وتستند طريقة أيكن Δ^2 إلى الافتراض بأن المتتالية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ والمعرفة بـ

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \tag{2.12}$$

تتقارب بسرعةٍ أكثر إلى p مما عليه المتتالية الأصلية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$.

مثال 1 المتتالية $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$، حيث تتقارب $p_n = \cos(1/n)$ خطيًا إلى $p = 1$. والحدود القليلة الأولى للمتتاليتين $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\hat{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ معطاة في جدول (11.2). وهي حتمًا تظهر أن $\{\hat{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب أسرع من $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ إلى $p = 1$. ■

جدول 11.2

$\hat{p}_n$	p_n	n
0.96178	0.54030	1
0.98213	0.87758	2
0.98979	0.94496	3
0.99342	0.96891	4
0.99541	0.98007	5
	0.98614	6
	0.98981	7

ويعود أصل رمز Δ ملازمة هذا الأسلوب إلى التعريف الآتي.

تعريف 12.2 الفرق التتابعي Δp_n (ويقرأ "دلتا p_n") للمتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$، يعرف بالصيغة

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n \quad n \geq 0 \text{ لكل}$$

والقوى الأعلى للمشغل Δ تعرف بوجه تكراري بالصيغة

$$\Delta^k p_n = \Delta(\Delta^{k-1} p_n) \quad k \geq 2 \text{ لكل}$$ ■

يؤدي التعريف إلى

$$\Delta^2 p_n = \Delta(p_{n+1} - p_n) = \Delta p_{n+1} - \Delta p_n = (p_{n+2} - p_{n+1}) - (p_{n+1} - p_n)$$

وعندئذ $\Delta^2 p_n = p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n$ ويمكن كتابة صيغة $\hat{p}_n$ المعطاة في الصيغة (12.2) بالصيغة

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n} \quad n \geq 0 \text{ لكل} \tag{13.2}$$

وعند نقطة النقاش هذه حول طريقة أيكن Δ^2، نكون قد توصّلنا إلى أن المتتالية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى p أكثر سرعة من المتتالية الأصلية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$. لكننا لم نوضّح ما نعنيه بعبارة "أكثر سرعة تقارب". وتوضّح المبرهنة (13.2) هذا الأسلوب وتبرّره. وبرهان هذه المبرهنة متروك في التمرين (16).

مبرهنة 13.2 افترض أن $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية تتقارب خطيًا إلى p، وأن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} < 1$$

عندئذ فالمتتالية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب نحو p أسرع من $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$، على النحو

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = 0$$ ■

استخدم ألكسندر آيتكن (1895-1967) Alexander Aitken هذا الأسلوب عام 1926 لتسريع معدل التقارب لسلسلة في ورقة بحثية حول المعادلات الجبرية [Ai]. هذه العملية شبيهة بالتي استخدمت قبل ذلك كثيرا من قبل الرياضي الياباني تاكاكازو سيكي كوا (1642-1708) Takakazo Seki Kowa.

وبتطبيق اختصار طريقة أيكن Δ^2 على متتالية متقاربة خطيًا وناتجة عن تكرار النقطة الثابتة يمكننا تسريع التقارب في الإطار التربيعي. هذا الأسلوب معروف بطريقة ستيفنسن، ويختلف نوعًا ما عن تطبيق طريقة أيكن Δ^2 مباشرة نحو التقارب الخطي لمتتالية التكرار بالنقطة الثابتة. وتبني طريقة أيكن Δ^2 الحدود وفقًا للترتيب

$$p_0, \quad p_1 = g(p_0), \quad p_2 = g(p_1), \quad \hat{p}_0 = \{\Delta^2\}(p_0), \quad p_3 = g(p_2), \quad \hat{p}_1 = \{\Delta^2\}(p_1), \ldots$$

