهمة جداً إذا ما استخدمت طريقة حساب ما بين سبع وتسع منازل].
- أ. احسب $R_{1,1}$ ، $R_{2,1}$ ، $R_{3,1}$ ، $R_{4,1}$ و $R_{5,1}$ ، واستخدم هذه التقريبات للتنبؤ بقيمة التكامل.
 ب. احسب $R_{2,2}$ ، $R_{3,3}$ ، $R_{4,4}$ و $R_{5,5}$ وعدّل تنبؤك.
 ج. احسب $R_{6,1}$ ، $R_{6,2}$ ، $R_{6,3}$ ، $R_{6,4}$ و $R_{6,6}$ وعدّل تنبؤك.
 د. احسب $R_{7,7}$ ، $R_{8,8}$ ، $R_{9,9}$ و $R_{10,10}$ وأعطِ التنبؤ النهائي.
- هـ. وضح لماذا يسبب هذا التكامل صعوبة لدى استخدام تكامل رومبرج، وشرح كيف يمكن إعادة صياغته لتحديد تقريب دقيق بسهولة.
13. برهن أن التقريب الناتج من $R_{k,2}$ هو التقريب نفسه الذي نحصل عليه باستخدام قاعدة سمبسون المركبة التي شرحت في المبرهنة (4.4) بأخذ $h = h_k$.
14. برهن ما يلي لأي k :

$$\sum_{i=1}^{2k-1} f\left(a + \frac{i}{2}h_{k-1}\right) = \sum_{i=1}^{2k-2} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right) + \sum_{i=1}^{2k-2-1} f(a + ih_{k-1}).$$

15. استخدم نتيجة تمرين 14 للتحقق من صيغة (32.4)؛ أي برهن ما يلي جميعها k :

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2k-2} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right) \right]$$

16. في التمرين 24 من الفصل (1.1)، ظهر تكامل متسلسلة ماكلورين لتقريب $\text{erf}(1)$ ، حيث $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ الصيغة في التوزيع الطبيعي المعرفة في الصيغة (10.7).
 قرب $\text{erf}(1)$ ضمن 10^{-7} .

6.4 طرائق التكامل التكيفية Adaptive Quadrature Methods

إن الصيغ المركبة تتطلب استخدام نقاط تجزئية متساوية المسافات. وهذا ليس مناسباً عند تكامل دالة على فترة تحتوي على منطقتين: يكون على إحدهما تغير دالي كبير، وعلى الأخرى تغير دالي صغير. وفي حالة اشتراط أن يكون خطأ التقريب موزعاً بالتجانس، فإن المسافة بين نقاط التجزئة يجب أن تكون أصغر على مناطق التغير الكبير منها على مناطق التغير الصغير. إن الطريقة الفاعلة لهذا النوع من المسائل يجب أن تنبئ عن كمية التغير الدالي وتكيف حجم الخطوة (المسافة في التجزئة) للمتطلبات المتغيرة.

تسمى هذه الطرائق طرائق التكامل التكيفية.

إن الطرائق العددية التكيفية مرغوب فيها خصوصاً لإدخالها في الحقائق التخصصية الناعمة. وذلك ليس لكونها فاعلة فقط، بل لأنها أيضاً تعطي تقريبات ضمن حد الخطأ المحدد والمسموح به. سنبحث في هذا الفصل طريقة تكامل تكيفية ونرى كيف يمكن استخدامها، ليس فقط

لتقليل خطأ التدوير، ولكن للتنبؤ أيضاً بتقدير الخطأ في التقريب الذي لا يعتمد على معرفة المشتقات العليا للدالة.

إن الطريقة التي نبحث فيها تعتمد على قاعدة سمبسون المركبة. ولكن هذه الطريقة يمكن تكييفها بسهولة لاستخدامها طرائق مركبة أخرى.

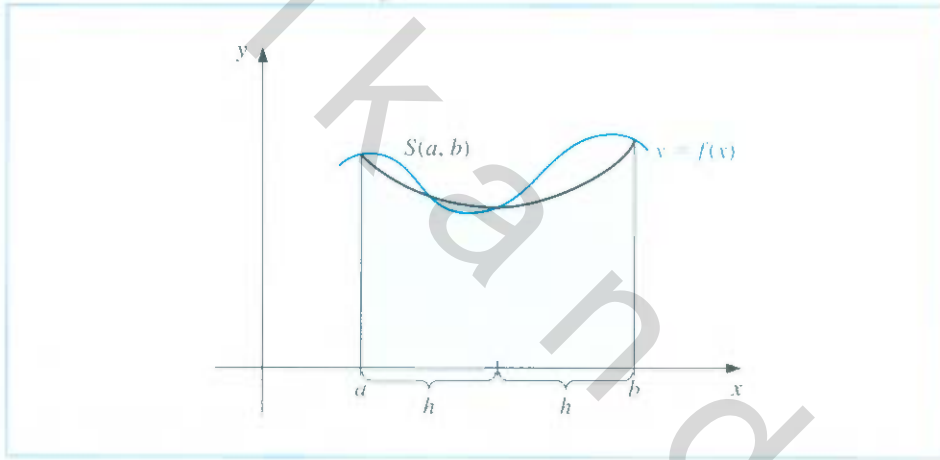
افترض أننا نريد تقريب $\int_a^b f(x) dx$ ضمن خطأ محدد مسموح $\varepsilon > 0$. الخطوة الأولى في العملية هي تطبيق قاعدة سمبسون بحجم خطوة $h = (b - a)/2$ (انظر شكل 11.4) تنتج الصيغة

$$\int_a^b f(x) dx = S(a, h) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \quad (36.4)$$

للقيمة μ في الفترة (a, b) .

وحيث نعبر عن التقريب بقاعدة سمبسون على $[a, b]$ بالرمز

$$S(a, b) = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(b)]$$



شكل 11.4

فإن الخطوة التالية لإيجاد تقريب للدقة لا يتطلب $f^{(4)}(\mu)$. ولعمل هذا، نطبق قاعدة سمبسون المركبة بأخذ $n = 4$. وحجم الخطوة $h/2 = (b - a)/4$. وهذا يعطي

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 2f(a+h) + 4f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f(b) \right] - \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\mu) \quad (37.4)$$

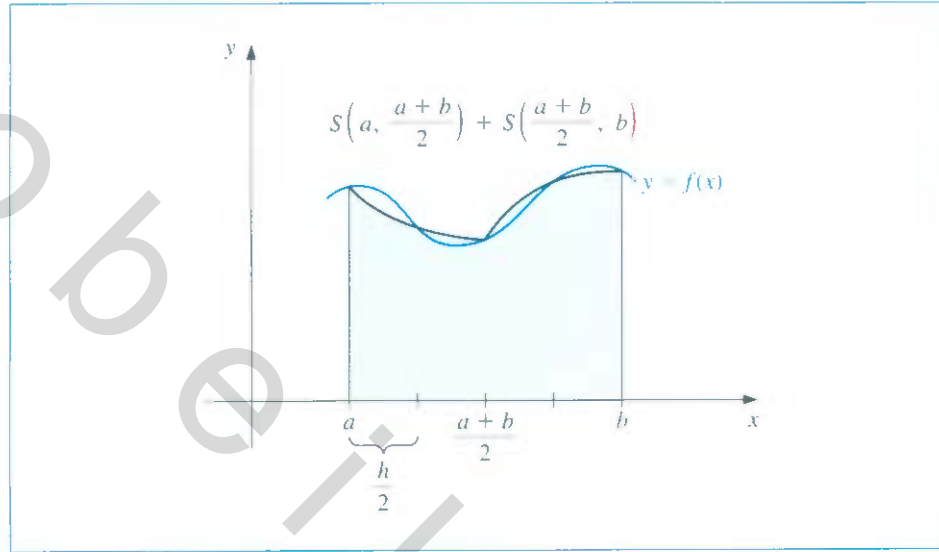
لقيمة ما μ في الفترة (a, b) .

ولتبسيط الرموز، ضع

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a+h) \right]$$

$$S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) = \frac{h}{6} \left[f(a+h) + 4f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f(b) \right]$$

و



شكل 12.4

عندئذ يمكن كتابة الصيغة (37.4) (انظر شكل 12.4) على الصيغة

$$\int_a^b f(x) dx = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16} \left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\bar{\mu}) \quad (38.4)$$

يشتق تقدير الخطأ بافتراض أن $\mu \approx \bar{\mu}$ أو على نحو أدق بوضع $f^{(4)}(\mu) \approx f^{(4)}(\bar{\mu})$. وإن نجح الطريقة يعتمد على دقة هذا الافتراض، وإذا كان ذلك دقيقاً فإن مساواة التكاملين في (36.4) و(38.4) يعطي

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16} \left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\bar{\mu}) \approx S(a, b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu)$$

ومن ثم

$$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \approx \frac{16}{15} \left[S(a, b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right]$$

إن استخدام هذا التقدير في الصيغة (38.4) ينتج تقدير الخطأ

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| \approx \frac{1}{15} \left| S(a, b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|$$

وهذه النتيجة تعني أن $S(a, (a+b)/2) + S((a+b)/2, b)$ يعطي تقريباً لتكامل $\int_a^b f(x) dx$ أفضل بنحو 15 مرة، مما يتفق مع القيمة المعلومة $S(a, b)$.

وهكذا إذا كان

$$\left| S(a, b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| < 15\epsilon \quad (39.4)$$

فإننا نتوقع الحصول على

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| < \varepsilon \quad (40.4)$$

ومن المفترض أن يكون

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$$

تقريباً دقيقاً على نحو كافٍ للتكامل $\int_a^b f(x) dx$.

مثال 1 لفحص دقة خطأ التقدير في المعادلتين (39.4) و (40.4) افترض تطبيقه على التكامل

$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$ في هذه الحالة

$$S\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi/4}{3} \left[\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{12} (2\sqrt{2} + 1) = 1.002279878$$

$$S\left(0, \frac{\pi}{4}\right) + S\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi/8}{3} \left[\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{8} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \right] \\ = 1.000134585$$

ومن ثم

$$\left| S\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - S\left(0, \frac{\pi}{4}\right) - S\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \right| = |1.002279878 - 1.000134585| = 0.002145293$$

إن تقدير الخطأ الحاصل من استخدام

$S(a, (a+b)) + S((a+b), b)$ لتقريب التكامل $\int_a^b f(x) dx$ يكون بالنتيجة

$$\frac{1}{15} \left| S\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - S\left(0, \frac{\pi}{4}\right) - S\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \right| = 0.000143020$$

الذي يقرب الخطأ الفعلي جيداً

$$\left| \int_0^{\pi/2} \sin x dx - 1.000134585 \right| = 0.000134585$$

وعلى الرغم من أن $D^4 \sin x = \sin x$ يغير تغيراً كبيراً في الفترة $(0, \pi/2)$. فإنه عندما تختلف التقريبات في الصيغة (39.4) بأكثر من 15ε ، نطبق قاعدة سمبسون فردياً على الفترات الجزئية $[(a+b)/2, b]$ و $[a, (a+b)/2]$. بعد ذلك نستخدم عملية تقدير الخطأ في تحديد ما إذا كان التقريب للتكامل على كل فترة جزئية ضمن الخطأ المسموح $\varepsilon/2$ أو لا. فإذا كان الأمر كذلك فإننا نجمع التقريبين لنحصل على تقريب للتكامل $\int_a^b f(x) dx$ ضمن الخطأ المسموح ε .

إذا لم يكن التقريب على إحدى الفترتين الجزئيتين ضمن الخطأ المسموح $\varepsilon/2$ ، فعندئذ نقسم تلك الفترة الجزئية إلى فترتين، ويُعاد تطبيق القاعدة على تلك الفترتين لتحديد ما إذا كان التقريب على كل فترة جزئية ضمن $\varepsilon/4$ أو لا. تستمر عملية التصنيف هذه حتى يكون كل جزء ضمن الخطأ المحدد المسموح به.

وعلى الرغم من أنه بالإمكان إنشاء مسائل لا يمكن الحصول فيها على الخطأ المسموح، إلا أن الطريقة عادة ما تكون ناجحة؛ لأن كل تجزئة تزيد عادة من دقة التقريب بعامل 16، حيث يكون المطلوب زيادة عامل الدقة باثنين فقط.

تعطي الخوارزمية (3.4) تفاصيل عملية التكامل التكيفية لقاعدة سمبسون. على الرغم من ظهور بعض الصعوبات التقنية التي تتطلب تخلف التنفيذ قليلاً عما شرح سابقاً. فعلى سبيل مثال في الخصلة الأولى، اختبر الخطأ المسموح ليكون 10ε بدلاً من العدد 15ε في المتراجحة (39.4). لقد اختير هذا الحد اختياراً محافظاً للتعويض عن الخطأ في الافتراض $f^{(4)}(\bar{\mu}) \approx f^{(4)}(\bar{\nu})$. وفي المسائل التي يكون فيها $f^{(4)}$ ذا تغير واسع، فعليك أن تخفض هذا الحد على نحو أكبر. إن الطريقة المذكورة في الخوارزمية تقرب أولاً التكامل على الفترة الجزئية في أقصى يسار التجزئة. ويتطلب هذا طريقة فاعلة في حفظ القيم الدالية المحسوبة على نقاط التجزئة في النصف الأيمن للفترات الجزئية واسترجاع تلك القيم.

تحتوي الخطوات 3، 4 و 5 على عملية تخزين مع مؤشر يسمح بتتبع البيانات المطلوبة لحساب التقريب على الفترة الجزئية المجاورة مباشرة على يمين الفترة الجزئية التي تولد التقريب عليها. إن تنفيذ الطريقة يكون أسهل على حاسوب يستخدم لغة برمجة استرجاعية (recursive).

