المدخلات: الرتبة n والمعامل $a_n ,\ldots, a_0, a_1$، x_0.

المخرجات: $y = P(x_0)$، $z = P'(x_0)$.

الخطوة	المضمون
1	ضع $y = a_n$؛ (احسب b_n لـ P) $z = a_n$؛ (احسب b_{n-1} لـ Q)
2	لكل $j = n-1, n-2, \ldots, 1$ ضع $y = x_0 y + a_j$ (احسب b_j لـ P) $z = x_0 z + y$ (احسب b_{j-1} لـ Q)
3	ضع $y = x_0 y + a_0$ (احسب b_0 لـ P)
4	المخرجات (y, z) توقف.

■

إذا كانت N تمثّل التكرار عدد x_N بطريقة نيوتن بمثابة صفر التقريب إلى P فإنّ

$$P(x) = (x - x_N)Q(x) + b_0 = (x - x_N)Q(x) + P(x_N) \approx (x - x_N)Q(x)$$

ومن ثم فإنّ $x - x_N$ عبارة عن عامل تقريب إلى $P(x)$. وبجعل التقريب إلى P صفرًا، وأن عامل التقريب $Q_1(x) \equiv Q(x)$ نجد أن

$$P(x) \approx (x - \hat{x}_1)Q_1(x)$$

ونستطيع إيجاد صفر تقريب ثانٍ إلى P عبر تطبيق طريقة نيوتن على $Q_1(x)$. فإذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n مع n من الأصفار الحقيقية، فعند تطبيق هذه العملية على نحو متتالٍ سينتج في النهاية $(n-2)$ من أصفار التقريب إلى P وعامل تقريب تربيعي $Q_{n-2}(x)$. وعند هذه المرحلة يمكن حل $Q_{n-2}(x) = 0$ بالصيغة التربيعية لإيجاد آخر صفر تقريب إلى P. وعلى الرغم من أن هذه الطريقة يمكن استخدامها لإيجاد أصفار التقريب جميعها، فإنّها تعتمد على تكرار استخدام التقريبات، ومن ثم يمكن أن تؤدي إلى نتائج غير دقيقة.

تُسمّى العملية التي شرحت توًّا الانكماش. ومن صعوبات تحقّق الدقة عبر استخدام الانكماش أنه عند إيجادنا لأصفار التقريب إلى $P(x)$، فإنّ طريقة نيوتن تطبّق على كثيرة الحدود المختزلة $Q_k(x)$، ومفادها أن كثيرة الحدود تمتلك صفة كون

$$P(x) \approx (x - \hat{x}_1)(x - \hat{x}_2)\cdots(x - \hat{x}_k)Q_k(x)$$

وصفر تقريب $\hat{x}_{k+1}$ إلى Q_k لا يقرب جذر $P(x) = 0$ عمومًا بجودة جذر الصيغة المختزلة نفسها $Q_k(x) = 0$. ويزداد عدم الدقة مع ازدياد قيمة k. وللحد من هذه الصعوبة، يمكننا استخدام الصيغ المختزلة لإيجاد تقريبات $\hat{x}_2, \hat{x}_3, \ldots, \hat{x}_k$ لأصفار P، وبعدئذ تتحسّن التقريبات بتطبيق طريقة نيوتن لكثيرة الحدود الأصلية $P(x)$.

تكمن المشكلة الوحيدة عند تطبيق طرائق القاطع، الموقع الفاشل، أو نيوتن على متعددات الحدود في احتمال أن يكون لكثيرة الحدود جذور معقدة حتى عندما تكون المعاملات جميعها أعدادًا حقيقية. ويمكننا البدء بتقريب ابتدائي مركب للتغلب على هذه الصعوبة وعمل جميع الحسابات مستخدمين العمليات الرياضية المركبة. وتتمثّل أسس الأسلوب البديل بالمبرهنة الآتية.

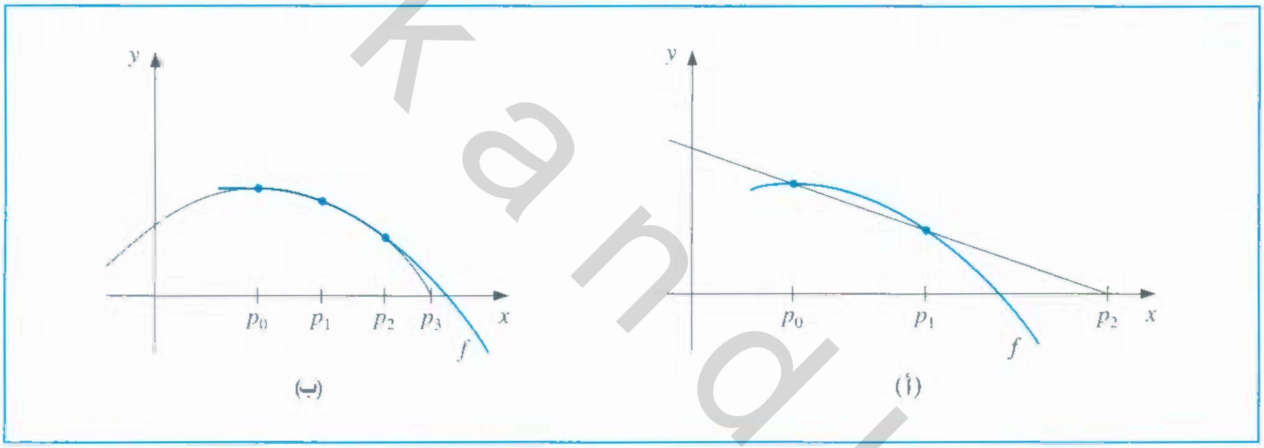
مبرهنة 19.2 إذا كان $z = a + bi$ صفرًا مركبًا مضاعفًا عدد m من المرات لكثيرة الحدود $P(x)$ ذات المعاملات الحقيقية فإنّ $\bar{z} = a - bi$ صفرًا مضاعفًا عدد m من المرات لكثيرة الحدود $P(x)$. وأن $(x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^m$ قاسم لكثيرة الحدود $P(x)$. ■

إن طريقة مولر شبيهة بطريقة القاطع. لكن طريقة القاطع تستخدم خطاً عبر نقطتين على المنحنى لتقريب الجذر. فإن طريقة مولر تستخدم القطع المكافئ عبر ثلاث نقاط على المنحنى لغرض التقريب.

يمكن تجزئة التجزئة التشبيهية المتضمنة كثيرات حدود تربيعية إلى عاملي المتعدد تقريبًا ليكون أحد الحدود متعددًا تربيعيًا وجذوره المركبة تقريبات إلى جذور كثيرة الحدود الأصلية. لقد شُرِحَ هذا الأسلوب مع بعض التفصيلات في طبعتنا الثانية [BFR]. وبدلاً من الذهاب مع هذه الخطوط. سنأخذ الآن في الحسبان طريقةً عُرِضت لأول مرة من قبل D.E. Müller [Mu] ويمكن استخدام هذا الأسلوب لأي مسألة بخصوص إيجاد الجذر، لكنها مفيدة لتقريب جذور متعددات الحدود حصريًا.

إن طريقة القاطع تبدأ بتقريبين ابتدائيين p_0 و p_1، وتحدد التقريب الآتي p_2 بوصفه تقاطع محور x مع الخط الواصل بين $(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$. انظر شكل (12.2) (أ). تستخدم طريقة مولر ثلاثة تقريبات ابتدائية p_0 و p_1 و p_2. وتحدِّد التقريب الآتي p_3 مع الأخذ في الحسبان تقاطع محور x مع القطع المكافئ المارّ بـ $(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$ و $(p_2, f(p_2))$ انظر شكل (12.2) (ب).

شكل 12.2



إن برهان طريقة مولر تبدأ بافتراض كثيرة الحدود التربيعية

$$P(x) = a(x - p_2)^2 + b(x - p_2) + c$$

التي تمر بالنقاط $(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$ و $(p_2, f(p_2))$. من الممكن إيجاد قيم الثوابت a، b، c من الشروط

$$f(p_0) = a(p_0 - p_2)^2 + b(p_0 - p_2) + c \qquad (15.2)$$

$$f(p_1) = a(p_1 - p_2)^2 + b(p_1 - p_2) + c \qquad (16.2)$$

و

$$f(p_2) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \qquad (17.2)$$

لتكون

$$c = f(p_2) \qquad (18.2)$$

$$b = \frac{(p_0 - p_2)^2[f(p_1) - f(p_2)] - (p_1 - p_2)^2[f(p_0) - f(p_2)]}{(p_0 - p_2)(p_1 - p_2)(p_0 - p_1)} \qquad (19.2)$$

و

$$a = \frac{(p_1 - p_2)[f(p_0) - f(p_2)] - (p_0 - p_2)[f(p_1) - f(p_2)]}{(p_0 - p_2)(p_1 - p_2)(p_0 - p_1)} \qquad (20.2)$$

ولتحديد p_3 صفرًا لـ P، نطبق الصيغة التربيعية على $P(x) = 0$. وعلى أي حال، وبسبب صعوبات تدوير الخطأ الناتجة من طرح الأرقام نفسها تقريبًا. نطبق الصيغة بالأسلوب الموضح في المثال (5) من الفصل (1.2) وهو

$$p_3 - p_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

تعطي هذه الصيغة احتمالين لـ p_3 اعتمادًا على الإشارة التي تسبق الحد المتطرف. في طريقة مولر، تُختار الإشارة لتتفق مع إشارة b. وسيجعل الاختيار وفق هذا الأسلوب المقام أعلى قيمة، مما سيؤدي إلى اختيار p_3 على أنها أقرب صفر إلى P مما هو مع p_2. وعندئذ

$$p_3 = p_2 - \frac{2c}{b + \text{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

حيث إن a، b، c معطاة في الصيغة (15.2).

وبمجرد تحديد p_3، تعاد العملية من بدايتها باستخدام p_1 و p_2 و p_3 بدلاً من p_0 و p_1 و p_2 لغرض تحديد التقريب الآتي p_4. وتستمر الطريقة حتى ظهور استنتاج مقبول. وفي كل خطوة تتضمن الطريقة قيمة متطرفة لـ $\sqrt{b^2 - 4ac}$. لذا فالطريقة تعطي جذور التقريب المركبة عندما $b^2 - 4ac < 0$. وتوضح الخوارزمية (8.2) هذه العملية.

ALGORITHM
الخوارزمية
8.2

خوارزمية مولر Müller's Algorthem

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ مع ثلاثة تقريبات p_0 و p_1 و p_2

المدخلات: p_0 و p_1 و p_2. الحدود المسموح بها TOL. أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي P أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $h_1 = p_1 - p_0$ $h_2 = p_2 - p_1$ $\delta_1 = (f(p_1) - f(p_0))/ h_1$ $\delta_2 = (f(p_2) - f(p_1))/ h_2$ $d = (\delta_2 - \delta_1)/(h_2 + h_1)$ $i = 3$
2	ما دام $i \le N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 7 الآتية:
3	$b = \delta_2 + h_2 d$ $D = (b^2 - 4f(p_2)d)^{1/2}$ (ملحوظة: قد يتطلب طرائق حسابية مركبة).