حيث تشير $\{\Delta^2\}$ إلى استخدام الصيغة (13.2). وتبني طريقة ستيفنسن الحدود الأربعة الأولى p_0، p_1، p_2، و $\hat{p}_0$ نفسها. وعلى أي حال فعند هذه الخطوة يفترض أن تكون $\hat{p}_0$ أفضل تقريب إلى p من p_2، وتطبيق تكرار النقطة الثابتة لـِ $\hat{p}_0$ بدلاً من p_2. وباستخدام هذه اللحوظة تكون المتتالية الناتجة

كتب جوهان فريدرك ستيفنسن (1873–1961) Johan Fredrik Steffensen كتاب عميقاً عام 1927 بعنوان الاستيفاء الداخلي.

$$p_0^{(0)}, \quad p_1^{(0)} = g(p_0^{(0)}), \quad p_2^{(0)} = g(p_1^{(0)}), \quad p_0^{(1)} = \{\Delta^2\}(p_0^{(0)}), \quad p_1^{(1)} = g(p_0^{(1)}), \ldots.$$

وينتج كل ثالث حد بالصيغة (13.2)، حيث تستخدم في الحدود الأخرى تكرار النقطة الثابتة للحد الذي يسبقه. والعملية موضحة ضمن الخوارزمية (6.2).

ALGORITHM
الخوارزمية
6.2

خوارزمية ستيفنسن Steffensen's Algorithm

لإيجاد حل لـِ $p = g(p)$ مع تقريب ابتدائي p_0:

المدخلات: تقريب ابتدائي p_0، الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$
2	ما دام $i \leq N_0$ فنفذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p_1 = g(p_0)$ (احسب $p_1^{(i-1)}$) $p_2 = g(p_1)$ (احسب $p_2^{(i-1)}$) $p = p_0 - (p_1 - p_0)^2/(p_2 - 2p_1 + p_0)$ (احسب $p_0^{(i)}$)
4	إذا كان $\|p - p_0\| < TOL$ المخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i+1$
6	ضع $p_0 = p$ (تحديث p_0)
7	المخرجات: (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و N_0 ، '$= N_0$) (لم تستكمل العملية بنجاح). توقف.

■

لاحظ أن $\Delta^2 p_n$ قد تكون صفرًا، التي ستظهر صفرًا في مقام التكرار التالية، وهذا إن حدث نحدد المتتالية ونختار $p_2^{(i-1)}$ بمثابة الإجابة التقريبية.

مثال 2 لحل $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ مستخدمًا طريقة ستيفنسن، ضع $x^3 + 4x^2 = 10$، اقسم على $x + 4$ وأعطِ حلاً لـ x. تنتج هذه العملية طريقة النقطة الثابتة

$$g(x) = \left(\frac{10}{x+4}\right)^{1/2}$$ المستخدمة في المثال 3 (د) من الفصل (2.2).

يعطي أسلوب ستيفنسن مع $p_0 = 1.5$ القيم في جدول (12.2). واتكرار $p_0^{(2)} = 1.365230013$ دقيقة لغاية 10^{-9}. ونجد في هذا المثال أن طريقة ستيفنسن تعطي لحقة نفسها لطريقة نيوتن تقريبًا. (انظر مثال 4 من الفصل 4.2). ■

جدول 12.2

k	$p_0^{(k)}$	$p_1^{(k)}$	$p_2^{(k)}$
0	1.5	1.348399725	1.367376372
1	1.365265224	1.365225534	1.365230583
2	1.365230013		

يظهر من المثال (2) أن طريقة ستيفنسن تعطي تقاربًا تربيعيًا دون تقييم المشتقة. وقد أوضحت المبرهنة (14.2) هذه الحالة. ويمكن إيجاد برهان هذه المبرهنة في [He2, pp. 90–92] أو [IK, pp. 103–107].