التكامل التكيفي Adaptive Quadrature

عملية التكامل التكيفية لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x) dx$ ضمن حد خطأ مسموح به. المدخلات: نقاط النهاية a و b . حد الخطأ المسموح TOL . حدّد N بعدد المستويات. المخرجات: التقريب APP أو تقرير أن N قد تم تخطيها.

الخطوة	المضمون
1	<p>ضع</p> $APP = 0$ $i = 1;$ $TOL_i = 10 TOL$ $a_i = a;$ $h_i = (b - a)/2$ $FA_i = f(a);$ $FC_i = f(a + h_i)$ $FB_i = f(b);$ <p>(تقريب من طريقة سمبسون لكامل الفترة) $S_i = h_i(FA_i + 4FC_i + FB_i)/3$</p> $L_i = 1$
2	عند $i > 0$ طبق الخطوات 3 - 5.
3	<p>ضع</p> $FD = \int_{a_i}^{a_i + h_i/2} f(x) dx$ $FE = \int_{a_i + h_i/2}^{a_i + h_i} f(x) dx$ <p>(تقريب من طريقة سمبسون لنصف أجزاء الفترة) $S1 = h_i(FA_i + 4FD + FC_i)/6$</p> $S2 = h_i(FC_i + 4FE + FB_i)/6$ <p>(خزن المعلومات في هذا المستوى)</p> $v_1 = a_i$ $v_2 = FA_i$ $v_3 = FC_i$ $v_4 = FB_i$ $v_5 = h_i$ $v_6 = TOL_i$ $v_7 = S_i$ $v_8 = L_i$

استخدم هامش أمان عند استحالة التحقق من افتراضات الدقة



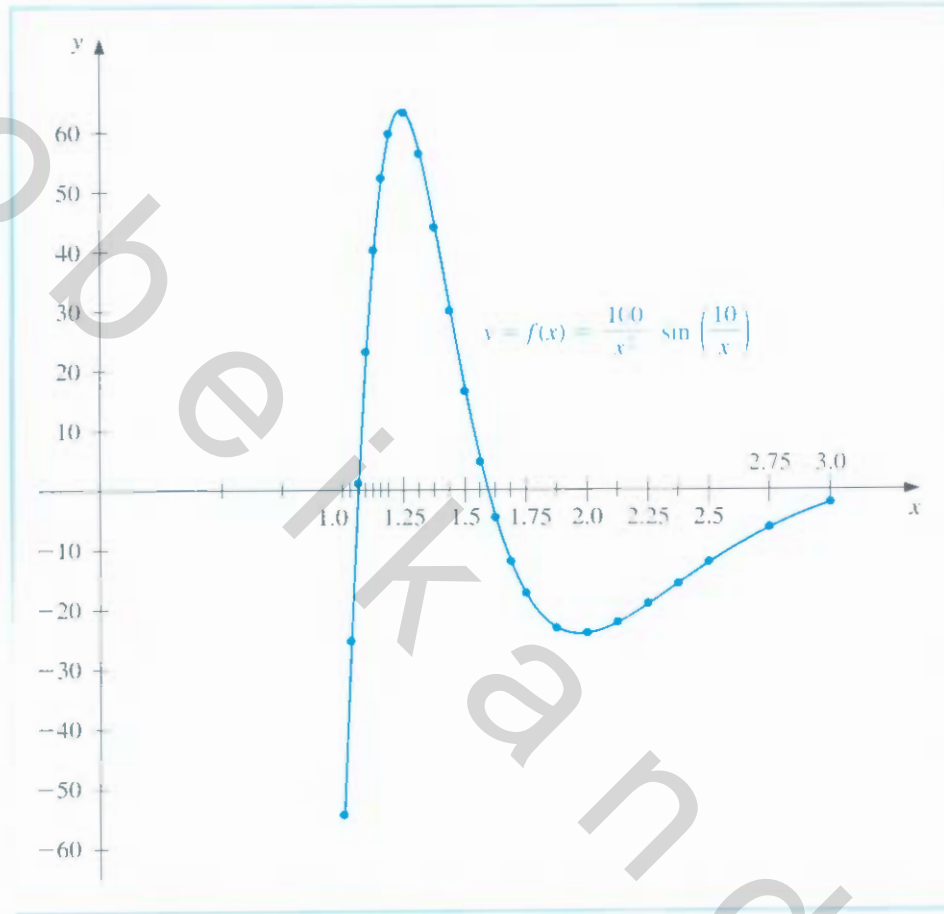
4	<p>ضع $i = i - 1$ (احذف المستوى).</p>
5	<p>إذا كان $S1 + S2 - v_7 < v_6$ فضع $APP = APP + (S1 + S2)$ وغير ذلك، إذا كان $(v_8 \geq N)$ فإن المخرجات ('LEVEL EXCEEDED') (العملية فشلت). توقف. غير ذلك (أضف مستوى واحدا). ضع $i = i + 1$ (البيانات لنصف الفترة اليمنى) $a_i = v_1 + v_5$ $FA_i = v_3$ $FC_i = FE$ $FB_i = v_4$ $h_i = v_5/2$ $TOL_i = v_6/2$ $S_i = S2$ $L_i = v_8 + 1$</p>
6	<p>ضع $i = i + 1$ (البيانات لنصف الفترة اليسرى) $a_i = v_1$ $FA_i = v_2$ $FC_i = FD$ $FB_i = v_3$ $h_i = h_{i-1}$ $TOL_i = TOL_{i-1}$ $S_i = S1$ $L_i = L_{i-1}$</p> <p>المخرجات (APP) (APP تقرب I بحدود TOL). توقف.</p>



مثال 2

شكل (13.4) يعرض رسم منحنى الدالة $f(x) = (100/x^2) \sin(10/x)$ لقيم x في الفترة [1, 3]. باستخدام خوارزمية التكامل التكييفية (3.4) ضمن حد الخطأ المسموح 10^{-4} لإيجاد تقريب للتكامل $\int_1^3 f(x) dx$ تعطي -1.426014، وهي نتيجة دقيقة بحد 1.1×10^{-5} . لقد تطلب التقريب استخدام قاعدة سمبسون بأخذ $n = 4$ على 23 فترة جزئية عرضت نقاط النهاية لها على المحور الأفقي في شكل (13.4). إن عدد التقييمات الدالية المطلوبة لهذا التقريب يساوي 93.

إن أكبر قيمة للعدد h المطلوبة لكي تنتج قاعدة سمبسون المركبة إجابة ضمن دقة 10^{-4} هي $h = \frac{1}{88}$. إن هذا التطبيق يتطلب 177 تقييماً دالياً، أي ما يعادل ضعف العدد المطلوب تقريباً في عملية التكامل التكييفية.



شكل 13.4

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 6.4

1. احسب تقريبات قاعدة سمبسون $S(a, b)$, $S(a, (a + b)/2)$ و $S((a + b)/2, b)$ للتكاملات الآتية، وتحقق من التقدير المعطى في صيغة التقريب:

أ. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$ ب. $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$ ج. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4} \, dx$ د. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x \, dx$
 هـ. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$ و. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2 - 4} \, dx$ ز. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$ ح. $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^{-2} \, dx$

2. استخدم طريقة التكامل التكميلية لإيجاد تقريبات ضمن 10^{-3} للتكاملات في تمرين (1).
 استخدم برنامجاً حاسوبياً لتوليد هذه النتائج.

3. استخدم طريقة التكامل التكميلية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5} :

أ. $\int_1^3 e^{2x} \sin 3x \, dx$ ب. $\int_1^3 e^{3x} \sin 2x \, dx$
 ج. $\int_0^5 (2x \cos(2x) - (x - 2)^2) \, dx$ د. $\int_0^5 (4x \cos(2x) - (x - 2)^2) \, dx$

4. استخدم طريقة التكامل التكيفية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5} :

أ. $\int_0^n (\sin x + \cos x) dx$ ب. $\int_1^2 (x + \sin 4x) dx$

ج. $\int_{-1}^1 x \sin 4x dx$ د. $\int_0^{n^2} (6 \cos 4x + 4 \sin 6x) e^x dx$

5. استخدم سمبسون المركبة باستخدام $n = 4, 6, 8, \dots$ إلى أن تتفق التقريبات المتتالية للتكاملات الآتية ضمن 10^{-6} ، حدد عدد الرؤوس (نقاط التقسيم) المطلوبة.

استخدم خوارزمية التكامل التكيفية لتقريب التكامل 10^{-6} ، واحسب عدد الرؤوس. هل أدت عملية التكامل التكيفية إلى أي تحسين؟

أ. $\int_0^n x \cos x^2 dx$ ب. $\int_0^n x \sin x^2 dx$

ج. $\int_0^n x^2 \cos x dx$ د. $\int_0^n x^2 \sin x dx$

6. ارسم منحنيات $\sin(1/x)$ و $\cos(1/x)$ على $[0.1, 2]$.

استخدم طريقة التكامل التكيفية لتقريب التكاملات الآتية ضمن 10^{-5} :

أ. $\int_{0.1}^2 \cos \frac{1}{x} dx$ ب. $\int_{0.1}^2 \sin \frac{1}{x} dx$

7. تصف الصيغة التفاضلية $mu''(t) + ku(t) = F_0 \cos \omega t$ نظام الزنبرك والكتلة. حيث m الكتلة k ثابت الزنبرك دون تخميد (damping). ويصف الحد $F_0 \cos \omega t$ قوة خارجية دورية تطبق على النظام.

إن حل هذه الصيغة عندما يبدأ النظام في حالة سكون ($u'(0) = u(0) = 0$) هو

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad \text{حيث } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \neq \omega$$

ارسم منحنى u عندما $\omega = 2$ ، $F_0 = 1$ ، $k = 9$ ، $m = 1$ و $t \in [0, 2\pi]$

أوجد التقريب للتكامل $\int_0^{2\pi} u(t) dt$ ضمن 10^{-4} .

8. إذا أضيف الحد $cu'(t)$ إلى الطرف الأيسر من صيغة الحركة في التمرين (7)، فإن الصيغة التفاضلية الناتجة تصف نظام الزنبرك والكتلة الذي خضع لتخميد بثابت تخميد $c \neq 0$.

إن حل هذه الصيغة عندما يبدأ النظام في حالة سكون هو

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0}{c^2 \omega^2 + m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} (c \omega \sin \omega t + m (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t)$$

حيث

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m} \quad \text{و} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m}$$

أ. ليكن $m = 1$ ، $k = 9$ ، $F_0 = 1$ ، $c = 10$ و $\omega = 2$ فأوجد c_1 و c_2 ليكون $u(0) = u'(0) = 0$.

ب. ارسم المنحنى $u(t)$ لكل $t \in [0, 2\pi]$ وقرب $\int_0^{2\pi} u(t) dt$ ضمن 10^{-4} .

9. ليكن $T(a, b)$ و $T((a + b/2), b)$ و $T(a, (a + b/2))$ التطبيق المنفرد والتطبيق الثنائي لقاعدة

شبه المنحرف للتكامل $\int_a^b f(x) dx$.

اشتق العلاقة بين

$$\left| T(a, b) - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| \quad \text{و}$$

10. إن دراسة الحيود الضوئي على فتحة مستطيلة يحتوي على تكاملات فرنل (Fresnel integrals).

$$s(t) = \int_0^t \sin \frac{\pi}{2} w^2 dw \quad \text{و} \quad c(t) = \int_0^t \cos \frac{\pi}{2} w^2 dw$$

أنشئ جدولاً لقيم $c(t)$ و $s(t)$ التي تكون دقيقة ضمن 10^{-4} للقيم $t = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$.

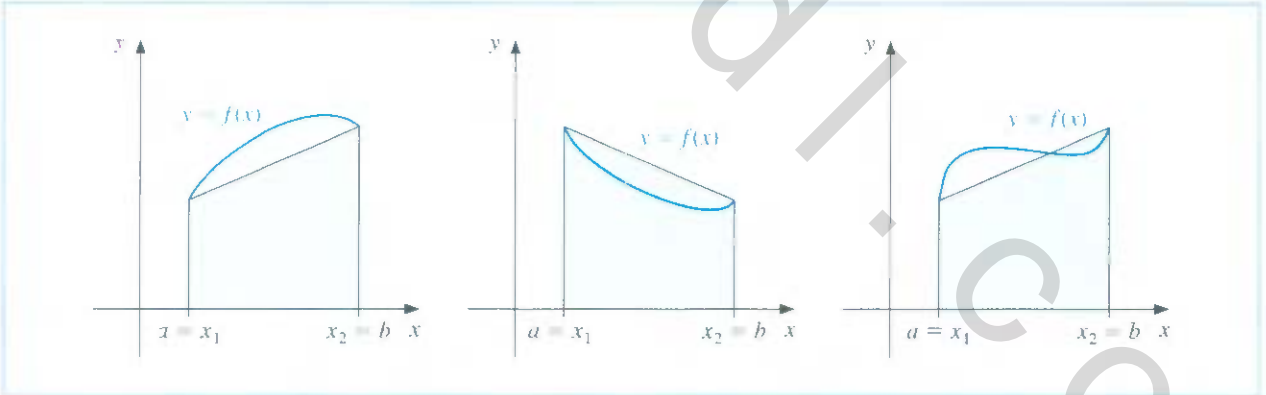
Gaussian Quadrature

7.4 طرائق جاوس للتكامل

لقد اشتقت صيغة نيوتن - كوتس في الفصل (3.4) عن طريق تكامل كثيرات حدود الاستكمال الداخلي. وبما أن حد الخطأ في كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي من الرتبة n يحتوي على المشتقة ذات العدد $(n+1)$ للدالة الجاري تقريبها، فإن صيغة نيوتن - كوتس لتقريب تكامل أي كثيرة حدود ذات رتبة أقل من n أو تساويها صحيحة تماماً.