4	إذا كان $\lvert b - D\rvert < \lvert b + D\rvert$ فضع $E = b + D$ وخلاف ذلك ضع $E = b - D$
5	ضع $h = -2f(p_2)/E$ $p = p_2 + h$
6	إذا كان $\lvert h\rvert < TOL$ فإن المُخرج (p) (كانت العملية ناجحة). توقف.
7	ضع $p_0 = p_1$ (رتب أمر التكرار الآتية :) $p_1 = p_2$ $p_2 = p$ $h_1 = p_1 - p_0$ $h_2 = p_2 - p_1$ $\delta_1 = (f(p_1) - f(p_0))/h_1$ $\delta_2 = (f(p_2) - f(p_1))/h_2$ $d = (\delta_2 - \delta_1)/(h_2 + h_1)$ $i = i + 1$
8	المخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $N_0 =$ `, N_0) (لم تستكمل العملية بنجاح). توقف.

■

مثال 3

افترض كثيرة الحدود $f(x) = 16x^4 - 40x^3 + 5x^2 + 20x + 6$ باستخدام الخوارزمية (8.2) مع $TOL = 10^{-5}$ وقيم مختلفة لـ p_0 و p_1 و p_2 نحصل على النتائج في جدول (13.2).

جدول 13.2

أ.

$p_0 = 0.5, \quad p_1 = -0.5, \quad p_2 = 0$

$f(p_i)$	p_i	i
$-29.4007 - 3.89872i$	$-0.555556 + 0.598352i$	3
$1.33223 - 1.19309i$	$-0.435450 + 0.102101i$	4
$0.375057 - 0.670164i$	$-0.390631 + 0.141852i$	5
$-0.146746 - 0.00744629i$	$-0.357699 + 0.169926i$	6
$-0.183868 \times 10^{-2} + 0.539780 \times 10^{-3}i$	$-0.356051 + 0.162856i$	7
$0.286102 \times 10^{-5} + 0.953674 \times 10^{-6}i$	$-0.356062 + 0.162758i$	8

ب.

$p_0 = 0.5, \quad p_1 = 1.0, \quad p_2 = 1.5$

$f(p_i)$	p_i	i
-1.37624	1.28785	3
0.126941	1.23746	4
0.219440×10^{-2}	1.24160	5
0.257492×10^{-4}	1.24168	6
0.257492×10^{-4}	1.24168	7

ج:

$p_0 = 2.5, \quad p_1 = 2.0, \quad p_2 = 2.25$

i	p_i	$f(p_i)$
3	1.96059	-0.611255
4	1.97056	0.748825×10^{-2}
5	1.97044	-0.295639×10^{-4}
6	1.97044	-0.259639×10^{-4}

لقد استخدمنا طريقة مابل Maple لتوليد الفقرة (أ) من جدول (13.2). ولعمل ذلك، عرفنا الدّالة $f(x)$ والتقريب الابتدائي بحسب

```
>f:=x->16*x^4-40*x^3+5*x^2+20*x+6
>p0:=0.5;  p1:=-0.5;  p2:=0.0
```

وقد حسبنا كثيرة الحدود عند القيم الابتدائية

```
>f0:=f(p0);  f1:=f(p1);  f2:=f(p2)
```

وحسبنا $a = 9$، $b = 10$، $c = 6$ و $p_3 = -0.5555555558 + 0.5983516452i$ مستخدمين صيغ طريقة مولر

```
>c:=f2
>b:=((p0-p2)^2*(f1-f2)-(p1-p2)^}2*(f0-f2))/((p0-p2)*(p1-p2)*(p0-p1))
>a:=((p1-p2)*(f0-f2)-(p0-p2)*(f1-f2))/((p0-p2)*(p1-p2)*(p0-p1))
>p3:=p2-(2*c)/(b+(b/abs(b))*sqrt(b^2-4*a*c))
```

وقد تولّدت القيمة p_3 مستخدمين طرائق الحساب المركبة كحساب

```
>f3:=f(p3)
```

الذي يعطي

$$f_3 = -29.40070112 - 3.898724738i$$

القيم الحقيقية لجذور الصيغة هي 1.241677، 1.970446، -0.356062 و $\pm 0.162758i$ التي توضح دقة التقريبات من طريقة مولر. ■

يوضح المثال (3) أنه بإمكان طريقة مولر تقريب جذور كثيرة الحدود مع قيم ابتدائية متنوعة. وفي الواقع تتقارب طريقة مولر عمومًا إلى جذر كثيرة الحدود مع أي اختيار للتقريب الابتدائي، مع أنه بالإمكان إنشاء مسائل لا يحدث معها مثل هذا التقارب. افترض على سبيل المثال وعند قيمة معينة لـ i أنّ $f(p_i) = f(p_{i+1}) = f(p_{i+2}) \neq 0$. تختزل الصيغة التربيعية إذن إلى دالّة ثابت لاصفري، ولا يمكنه قطع محور x. ولا يمثّل هذا الحالة الاعتيادية على أي حال. وإن الغرض العام لبرمجيات تستخدم طريقة مولر تتطلب تقريبًا ابتدائيًا واحدًا فقط لكل جذر، حتى إنها توفّر هذا التقريب بوصفه اختيارًا.

مجموعة التمارين 6.2 EXERCISE SET

1. أوجد التقريبات ضمن 10^{-4} للأصفار الحقيقية كلها لكثيرات الحدود الآتية مستخدمًا طريقة نيوتن:

أ. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$ ب. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

ج. $f(x) = x^3 - x - 1$ د. $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$

هـ. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$ و. $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 4$

2. أوجد تقريبات ضمن 10^{-5} للأصفار جميعها ولكثيرات الحدود الآتية كلها من خلال إيجاد الأصفار الحقيقية باستخدام طريقة نيوتن أولا. ثم اختزال كثيرات الحدود ذات الرتبة الدنيا لتحديد أي الأصفار مركبة:

أ. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 85x - 136$

ب. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 16x - 40$

ج. $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$

د. $f(x) = x^5 + 11x^4 - 21x^3 - 10x^2 - 21x - 5$

هـ. $f(x) = 16x^4 + 88x^3 + 159x^2 + 76x - 240$

و. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 3x + 5$

ز. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$

ح. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$

3. كرر التمرين (1) مستخدما طريقة مولر.

4. كرر التمرين (2) مستخدمًا طريقة مولر.

5. استخدم طريقة نيوتن ضمن 10^{-3} لإيجاد الأصفار والنقاط الحرجة للدّوال الآتية. استخدم هذه المعلومات لرسم منحنى لـ f:

أ. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12$ ب. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5$

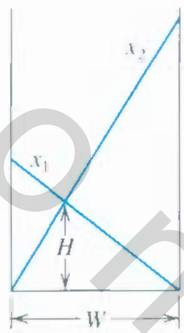
6. $f(x) = 10x^3 - 8.3x^2 + 2.295x - 0.21141 = 0$ له جذر عند $x = 0.29$. استخدم طريقة نيوتن مع تقريب ابتدائي $x_0 = 0.28$ لمحاولة إيجاد هذا الجذر. وضّح ماذا يحدث.

7. استخدم الطرائق الآتية كلها لإيجاد حل دقيق ضمن $[0.1, 1]$ لحد 10^{-4} لـ

$$600x^4 - 550x^3 + 200x^2 - 20x - 1 = 0$$

أ. طريقة التنصيف ب. طريقة نيوتن ج. طريقة القاطع

د. طريقة الموقع الفاشل هـ. طريقة مولر

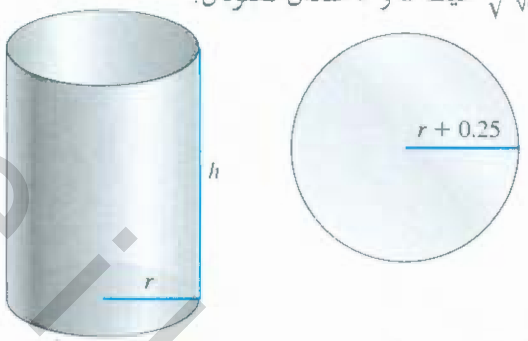


8. يتقاطع اثنان من السلالم بين جدارين، المسافة بينهما W على صورة الشكل المجاور على أن يمتد كل منهما من أساس أحد الجدران إلى نقطة في الجدار الآخر. ويتقاطع السلّمان على ارتفاع H من الأرضية. أوجد W إذا علمنا أن طول السلالم $x_1 = 20$ ft و $x_2 = 30$ ft وأن $H = 8$ ft.

9. علبة على شكل أسطوانة دائرية مطلوب تصميمها لتتسع لـ $1000\ cm^3$، ويجب أن يكون نصف قطر القمة والقاعدة كلاهما أكثر من نصف قطر العلبة الدائرية للعلبة بمقدار 0.25 cm كي تستخدم هذه الزيادة لغرض اللحام مع جانب العلبة. ويجب أن تكون الطبقة المعدنية المستخدمة في جانب العلبة أيضًا بطول يزيد 0.25 cm على طول محيط العلبة لغرض اللحام. أوجد ضمن

10^{-4} أقل كمية من المعدن نحتاج إليها لصنع هذه العلبة.

10. واجه فيبوناشي تحديًا رياضيًا في عام 1224 ضد جون بالرمو بحضور الإمبراطور وحيدرك الثاني؛ فقد جد جذر الصيغة $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. وقد أثبت أولًا أن الصيغة ليس لها جذور معقولة ولا جذر إقليدي معقول. بمعنى أنه لا جذر لأيّ من الصيغ $a \pm \sqrt{b}$، $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$، $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ أو $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ حيث a و b عددان معقولان.



وبعد ذلك قرّب الجذر الحقيقي الوحيد. ربما عن طريق استخدام أسلوب جبري لعمر الخيام متضمنًا تقاطع دائرة مع قطع مكافئ. وكان جوابه معطى بنظام العدد ذي القاعدة الستينية وهو

$$1 + 22\left(\frac{1}{60}\right) + 7\left(\frac{1}{60}\right)^2 + 42\left(\frac{1}{60}\right)^3 + 33\left(\frac{1}{60}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{60}\right)^5 + 40\left(\frac{1}{60}\right)^6$$

ما أعظم دقة تقريبية؟

7.2 مسح الطرائق والبرمجيات
Survey of Methods and Software

في هذا الباب وجدنا حل الصيغة $f(x) = 0$، حيث إن f عبارة عن دالّة متصلة. وتبدأ الطرائق جميعها بتقريب ابتدائي وتوليد متتالية تتقارب إلى جذر الصيغة. في حال كون الطريقة ناجحة. فإذا كانت $[a, b]$ فترة ما حيث $f(a)$ و $f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان. فإنّ طريقة التنصيف وطريقة الموقع الفاشل ستتقارب. وعلى أي حال، فإن تقارب هذه الطرائق قد يكون بطيئًا. ويحصل التقارب الأسرع باستخدام طريقة القاطع أو طريقة نيوتن عمومًا. التقريبات الابتدائية الجيدة مطلوبة لهذه الطرائق بواقع اثنين لطريقة القاطع وواحد لطريقة نيوتن. حيث يمكن استخدام طريقة التنصيف وطريقة الموقع الفاشل بوصفها طرائق بداية تمهيدًا لطريقة القاطع أو طريقة نيوتن.