مبرهنة 14.2

افترض أن $x = g(x)$ لها حل p حيث $g'(p) \neq 1$. إذا وجد $\delta > 0$ حيث $g \in C^3[p-\delta, p+\delta]$، فإنّ طريقة ستيفنسن تعطي تقاربًا تربيعيًا لأي $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

■

EXERCISE SET مجموعة التمارين 5.2

1. المتتاليات الآتية متقاربة خطيًا. ولّد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية $\{\hat{p}_n\}$ مستخدمًا طريقة أيكن Δ^2:
   أ. $p_0 = 0.5,\quad p_n = (2 - e^{p_{n-1}} + p_{n-1}^2)/3,\quad n \ge 1$
   ب. $p_0 = 0.75,\quad p_n = (e^{p_{n-1}}/3)^{1/2},\quad n \ge 1$
   ج. $p_0 = 0.5,\quad p_n = 3^{-p_{n-1}},\quad n \ge 1$
   د. $p_0 = 0.5,\quad p_n = \cos p_{n-1},\quad n \ge 1$
2. افترض الدّالة $f(x) = e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)e^{4x} - (\ln 2)^3$. استخدم طريقة نيوتن مع $p_0 = 0$ لتقريب صفر الدّالة f ولّد حدودًا لغاية $|p_{n+1} - p_n| < 0.0002$. كوّن متتالية أيكن Δ^2 وهي $\{\hat{p}_n\}$. هل تحسن التقارب؟
3. ليكن $g(x) = \cos(x-1)$ و $p_0^{(0)} = 2$. استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد $p_0^{(1)}$.
4. ليكن $g(x) = 1 + (\sin x)^2$ و $p_0^{(0)} = 1$. استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد $p_0^{(1)}$ و $p_0^{(2)}$.
5. طُبّقت طريقة ستيفنسن على الدّالة $g(x)$ باستخدام $p_0^{(0)} = 1$ و $p_2^{(0)} = 3$ لإيجاد $p_0^{(1)} = 0.75$ فما $p_1^{(0)}$؟
6. طُبّقت طريقة ستيفنسن على الدّالة $g(x)$ باستخدام $p_0^{(0)} = 1$ و $p_1^{(0)} = \sqrt{2}$ لإيجاد $p_0^{(1)} = 2.7802$ فما $p_2^{(0)}$؟
7. استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد – ضمن دقة 10^{-4} – جذر $x^3 - x - 1 = 0$ ضمن $[1, 2]$، وقارن هذا بنتائج التمرين (6) من الفصل (2.2).
8. استخدم طريقة ستيفنسن لإيجاد – ضمن دقة 10^{-4} – جذر $x - 2^{-x} = 0$ ضمن $[0, 1]$، وقارن هذا بنتائج التمرين (8) من الفصل (2.2).
9. استخدم طريقة ستيفنسن مع $p_0 = 2$ لحساب تقريب إلى $\sqrt{3}$ ضمن دقة 10^{-4}. قارن هذه التمهيدية بنتائج التمرين (9) من الفصل (2.2) ونتائج التمرين (12) من الفصل (1.2).
10. استخدم طريقة ستيفنسن مع $p_0 = 3$ لحساب تقريب إلى $\sqrt[3]{25}$ ضمن دقة 10^{-4}. قارن هذه التمهيدية بنتائج التمرين (10) من الفصل (2.2) ونتائج التمرين (13) من الفصل (1.2).

11. استخدم طريقة ستيفنسن لتقريب حلول الصيغ الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $x = (2 - e^x + x^2)/3$ حيث الدّالة g دالة التمرين 11(أ) من الفصل (2.2).

ب. $x = 0.5(\sin x + \cos x)$ حيث الدّالة g دالة التمرين 11(و) من الفصل (2.2).

ج. $x = (e^x/3)^{1/2}$ حيث الدّالة g دالة التمرين 11(ج) من الفصل (2.2).

د. $x = 5^{-x}$ حيث الدّالة g دالة التمرين 11(د) من الفصل (2.2).