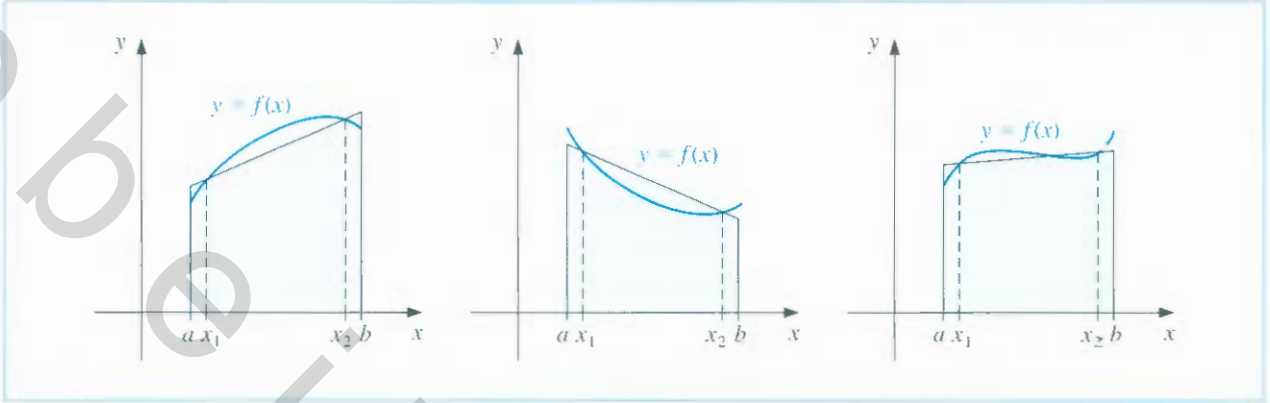
إن صيغة نيوتن - كوتس جميعها تستخدم قيماً للدالة على نقاط متساوية البعد. إن تحديد ملائم عندما تدمج هذه الصيغ لتكوين القواعد المركبة التي شرحت في الفصل (3.4) ولكن من الممكن أن تقلل من رتبة التقريب على نحو ملحوظ. فعلى سبيل المثال، لاحظ قاعدة شبه المنحرف عند تطبيقها لإيجاد تكاملات الدوال الموضحة في شكل (14.4).

شكل 14.4



إن قاعدة شبه المنحرف تقرب تكامل الدالة عن طريق تكامل الدالة الخسي الذي يصل نقطتي النهاية لمنحنى الدالة. وليس بالضرورة أن يكون هذا أفضل خط لتقريب التكامل إذ من المحتمل أن تعطي الخطوط الموضحة في شكل (15.4) تقريبات أفضل بكثير في معظم الأحيان.

شكل 15.4



إن طريقة جاوس للتكامل تختار نقاط التقييم بطريقة تعظيمية بدلاً من طريقة تساوي الأبعاد. تُختار الرؤوس x_1, x_2, \dots, x_n في الفترة $[a, b]$ ، والمعاملات c_1, c_2, \dots, c_n بحيث تجعل الخطأ المتوقع في التقريب أصغر ما يمكن.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

ولقياس هذه الدقة؛ افترض أن أفضل اختيار لهذه القيم يعطي القيمة الصحيحة لأكبر مجموعة من كثيرات الحدود، أي أنه الاختيار الذي يعطي الرتبة الأعلى من الدقة. إن المعاملات c_1, c_2, \dots, c_n في صيغة التقريب حرة (يمكن اختيارها كيفما اتفق)، والرؤوس x_1, x_2, \dots, x_n عليها تحديد واحد ألا وهو وجوب وقوعها في الفترة $[a, b]$ ، وهي فترة التكامل. إن هذا يعطينا $2n$ من المتغيرات التي يجب اختيارها.

إذا ما افترضت معاملات كثيرة الحدود على أنها معلمات، فإن مجموعة كثيرات الحدود التي أعلى قيمة لرتبتها $2n - 1$ تحتوي على $2n$ من الوسيطات.

إذن فمن المنطق أن تكون هذه أكبر مجموعة من كثيرات الحدود التي صيغتها صحيحة بالضبط. وباختيار القيم والثوابت اختياراً مناسباً فإن الضبط على هذه المجموعة يكون ممكناً.

ولشرح طريقة اختيار المتغيرات المناسبة؛ سنوضح كيف نختار المعاملات والنقاط في حالة $n = 2$ وفترة التكامل $[-1, 1]$. ثم سنناقش الوضع العام لاختيار النقاط والمتغيرات كيفما اتفق، ونبرهن كيفية تطوير الطريقة عند التكامل على أي فترة.

افترض أننا نرغب في تحديد x_1, x_2 و c_1, c_2 بحيث تعطي صيغة التكامل

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

القيمة الصحيحة، حيث $f(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $3 = 2(2) - 1$ أو أقل من 3، أي عندما $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ لمجموعة من الثوابت a_0, a_1, a_2 و a_3 .

شرح جاوس Gauss طريقته في التكامل العددي في بحث قدمه إلى جمعية غوتنغن في عام 1814 (Göttinge Society). لقد وضع الرؤوس ومعاملات التقييمات الدلالية بوصفها معلمات في معادلة الجع. ووجد أفضل الأماكن لوضع الرئوس. ولقد أعصى جولدستاين وصفاً ممتازاً لتطوير الطريقة Goldstine [C olds], pp. 224-232.

بما أن

$$\int (a_0 + a_1x - a_2x^2 + a_3x^3) dx = a_0 \int 1 dx + a_1 \int x dx + a_2 \int x^2 dx + a_3 \int x^3 dx$$

فإن هذا يكافئ برهنة أن الصيغة تعطي نتائج صحيحة عندما $f(x)$ يكون $1, x, x^2, x^3$ بحيث

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \int_{-1}^1 x dx = 0 \quad , \quad c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

$$c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3 = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \quad \text{و} \quad c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

باستخدام بعض العمليات الجبرية فإن لنظام الصيغ هذا الحل الوحيد

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad c_2 = 1 \quad , \quad c_1 = 1$$

الذي يعطي صيغة التقريب

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (41.4)$$

إن رتبة دقة هذه الصيغة هي 3، أي أنها تعطي النتيجة الصحيحة لكل كثيرة حدود من الرتبة 3 أو أقل.

كثيرات الحدود الوحودية monic يكون فيها المعامل الأول 1

ويمكن استخدام هذه الطريقة لتحديد النقاط والمعاملات لصيغ تعطي نتائج صحيحة لكثيرات حدود من رتبة أعلى. ولكن هناك طريقة بديلة تحصل عليها بسهولة أكثر.

سندرس في الفصل (2.8) والفصل (3.8) تجمعات متعددة من كثيرات الحدود المتعمدة. وهي دوال لها الخاصية: أي تكامل محدود لحاصل ضرب أي اثنين منها يساوي 0. إن المجموعة ذات العلاقة بمسألتنا هي مجموعة كثيرات حدود ليجنندر Legendre Polynomials. وهي المجموعة $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots\}$ التي تحقق الخواص الآتية:

1. لكل n تكون $P_n(x)$ كثيرة حدود وحدانية ذات رتبة n .
2. $\int_{-1}^1 P(x) P_n(x) dx = 0$ لأي كثيرة حدود $P(x)$ ذات رتبة أقل من n .

لديك قليل من كثيرات حدود ليجنندر وهي:

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad P_1(x) = x, \quad P_0(x) = 1$$

$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35} \quad \text{و} \quad P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

إن جذور كثيرات الحدود هذه متميزة بعضها من بعض، وتقع في الفترة $(-1, 1)$ وتمتد بالنسبة إلى المركز. والأهم من ذلك كله هو الاختيار الصحيح لتحديد المتغيرات التي تحل مسألتنا.

النقاط x_1, x_2, \dots, x_n المطلوبة لإنتاج صيغة تقريب تكامل. التي تعطي نتائج صحيحة لأي كثيرة حدود ذات رتبة أقل من $2n$ هي جذور كثيرة حدود ليجنندر من الرتبة n يُبرهن ذلك من خلال النتيجة الآتية

لتكن x_1, x_2, \dots, x_n جذور كثيرة حدود ليجنندر $P_n(x)$ من الرتبة n . وأنه لكل $i = 1, 2, \dots, n$ نعرف c_i بالصيغة

أدريان - ماري ليجنندر (1752 - 1839)
عرّف هذه المجموعة من كثيرات الحدود عام 1785
وكان له منازعات مع جاوس خصوصا أن جاوس في بداية اكتشافه قد فشل في نشر الكثير من نتائجه الأصلية

7.4 مبرهنة

$$c_i = \int_{-1}^1 \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود ذات درجة أصغر من $2n$ فإن

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i)$$

البرهان لنأخذ أولاً الحالة التي فيها $P(x)$ كثيرة حدود ذات رتبة أقل من n . أعد كتابة $P(x)$ على صيغة كثيرة حدود ليجندر من الرتبة $(n-1)$ برؤوس على جذور كثيرة حدود ليجندر $P_n(x)$ من الرتبة n . إن هذا التمثيل لكثيرة حدود $P(x)$ صحيح بالضبط، لأن حد الخطأ يحتوي على مشتقة P من الرتبة n ، وأن مشتقة P من الرتبة n تساوي صفراً. إذن

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} P(x_i)$$

و

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(x) dx &= \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} P(x_i) \right] dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \right] P(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i) \end{aligned}$$

تحقق النتيجة لكثيرات الحدود ذات الرتبة الأقل من n .

إذا قسمنا كثيرة الحدود $P(x)$ من الرتبة n على الأقل ولكن أقل من $2n$ على كثيرة حدود ليجندر $P_n(x)$ ، نحصل على كثيرات حدود ذات رتبة أقل من n .

$$P(x) = Q(x) P_n(x) + R(x)$$

لاحظ أنه بما أن x_i جذر لـ $P_n(x)$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$ ، فإننا نحصل على

$$P(x_i) = Q(x_i) P_n(x_i) + R(x_i) = Q(x_i) \cdot 0 + R(x_i) = R(x_i)$$

والآن ندخل القوة الوحيدة لكثيرات حدود ليجندر.

أولاً: رتبة كثيرة الحدود $Q(x)$ أقل من n ، ولذلك تكون (خاصية ليجندر الثانية)

$$\int_{-1}^1 Q(x) P_n(x) dx = 0$$

وبما أن $R(x)$ كثيرة حدود ذات رتبة أقل من n ، فإن المناقشة الأولى تعطي

$$\int_{-1}^1 R(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i R(x_i)$$

بوضع هذه الحقائق معاً يتحقق أن الصيغة صحيحة تماماً لكثيرة الحدود $P(x)$

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \int_{-1}^1 [Q(x)P_n(x) + R(x)] dx = \int_{-1}^1 R(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i R(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i)$$

يمكن توليد الثوابت c_i التي نحتاج إليها لقاعدة التكامل من الصيغة في المبرهنة (7.4)، ولكن بدلاً من هذه الثوابت وجذور كثيرات حدود ليجندر قد تم جدولتها على نحو واسع. يعرض جدول (11.4) هذه القيم لكل من $n = 2, 3, 4, 5$.

القيم الأخرى موجودة في [StS].

جدول 11.4

n	الجذور $r_{n,i}$	المعاملات $c_{n,i}$
2	0.5773502692	1.0000000000
	-0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	-0.7745966692	0.5555555556
	0.8611363116	0.3478548451
4	0.3399810436	0.6521451549
	-0.3399810436	0.6521451549
	-0.8611363116	0.3478548451
	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888889
5	-0.5384693101	0.4786286705
	-0.9061798459	0.2369268850
	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705

مثال 1 قَرِّب $\int_{-1}^1 e^x \cos x dx$ باستخدام صيغة تكامل جاوس بأخذ $n = 3$ من جدول (11.4) نحصل على

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^x \cos x dx &\approx 0.5e^{0.774596692} \cos 0.774596692 \\ &+ 0.8 \cos 0 + 0.5e^{-0.774596692} \cos(-0.774596692) \\ &= 1.9333904 \end{aligned}$$

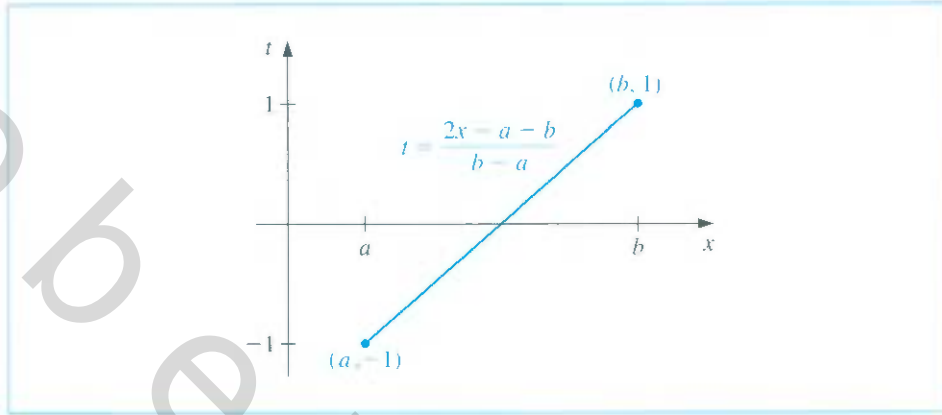
يمكن إيجاد القيمة الحقيقية باستخدام التكامل بالأجزاء لتكون 1.9334214، وبذلك يكون الخطأ المطلق أقل من 3.2×10^{-5} .

إن التكامل $\int_a^b f(x) dx$ على أي فترة $[a, b]$ يمكن تحويله إلى تكامل على الفترة $[-1, 1]$ باستخدام تحويل المتغيرات. (انظر شكل 16.4)

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \iff x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b]$$

يسمح هذا بتطبيق صيغة تكامل جاوس على أي فترة $[a, b]$ ؛ لأن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b - a)t + (b + a)}{2}\right) \frac{(b - a)}{2} dt \quad (42.4)$$



شكل 16.4

لديك مسألة لإيجاد تقريبات للتكامل $\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx$

مثال 2

يعطي جدول (12.4) القيم لصيغ نيوتن - كوتس المعطاة في الفصل (3.4). إن القيمة الصحيحة للتكامل إلى أقرب سبع خانات عشرية هي 0.1093643.

n	0	1	2	3	4
المعادلات المغلقة		0.1183197	0.1093104	0.1093404	0.1093643
المعادلات المفتوحة	0.1048057	0.1063473	0.1094116	0.1093971	

جدول 12.4

إن تطبيق عملية جاوس على هذه المسألة يتطلب أولاً تحويل التكامل إلى مسألة فيها فترة التكامل $[-1, 1]$.