وستعطي طريقة مولر تقاربًا سريعًا دون وجوب التقريب الابتدائي الجيد. وهي ليست ذات كفاءة تماثل كفاءة طريقة نيوتن، حيث إن رتبة تقاربها مع الجذر هي $\alpha = 1.84$ مقارنة بطريقة نيوتن التربيعية من الرتبة $\alpha = 2$.

على أي حال. إنها أفضل من طريقة القاطع. حيث إن مرتبتها $\alpha = 1.62$. ولها مزية مضافة لكونها قادرة على تقريب الجذور المركبة.

يُستخدم الانكماش مع طريقة مولر عموما حالما يكون جذر التقريب لكثيرة الحدود قد حدّد. وبعد ذلك استُخدمت طريقة مولر أو نيوتن في كثيرة الحدود الأصلية مع هذ الجذر بافتراض أنه تقريب ابتدائي. سيضمن هذا الإجراء كون الجذر الذي قرّب عبارة عن حل للصيغة الحقيقية وليس لصيغة الانكماش. ونحن نوصي بطريقة مولر لإيجاد أصفار متعددات الحدود كلها سواء أكانت حقيقية أم مركبة. ويمكن استخدام طريقة مولر في دالّة متصل غير منهجي أيضا.

وتوجد طرائق أخرى متوفرة ذات رتبة عالية لتحديد جذور متعددات الحدود. فإذا كان هذا الموضوع يثير اهتمامًا خاصًا، فإنّنا نوصي بإعطاء اهتمام لطريقة لاكوير التي تعطي تقاربا تكعيبيًا وتقرب الجذور المركبة أيضا (لاحظ [Ho, pp. 176–179] لشرح كامل) طريقة جنكنز–تروب (لاحظ [JT]) وطريقة برنت. (لاحظ [Bre]).

وتوجد طريقة أخرى ذات أهمية هي طريقة كوشي، وهي مشابهة لطريقة مولر. لكنها تتحشى مسألة فشل طريقة مولر حينما تكون $f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2})$ عند قيمة ما لـ i. ولشرح هذه الطريقة شرحًا مهمّا مع تفصيلات أكثر لطريقة مولر، نوصي بـ ([YG, Sections 4.10, 4.11, and 5.4]).

ولدالّة محددة f مع حد سماح، فثمة برنامج كفؤ يعطي حلًّا واحدًا أو أكثر لـ $f(x) = 0$ تقريبًا. وكلٌّ له خطأ مطلق أو نسبي ضمن حد السماح. ويجب توليد النتائج في زمن مناسب. وإذا لم ينفذ البرنامج هذه المهمة يتعيَّن عليه إعطاء توضيح ذي معنى مقابل عدم تحقق النجاح ومؤشر لكيفية معالجة سبب الفشل.

إن البرنامج الفرعي IMSL FORTRAN - ZANLY يستخدم طريقة مولر مع انكماش لتقريب عدد من جذور $f(x) = 0$. ويستخدم البرنامج ZBREN المنسوب إلى برنت مزيجًا من استيفاء داخلي خطي واستيفاء خارجي معكوس يشبه طريقة مولر وطريقة التنصيف. إنها تتطلب وصف فترة $[a, b]$ تتضمن جذرًا.

والبرنامج (IMSL C f-zeros-fcn) وبرنامج (ZREAL FORTRAN) يستندان إلى تغير طريقة مولر وأصفار التقريب لدالّة حقيقية f عندما لا تتوفر سوى تقريبات ابتدائية ضعيفة. برامج إيجاد أصفار متعددات الحدود هي C f-zeros-poly و FORTRAN - ZPORC التي تستخدم طريقة جنكنز – تراوب لإيجاد أصفار كثيرة حدود حقيقية ZPLRC التي تستخدم طريقة لاكوير لإيجاد أصفار كثيرة حدود حقيقية. وبرنامج C c-zeros-poly و FORTRAN - ZPOCC الذي يستخدم طريقة جنكنز– تراوب لإيجاد أصفار كثيرة حدود مركبة.

تستخدم البرامج الفرعية NAG C C05adc و NAG FORTRAN C05ADF و C05AZF مزيجًا من طريقة التنصيف واستيفاء داخلي خطي واستيفاء خارجي لتقريب صفر حقيقي لـ $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$. البرنامج الفرعي C05AGF مشابه لـ C05ADF لكنه يتطلب قيمة واحدة للبدء بدلًا من الفترة ويعيد فترة تتضمن جذرًا. ويستخدم البرنامجان الفرعيان NAG FORTRAN C05AJF و C05AXF طريقة اتصال مع تكرار القاطع لتقريب الصفر الحقيقي للدالّة. وتزود NAG أيضًا برنامجين فرعيين C02AGF و C02AFF لتقريب أصفار كثيرة الحدود الحقيقية أو المركبة جميعها على التوالي. ويستخدم كلا البرنامجين طريقة لاكوير المختزلة لإيجاد جذور كثيرة الحدود.

والبرنامج الفرعي FORTRAN fzero.f يستخدم مزيجًا من طريقتي التنصيف والقاطع المطوّتين

من قبل دكر T.J. Dekker لتقريب صفر حقيقي لـ $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$. إنه يتطلب تحديد فترة تتضمن جذرًا. وتعيد فترة بعمق يتناسب مع حد سماح معلوم. والبرنامج الفرعي FORTRAN sdzro.f يستخدم مزيجا من طريقة التنصيف واستيفاء داخلي واستيفاء خارجي لإيجاد صفر حقيقي لـ $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$. ويمكن استخدام البرنامجين rpzero و cpzero لتقريب كل أصفار كثيرة الحدود الحقيقية أو المركبة على التوالي. وتستخدم كلتا الطريقتين طريقة نيوتن لأنظمة سنتناولها في الباب العاشر. البرامج كلها معطاة بصيغة الدقة الفردية والمزدوجة. وهذه الطرائق متوفرة في الإنترنت من netlib على الموقع http://www.netlib.org/slatec/src.

وضمن MATLAB. تستخدم الدالّة ROOTS لحساب الجذور كلها الحقيقية والمركبة لكثيرة الحدود. ويحسب دالّة غير منهجي FZERO جذرًا قريبًا لتقريب ابتدائي محدد ضمن حد سماح محدد. ولدى Maple العملية fsolve لإيجاد جذور الصيغ. وعلى سبيل المثال

```
>fsolve(x^2 - x - 1, x);
```

تعيد الأرقام 6180339887.– و 1.618033989 ويمكنك تحديد متغير أيضًا وفترة للبحث. على سبيل المثال

```
>fsolve(x^2 - x - 1,x,1..2);
```

تعيد العدد 1.618033989 فقط. ويستخدم الأمر fsolve أساليب متخصصة متنوعة تعتمد على صيغة معينة للصيغة أو لنظام من الصيغ.

لاحظ أنه على الرغم من تنوع الطرائق. فالبرامج المكتوبة بمهنية تستند أساسًا إلى الطرائق والأسس التي نتناولها في هذا الباب. ويجب أن تكون قادرًا على استخدام هذه البرامج بقراءة الأدلة المرفقة معها لاستيعاب معلمات النتائج الحاصلة وتوصيفاتها.

تتوافر ثلاثة كتب كلاسيكية في حل الصيغ اللاخطية. وهي من إعداد Traub [Tr] و Ostrowski [Os] و Householder [Ho] وبالإضافة إلى كتاب Brent [Bre] الذي يعدّ أساسًا لطرائق إيجاد الجذر التي تستخدم حاليًا.

الباب

3

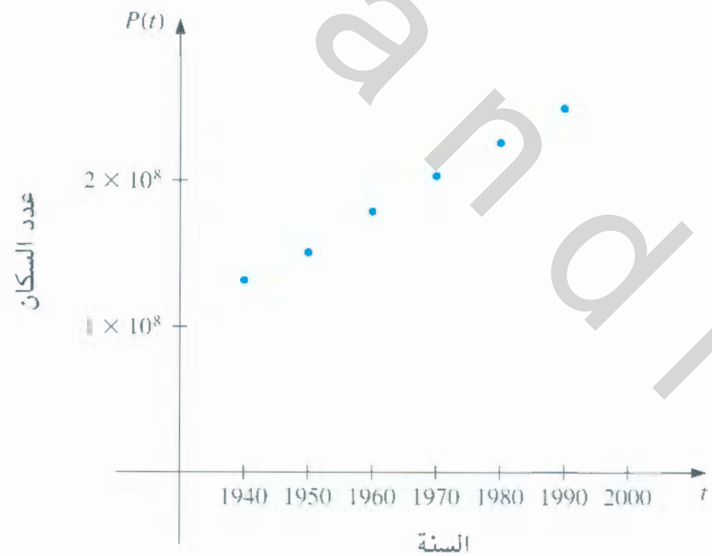
الاستكمال الداخلي وتقريب كثيرات الحدود

Interpolation and Polynomial Approximation

مقدمة

يجري تعداد السكان في الولايات المتحدة كل عشر سنوات. ويبين الجدول الآتي عدد السكان (بالآلاف) ما بين 1940 و 1990.

