أخذت العينة الأولى من يرقات تربّت على أوراق بلوط طريّة (حديثة). ب. حيث تربّت العينة الثانية على أوراق بالغة (عتيقة) من نفس الشجرة.

أ. استخدم استكمال لاجرانج الداخلي لتقريب منحنى معدل الوزن لكل عينة.

ب. أوجد أعلى معدل وزن مقرب لكل عينة من خلال تحديد كثيرة حدود الاستكمال الداخلي الأعلى.

اليوم	0	6	10	13	17	20	28
معدل وزن العينة (1) بالملجم	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
معدل وزن العينة (2) بالملجم	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

30. في التمرين (24) من الفصل (1.1) تطوّرت سلسلة ماكلورين لتقريب $\operatorname{erf}(x)$ التي هي عبارة عن دالة خطأ التوزيع الطبيعي والمعرّفة على النحو الآتي:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

أ. استخدم سلسلة ماكلورين لإنشاء جدول لـ $\operatorname{erf}(x)$ يكون دقيقًا لغاية 10^{-4} بالنسبة إلى $\operatorname{erf}(x_i)$ حيث إن $x_i = 0.2i,\ i = 0, 1, \ldots, 5$.

ب. استخدم كلًّا من الاستكمال الداخلي الخطي والتربيعي لإيجاد تقريب لـ $\operatorname{erf}(\frac{1}{3})$. أي منهما يبدو أكثر جدوى؟

31. برهن صحة المبرهنة (14.1) باتباع أسلوب برهنة المبرهنة (3.3).

إرشاد: ليكن

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \cdot \frac{(t - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}}$$

حيث تمثّل $P(x)$ كثيرة حدود تايلور النونية (nth)، استخدم المبرهنة (12.1).

32. برهن أن $\max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |g(x)| = h^2/4$ حيث إن $g(x) = (x - jh)(x - (j+1)h)$.

33. إن كثيرة حدود برنستاين من الدرجة n لـ $f \in C[0, 1]$ هي

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k}$$

حيث إن $\binom{n}{k}$ تمثل $n!/k!(n-k)!$. يمكن استخدام كثيرات الحدود هذه لتقديم برهان مبرهنة ڤيرستراس للتقريب (1.3) (انظر [Bart]) لكون $\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x)$ لكل $x \in [0, 1]$.

أ. أوجد $B_3(x)$ للدّوال

1. $f(x) = x$

2. $f(x) = 1$

ب. أثبت أنه لكل $k \le n$ فإن

$$\binom{n-1}{k-1} = \left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}$$

ج. استخدم الفقرة (ب) وحقيقة كون (من 2 الفقرة أ)

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \quad \text{لكل } n$$

لإثبات أنه لـ $f(x) = x^2$ يكون

$$B_n(x) = \left(\frac{n-1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x$$

د. استخدم الفقرة (ج) لتقدير قيمة n الضرورية لصحة $|B_n(x) - x^2| \le 10^{-6}$ لكل قيم x ضمن $[0, 1]$.