باستخدام الصيغة (42.4) نجد أن

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-(t+5)^2/16} dt$$

إن القيم في جدول (11.4) تعطي تقريبات تكامل جاوس لهذه المسألة

$n = 2$:

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} [e^{-(5+0.5773502692)^2/16} + e^{-(5-0.5773502692)^2/16}] = 0.1094003$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{4} [(0.5555555556)e^{-(5+0.7745966692)^2/16} + (0.8888888889)e^{-(5)^2/16} \\ &\quad + (0.5555555556)e^{-(5-0.7745966692)^2/16}] \\ &= 0.1093642 \end{aligned}$$

وللمقارنة الإضافية، نعرض القيم التي حصلنا عليها باستخدام عملية رومبرج بأخذ $n = 4$ في جدول (13.4).

			0.1183197
		0.1093104	0.1115627
	0.1093643	0.1093610	0.1099114
0.1093643	0.1093643	0.1093641	0.1095009

جدول 13.4

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 7.4

1. أوجد تقريب التكاملات الآتية باستخدام طريقة جاوس و $n = 2$ ، ثم قارن نتيجتك بالقيم الصحيحة للتكاملات:

أ. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$ ب. $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$ ج. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4} \, dx$ د. $\int_0^{0.4} x^2 \sin x \, dx$

هـ. $\int_0^{n/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$ و. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2 - 4} \, dx$ ز. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$ ح. $\int_0^{0.4} (\cos x)^2 \, dx$

2. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 3$.

3. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 4$.

4. كرر التمرين (1) بأخذ $n = 5$.

5. حدّد الثوابت a ، b ، c و d التي تعطي صيغة التكامل

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx = af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$

التي رتبة الدقة فيها 3.

6. حدّد الثوابت a ، b ، c و d التي تعطي صيغة التكامل

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx = af(-1) + bf(0) + cf(1) + df'(-1) + ef'(1)$$

التي رتبة الدقة فيها 4.

7. تحقق من القيم في جدول (11.4) المقابلة للقيم $n = 2, 3$ ، بإيجاد الجذور لكثيرات حدود

ليجنذر المناسبة. استخدم الصيغ المذكورة قبل هذا جدول لإيجاد المعاملات المرتبطة بهذه القيم

8. برهن أنه لا يمكن في الصيغة $Q(P) = \sum_{i=1}^n c_i P(x_i)$ أن تكون رتبة دقتها أكثر من $2n - 1$

مهما كان اختيار c_1, \dots, c_n و x_1, \dots, x_n

[إضاءة: أنشئ كثيرة حدود ذات جذر مضاعف على كل x_i].

Multiple Integrals

التكاملات المتعددة

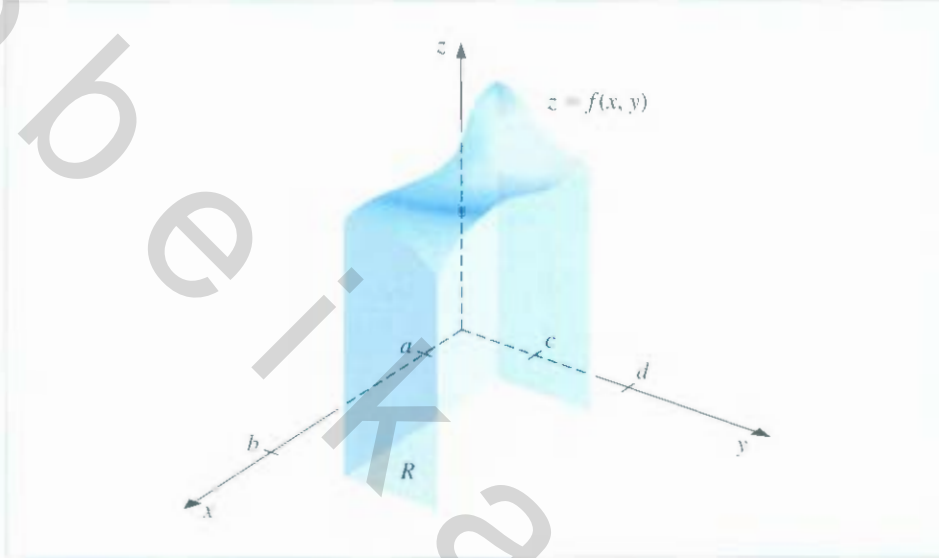
8.4

يمكن تطوير الطرائق التي قدمت في البنود السابقة مباشرة لاستخدامها في إيجاد تقريب

للتكاملات المتعددة. خذ التكامل الثنائي

$$\iint_R f(x, y) \, dA$$

حيث $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ، منطقة مستطيلة في المستوى، وحيث a, b, c, d وثابت. (انظر شكل 17.4)



شكل 17.4

سنستخدم قاعدة سمبسون المركبة لشرح طريقة التقريب على الرغم من أنه يمكن استخدام أي صيغة مركبة بدلاً منها.

لتطبيق قاعدة سمبسون المركبة، نقسم المنطقة R عن طريق تجزئة $[a, b]$ و $[c, d]$ إلى عدد زوجي من الفترات الجزئية. ولتبسيط الرموز، نختار أعداداً صحيحة زوجية m و n ونجزئ $[a, b]$ و $[c, d]$ باستخدام نقاط الشبكة المتساوية الأبعاد فيما بينها وهي x_0, x_1, \dots, x_n و y_0, y_1, \dots, y_m و $h = (b - a)/n$ و $k = (d - c)/m$ الخطوتين

ويكتابة التكامل الثنائي على شكل تكامل متتال

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

نستخدم أولاً قاعدة سمبسون المركبة لتقريب

$$\int_c^d f(x, y) dy$$

مفترضين أن x عدد ثابت.

ضع $y_j = c + jk$ لكل $j = 0, 1, \dots, m$ إذن

$$\int_c^d f(x, y) dy = \frac{k}{3} \left[f(x, y_0) + 2 \sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{m/2} f(x, y_{2j-1}) + f(x, y_m) \right] - \frac{(d-c)k^4}{180} \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4}$$

لعدد ما μ في (c, d) . وبذلك

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \frac{k}{3} \left[\int_a^b f(x, y_0) dx + 2 \sum_{j=1}^{(m/2)-1} \int_a^b f(x, y_{2j}) dx \right. \\ \left. + 4 \sum_{j=1}^{m/2} \int_a^b f(x, y_{2j-1}) dx + \int_a^b f(x, y_m) dx \right] \\ - \frac{(d-c)k^4}{180} \int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4} dx.$$

والآن تطبق قاعدة سمبسون المركبة على التكاملات في هذه الصيغة. افترض $x_i = a + ih$ لكل $i = 0, 1, \dots, n$

عندئذ لكل $j = 0, 1, \dots, m$ نحصل على

$$\int_a^b f(x, y_j) dx = \frac{h}{3} \left[f(x_0, y_j) + 2 \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_j) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_j) + f(x_n, y_j) \right] \\ - \frac{(b-a)h^4}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_j, y_j),$$

لعدد ما ξ_j في (a, b) التقريب الناتج له الصيغة

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \approx \frac{hk}{9} \left\{ \left[f(x_0, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_0) \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_0) + f(x_n, y_0) \right] \right. \\ \left. + 2 \left[\sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x_0, y_{2j}) + 2 \sum_{j=1}^{(m/2)-1} \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_{2j}) \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sum_{j=1}^{(m/2)-1} \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_{2j}) + \sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x_n, y_{2j}) \right] \right. \\ \left. + 4 \left[\sum_{j=1}^{m/2} f(x_0, y_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{m/2} \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_{2j-1}) \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sum_{j=1}^{m/2} \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{m/2} f(x_n, y_{2j-1}) \right] \right. \\ \left. + \left[f(x_0, y_m) + 2 \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_m) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}, y_m) \right. \right. \\ \left. \left. + f(x_n, y_m) \right] \right\}$$

ويعطي حد الخطأ E على الصيغة

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540} \left[\frac{\partial^4 f(\xi_0, y_0)}{\partial x^4} + 2 \sum_{j=1}^{(m/2)-1} \frac{\partial^4 f(\xi_{2j}, y_{2j})}{\partial x^4} + 4 \sum_{j=1}^{m/2} \frac{\partial^4 f(\xi_{2j-1}, y_{2j-1})}{\partial x^4} \right. \\ \left. + \frac{\partial^4 f(\xi_m, y_m)}{\partial x^4} \right] - \frac{(d-c)k^4}{180} \int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4} dx$$

إذا كان $\partial^4 f / \partial x^4$ متصلًا، يمكن تطبيق مبرهنة القيمة الوسطية على نحو متكرر لبرهنة أنه يمكن الاستعاضة عن تقييم المشتقات الجزئية بالنسبة إلى x بقيمة مشتركة. وأن

$$E = \frac{k(b-a)h^4}{540} \left[3m \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu}) \right] - \frac{(d-c)k^4}{180} \int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4} dx$$

لنقطة ما $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ في R .

وأيضًا إذا كان $\partial^4 f / \partial y^4$ متصلًا فإن مبرهنة القيمة الوسطية الموزونة للتكاملات تعطي

$$\int_a^b \frac{\partial^4 f(x, \mu)}{\partial y^4} dx = (b-a) \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu})$$

لنقطة ما $(\hat{\eta}, \hat{\mu})$ في R .

بما أن $m = (d-c)/k$ فإن حد الخطأ له الصيغة

$$E = \frac{-k(b-a)h^4}{540} \left[3m \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu}) \right] - \frac{(d-c)(b-a)k^4}{180} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu})$$

أو

$$E = - \frac{(d-c)(b-a)}{180} \left[h^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu}) + k^4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu}) \right]$$

للنقطتين $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ و $(\hat{\eta}, \hat{\mu})$ في R .

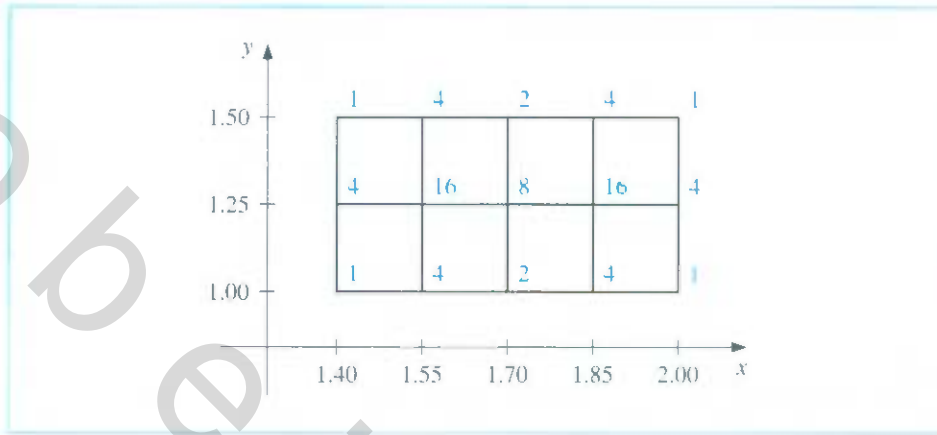
مثال 1 إن تطبيق قاعدة سمبسون المركبة لتقريب التكامل

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y) dy dx$$

بأخذ $n = 4$ و $m = 2$ يستخدم حجوم الخطوة $h = 0.15$ و $k = 0.25$. حيث $i = 0, 1, 2, 3, 4$ مع نقاط النقاط (x_i, y_j) . وتظهر أيضًا المعاملات $w_{i,j}$ للدالة $f(x_i, y_i) = \ln(x_i + 2y_i)$ في حاصل الجمع الذي يعطي تقريب قاعدة سمبسون المركبة للتكامل.

التقريب هو

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y) dy dx \approx \frac{(0.15)(0.25)}{9} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^2 w_{i,j} \ln(x_i + 2y_j) \\ = 0.4295524387$$



شكل 18.4

بما أن

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y) = \frac{-6}{(x+2y)^4} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x, y) = \frac{-96}{(x+2y)^4}$$

والقيم العظمى للقيم المطلقة لهذه المشتقات الجزئية تتحقق على R عندما $x = 1.4$ و $y = 1.0$ فإن الخطأ يكون محدوداً بـ

$$|E| \leq \frac{(0.5)(0.6)}{180} \left[(0.15)^4 \max_{(x,y) \in R} \frac{6}{(x+2y)^4} + (0.25)^4 \max_{(x,y) \in R} \frac{96}{(x+2y)^4} \right] \\ \leq 4.72 \times 10^{-6}$$

إن القيمة الفعلية للتكامل إلى أقرب عشر خانات عشرية هي

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x+2y) dy dx = 0.4295545265$$

ولذلك فإن التقريب دقيق ضمن 2.1×10^{-6} .

يمكن استخدام الطرائق نفسها لتقريب التكامل الثلاثي والتكاملات الأعلى للدول في أكثر من ثلاثة متغيرات. وإن العدد التام للتقييمات الدالية المطلوبة للتقريب هو حاصل ضرب أعداد التقييمات الدالية المطلوبة عندما تطبق الطريقة على كل متغير.

ولتخفيض عدد التقييمات الدالية، يمكن استخدام طرائق أكثر فاعلية من صيغ نيوتن-كوتس، ومن هذه الطرائق: صيغة جاوس للتكامل، تكامل رومبرج، أو صيغ الغكام التكييفية. يبين المثال الآتي استخدام طريقة جاوس للتكامل الذي عايناه في المثال (1).