السنة	1940	1950	1960	1970	1980	1990
عدد السكان بالآلاف	132,165	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633



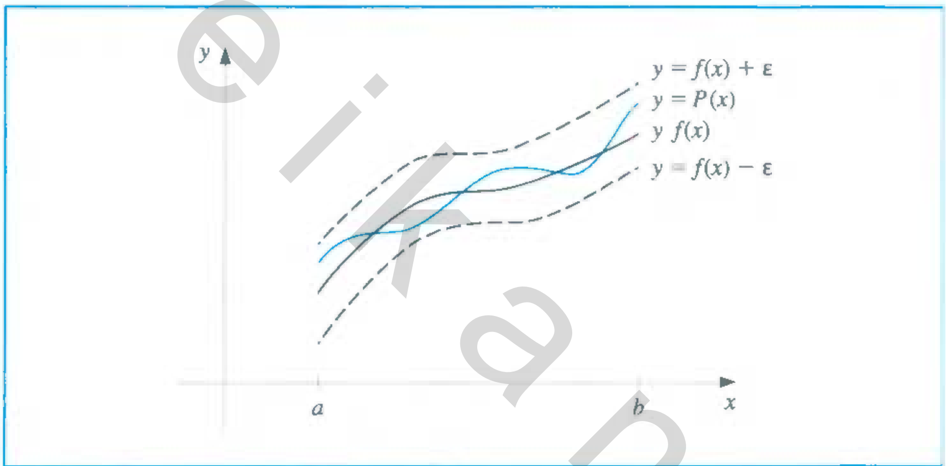
وقد نتساءل عند دراسة هذه البيانات ما إذا كان يمكن استخدامها لإعطاء تقريب مناسب لعدد السكان عام 1965 أو حتى سنة 2010 مثلًا. ويمكن إيجاد تنبؤات من هذا النوع مستخدمين دالّة تتناسب مع البيانات. وتسمى هذه العملية "استكمالًا أو استكمالًا داخليًا – *interpolation*" وهو موضوع هذا الباب. وقد أخذت مسألة تعداد السكان هذه في الحسبان ضمن هذا الباب وفي التمارين: (28) من الفصل (1.3). و (18) من الفصل (2.3) و (28) من الفصل (4.3).

وأحد صنوف الدّوال المشهورة والتي تخدم هدفنا في هذا الباب، والتي كل من مجالها ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية. هو صنف كثيرات الحدود الجبرية التي تأخذ الصورة:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث تمثّل n عدد صحيح غير سالب و $a_0, \ldots, a_n$ معاملات حقيقية. وأحد أسباب أهميتها كونها تقرب الدّوال المتصلة بانتظام. خذ أي دالّة معرفة ومتصلة على فترة محددة ومغلقة، عندئذ توجد كثيرة حدود تقترب من الدّالة المعطاة وعلى النحو المطلوب. وهذه النتيجة يعبر عنها تحديدًا في المبرهنة الآتية. (انظر شكل 1.3)

شكل 1.3



مبرهنة 1.3 مبرهنة تقريب فيرستراس Weierstrass Approximation Theorem

لتكن f دالّة معرفة ومتصلة على الفترة $[a, b]$. عندئذ، لكل $\varepsilon > 0$، توجد كثيرة حدود $P(x)$ تحقق $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ لكل x في الفترة $[a, b]$. يمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في غالبية المراجع الابتدائية في التحليل الحقيقي. (انظر [Bart, pp. 165–172]) هناك سبب مهم آخر للتعامل مع فئة كثيرات الحدود في تقريب الدّوال هو كون الاشتقاق والتكامل اللامنتي لكثيرة الحدود سهل التحديد. وتكون نفسها كثيرة الحدود أيضا. ولهذه الأسباب، تستخدم كثيرات الحدود لتقريب الدّوال المتصلة غالبًا.

لقد تناولنا كثيرات حدود تايلور في الباب الأول من هذا الكتاب، حيث وصفت كأنها أحد الأركان الجوهرية في إنشاء التحليل العددي، وقد تفترض أن تقدير كثيرة الحدود يزيد في استخدام هذه الدّوال بناءً على ذلك.

إن كثيرات حدود تايلور تتفق وبأكبر اقتراب ممكن مع دالّة ما في نقطة محددة، ولكنها تركز دقتها قريبًا من النقطة. وكثيرة حدود الاستكمال الداخلي الجيد تحتاج إلى إعطاء تقريب دقيق على طول الفترة نسبيًا. وإن كثيرات حدود تايلور لا تقدم ذلك عمومًا. افترض أننا نحسب أول ست كثيرات حدود تايلور حول $x_0 = 0$ لـ $f(x) = e^x$ على سبيل المثال.

كارل فيرستراس
karl weierstrass (1815-1897)
يدعى أحيانا الأب للتحليل الحديث بسبب إصراره على الصرامة في عرض النتائج الرياضية. لقد كان أداتيًا في تطوير اختبارات لتقارب السلسلة وفي تحديد طرائق لتعريف أرقام لامنطقية بدقة. وكان أول من أوضح بأن الدالّة يمكن أن يكون مستمرًا أينما كان، ولكنه لا يمكن أن يكون قابلا للاشتقاق. وهي نتيجة أذهلت بعض معاصريه.

القليل من أعمال ڤيرستراس قد نشرت خلال حياته. ولكن محاضراته وخصوصًا حول نظرية الدّوال لها تأثير معنوي على جيل من التلاميذ بأجمعه

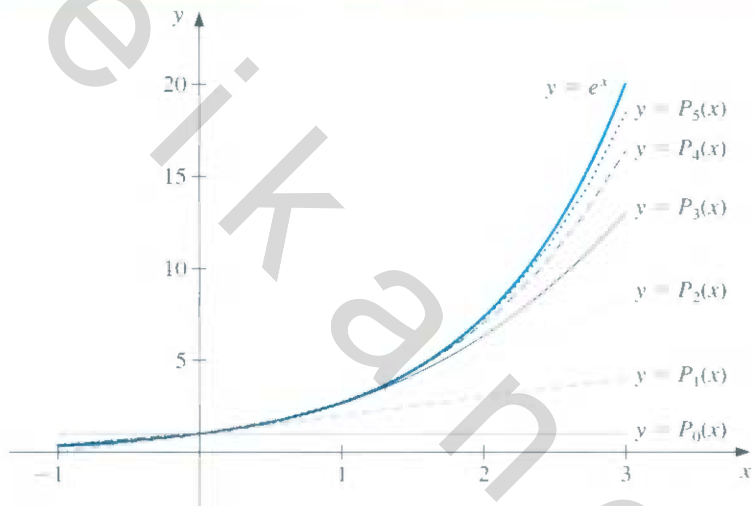
بما أن مشتقات $f(x)$ هي جميعها e^x حين حسابها عند $x_0 = 0$ تعطي القيمة 1. فإن كثيرات حدود تايلور هي:

$P_0(x) = 1$ ، $P_1(x) = 1 + x$ ، $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ، $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ و $P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$

إن رسوم كثيرات الحدود موضحة في شكل (2.3). (لاحظ أنه كلما ابتعدنا عن الصفر يغدو الخطأ أسوأ تدريجيًا حتى مع كثيرات الحدود برتب عالية).

شكل 2.3



ومع الحصول على استكمال داخلي أحسن لـ $f(x) = e^x$ في حالة استخدام كثيرات حدود تايلور برتب عليا. فإن الحال ليس كذلك لكل الدّوال. لنفترض استخدام كثيرات حدود تايلور برتب مختلفة لـ $f(x) = 1/x$ ممتدة حول $x_0 = 1$ لتقريب $f(3) = \frac{1}{3}$. بوصفه مثالاً واضحًا على ذلك. وحيث إن

$$f(x) = x^{-1},\quad f'(x) = -x^{-2},\quad f''(x) = (-1)^2 2 \cdot x^{-3}$$

وعموما $f^{(k)}(x) = (-1)^k k! x^{-k-1}$

فإن كثيرات حدود تايلور تكون

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k$$

ونحصل على القيم في جدول (1.3) التي تشير إلى فشلٍ ذريع في تقريب $f(3) = \frac{1}{3}$ بحدود $P_n(3)$ لقيم متصاعدة لـ n. فعندما نقرب $f(3) = \frac{1}{3}$ بحدود $P_n(3)$ لقيم متصاعدة لـ n. فإن

التقريب يصبح غير دقيق من الجانب التصاعدي. ويلاحظ ذلك من جدول (3.1) أيضًا.

جدول 1.3

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85

وبما أن كثيرات حدود تايلور تتميز بكون المعلومات المستخدمة جميعها في التقريب متمركزة عند نقطة منفردة x_0، فإنه ليس مستبعدًا لكثيرات الحدود هذه أن تعطي تقريبات غير دقيقة كلما ابتعدنا عن x_0. وهذا ما يجعل تقريب كثيرة حدود تايلور مقتصرًا على الحاجة إلى التقريب فقط عند نقاط قريبة لـ x_0. وللأغراض الحسابية المعتادة، فمن الأجدر استخدام طرائق تتضمن معلومات عند نقاط مختلفة، سنعتمدها فيما تبقى من هذا الفصل. إن الاستخدام الرئيس لكثيرات حدود تايلور ليس لأغراض التقريب، وإنما لاشتقاق أساليب عددية، ولتقريب الخطأ.

1.3 الاستكمال الداخلي وكثيرة حدود لاجرانج
Interpolation and the Lagrange Polynomial

لما لم تكن كثيرات حدود تايلور مناسبة للاستكمال الداخلي، فهناك حاجة إلى طرائق بديلة. ونحصل في هذا الفصل على كثيرات حدود للتقريب تحدد بسهولة من خلال توصيف نقاط معينة على السطح وعبر أماكن وجوب مرورها بها.

إن مشكلة تحديد كثيرة حدود من الرتبة واحد تمرّ عبر نقاط مختلفة (x_0, y_0) و (x_1, y_1) هي نفسها عند تقريب الدّالة f، حيث $f(x_0) = y_0$ و $f(x_1) = y_1$ من خلال الاستكمال الداخلي بكثيرة حدود من الرتبة 1، أو الاتفاق مع قيم f عند النقط المعلومة.

بداية نعرّف الدّوال

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{و} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

ومن ثم نعرّف

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

وحيث إن

$$L_0(x_0) = 1,\ L_0(x_1) = 0,\ L_1(x_0) = 0 \quad \text{و} \quad L_1(x_1) = 1$$

يكون لدينا

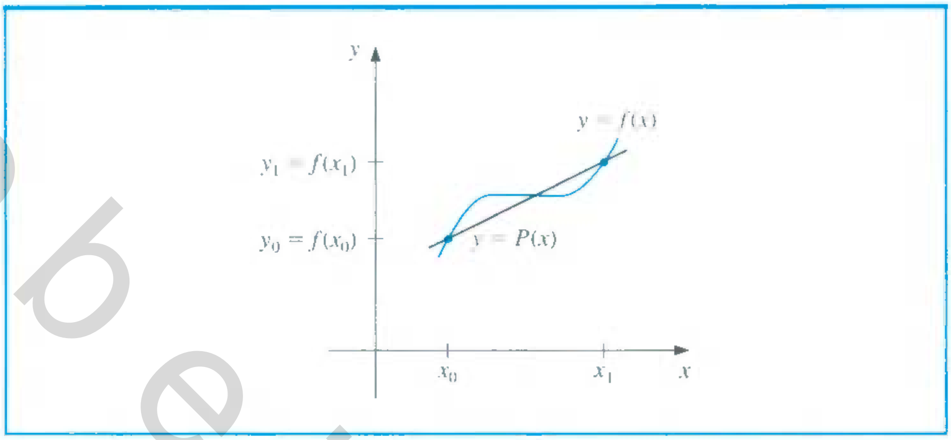
$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

و

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

وبذلك فإن P هي الدّالة الخطية الوحيدة التي تمرّ عبرها (x_0, y_0) و (x_1, y_1). (انظر شكل 3.3).

شكل 3.3

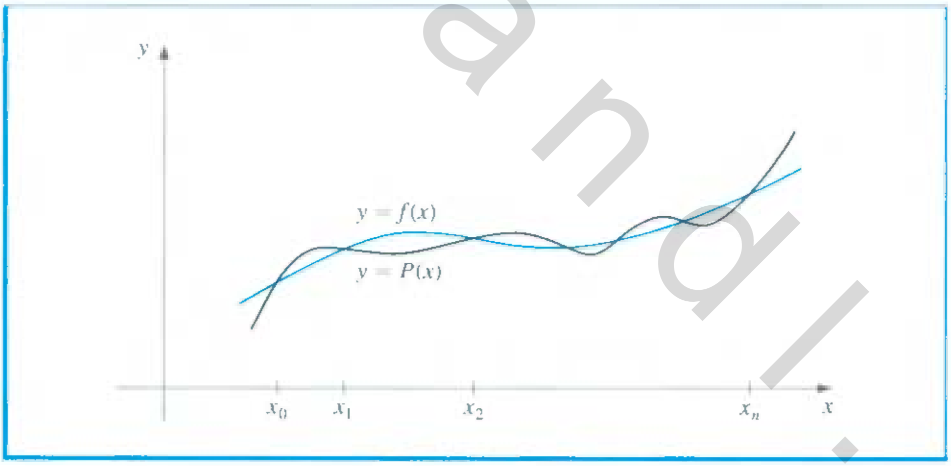


لتعميم مفهوم الاستكمال الداخلي الخطي، ندرس إنشاء كثيرة حدود رتبتها لا تزيد عن n. وتمر بعدد $n + 1$ من النقاط

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

(انظر شكل 4.3).

شكل 4.3



نحتاج في هذه الحالة إلى إنشاء. لكل $k = 0, 1, \ldots, n$، دالّة $L_{n,k}(x)$ مع خاصية كون $L_{n,k}(x_i) = 0$ عندما $i \neq k$ و $L_{n,k}(x_k) = 1$. ولتحقيق $L_{n,k}(x_i) = 0$ لكل $i \neq k$، يتطلب الأمر تضمين بسط $L_{n,k}(x)$ للمقدار

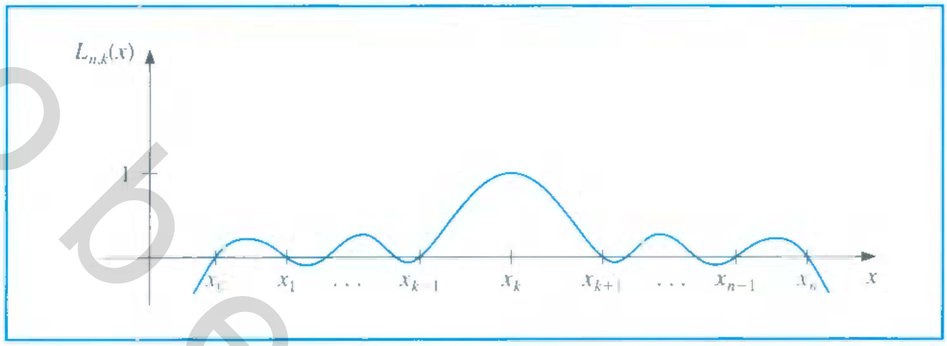
$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

ولتحقيق $L_{n,k}(x_k) = 1$، فإن بسط $L_{n,k}(x)$ يجب أن يساوي هذا المقدار عند $x = x_k$. وعندئذ

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

يوضح شكل (5.3) تخطيطاً لشكل $L_{n,k}$ النموذجي.

شكل 5.3



من السهولة توضيح كثيرة حدود الاستكمال الداخلي إذا ما عرفت صيغة $L_{n,k}$. وتدعى كثيرة الحدود هذه "كثيرة حدود لاجرانج النوني الاستكمال الداخلي **nth Lagrange interpolating polynomial**" وتعريفها ضمن المبرهنة الآتية.

مبرهنة 2.3

إذا كانت $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعداداً مختلفة عددها $n+1$. وكانت f دالّة قيمها معطاة عند هذه الأعداد، فإنه يوجد كثيرة حدود وحيدة $P(x)$ لا تزيد رتبتها عن n. وتحقق

$$f(x_k) = P(x_k) \quad \text{لكل} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

وكثيرة الحدود هذه هي

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x) \tag{1.3}$$

حيث إن لكل $k = 0, 1, \ldots, n$ لدينا

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \tag{2.3}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

■

إن صيغة الاستكمال الداخلي المنسوبة إلى جوزيف - لويس لاجرانج Joseph - Louis Lagrange (1736 - 1813) كانت وكأنها معروفة من قبل إسحق نيوتن Isaac Newton نحو 1675، ولكن يبدو أنها قد نشرت أولاً من قبل إدوارد وارينج Edward waring (1736 - 1798) في 1779 لاجرانج قد كتب على نحو واسع حول موضوع الاستكمال الداخلي. وكان عمله مثار اهتمام الرياضيين الاخيرين. لقد نشر هذه النتيجة عام 1795

سنكتب $L_{n,k}(x)$ بصيغة $L_k(x)$ للسهولة حينما لا يوجد أي مشكلة بشأن درجته.

مثال 1

باستخدام الأعداد (أو النقاط) $x_0 = 2$ ، $x_1 = 2.5$ ، $x_2 = 4$ فإن إيجاد كثيرة حدود الاستكمال الداخلي الثاني لـ $f(x) = 1/x$ يتطلب منا تحديد معاملات كثيرات الحدود. $L_0(x)$، $L_1(x)$ و $L_2(x)$. وهي وفق الصيغة المتداخلة

$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = (x-6.5)x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{(x-4.5)x+5}{3}$$

وحيث إن

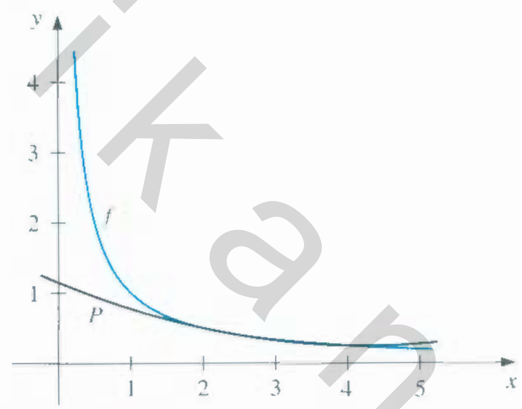
$f(x_0) = f(2) = 0.5$ ، $f(x_1) = f(2.5) = 0.4$ و $f(x_2) = f(4) = 0.25$

يكون لدينا

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_k(x) \\ &= 0.5((x-6.5)x+10) + 0.4\frac{(-4x+24)x-32}{3} + 0.25\frac{(x-4.5)x+5}{3} \\ &= (0.05x - 0.425)x + 1.15 \end{aligned}$$

والتقريب إلى $f(3) = \frac{1}{3}$ (انظر شكل6.3) سيكون $f(3) \approx P(3) = 0.325$.

شكل 6.3



قارن هذا بجدول (1.3) في حال عدم إمكانية استخدام كثيرة حدود تايلور. ممتدة حول $x_0 = 1$، لتقريب معقول لـ $f(3) = \frac{1}{3}$. ■

يمكننا استخدام CAS لإنشاء كثيرة حدود استكمال داخلي. على سبيل المثال نستخدم في Maple

```
>interp(X,Y,x);
```

حيث يمثل X النقطة $[x_0, \ldots, x_n]$، ويمثل Y النقطة $[f(x_0), \ldots, f(x_n)]$، و x_g هو المتغير المستخدم. في هذا المثال يمكننا توليد كثيرة حدود استكمال داخلي

$P(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$ مع الأمر

```
>P:=interp([2,2.5,4],[0.5,0.4,0.25],x);
```

ولحساب $P(3)$ بوصفه تقديرًا لـ $f(3) = \frac{1}{3}$، أدخل

```
>subs(x=3,P);
```

الذي يعطي 0.325.

الخطوة الآتية هي حساب الحد المتبقي أو حد الخطأ الداخل في تقريب دالّة من خلال كثيرة حدود استكمال داخلي. لقد أجري ذلك في المبرهنة الآتية.

مبرهنة 3.3

افترض أن $x_0, x_1, \ldots, x_n$ أعداد مختلفة في الفترة $[a, b]$. وأن $f \in C^{n+1}[a, b]$. عندئذ لكل x ينتمي للفترة $[a, b]$. يوجد عدد $\xi(x)$ (عادة ما يكون غير معلوم) في الفترة (a, b) يحقق

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{3.3}$$

حيث إن $P(x)$ كثيرة حدود استكمال داخلي معطاة في الصيغة (1.3). ■

إن حد الخطأ لكثيرة حدود لاجرانج يمكن وصفها بطرائق أخرى. ولكن هذه الصيغة هي الأكثر فائدة والتي تتفق إلى حد كبير مع صيغة خطأ كثيرة حدود تايلور القياسية.

البرهان لاحظ أولًا أنه إذا كان $x = x_k$ لأي $k = 0, 1, \ldots, n$ فإن $f(x_k) = P(x_k)$ وإن اختيار $\xi(x_k)$ عشوائيًّا ضمن (a, b) سينتج الصيغة (3.3). وإذا كان $x \neq x_k$، لكل $k = 0, 1, \ldots, n$ فعرّف الدّالة g لـ t ضمن $[a, b]$ من خلال

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\frac{(t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)}$$

$$= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}$$

ولأن $f \in C^{n+1}[a, b]$ و $P \in C^{\infty}[a, b]$، فإن $g \in C^{n+1}[a, b]$. ومع $t = x_k$ يكون لدينا

$$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - [f(x) - P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(x_k - x_i)}{(x - x_i)} = 0 - [f(x) - P(x)]\cdot 0 = 0$$

وأكثر من ذلك

$$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)]\prod_{i=0}^{n}\frac{(x - x_i)}{(x - x_i)} = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] = 0$$

وأخيرًا $g \in C^{n+1}[a, b]$، و g صفر عند $n + 2$ من الأعداد المختلفة $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$. ومن خلال مبرهنة رول المعممة. يوجد عدد ξ ضمن (a, b) حيث $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. وبذلك

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - P(x)]\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}\right]_{t=\xi} \tag{3.4}$$

إن الاشتقاق من الرتبة $(n+1)$، $P^{(n+1)}(x)$، هو صفر بامتياز؛ لكون $P(x)$ دالّة من الرتبة n غالبًا. وأن $\prod_{i=0}^{n}[(t - x_i)/(x - x_i)]$ كثيرة حدود من الرتبة $(n+1)$ أيضًا. لذا

$$\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \left[\frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}\right]t^{n+1} + (\text{رتبة منخفضة في } t)$$

و $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\prod_{i=0}^{n}\frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$ تصبح الصيغة (4.3) الآن

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - [f(x) - P(x)]\frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

وبحل $f(x)$ يكون لدينا

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

■ ■ ■

تعدّ صيغة الخطأ المقدمة في مبرهنة (3.3) من النتائج النظرية المهمة، وذلك للاستخدامات الواسعة لكثيرات حدود لاجرانج في استنباط طرائق تفاضل وتكامل عددي. وتستخلص حدود الخطأ لهذه الأساليب من صيغة لاجرانج للخطأ.