لديك التكامل الثنائي الذي ذكر في المثال (1).

مثال 2

قبل استخدام طريقة جاوس للتكامل لإيجاد تقريب لهذا التكامل نجري تحويلًا لمنطقة التكامل

$$R = \{(x, y) \mid 1.4 \leq x \leq 2.0, 1.0 \leq y \leq 1.5\}$$

إلى

$$\hat{R} = \{(u, v) \mid -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$$

والتحويلات الخطية التي تنجز هذا التحويل هي

$$v = \frac{1}{1.5 - 1.0}(2y - 1.0 - 1.5), \text{ و } u = \frac{1}{2.0 - 1.4}(2x - 1.4 - 2.0)$$

$$\text{أو على نحو مكافئ } x = 0.3u + 1.7 \text{ و } y = 0.25v + 1.25$$

يمكن باستخدام هذا التحويل للمتغيرات الذي يعطي تكاملاً أن نطبق عليه قاعدة جاوس

$$\int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x + 2y) dy dx = 0.075 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln(0.3u + 0.5v + 4.2) dv du$$

إن صيغة جاوس للتكامل باستخدام $n = 3$ في كلٍّ من u و v تتطلب منا استخدام النقاط

$$u_2 = v_2 = r_{3,3} = 0.7745966692 \text{ و } u_1 = v_1 = r_{3,2} = 0 \text{ و } u_0 = v_0 = r_{3,1} = -0.7745966692$$

والأوزان المرتبطة بهذا هي $c_{3,2} = 0.8$ و $c_{3,1} = c_{3,3} = 0.5$ (هذه القيم موجودة في جدول 11.4)

وبذلك

$$\begin{aligned} \int_{1.4}^{2.0} \int_{1.0}^{1.5} \ln(x + 2y) dy dx &\approx 0.075 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{3,i} c_{3,j} \ln(0.3r_{3,i} + 0.5r_{3,j} + 4.2) \\ &= 0.4295545313 \end{aligned}$$

على الرغم من أن هذه النتيجة تتطلب (9) تقييمات دالية فقط مقارنة بـ 15 في قاعدة سمبسون المركبة المستخدمة في المثال (1)، إلا أن النتيجة دقيقة ضمن 4.8×10^{-9} مقارنة بالدقة 2.1×10^{-6} في المثال (1).

إن طرائق التقريبات للتكاملات الثنائية ليست مقصورة على التكاملات ذات مناطق التكامل المستطيلة. يمكن تطوير الطرائق التي شرحت سابقاً لتستخدم في تقريب التكاملات الثنائية على الصيغ

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx \quad (43.4)$$

أو

$$\int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy. \quad (44.4)$$

في الحقيقة، يمكننا أيضاً تقريب التكاملات على المناطق من غير هذا النوع عن طريق تجزئات مناسبة للمنطقة. (انظر تمرين 10)

لوصف الطريقة المستخدمة في تقريب التكامل من النوع

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$$

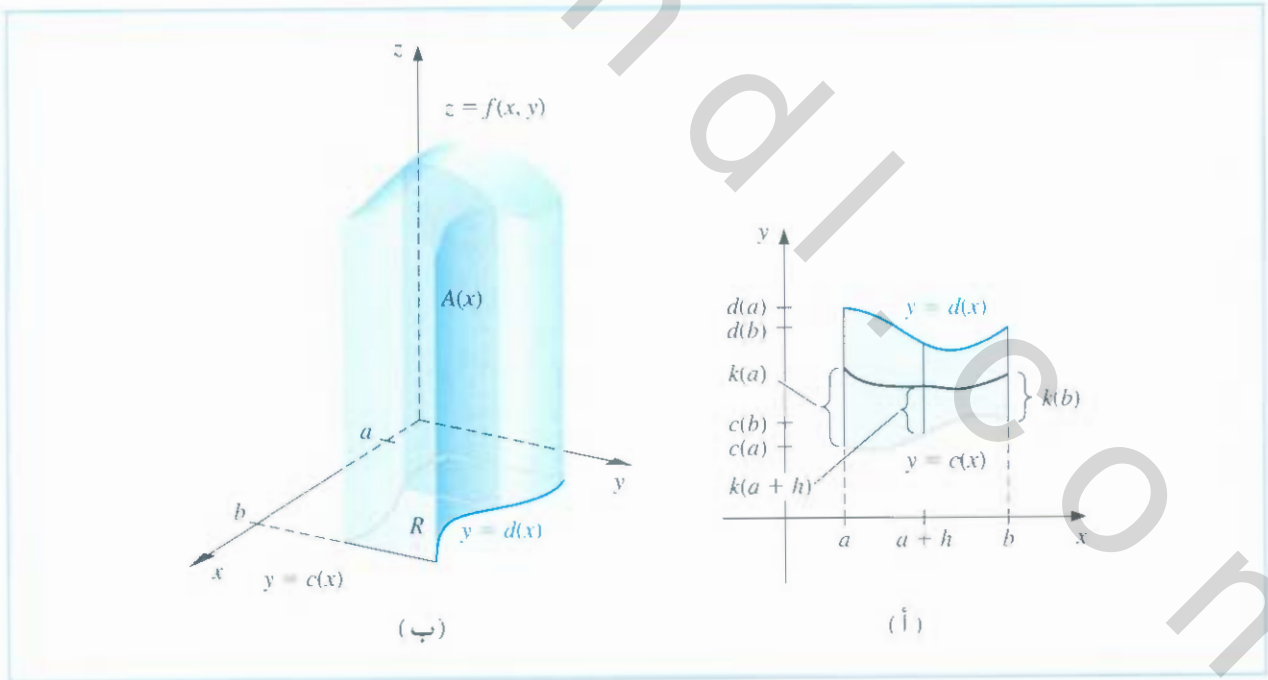
سنستخدم قاعدة سمبسون الرئيسية للتكامل بالنسبة إلى كلا المتغيرين. حجم الخطوة للمتغير x هو $h = (b - a)/2$ ، ولكن حجم الخطوة بالنسبة إلى المتغير y يتغير مع تغير x . (انظر شكل 19.4) ويكتب على الصيغة

$$k(x) = \frac{d(x) - c(x)}{2}$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx &\approx \int_a^b \frac{k(x)}{3} [f(x, c(x)) + 4f(x, c(x) + k(x)) + f(x, d(x))] dx \\ &\approx \frac{h}{3} \left\{ \frac{k(a)}{3} [f(a, c(a)) + 4f(a, c(a) + k(a)) + f(a, d(a))] \right. \\ &\quad + \frac{4k(a+h)}{3} [f(a+h, c(a+h)) + 4f(a+h, c(a+h) \\ &\quad + k(a+h)) + f(a+h, d(a+h))] \\ &\quad \left. + \frac{k(b)}{3} [f(b, c(b)) + 4f(b, c(b) + k(b)) + f(b, d(b))] \right\} \end{aligned}$$

شكل 19.4



تطبق الخوارزمية (4.4) قاعدة سمبسون المركبة على تكامل على صيغة الصيغة (43.4).
وبالتبع يمكن معالجة التكاملات على صيغة الصيغة (44.4) بطريقة مماثلة.

تكامل سمبسون الثنائي Simpson's Double Integral

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx \quad \text{لكي نَقْرِبَ التكامل}$$

المدخلات: نقطتا النهاية a و b : أعداد صحيحة موجبة زوجية m, n .
المخرجات: التقريب J للتكامل I .

الخطوة	المضمون
1	$h = (b - a) / n$ ضع $J_1 = 0$ (حدود النهاية) $J_2 = 0$ (الحدود الزوجية) $J_3 = 0$ (الحدود الفردية)
2	لكل $i = 0, 1, \dots, n$ ، طَبِّقِ الخطوات 3 - 8.
3	ضع $x = a + ih$ (بطريقة سمبسون المركبة للمتغير x) $HX = (d(x) - c(x)) / m$ $K_1 = f(x, c(x)) + f(x, d(x))$ (حدود النهاية). $K_2 = 0$ (الحدود الزوجية) $K_3 = 0$ (الحدود الفردية)
4	لكل $j = 1, 2, \dots, m - 1$ ، طَبِّقِ الخطوتين 5 و 6.
5	ضع $y = c(x) + jHX$ $Q = f(x, y)$
6	إذا كان j موجباً فضع $K_2 = K_2 + Q$ وإلا فضع $K_3 = K_3 + Q$
7	ضع $L = (K_1 + 2K_2 + 4K_3)HX / 3$ (بطريقة سمبسون المركبة $L \approx \int_{c(x_i)}^{d(x_i)} f(x_i, y) dy$)
8	إذا كان $i = 0$ أو $i = n$ فضع $J_1 = J_1 + L$ غير ذلك إذا كان i زوجياً فضع $J_2 = J_2 + L$ غير ذلك فضع $J_3 = J_3 + L$
9	ضع $J = h(J_1 + 2J_2 + 4J_3) / 3$
10	المخرجات (J) توقف.

إن تطبيق صيغة تكامل جاوس للتكامل الثنائي

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$$



يتطلب أولاً، لكل x في الفترة $[a, b]$. تحويل المتغير y في الفترة $[c(x), d(x)]$ لي المتغير t في الفترة $[-1, 1]$. إن هذا التحويل الخطي يعطي

$$dy = \frac{d(x) - c(x)}{2} dt \quad \text{و} \quad f(x, y) = f\left(x, \frac{(d(x) - c(x))t + d(x) + c(x)}{2}\right)$$

بعدئذ لكل x في الفترة $[a, b]$ ، نطبق طريقة جاوس للتكامل على التكامل الناتج

$$\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 f\left(x, \frac{(d(x) - c(x))t + d(x) + c(x)}{2}\right) dt$$

لينتج

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$$

$$\approx \int_a^b \frac{d(x) - c(x)}{2} \sum_{j=1}^n c_{n,j} f\left(x, \frac{(d(x) - c(x))r_{n,j} + d(x) + c(x)}{2}\right) dx$$

حيث كما في السابق، تأتي الجذور $r_{n,j}$ والمعاملات $c_{n,j}$ من جدول (11.4).
والآن تحوّلت $[a, b]$ إلى $[-1, 1]$ ، ويمكن تطبيق طريقة جاوس للتكامل لإيجاد تقريب للتكامل على الجانب الأيمن في الصيغة.
تعطى التفاصيل في الخوارزمية (4.5).

تكامل جاوس الثنائي Gaussian Double Integral

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx \quad \text{لتقريب التكامل}$$

المدخلات: نقطتا النهاية a, b ؛ أعداد صحيحة موجبة m, n ؛
(الجذور $r_{i,j}$ والمعاملات $c_{i,j}$ بحاجة إلى تعيين للعدد $i = \max\{m, n\}$ ولـ $1 \leq j \leq i$ جميعاً)
المخرجات: التقريب J للتكامل I .

الخطوة	المضمون
1	ضع $h_1 = (b - a)/2$ $h_2 = (b + a)/2$ $J = 0$
2	لكل $i = 1, 2, \dots, m$ ، طبق الخطوات 3 - 5.
3	ضع $JX = 0$ $x = h_1 r_{m,i} + h_2$ $d_1 = d(x)$ $c_1 = c(x)$ $k_1 = (d_1 - c_1)/2$ $k_2 = (d_1 + c_1)/2$

ملحوظة: إن تخفيض عدد عمليات الحساب يجعل تطبيق عملية تكامل جاوس ذا جدوى على نحو عام بدلا من تطبيق إحدى طرائق سمبسون عند تقريب التكاملات الثنائية.



$j = 1, 2, \dots, n$ $y = k_1 r_{n,j} + k_2$ $Q = f(x, y)$ $JX = JX + c_{n,j} Q$	ضع	4
$.J = J + c_{m,i} k_1 JX$	ضع	5
$.J = h_1 J$	ضع	6
المخرجات (J). توقف.		7



مثال 3

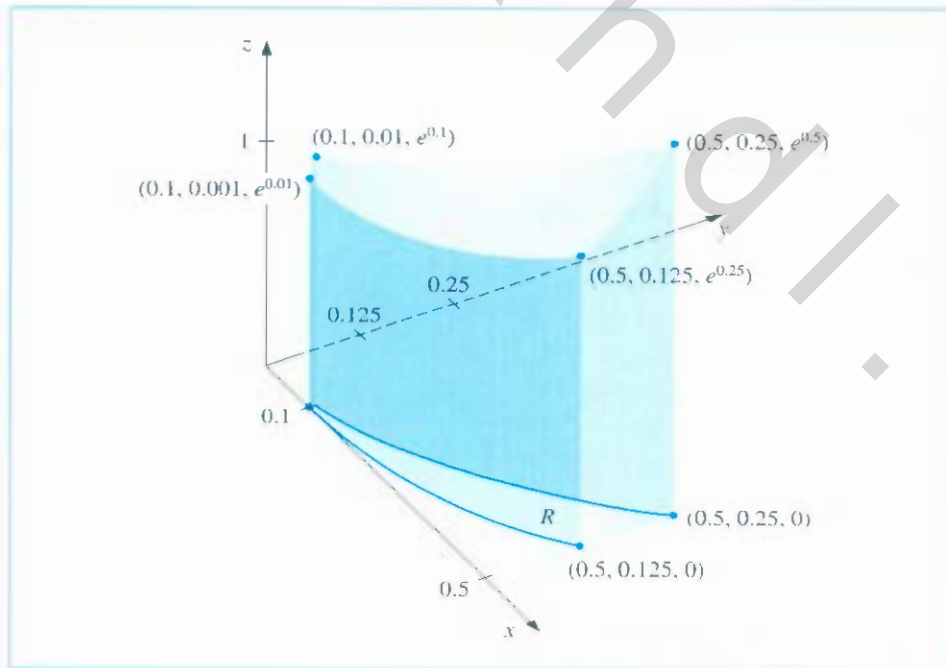
يقرب حجم الجسم في شكل (20.4) باستخدام خوارزمية تكامل سمبسون الثنائي بأخذ

$$\int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} e^{y/x} dy dx$$

على التكامل $n = m = 10$

إن هذا يتطلب 121 تقييماً للدالة $f(x, y) = e^{y/x}$ وينتج 0.0333054 وهو ما يقرب حجم الجسم في شكل (20.4) إلى 7 خانات عشرية تقريباً. إن تطبيق خوارزمية جاوس للتكامل باستخدام $n = m = 5$ يتطلب 25 تقييماً دالياً فقط ويعطي التقريب 0.03330556611، وهو دقيق لإحدى عشرة منزلة عشرية.