لاحظ أن صيغة الخطأ لكثيرة حدود لاجرانج متشابهة إلى حدّ كبير مع مثيلتها لكثيرة حدود تايلور. ويجمع الحد النوني nth لكثيرة حدود تايلور حول x_0 المعلومات المتوفرة كلها عند x_0 وله حد خطأ من الصيغة

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

وتستخدم كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة n معلومات عند الأعداد المختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ وبدلاً من $(x - x_0)^{n+1}$، فإن صيغة الخطأ تستخدم ضرب $n + 1$ من الحدود $(x - x_0), (x - x_1), \ldots, (x - x_n)$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

يقتصر الاستخدام الخاص لصيغة الخطأ هذه على تلك الدّوال التي لمشتقاتها حدود معلومة.

مثال 2

لنفترض أننا بصدد إنشاء جدول للدّالة $f(x) = e^x$ لـ x ضمن $[0, 1]$. نفترض أن عدد الخانات العشرية التي تعطى لكل إدخال هو $d \geq 8$، وأن الفرق بين قيمتين متجاورتين لـ x- (طول الخطوة) هو h. فماذا يجب أن يكون h في الاستكمال الخطي (ونعني كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة 1) ليعطي خطأً مطلقاً بحد أعلى 10^{-6}؟

لتكن $x_0, x_1, \ldots$ الأعداد التي تقيّم f عندها، و x ضمن $[0, 1]$. افترض j يحقّق $x_j \leq x \leq x_{j+1}$. تؤدي الصيغة (3.3) إلى كون الخطأ في الاستكمال الخطي هو

$$|f(x) - P(x)| = \left|\frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - x_j)(x - x_{j+1})\right| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{2}|(x - x_j)||(x - x_{j+1})|$$

وحيث إن طول الخطوة هو h فإن $x_j = jh, x_{j+1} = (j + 1)h$ و

$$|f(x) - P(x)| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{2!}|(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

وبذلك

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2}\max_{\xi\in[0,1]} e^{\xi} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}}|(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

$$\leq \frac{1}{2}e \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}}|(x - jh)(x - (j+1)h)|$$

وبافتراض أن $g(x) = (x - jh)(x - (j+1)h)$ لـ $jh \le x \le (j+1)h$، وباستخدام مبرهنة القيمة المتطرفة (انظر تمرين 32) سنجد أن

$$\max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)| = \max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |g(x)| = \left| g\left(\left(j + \frac{1}{2}\right) h\right)\right| = \frac{h^2}{4}$$

وبناءً على ذلك فإن الخطأ في الاستكمال الخطي محدد وفقاً لـ

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{eh^2}{8}$$

ويكون مرضيًا لـ h التي تختار لتحقق

$$\frac{eh^2}{8} \le 10^{-6} \quad \text{وهذا يعني أن} \quad h < 1.72 \times 10^{-3}$$

ولوجوب كون $n = (1-0)/h$ عددًا صحيحًا، فهناك اختيار منطقي واحد لطول الخطوة هو $h = 0.001$. ■

ويوضح المثال الآتي استكمالاً داخليًا لحالة ما بحيث لا يمكن فيها استخدام جزء الخطأ من الصيغة (3.3).

مثال 3

يتضمن جدول (2.3) قيم الدّالة عند نقاط مختلفة. وستقارن التقريبات لـ $f(1.5)$ الناتجة من كثيرات حدود لاجرانج المختلفة. وحيث إن 1.5 تقع ما بين 1.3 و 1.6 فإن أنسب كثيرة حدود خطية تستخدم $x_0 = 1.3$ و $x_1 = 1.6$. وقيمة كثيرة حدود الاستكمال الداخلي عند 1.5 هي

جدول 2.3

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

$$P_1(1.5) = \frac{(1.5-1.6)}{(1.3-1.6)} f(1.3) + \frac{(1.5-1.3)}{(1.6-1.3)} f(1.6)$$
$$= \frac{(1.5-1.6)}{(1.3-1.6)}(0.6200860) + \frac{(1.5-1.3)}{(1.6-1.3)}(0.4554022) = 0.5102968$$

ويمكن قبول استخدام اثنتين من كثيرات الحدود من الرتبة 2 إحداهما باستخدام $x_0 = 1.3$، $x_1 = 1.6$، $x_2 = 1.9$ التي تعطي

$$P_2(1.5) = \frac{(1.5-1.6)(1.5-1.9)}{(1.3-1.6)(1.3-1.9)}(0.6200860) + \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.9)}{(1.6-1.3)(1.6-1.9)}(0.4554022)$$
$$+ \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.6)}{(1.9-1.3)(1.9-1.6)}(0.2818186) = 0.5112857$$

والأخرى باستخدام $x_0 = 1.0, x_1 = 1.3, x_2 = 1.6$ وتعطي $\hat{P}_2(1.5) = 0.5124715$.

ويوجد خياران مقبولان لكثيرة الحدود في حالة الرتبة الثالثة أيضًا، إحداهما باستخدام $x_0 = 1.3, x_1 = 1.6, x_2 = 1.9, x_3 = 2.2$ وتعطي $P_3(1.5) = 0.5118302$. ونحصل على الآخر من خلال استخدام $x_0 = 1.0, x_1 = 1.3, x_2 = 1.6, x_3 = 1.9$ وتعطي $\hat{P}_3(1.5) = 0.5118127$.
وتستخدم كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة الرابعة مدخلات الجدول جميعها. مع

$$x_1 = 1.3, x_2 = 1.6, x_3 = 1.9, x_4 = 2.2$$

فإن التقريب هو $P_4(1.5) = 0.5118200$. وحيث إن $P_3(1.5), \hat{P}_3(1.5), P_4(1.5)$ تتفق جميعها ضمن 2×10^{-5} من الوحدات، فإننا نتوقع هذه الرتبة من دقة هذه التقريبات. ونتوقع أن يكون $P_4(1.5)$ أكثر التقريبات دقة أيضا، لكونه يستخدم أغلب البيانات الموجودة.

والدّالة التي نحن بصدد تقريبها هي دالّة بيسيل من النوع الأول من الرتبة صفر، وقيمتها عند 1.5 معلومة وهي 0.5118277. لذا فإن الصورة الدقيقة للتقريبات هي كما يلي

$$|P_1(1.5) - f(1.5)| \approx 1.53 \times 10^{-3}$$
$$|P_2(1.5) - f(1.5)| \approx 5.42 \times 10^{-4}$$
$$|\hat{P}_2(1.5) - f(1.5)| \approx 6.44 \times 10^{-4}$$
$$|P_3(1.5) - f(1.5)| \approx 2.5 \times 10^{-6}$$
$$|\hat{P}_3(1.5) - f(1.5)| \approx 1.50 \times 10^{-5}$$
$$|P_4(1.5) - f(1.5)| \approx 7.7 \times 10^{-6}$$

وعلى الرغم من أن $P_3(1.5)$ هو التقريب الأدق إلا أنه لم تكن لدينا معلومات عن القيمة الحقيقية لـ $f(1.5)$، مما يجعلنا نقبل $P_4(1.5)$ على أنه أحسن تقريب، لكونه يتضمن أغلب البيانات حول الدّالة. إن حد خطأ لاجرانج المشتق ضمن المبرهنة (3.3) لا يمكن تطبيقه هنا، لعدم توفر معلومات عن المشتقة الرابعة لـ f. ولسوء الحظ، هذه هي الحالة عمومًا. ■

تكمن صعوبة استكمال لاجرانج الداخلي في صعوبة تطبيق حد الخطأ، وأخيرًا فإن رتبة كثيرة الحدود المطلوبة لدقة محددة لا تكون معروفة عمومًا حتى تُحدّد الحسابات. والإجراء المتبع هو أن نحسب النتائج المستخلصة من مختلف كثيرات الحدود حتى ظهور توافق مقبول، وقد أجري في المثال السابق أيضًا. وعلى أي حال فإن العمل المنجز في حساب التقريب من خلال كثيرة الحدود الثانية لا يقلل العمل المطلوب لحساب التقريب الثالث، وإن إيجاد التقريب الرابع ليس أسهل عندما يكون الثالث معلومًا، وهكذا. والآن سنشتق كثيرات حدود التقريب بأسلوب يستخدم الحسابات السابقة لمزايا أكبر.

تعريف 4.3 ليكن f دالّة معرّفة على $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$، وافترض أن $m_1, m_2, \ldots, m_k$ عبارة عن k من الأعداد الصحيحة المختلفة حيث $0 \le m_i \le n$ لكل i. سنرمز لكثيرة حدود لاجرانج التي تساوي $f(x)$ عند k من القيم $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}$ بالرمز $P_{m_1, m_2, \ldots, m_k}(x)$. ■

مثال 4 إذا كان $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 6$ و $f(x) = e^x$ فإن $P_{1,2,4}(x)$ كثيرة الحدود التي تتوافق مع $f(x)$ عند $x_1 = 2, x_2 = 3, x_4 = 6$. أي أن

$$P_{1,2,4}(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)}e^2 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)}e^3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}e^6$$ ■

توضح النتيجة الآتية طريقة لتوليد تقريبات كثيرة حدود لاجرانج توليدًا متكررًا.

مبرهنة 5.3 لتكن الدّالة f معرفة عند $x_0, x_1, \ldots, x_k$، و x_j و x_i عددين مختلفين في هذه المجموعة. عندئذ

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

تصف كثيرة حدود لاجرانج من النوع k التي تستكمل f داخليًا عند $k+1$ من النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_k$. ■

البرهان من أجل تسهيل الترميزات، ليكن $Q \equiv P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}$ و $\hat{Q} \equiv P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}$. وحيث إن $Q(x)$ و $\hat{Q}(x)$ كثيرتا حدود من الرتبة $k-1$ أو أقل، فإن رتبة $P(x)$ هي على الأكثر k. وإذا كان $0 \le r \le k$ و $r \ne i, j$ فإن $Q(x_r) = \hat{Q}(x_r) = f(x_r)$.