شكل 20.4



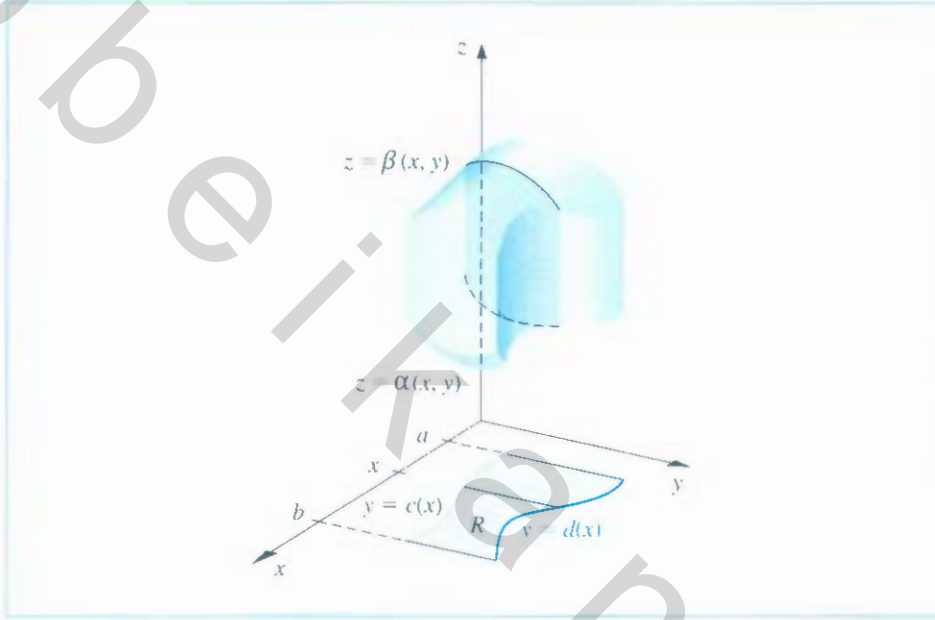
يمكن تقريب التكاملات الثلاثية على الصيغة

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

بطريقة معادلة. (انظر شكل 21.4).

إن تخفيض الحسابات يجعل تطبيق طريقة جاوس للتكامل عموماً أفضل من استخدام طريقة سمبسون للتكامل عندما نود تقريب التكامل الثنائي.

شكل 21.4



وبسبب عدد الحسابات المطلوبة فإن الاختيار يقع على طريقة جاوس للتكامل. تنفذ الخوارزمية (6.4) هذه العملية.

تكامل جاوس الثلاثي Gaussian Triple Integral لإيجاد تقريب للتكامل

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

المدخلات: نقطتا النهاية a و b أعداد صحيحة موجبة m ، n ، و p .

(الجزور $r_{i,j}$ والمعاملات $c_{i,j}$ يجب أن تكون متاحة للعدد $i = \max\{n, m, p\}$ ولك $1 \leq j \leq i$.)

المخرجات: التقريب J للتكامل I .

الخطوة	المضمون
1	$h_1 = (b - a) / 2$ $h_2 = (b + a) / 2$ $J = 0$



لكل $i = 1, 2, \dots, m$ ، طبق الخطوات 3 - 8.	2
$JX = 0$ $x = h_1 r_{m,i} + h_2$ $d_1 = d(x)$ $c_1 = c(x)$ $k_1 = (d_1 - c_1)/2$ $k_2 = (d_1 + c_1)/2$	3
لكل $j = 1, 2, \dots, n$ ، طبق الخطوات 5 - 7.	4
$JY = 0$ $y = k_1 r_{n,j} + k_2$ $\beta_1 = \beta(x, y)$ $\alpha_1 = \alpha(x, y)$ $l_1 = (\beta_1 - \alpha_1)/2$ $l_2 = (\beta_1 + \alpha_1)/2$	5
$z = l_1 r_{p,k} + l_2$ $Q = f(x, y, z)$ $JY = JY + c_{p,k} Q$	6
$JX = JX + c_{n,j} l_1 JY$	7
$J = J + c_{m,i} k_1 JX$	8
$J = h_1 J$	9
المخرجات (J) توقف.	10



يتطلب المثال الآتي تقييم أربعة تكاملات ثلاثية.

يقع مركز كتلة الجسم D ذي دالة كثافة σ على النقطة

مثال 4

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M} \right)$$

$$M_{yz} = \iiint_D x \sigma(x, y, z) dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y \sigma(x, y, z) dV$$

$$M_{xy} = \iiint_D z \sigma(x, y, z) dV$$

هي العزوم حول المستويات الإحداثية، والكتلة هي

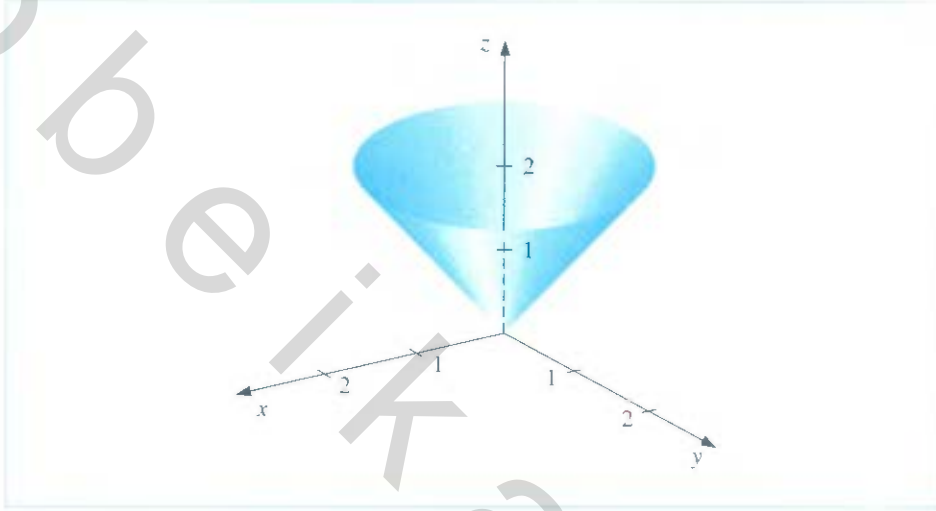
$$M = \iiint_D \sigma(x, y, z) dV$$

حيث

في شكل (22.4) يظهر مجسم محدود بالسطح العلوي للمخروط $z^2 = x^2 + y^2$ المستوى $z = 2$

افتراض أن كثافة الجسم ممثلة بالدالة $\sigma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

شكل 22.4



إن تطبيق خوارزمية تكامل جاوس الثلاثي (6.4) باستخدام $n = m = p = 5$ يتطلب 125 تقيماً دالياً لكل تكامل ويعطي التقريبات الآتية

$$M = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$$

$$= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx \approx 8.37504476$$

$$M_{yz} = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 x \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx \approx -5.55111512 \times 10^{-17}$$

$$M_{xz} = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 y \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx \approx -8.01513675 \times 10^{-17}$$

$$M_{xy} = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 z \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx \approx 13.40038156$$

إن هذا يعني أن الموقع التقريبي لموقع الكتلة هو

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1.60003701)$$

يمكن إيجاد قيم هذه التكاملات مباشرة وبسهولة. وإذا ما أجريت ذلك تجد أن مركز الكتلة يقع بالضبط على $(0, 0, 1.6)$.

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 8.4

1. استخدم الخوارزمية (4.4) بأخذ $n = m = 4$ لتقريب التكاملات الثنائية الآتية، وقارن النتائج بالإجابات الصحيحة:

$$\begin{array}{ll} \text{أ.} & \int_{2.1}^{2.5} \int_{1.2}^{1.4} xy^2 dy dx \\ \text{ب.} & \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} e^{y-x} dy dx \\ \text{ج.} & \int_2^{2.2} \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy dx \\ \text{د.} & \int_1^{1.5} \int_0^x (x^2 + \sqrt{y}) dy dx \end{array}$$

2. أوجد أصغر قيمة للأعداد $n = m$ بحيث يمكن استخدام الخوارزمية (4.4) لإيجاد تقريب للتكاملات في تمرين (1) ضمن 10^{-6} من القيمة الفعلية.

3. استخدم الخوارزمية (4.4) مستخدمًا $n = m = 6$ (iii)، $n = m = 4$ (ii)، $n = m = 8$ (i) لإيجاد تقريب للتكاملات الثنائية الآتية، وقارن الإجابات بالإجابات الصحيحة:

$$\begin{array}{ll} \text{أ.} & \int_0^{n/4} \int_{\sin x}^{\cos x} (2y \sin x + \cos^2 x) dy dx \\ \text{ب.} & \int_1^e \int_1^x \ln xy dy dx \\ \text{ج.} & \int_0^1 \int_x^{2x} (x^2 + y^3) dy dx \\ \text{د.} & \int_0^1 \int_x^{2x} (y^2 + x^3) dy dx \\ \text{هـ.} & \int_0^n \int_0^x \cos y dy dx \\ \text{و.} & \int_0^n \int_0^x \cos x dy dx \\ \text{ز.} & \int_0^{n/4} \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy dx \\ \text{ح.} & \int_{-n}^{-3n/2} \int_0^{2n} (y \sin x + x \cos y) dy dx \end{array}$$

4. أوجد أصغر قيمة للأعداد $n = m$ بحيث يمكن استخدام الخوارزمية (4.4) لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (3) ضمن 10^{-6} من القيمة الفعلية.

5. استخدم الخوارزمية (5.4) بأخذ $n = m = 2$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (1)، وقارن نتائجك بتلك التي حصلت عليها في التمرين (1).

6. أوجد أصغر قيمة للأعداد $n = m$ بحيث يمكن استخدام الخوارزمية (5.4) لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (1) ضمن 10^{-6} . لا تستمر في أكثر من $n = m = 5$. قارن عدد التقييمات الدالية اللازمة بالعدد في التمرين (2).

7. استخدم الخوارزمية (5.4) مستخدمًا

$$(i) n = m = 3, (ii) n = 3, m = 4, (iii) n = 4, m = 3, (iv) n = m = 4$$

لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين 3.

8. استخدم الخوارزمية (5.4) بأخذ $n = m = 5$ لإيجاد تقريب للتكاملات في التمرين (3). قارن عدد التقييمات الافتراضية اللازمة بالعدد اللازم في التمرين (4).

9. استخدم الخوارزمية (4.4) بأخذ $n = m = 14$ والخوارزمية (5.4) بأخذ $n = m = 4$ لتقريب

$$\iint_R e^{-(x+y)} dA$$

للمنطقة R في المستوى والمحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$.

10. استخدم الخوارزمية (4.4) لإيجاد تقريب للتكامل

$$\iint_R \sqrt{xy + y^2} dA$$

حيث R هي المنطقة في المستوى المحدد بالخطوط $x + y = 6, 3y - x = 2$ و $\bar{x} - y = 2$.
 أولاً، أقسم R إلى منطقتين R_1 و R_2 بحيث يمكن تطبيق الخوارزمية (4.4) على كل منهما.
 استخدم $n = m = 6$ على كلتا المنطقتين R_1 و R_2 .
11. lamina اللامنة المستوية هي صفيحة رقيقة كتلتها موزعة على نحو متصل. إذا كان σ الدالة التي تصف كثافة لامنة مع شكل منطقة R من المستوى xy ، فإن مركز الكتلة تلك اللامنة هو حيث (\bar{x}, \bar{y})

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\sigma(x, y) dA}{\iint_R \sigma(x, y) dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y\sigma(x, y) dA}{\iint_R \sigma(x, y) dA}$$

استخدم الخوارزمية (4.4) بأخذ $n = m = 14$ لإيجاد مركز الكتلة للامنة لمصرفة بالمنطقة $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ ذات دالة كثافة $c(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ قارن التقريب بالنتيجة الصحيحة.

12. كرر التمرين (11) باستخدام الخوارزمية (5.4) و $n = m = 5$.

13. مساحة السطح المعرف بالدالة $z = f(x, y)$ لكل (x, y) في R هي

$$\iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dA$$

استخدم الخوارزمية (4.4) و $n = m = 8$ لإيجاد تقريب لمساحة السطح لنصف الكرة $z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 9$ التي تقع فوق المنطقة في المستوى المعرف من خلال

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

14. كرر تمرين (13) باستخدام الخوارزمية (5.4) و $n = m = 4$.

15. استخدم الخوارزمية (6.4) بأخذ $n = m = p = 2$ لتقريب كل من التكاملات الثلاثية الآتية وقارن إجابتك بالإجابات الصحيحة:

$$\begin{aligned} \text{أ.} & \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{0.5} e^{x+y+z} dz dy dx & \text{ب.} & \int_0^1 \int_x^1 \int_0^y y^2 z dz dy dx \\ \text{ج.} & \int_0^1 \int_x^x \int_{-y}^{x+y} y dz dy dx & \text{د.} & \int_0^1 \int_x^x \int_{x-y}^{x+y} z dz dy dx \\ \text{هـ.} & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{xy} \frac{1}{y} \sin \frac{z}{y} dz dy dx & \text{و.} & \int_0^1 \int_0^1 \int_{-xy}^{xy} e^{x^2+y^2} dz dy dx \end{aligned}$$

16. كرر تمرين (15) باستخدام $n = m = p = 3$.

17. كرر تمرين (15) باستخدام $n = m = p = 4$ و $n = m = p = 5$.

18. استخدم الخوارزمية (6.4) بأخذ $n = m = p = 4$ لتقريب

$$\iiint_S xy \sin(yz) dV$$

حيث تمثل S مجسماً محدوداً بالمستويات الإحداثية والمستويات $z = \pi/3, z = \pi, y = \pi, x = \pi$. قارن هذا التقريب بالإجابة الصحيحة.

19. استخدم الخوارزمية (6.4) بأخذ $n = m = p = 5$ لتقريب

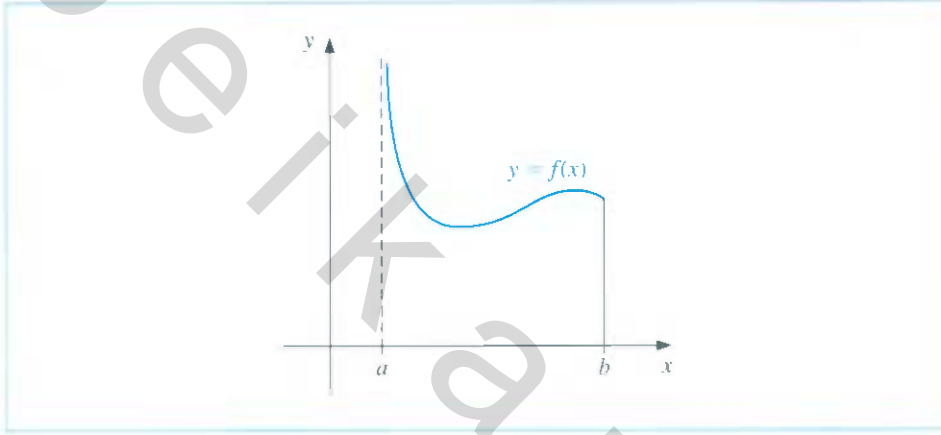
$$\iiint_S \sqrt{xyz} dV$$

حيث S هي المنطقة في الثمن الأول المحدود بالأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ ، والكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ والمستوى $x + y + z = 8$. كم تقنية دالية لازمة لهذا التقريب؟

Improper Integrals

التكاملات المعتلة 9.4

تظهر التكاملات المعتلة عندما نعلم مفهوم التكامل، إما إلى فترة تكامل تكون عليها الدالة غير محدودة، وإما إلى فترة يكون أحد طرفيها أو كلاهما لانهائياً. وفي أي من هاتين الحالتين فإنه يجب تعديل طرائق تقريب التكامل العادية. سنقوم أولاً بمعاينة الحالة التي تكون فيها الدالة المتكاملة غير محدودة على نقطة النهاية الصغرى لفترة التكامل، (كما يظهر في شكل 23.4).



شكل 23.4

في هذه الحالة نقول: إن f له نقطة شذوذ Singularity point على نقطة النهاية a . سنبرهن أن التكاملات المعتلة الأخرى يمكن تحويلها إلى مسائل من هذا النوع. يبين حساب التفاضل والتكامل أن التكامل المعتل بنقطة شاذة على نقطة النهاية اليسرى

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$$

يتقارب إذا وفقط إذا كان $0 < p < 1$. وفي هذه الحالة نعرف

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx = \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p} \Big|_a^b = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$$

إذا كانت f دالة يمكن كتابتها على الصيغة

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^p}$$

حيث $0 < p < 1$ و g متصل على $[a, b]$ ، فإن التكامل المعتل $\int_a^b f(x) dx$ موجود.

سنقرب هذا التكامل باستخدام قاعدة سبسون المركبة. شريطة أن $g \in C^5[a, b]$. نستطيع في تلك الحالة إنشاء كثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة $P_4(x)$ إلى g حول a

$$P_4(x) = g(c) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{g^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4$$

ونكتب

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{g(x) - P_4(x)}{(x-a)^p} dx + \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p} dx \quad (45.4)$$

وبما أن $P(x)$ كثيرة حدود، فإنه يمكننا أن نحدد بالضبط قيمة

$$\int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p} dx = \sum_{k=0}^4 \int_a^b \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^{k-p} dx = \sum_{k=0}^4 \frac{g^{(k)}(a)}{k!(k+1-p)} (b-a)^{k+1-p} \quad (46.4)$$

إن هذا هو الجزء المسيطر في التقريب، وخصوصاً عندما تتفق كثيرة حدود تايلور $P_4(x)$ مع $g(x)$ على نحو كبير على كل الفترة $[a, b]$.

ولتقريب تكامل f ، يجب أن نضيف هذه القيمة لتقريب التكامل

$$\int_a^b \frac{g(x) - P_4(x)}{(x-a)^p} dx$$

ولتحديد هذا، نعرف أولاً

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } a < x \leq b \\ \text{إذا كان } x = a \end{array} \right\} \frac{g(x) - P_4(x)}{(x-a)^p} = G(x)$$

بما أن $0 < p < 1$ و $P_4^{(k)}(a)$ يتفق مع $g^{(k)}(a)$ لكل $k = 0, 1, 2, 3, 4$. نحصل على $G \in C^1[a, b]$. جمع هذا التقريب إلى القيمة في الصيغة (46.4) يعطي التقريب للتكامل المعتل للدالة f على $[a, b]$ ، ضمن دقة التقريب بقاعدة سمبسون المركبة.

سنستخدم قاعدة سمبسون المركبة بأخذ $h = 0.25$ لتقريب قيمة التكامل المعتل

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$$

بما أن كثيرة حدود تايلور الرابعة للدالة e^x حول $x = 0$ هو

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

فإن جزءاً من التقريب للتكامل $\int_0^1 (e^x/\sqrt{x}) dx$ يكون

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 \left(x^{-1/2} + x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{6}x^{5/2} + \frac{1}{24}x^{7/2} \right) dx \\ &= \lim_{M \rightarrow 0^+} \left[2x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{5}x^{5/2} + \frac{1}{21}x^{7/2} + \frac{1}{108}x^{9/2} \right]_M^1 \\ &= 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \frac{1}{108} \approx 2.9235450 \end{aligned}$$

ولإيجاد الجزء الآخر لتقريب التكامل $\int_0^1 (e^x / \sqrt{x}) dx$ نحتاج إلى تقريب $\int_0^1 G(x) dx$ ، حيث

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \text{ إذا كان } \frac{1}{\sqrt{x}} (e^x - P_4(x)) \\ x = 0 \text{ إذا كان } 0 \end{array} \right\} = G(x)$$

ويعرض جدول (14.4) القيم اللازمة لتطبيق قاعدة سمبسون المركبة لهذا التقريب. إن استخدام هذه البيانات وقاعدة سمبسون المركبة يعطي

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(x) dx &\approx \frac{0.25}{3} [0 + 4(0.0000170) + 2(0.0004013) + 4(0.0026026) + 0.0099485] \\ &= 0.0017691 \end{aligned}$$

ولذلك ينتج

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx \approx 2.9235450 + 0.0017691 = 2.9253141$$

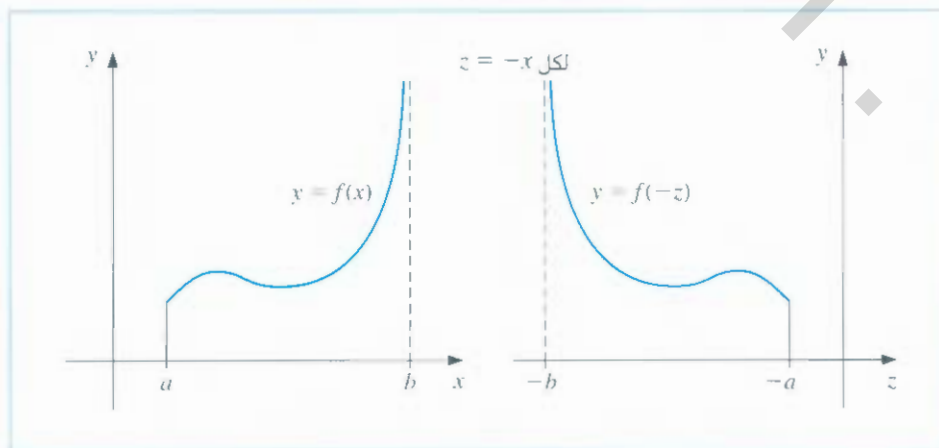
إن هذه النتيجة دقيقة ضمن دقة قاعدة سمبسون المركبة في التقريب للدالة G . بما أن $1 > |G^{(4)}(x)|$ على $[0, 1]$. فإن الخطأ يكون محدوداً بالعدد

$$\frac{1-0}{180} (0.25)^4 = 0.0000217$$

لتقريب التكامل المعتل بنقطة شاذة على نقطة النهاية اليمنى، نطبق الطريقة التي استخدمناها سابقاً، ولكن نتوسع بدلالة نقطة النهاية اليمنى b بدلاً من نقطة النهاية اليسرى a . وبدلاً من ذلك نستخدم التعويض $z = -x$. $dz = -dx$ لتغيير التكامل المعتل على الصيغة

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-b}^{-a} f(-z) dz \quad (47.4)$$

الذي له نقطة شاذة على نقطة النهاية اليسرى. (انظر شكل 24.4)



شكل 24.4

جدول 14.4

$G(x)$	x
0	0.00
0.0000170	0.25
0.0004013	0.50
0.0026026	0.75
0.0099485	1.00

يعامل شكل المعتل الذي له نقطة شاذة على C بحيث تُعدّ $a < c < b$ مجموعة تكاملين معتمين ذات نقاط شاذة على نقاط النهاية؛ لأن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ويحتوي النوع الآخر من التكاملات المعتلة على نهايات تكامل لانهائية. يكون لتكامل الأسس من هذا النوع على الصيغة

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

لعدد $p > 1$. ويمكن تحويل هذا إلى تكامل بنقطة شاذة يسرى على (0) باستخدام التعويض التكاملي

$$t = x^{-1}, \quad dt = -x^{-2} dx$$

لذلك

$$dx = -x^2 dt = -t^{-2} dt$$

ومن ثم

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx = \int_{1/a}^0 -\frac{t^p}{t^2} dt = \int_0^{1/a} \frac{1}{t^{2-p}} dt$$

وبطريقة مماثلة، فإن تحويل المتغير $t = x^{-1}$ يغير التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x) dx$ إلى تكامل ذي نقطة شاذة على النهاية اليسرى هي الصفر

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_0^{1/a} t^{-2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt \quad (48.4)$$

والآن يمكن تقريب هذا التكامل باستخدام صيغة تكامل من النوع الذي نوقش سابقاً.

مثال 2

لتقريب قيمة التكامل المعتل

$$I = \int_1^\infty x^{-3/2} \sin \frac{1}{x} dx$$

نستخدم تحويل المتغير $t = x^{-1}$

$$\text{بما أن } dt = -x^{-2} dx \text{ فسنحصل على } dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

و

$$I = \int_{x=1}^{x=\infty} x^{-3/2} \sin \frac{1}{x} dx = \int_{t=1}^{t=0} \left(\frac{1}{t}\right)^{-3/2} \sin t \left(-\frac{1}{t^2} dt\right) = \int_0^1 t^{-1/2} \sin t dt$$

إن كثيرة حدود تايلور الرابعة $P_4(t)$ للدالة $\sin t$ حول 0 هو $P_4(t) = t - \frac{1}{6}t^3$ وذلك

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } 0 < t \leq 1 \\ \text{إذا كان } t = 0 \end{array} \right\} = G(t)$$

يكون في $C^4[0, 1]$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 t^{1/2} - \frac{1}{6}t^{5/2} dt + \int_0^1 \frac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}} dt \\
 &= \left[\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{1}{21}t^{7/2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}} dt \\
 &= 0.61904761 + \int_0^1 \frac{\sin t - t + \frac{1}{6}t^3}{t^{1/2}} dt
 \end{aligned}$$

باستخدام قاعدة سمبسون المركبة و $n = 16$ للتكامل الباقي تكون النتيجة 0.0014890097. إن هذا يعطي التقريب النهائي للتكامل وهو

$$I = 0.0014890097 + 0.61904761 = 0.62053661$$

وهو دقيق ضمن 4.0×10^{-8} .

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 9.4

1. استخدم قاعدة سمبسون المركبة وقيم n المعطاة لتجد تقريب التكاملات المعتلة الآتية:

أ. $\int_0^1 x^{-1/4} \sin x dx, n = 4$ ب. $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{x^2}} dx, n = 6$

ج. $\int_1^2 \frac{\ln x}{(x-1)^{1/5}} dx, n = 8$ د. $\int_0^1 \frac{\cos 2x}{x^{1/3}} dx, n = 6$

2. استخدم قاعدة سمبسون المركبة وقيم n المعطاة لتجد تقريب التكاملات المعتلة الآتية:

أ. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} dx, n = 6$ ب. $\int_0^2 \frac{xe^x}{\sqrt{(x-1)^2}} dx, n = 8$

3. استخدم التحويل $t = x^{-1}$. ثم قاعدة سمبسون المركبة وقيم n المعطاة. لتقرب التكاملات المعتلة

الآتية: أ. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+9} dx, n = 4$ ب. $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4} dx, n = 4$

ج. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^3} dx, n = 6$ د. $\int_1^\infty x^{-4} \sin x dx, n = 6$

4. التكامل المعتل $\int_0^\infty f(x) dx$ لا يمكن تحويله إلى تكامل بنهايات محدودة عن طريق

التعويض $t = 1/x$: لأن النهاية «صفر» تصبح لانهاية. يمكن حل الإشكال بأن نكتب أولاً $\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^\infty f(x) dx$

أ. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx$ ب. $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$

5. افترض أن جسمًا كتلته m يتحرك إلى أعلى عموديًا ومبتدئًا من على سطح الأرض. فإذا ما أهملت

أي مقاومة عدا الجاذبية فإن سرعة الهروب v تعطى بالصيغة

$$v^2 = 2gR \int_1^\infty z^{-2} dz \quad \text{حيث} \quad z = \frac{x}{R}$$

R نصف قطر الأرض ويساوي 3960 ميلًا. و $g = 0.00609 \text{ mi/s}^2$ هي قوة الجاذبية على سطح الأرض. قرب سرعة الهروب v .