لذا

$$P(x_r) = \frac{(x_r - x_j)\hat{Q}(x_r) - (x_r - x_i)Q(x_r)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)}f(x_r) = f(x_r)$$

وأكثر من ذلك، حيث إن $\hat{Q}(x_i) = f(x_i)$ يكون لدينا

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\hat{Q}(x_i) - (x_i - x_i)Q(x_i)}{x_i - x_j} = \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)}f(x_i) = f(x_i)$$

وبالمثل حيث إن $Q(x_j) = f(x_j)$ يكون لدينا $P(x_j) = f(x_j)$. ولكن بحسب التعريف: هي كثيرة الحدود الوحيدة من الرتبة k على الأكثر مع f عند $x_0, x_1, \ldots, x_k$. وبذلك $P \equiv P_{0,1,\ldots,k}$.
■ ■ ■

تفيد المبرهنة (5.3) بأن كثيرات حدود الاستكمال الداخلي يمكن توليدها تكراريًّ. ويمكن توليدها على سبيل المثال وفق الأسلوب الظاهر في جدول (3.3)، حيث يستكمل كل صف قبل البدء بالصفوف الآتية:

جدول 3.3

x_0	$P_0 = Q_{0,0}$				
x_1	$P_1 = Q_{1,0}$	$P_{0,1} = Q_{1,1}$			
x_2	$P_2 = Q_{2,0}$	$P_{1,2} = Q_{2,1}$	$P_{0,1,2} = Q_{2,2}$		
x_3	$P_3 = Q_{3,0}$	$P_{2,3} = Q_{3,1}$	$P_{1,2,3} = Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$	
x_4	$P_4 = Q_{4,0}$	$P_{3,4} = Q_{4,1}$	$P_{2,3,4} = Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4}$

نيفيل E. N. neville أعطى هذا التعديل لصيغة لاجرانج ضمن ورقة [N] نشرت عام 1932.

تدعى هذه العملية "طريقة نيفيل" Neville's method. والصيغة P المستخدمة في الجدول (3.3) مشوشة، بسبب عدد المرافقات subscripts لتمثيل المضمون. لاحظ أنه بينما يبنى الصف، نحتاج إلى مرافقين فقط. والتقدم في الجدول نحو الأسفل يقابله استخدام النقاط المتتالية لـ x_i بصعود أكبر مع i، والتقدم في الجدول نحو اليمين يقابله زيادة رتبة كثيرة حدود الاستكمال الداخلي. وعند ظهور النقاط على نحو متتابع في الاتجاهين كليهما، فإننا نحتاج إلى توصيف نقطة بداية وعدد النقاط الإضافية المستخدمة في عمل التقريب فقط.

ولتجنب تعدد المرافقات في الترميز، ليكن $Q_{i,j}(x)$ لـ $0 \le j \le i$ تعبيرًا لكثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة j عند $(j+1)$ من الأعداد $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i$، أي أن

$$Q_{i,j} = P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1,i}$$

وباستخدام هذا الترميز لطريقة نيفيل نحصل على صف ترميزات Q في جدول (3.3).

مثال 5

استخرجت قيم كثيرات حدود الاستكمال الداخلي عند $x = 1.5$ في المثال (3) باستخدام بيانات أول عمودين من جدول (4.3)، قرّبنا $f(1.5)$ في هذا المثال باستخدام نتائج المبرهنة (5.3). فإذا كان $x_0 = 1.0, x_1 = 1.3, x_2 = 1.6, x_3 = 1.9, x_4 = 2.2$

فإن $Q_{0,0} = f(1.0), Q_{1,0} = f(1.3), Q_{2,0} = f(1.6), Q_{3,0} = f(1.9), Q_{4,0} = f(2.2)$

هذه هي كثيرات الحدود الخمسة من الرتبة صفر (الثوابت) التي تقرب $f(1.5)$.

وبحساب تقريب الرتبة الأولى $Q_{1,1}(1.5)$ نحصل على

$$Q_{1,1}(1.5) = \frac{(x - x_0)Q_{1,0} - (x - x_1)Q_{0,0}}{x_1 - x_0}$$
$$= \frac{(1.5 - 1.0)Q_{1,0} - (1.5 - 1.3)Q_{0,0}}{1.3 - 1.0}$$
$$= \frac{0.5(0.6200860) - 0.2(0.7651977)}{0.3} = 0.5233449$$

وبالمثل

$$Q_{2,1}(1.5) = \frac{(1.5 - 1.3)(0.4554022) - (1.5 - 1.6)(0.6200860)}{1.6 - 1.3} = 0.5102968$$

$Q_{4,1}(1.5) = 0.5104270$ و $Q_{3,1}(1.5) = 0.5132634$

وأفضل تقريب خطي نتوقعه هو $Q_{2,1}$، لكون 1.5 تقع ما بين $x_1 = 1.3$ و $x_2 = 1.6$.

وبالأسلوب نفسه، فإن التقريبات باستخدام كثيرات حدود برتب أعلى هي

$$Q_{2,2}(1.5) = \frac{(1.5 - 1.0)(0.5102968) - (1.5 - 1.6)(0.5233449)}{1.6 - 1.0} = 0.5124715$$

$Q_{4,2}(1.5) = 0.5137361$ و $Q_{3,2}(1.5) = 0.5112857$

التقريبات برتب أعلى تنتج بالأسلوب نفسه ومبينة في جدول (4.3). ■

جدول 4.3

1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715		
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857	0.5118127	
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361	0.5118302	0.5118200

فإذا كان آخر تقريب ليس بالدقة المطلوبة، يمكن اختيار نقطة أخرى x_5، وإضافة صف آخر للجدول وهو

$$x_5 \quad Q_{5,0} \quad Q_{5,1} \quad Q_{5,2} \quad Q_{5,3} \quad Q_{5,4} \quad Q_{5,5}$$

وبذلك فإن $Q_{4,4}$، $Q_{5,4}$، $Q_{5,5}$ يمكن مقارنتها لتحديد دقة أكثر.

الدّالة في المثال (5) هي دالّة بيسيل من النوع الأول لكل من الرتبة صفر. وقيمتها عند 2.5 هي -0.0483838 وهذا صف جديد من التقريبات لـ $f(1.5)$ وهو

2.5	−0.0483838	0.4807699	0.5301984	0.5119070	0.5118430	0.5118277

والقيمة الأخيرة الجديدة 0.5118277 لحد المرتبة العشرية السابعة صحيحة.

جدول 5.3

i	x_i	$\ln x_i$
0	2.0	0.69[illegible]1
1	2.2	0.78[illegible]5
2	2.3	0.83[illegible]9

مثال 6

يتضمن جدول (5.3) قيمًا دقيقةً لحد الخانات المبينة:

سنستخدم طريقة نيفيل لتقريب $f(x) = \ln x$. وباستكمال الجدول نحصل على مدخلات جدول (6.3).

جدول 6.3

i	x_i	$x - x_i$	Q_{i0}	Q_{i1}	Q_{i2}
0	2.0	0.1	0.6931		
1	2.2	-0.1	0.7885	0.7410	
2	2.3	-0.2	0.8329	0.7441	0.7420

وعندئذ $P_2(2.1) = Q_{22} = 0.7420$. وحيث إن $f(2.1) = \ln 2.1 = 0.7419$ لأربع خانات عشرية ، فإن الخطأ المطلق هو

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = |0.7419 - 0.7420| = 10^{-4}$$

على أي حال $f'(x) = 1/x,\ f''(x) = -1/x^2$ و $f'''(x) = 2/x^3$. فإن صيغة خطأ لاجرانج (3.3) تعطي حد الخطأ

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = \left|\frac{f'''(\xi(2.1))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{3(\xi(2.1))^3}(0.1)(-0.1)(-0.2)\right| \le \frac{0.002}{3(2)^3} = 8.\bar{3} \times 10^{-5}$$

لاحظ أن الخطأ الحقيقي 10^{-4} يتعدى حد الخطأ $8.\bar{3} \times 10^{-5}$. وهذا التناقض ناتج من حسابات الأعداد المحددة. لقد استخدمنا تقريبات الأعداد الأربعة ، وإن صيغة خطأ لاجرانج (3.3) تفترض حساب الأعداد اللانهائية. وهذا قد دفع أخطاءنا الحقيقية إلى تجاوز تقدير الخطأ النظري. ■

تنشئ الخوارزمية (1.3) المدخلات في طريقة نيفيل على شكل صفوف.

ALGORITHM
الخوارزمية 1.3

نيفيل للاستكمال الداخلي المكرّر Neville's Iterated Interpolation

لحساب كثيرة حدود الاستكمال الداخلي $P(x)$ على $n + 1$ من الأعداد المختلفة $x_0, \ldots, x_n$ عند العدد x للدّالة f؛

المدخلات: أرقام $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$؛ قيم $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ بمثابة العمود الأول $Q_{0,0}, Q_{1,0}, \ldots, Q_{n,0}$ of Q

المخرجات: الجدول Q مع $P(x) = Q_{n,n}$

الخطوة	المضمون
1	لـ $i = 1, 2, \ldots, n$ $j = 1, 2, \ldots, i$ دع $Q_{i,j} = \dfrac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$
2	المخرجات (Q) توقف.

■

يمكن تعديل الخوارزمية لتسمح بإضافة نقاط استكمال داخلي جديدة. فعلى سبيل المثال المتباينة

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon$$

يمكن استخدامها بوصفها معيار توقف. حيث ε عبارة عن حد السماح المحدد للخطأ. فإذا كانت المتباينة صحيحة فإن $Q_{i,i}$ تكون تقريبًا معقولاً لـ $f(x)$. أما إذا كانت غير صحيحة فتضاف نقطة استكمال داخلي جديدة x_{i+1}.

EXERCISE SET مجموعة التمارين 1.3

1. ليكن $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 0.9$ لكل الدّوال $f(x)$ أدناه. أنشئ كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة واحد على الأكثر، واثنين على الأكثر لتقريب $f(0.45)$، أوجد الخطأ المطلق:

أ. $f(x) = \cos x$ ب. $f(x) = \sqrt{1+x}$

ج. $f(x) = \ln(x+1)$ د. $f(x) = \tan x$

2. ليكن $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.6$، لكل الدّوال $f(x)$ أدناه، أنشئ كثيرات حدود استكمال داخلي من الرتبة واحد على الأكثر، واثنين على الأكثر، لتقريب $f(1.4)$، أوجد الخطأ المطلق:

أ. $f(x) = \sin \pi x$ ب. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

ج. $f(x) = \log_{10}(3x-1)$ د. $f(x) = e^{2x} - x$

3. استخدم المبرهنة (3.3) لإيجاد حد الخطأ للتقريبات في التمرين (1).

4. استخدم المبرهنة (3.3) لإيجاد حد الخطأ للتقريبات في التمرين (2).

5. استخدم كثيرات حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي المناسبة لكل من الدرجات: واحدة، اثنتين وثلاثة لتقريب كل مما يأتي:

أ. $f(8.4)$ إذا كان $f(8.1) = 16.94410, f(8.3) = 17.56492, f(8.6) = 18.50515, f(8.7) = 18.82091$

ب. $f(-\frac{1}{3})$ إذا كان $f(-0.75) = -0.07181250, f(-0.5) = -0.02475000, f(-0.25) = 0.33493750$، $f(0) = 1.10100000$.

ج. $f(0.25)$ إذا كان $f(0.1) = 0.62049958, f(0.2) = -0.28398668, f(0.3) = 0.00660095$، $f(0.4) = 0.24842440$

د. $f(0.9)$ إذا كان $f(0.6) = -0.17694460, f(0.7) = 0.01375227, f(0.8) = 0.22363362$، $f(1.0) = 0.65809197$

6. استخدم كثيرات حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي المناسبة لكل من الدرجات: واحدة، اثنتين وثلاثة لتقريب كل مما يأتي:

أ. $f(0.43)$ إذا كان $f(0) = 1, f(0.25) = 1.64872, f(0.5) = 2.71828, f(0.75) = 4.48169$

ب. $f(0)$ إذا كان $f(-0.5) = 1.93750, f(-0.25) = 1.33203, f(0.25) = 0.800781, f(0.5) = 0.687500$

ج. $f(0.18)$ إذا كان $f(0.1) = -0.29004986, f(0.2) = -0.56079734, f(0.3) = -0.81401972$، $f(0.4) = -1.0526302$

د. $f(0.25)$ إذا كان $f(-1) = 0.86199480, f(-0.5) = 0.95802009, f(0) = 1.0986123, f(0.5) = 1.2943767$

7. استخدم طريقة نيفيل لإيجاد التقريبات في التمرين (5).

8. استخدم طريقة نيفيل لإيجاد التقريبات في التمرين (6).

9. أُنتجت البيانات في التمرين (5) باستخدام الدّوال الآتية. استخدم صيغة الخطأ لإيجاد حد للخطأ، وقارن الحد بالخطأ الحقيقي للحالات $n = 1$ و $n = 2$:

أ. $f(x) = x \ln x$ ب. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$

ج. $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$ د. $f(x) = \sin(e^x - 2)$

10. أُنتجت البيانات في التمرين (6) باستخدام الدّوال الآتية. استخدم صيغة الخطأ لإيجاد حد للخطأ، وقارن الحد بالخطأ الحقيقي للحالتين $n = 1$ و $n = 2$:

أ. $f(x) = e^{2x}$ ب. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

ج. $f(x) = x^2 \cos x - 3x$ د. $f(x) = \ln(e^x + 2)$

11. استخدم طريقة نيفيل لتقريب $\sqrt{3}$ مع الدّوال والقيم الآتية:

أ. $f(x) = 3^x$ والقيم $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$.

ب. $f(x) = \sqrt{x}$ والقيم $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 5$.

ج. قارن بين دقة التقدير في الفقرتين (أ) و (ب).

12. لتكن $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ و $P_2(x)$ كثيرة حدود الاستكمال الداخلي على $x_0 = 0, x_1, x_2 = 1$. أوجد أكبر قيمة لـ x_1 ضمن $(0, 1)$ التي تدع $f(0.5) - P_2(0.5) = -0.25$.

13. لتكن $P_3(x)$ كثيرة حدود الاستكمال الداخلي للبيانات $(0, 0), (0.5, y), (1, 3), (2, 2)$. أوجد y إذا كان معامل x^3 في $P_3(x)$ هو 6.

14. استخدم كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي من الرتبة ثلاثة أو أقل، واعتمد قطع الحساب عند العدد الرباعي لتقريب $\cos 0.750$ مستخدمًا القيم الآتية، وأوجد حد خطأ للتقريب:

$\cos 0.698 = 0.7661 \quad \cos 0.733 = 0.7432 \quad \cos 0.768 = 0.7193 \quad \cos 0.803 = 0.6946$

القيمة الحقيقية لـ $\cos 0.750$ هي 0.7317 (إلى أقرب أربع خانات عشرية). وضّح التناقض ما بين الخطأ الحقيقي وحد الخطأ.

15. استخدم القيم الآتية والتقريب لأربع خانات لإنشاء تقريب كثيرة حدود لاجرانج الثالثة لـ $f(1.09)$. الدّالة قيد التقريب هي $f(x) = \log_{10}(\tan x)$. استخدم هذه المعلومة لإيجاد حد لخطأ في التقريب:

$f(1.00) = 0.1924 \quad f(1.05) = 0.2414 \quad f(1.10) = 0.2933 \quad f(1.15) = 0.3492$

16. كرّر التمرين (15) مستخدمًا Maple مع مجموعة الأعداد لـ 10.

17. تستخدم طريقة نيفيل لتقريب $f(0.5)$ معتمدة على الجدول الآتي. وحدّد $P_2 = f(0.7)$:

$x_0 = 0$	$P_0 = 0$		
$x_1 = 0.4$	$P_1 = 2.8$	$P_{0,1} = 3.5$	
$x_2 = 0.7$	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2} = \frac{27}{7}$

18. تستخدم طريقة نيفيل لتقريب $f(0.4)$ معتمدة على الجدول الآتي، وحدّد $P_2 = f(0.5)$:

$x_0 = 0$	$P_0 = 1$			
$x_1 = 0.25$	$P_1 = 2$	$P_{01} = 2.6$		
$x_2 = 0.5$	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$	
$x_3 = 0.75$	$P_3 = 8$	$P_{2,3} = 2.4$	$P_{1,2,3} = 2.96$	$P_{0,1,2,3} = 3.016$

19. أنشئ كثيرات حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي للدّوال الآتية، وأوجد حدًّا للخطأ المطلق في الفترة $[x_0, x_n]$:

أ. $f(x) = e^{2x} \cos 3x, \quad x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.6, n = 2$

ب. $f(x) = \sin(\ln x), \quad x_0 = 2.0, x_1 = 2.4, x_2 = 2.6, n = 2$

ج. $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1, x_1 = 1.1, x_2 = 1.3, x_3 = 1.4, n = 3$

د. $f(x) = \cos x + \sin x, \quad x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 1.0, n = 3$

20. ليكن $f(x) = e^x$ لكل $0 \le x \le 2$

أ. قرّب $f(0.25)$ مستخدمًا استكمالًا داخليًا خطيًا مع $x_0 = 0$ و $x_1 = 0.5$.

ب. قرّب $f(0.75)$ مستخدمًا استكمالًا داخليًا خطيًا مع $x_0 = 0.5$ و $x_1 = 1$.

ج. قرّب $f(0.25)$ و $f(0.75)$ مستخدمًا ثاني كثيرة حدود استكمال داخلي مع $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$.

د. أي التقريبات أحسن؟ ولماذا؟

21. افترض أنك بحاجة إلى إنشاء جداول من أربع خانات عشرية لدالّة اللوغارتميّة ذات الأساس 10 من $x = 1$ لـ $x = 10$، بحيث يكون الاستكمال الداخلي الخطي فيها دقيقًا لحد 10^{-6}. ضع حدًا لحجم الخطوة في هذا الجدول. ما خيارات حجم الخطوة لضمان وجود $x = 10$ في الجدول؟

22. افترض $x_j = j$، $j = 0, 1, 2, 3$. ومن المعلوم أن $P_{0,1}(x) = x + 1$، $P_{1,2}(x) = 3x - 1$ و $P_{1,2,3}(1.5) = 4$ فأوجد $P_{0,1,2,3}(1.5)$.

23. افترض $x_j = j$، $j = 0, 1, 2, 3$ ومن المعلوم أن $P_{0,1}(x) = 2x + 1, P_{0,2}(x) = x + 1, P_{1,2,3}(2.5) = 3$ فأوجد $P_{0,1,2,3}(2.5)$.

24. تُطبّق خوارزمية نيفيل لتقريب $f(0)$ مستخدمة $f(-2), f(-1), f(1), f(2)$. افترض أن $f(-1)$ زيدت بمقدار 2، وأن $f(1)$ أنقصت بمقدار 3. حدّد الخطأ في الحسابات الأصلية لكثيرة حدود استكمال داخلي لتقريب $f(0)$.

25. أنشئ متتالية لقيم استكمال داخلي y_n لـ $f(1 + \sqrt{10})$، حيث $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ $-5 \le x \le 5$ ووفق الآتي:

لكل $n = 1, 2, \ldots, 10$، ليكن $h = 10/n$ و $y_n = P_n(1 + \sqrt{10})$، حيث إن $P_n(x)$ كثيرة حدود الاستكمال الداخلي لـ $f(x)$ عند النقاط $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ وأن $x_j^{(n)} = -5 + jh$، $j = 0, 1, 2, \ldots, n$
هل تبدو المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة إلى $f(1 + \sqrt{10})$؟

معكوس استكمال داخلي Inverse Interpolation افترض $f \in C^1[a, b], f'(x) \neq 0$ on $[a, b]$، وأن لـ f صفرًا واحدًا p ضمن $[a, b]$. لتكن $x_0, \ldots, x_n$ عبارة عن أعداد مختلفة ضمن $[a, b]$ مع $f(x_k) = y_k$ لكل $k = 0, 1, \ldots, n$. لتقريب p، تُنشأ كثيرة حدود استكمال داخلي من الرتبة n على النقاط $y_0, \ldots, y_n$ لـ f^{-1}. وحيث إن $y_k = f(x_k)$ و $0 = f(p)$ يكون لدينا $x_k = f^{-1}(y_k)$ و $p = f^{-1}(0)$. يسمى الاستكمال الداخلي المكرّر لتقريب $f^{-1}(0)$ (معكوس الاستكمال الداخلي المكرّر).

26. استخدم معكوس استكمال داخلي معاد لإيجاد التقريب لحل $x - e^{-x} = 0$ مع البيانات الآتية:

x	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

27. أنشئ خوارزمية يمكن استخدامها في معكوس استكمال داخلي.

28. أ. تضمنت مقدمة هذا الباب جدول التعداد السكاني للولايات المتحدة للفترة من 1940 إلى 1990. استخدم كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال الداخلي لتقريب حجم السكان في الأعوام 1930، 1965 و 2010.

ب. كان عدد السكان عام 1930 123,203,000 تقريبًا. ما دقة نتيجتك في العامين 1965 و 2010 بحسب ما ترى؟

29. يعتقد أن الكميات العالية من حمض التنتلك في أوراق أشجار البلوط البالغة تعيق نمو يرقات عثة الشتاء (*Operophtera bromata L., Geometridae*) التي تؤذي هذه الأشجار كثيرًا في سنوات معينة. ويبين الجدول الآتي معدل وزن عينتين من هذه اليرقات خلال الأيام 28 الأولى بعد ولادتها.