6. كثيرات حدود لاغور Laguerre Polynomials $\{L_0(x), L_1(x), \dots\}$ تكون مجموعة متعامدة على $[0, \infty)$ وتحقق

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_i(x) L_j(x) dx = 0$$

لكل $i \neq j$ (انظر فصل 2.8). كثيرة الحدود $L_n(x)$ لها n صفر x_1, x_2, \dots, x_n في $[0, \infty)$. ليكن

$$c_{n,i} = \int_0^{\infty} e^{-x} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

برهن أن صيغة التكامل

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-x} dx = \sum_{i=1}^n c_{n,i} f(x_i)$$

ذات رتبة دقة $2n - 1$. (إضافةً اتبع الخطوات في برهان المبرهنة 7.4).

7. كثيرات حدود لاغور $L_0(x) = 1, L_1(x) = 1 - x, L_2(x) = x^2 - 4x + 2$ و

$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$$

اشتقت في تمرين (11) من الفصل (2.8).

وكما برهن في التمرين (6). فإن كثيرات الحدود هذه مفيدة في تقريب تكاملات على الصيغة

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = 0$$

أ. اشتق صيغة التكامل باستخدام $n = 2$ وأصفار $L_2(x)$.

ب. اشتق صيغة التكامل باستخدام $n = 3$ وأصفار $L_3(x)$.

8. استخدم صيغ التكامل التي اشتقت في التمرين (7) لإيجاد تقريب للتكامل

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$$

9. استخدم صيغ التكامل التي اشتقت في تمرين (7) لإيجاد تقريب للتكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

مسح الطرائق والبرامج Survey of Methods and Software

10.4

لقد بحثنا في هذا الباب تقريب تكاملات الدوال في متغير واحد أو متغيرين و ثلاثة وتقريب مشتقات دالة في متغير واحد حقيقي. ولقد درست قاعدة النقطة الوسيطة، قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون لتقديم الطرائق وتحليل الخطأ في طرائق التكامل. قاعدة سمبسون المركبة سهلة الاستخدام وتعطي تقريباً دقيقاً. إلا إذا كانت الدالة تتردد في فترة جزئية لفترة التكامل. إن طريقة التكامل التكيفية ممكنة الاستخدام إذا كان هناك شك في السلوك الترددي للدالة. ولجعل عدد الرؤوس أصغر ما يمكن مع المحافظة على الدقة، جريد صيغة جاوس للتكامل. وقد قدم كامل رومبرج للاستفادة من ميزة سهولة تطبيق قاعدة شبه المنحرف والاستكمال الخارجي.

علينا أن نجتهد لاستنتاج طريقة حل نوع واحد من التكاملات المعقدة. ولكن بمجرد توصلنا إلى حل فإن الطرائق الأخرى ستنتج بكل يسر

معظم البرامج (Software) لتكامل دالة في متغير حقيقي واحد مبنية على الطريقة التكييفية أو على صيغ جاوس عالية الدقة. إن تكامل رومبرج الحذر يعد طريقة تكييفية تحتوي على فحص؛ للتأكد من أن الدالة المتكاملة ذات سلوك ناعم على الفترات الجزئية لفترة التكامل. فقد استخدمت هذه الطريقة بنجاح في مكتبات البرامج. وعموماً تقرب التكاملات المتعددة بتعميم طرائق تكييفية جيدة إلى أبعاد أعلى. ويوصى باستخدام صيغ تكامل جاوسية لتخفيض عدد التقييمات الدالية. إن أهم الروتين (البرامج النمطية) في مكتبات IMSL و NAG مبني على QUADPACK وهو R Piessens Integration A Subroutine Package for Automatic التكامل التلقائي كتبه Springer-Verlag ونشرته E. de Doncker-Kapenga, C.W. Uberhuber و D.K.Kahaner ونشرته عام 1983 |PDUK| والبرامج متاحة للعامة على الموقع <http://www.netlib.org> إن مكتبة IMSL تحتوي الدالة QDAG وهي عملية تكامل تكييفية مبنية على قاعدة (21-Point Gauss-Kronrod) باستخدام قاعدة (10-Point Gaussian rule) لتقدير الخطأ. إن قاعدة جاوس تستخدم العشر نقاط x_1, \dots, x_{10} والأوزان w_1, \dots, w_{10} لتعطي الصيغة تكامل $\sum_{i=1}^{10} w_i f(x_i)$ لتقريب التكامل $\int_a^b f(x) dx$. ثم تستخدم النقاط الإضافية x_{11}, \dots, x_{21} والأوزان الجديدة v_1, \dots, v_{21} في صيغة كرونرد (Kronrod) $\sum_{i=1}^{21} v_i f(x_i)$ تقارن نتائج المعادلتين لإزالة الخطأ. إن ميزة استخدام x_1, \dots, x_{10} في كل صيغة هي الحاجة إلى تقييم f على 21 نقطة فقط. لو تستخدم قواعد جاوس ذات العشر نقاط و 21 نقطة مستقلة لظهرت الحاجة إلى استخدام 31 تقييماً دالياً. تسمح هذه العملية بوجود نقاط شاذة على نقاط النهاية للدالة الكاملة. أما برامج IMSL الأخرى فهي QDAGS التي تسمح بوجود نقاط شاذة على نقاط النهاية. QDAGPC التي تسمح بوجود نقاط شاذة محددة من المستخدم. QDAGI التي تسمح بدورها بوجود فترات تكامل لانهاية و QDNG وهي عملية غير تكييفية للدوال الممهدة. البرنامج TWODQ يستخدم قواعد جاوس-كرونرد لتكامل دالة في متغيرين. ويوجد أيضاً برنامج QAND لاستخدام صيغة جاوس للتكامل في تكامل الدوال ذات n من المتغيرات على n من الفترات على الصيغة $[a_i, b_i]$. إن NAG Library تحوي البرنامج D01AJF لحساب تكامل f على الفترة $[a, b]$ باستخدام طريقة تكييفية مبنية على طريقة جاوس للتكامل باستخدام قواعد Gauss 10-Point و Kronrod 21-Points. أما البرنامج D01AHF فيستخدم لتقريب $\int_a^b f(x) dx$ باستخدام عائلة من نوع صيغ جاوس مبنية على رؤوس عددها 1, 3, 5, 7, 15, 31, 63, 127, 255. إن هذه القواعد المتداخلة وذات الدقة العالية من إنشاء بترسون [Pill] تستخدم بطريقة تكييفية. إن البرنامج D01DGF خاص للتكاملات المتعددة، ويقرب التكامل إذا أعطيت بيانات نقطية (قيماً) بدلاً من صيغة الدالة. إن NAG يحتوي على كثير من البرامج الأخرى لتقريب التكاملات.

إن الأمر الدالي في مابل Maple

>int(f,x=a..b);

يحسب التكامل المحدود $\int_a^b f(x) dx$

إن الطريقة العددية تستخدم برامج لمعاملة النقاط الشاذة، ثم تستخدم صيغة كيشو-كيرتر للتكامل Clenshaw-Curtis والموصوفة في [CC]. وإذا فشل هذا بسبب وجود نقاط شاذة في الفترة أو بالقرب منها، تطبق صيغة تكيفية أسيّة مضاعفة Double exponential quadrature. يمكن استخدام صيغة نيوتن-كوتس التكيفية عن طريق تحديد الخيار NCrule في الأمر التالي في Maple.

```
>int(f,x=a..b,digits=NCrule);
```

تحاول الطريقة التوصل إلى خط نسبي مسموح مقداره $0.5 \times 10^{(1-Digits)}$ ، حيث Digits هو متغير في Maple في الحساب العددي. إن قيمة Digits المخزونة في البرنامج هي 10. ولكن يمكن تغييرها إلى أي عدد صحيح موجب n عن طريق الأمر Digits:=n. إن الأمر QUAD في MATLAB يقرب التكامل المحدود $\int_a^b f(x) dx$ باستخدام قاعدة سمبسون التكيفية.

والأمر QUAD8 يقرب التكامل المحدود باستخدام قاعدة نيوتن-كوتس التكيفية ذات الثماني واجهات (eight-panel Newton-Cotes rule).

وعلى الرغم من أن الاشتقاق العددي غير مستقر، إلا أن هناك حاجة إلى تقريب المشتقة لتستخدم في الصيغ التفاضلية.

إن مكتبة NAG تحتوي على برامج فرعية D04AAF للاشتقاق العددي لدالة بمغير واحد، مع إمكانية الاشتقاق للمشتقة 14.

إن الدالة DERIN في IMSL تستخدم تغييراً تكيفياً في حجم الخطوة في الفروق المحدودة لتقريب المشتقة الأولى والثانية والثالثة للدالة f عند النقطة x ضمن حد خطأ مسموح به.

تحتوي IMSL أيضاً برمجية فرعية QDDER لحساب المشتقات لدالة معرفة على مجموعة من النقاط باستخدام الاستيفاء الداخلي التربيعي.

كلتا البرمجتين تسمحان باشتقاق الشريحة Spline الاستكمالي التكعيبية المبنية بالبرامج الفرعية المذكورة في (4.3)، كما تسمح بتكامله.

للمزيد عن التكامل العددي، ننصح بالكتب للمؤلفين Engles [E] و Davis and Rajinowitz [DR].

ولعلومات إضافية عن طريقة جاوس، انظر Stroud and Secrest [StS].

يوجد كتب عن التكامل المتعدد، منها كتاب Stroud [Stro].

والكتاب الحديث لمؤلفيه Sloan and Joe [SJ].

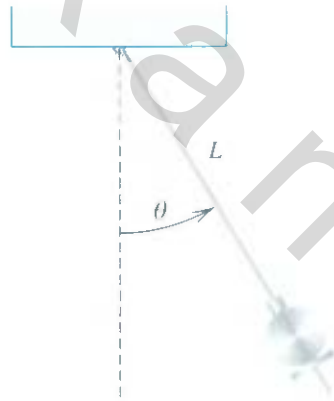
مسائل القيمة الابتدائية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية

Initial-Value Problems For Ordinary Differential Equations

مقدمة

يمكن توضيح فكرة الرقاص المتأرجح وفق شروط تبسيط معينة من خلال المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$



حيث L طول الرقاص، $g \approx 32.17 \text{ ft/s}^2$ ثابت الجاذبية الأرضية، θ هي الزاوية التي يصنعها الرقاص مع الخط العمودي. أيضا إذا حددنا موقع الرقاص حين بدء الحركة $\theta(t_0) = \theta_0$ وسرعته عند تلك النقطة $\theta'(t_0) = \theta'_0$ يكون لدينا ما نسميه "مسألة القيمة الابتدائية" *initial-value problem*. وعند القيم الصغيرة لـ θ يمكن استخدام التقريب $\theta \approx \sin \theta$ لتبسيط هذه المسألة وتحويلها إلى مسألة القيمة الابتدائية الخطية

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta'_0$$

هذه المسألة يمكن حلها باستخدام أسلوب المعادلة التفاضلية الاعتيادي. ومع قيم أكبر لـ θ ، يجب استخدام طرائق التقريب. قد تناولنا مسألة من هذا النوع في التمرين (8) من الفصل (9.5). إن أي كتاب في المعادلات التفاضلية يعطي تفصيلاً لطرائق خاصة بإيجاد حلول لمسائل القيمة

الابتدائية من الرتبة الأولى. في المجال التطبيقي على أي حال. قليل من المسائل المستمدة من دراسة الظواهر الفيزيائية يمكن حلها بدقة.

ويتناول الجزء الأول من هذا الفصل تقريب الحل $y(t)$ للمسألة ذات الصيغة

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{لكل } a \leq t \leq b$$

على أن الشرط الابتدائي

$$y(a) = \alpha$$

وستعامل فيما بعد ضمن هذه الوحدة مع توسيع هذه الطرائق لتشمل نظاماً للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى على الصورة

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

⋮

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

لـ $a \leq t \leq b$ ، على أن الشروط الابتدائية

$$y_1(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y_n(a) = \alpha_n$$

كذلك نختبر علاقة نظام من هذا النوع مع مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة n وفق الصيغة

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

لـ $a \leq t \leq b$ ، على أن الشروط الابتدائية

$$y(a) = \alpha_1, \quad y'(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = \alpha_n$$

المبرهنة الابتدائية لمسائل القيمة الابتدائية

1.5

Elementary Theory of Initial-Value Problem

تستخدم المعادلات التفاضلية لنمذجة مسائل في العلوم والهندسة تتضمن استبدال متغير م بالنسبة إلى الآخر. وتتطلب معظم هذه المسائل حلاً لمسألة القيمة الابتدائية، أي حلاً لمعادلة تفاضلية تحقق شرطاً ابتدائياً محدداً.

في أغلب الأمور الحياتية الحقيقية، يكون من الصعب إيجاد حل دقيق للمعادلة التفاضلية التي تنمذج المسألة. ولهذا نلجأ إلى أحد النهجين لتقريب الحل: النهج الأول هو تبسيط المعادلة التفاضلية لواحدها يمكن حلها بدقة. ومن ثم استخدام حل المعادلة المبسطة لتقريب حل المعادلة الأصلية. أما النهج الآخر الذي سنختبره في هذه الوحدة فيستخدم طرائق لتقريب حل المسألة الأصلية. وهذا النهج هو الذي غالباً ما يؤخذ؛ لأن طرائق التقريب تعطي نتائج دقيقة.