12. استخدم طريقة ستيفنسن لتقريب حلول الصيغ الآتية ضمن 10^{-5}:

أ. $2 + \sin x - x = 0$ حيث الدّالة g دالة التمرين 12(أ) من الفصل (2.2).

ب. $x^3 - 2x - 5 = 0$ حيث الدّالة g دالة التمرين 12(ب) من الفصل (2.2).

ج. $3x^2 - e^x = 0$ حيث الدّالة g دالة التمرين 12(ج) من الفصل (2.2).

د. $x - \cos x = 0$ حيث الدّالة g دالة التمرين 1(د) من الفصل (2.2).

13. تتقارب المتتاليات الآتية إلى الصفر. استخدم طريقة أيكن Δ^2 لتوليد $\{\hat{p}_n\}$ إلى حين ظهور $|\hat{p}_n| \le 5 \times 10^{-2}$:

أ. $p_n = \frac{1}{n}, \quad n \ge 1$ ب. $p_n = \frac{1}{n^2}, \quad n \ge 1$

14. توصف المتتالية $\{p_n\}$ بأنها متقاربة بأقصى خطية إلى p إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = 0$$

أ. أثبت أنه إذا كان $p_n \to p$ من الرتبة α و$\alpha > 1$، فإنّ $\{p_n\}$ تتقارب بأقصى خطية إلى p.

ب. أثبت أن $p_n = 1/n^n$ تتقارب بأقصى خطية إلى الصفر. لكنها لا تتقارب إلى الصفر من الرتبة α ولأي $\alpha > 1$.

15. افترض أن $\{p_n\}$ تتقارب بأقصى خطية إلى p. أثبت أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p|} = 1$$

16. برهن على صحة المبرهنة (13.2) [ملحوظة : ليكن $\delta_n = (p_{n+1} - p)/(p_n - p) - \lambda$، وأثبت أن $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$، ثم ضع $(\hat{p}_{n+1} - p)/(p_n - p)$ بدلالة δ_{n+1}, δ_n، λ.]

17. لتكن كثيرة حدود تايلور النونية لـ $P_n(x)$ ممتدة حول $x_0 = 0$:

أ. حيث x ثابت، أثبت أن $p_n = P_n(x)$ يحقّق فرضيات المبرهنة (13.2).

ب. ليكن $x = 1$، استخدم طريقة أيكن Δ^2 لتوليد المتتالية $\hat{p}_0, \ldots, \hat{p}_8$.

ج. هل طريقة أيكن تُعجّل التقارب في هذه الحالة؟

6.2 أصفار كثيرات الحدود وطريقة مولر
Zeros of Polynomials and Muller's Method

كارل فريدريك جاوس
(1777-1855)
Carl Friedrich Gauss
أحد أعظم الرياضيين في كل الأزمنة قدّم برهن هذه النتيجة ضمن أطروحته للدكتوراة، ونشرها عام 1799.

الشكل العام لكثيرة الحدود من الرتبة n تكون على الصورة

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث تسمى a_i's معاملات P وهي ثوابت. وإن $a_n \ne 0$. والدّالة الصفرية $P(x) = 0$ لكل x هي كثيرة حدود درجتها غير محددة.

مبرهنة 15.2 المبرهنة الرئيسة للجبر Fundamental Theorem of Algebra

إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود رتبتها $n \geq 1$، ومعاملاتها أعداد حقيقية أو مركبة، فيوجد للصيغة $P(x) = 0$ جذر (قد يكون مركبًا) واحد على الأقل. ■

مع أن المبرهنة (15.2) رئيسة لأي دراسة حول دوال ابتدائية، فإنّ البرهان المعتاد يتطلب أساليب دراسة مبرهنة الدّالة المركب. ونحيل القارئ إلى [SaS, p. 155]؛ بهدف تطوير نظم المواضيع المطلوب إثباتها.

ونعرض تمهيدية مهمة للمبرهنة (15.2) كما يلي:

تمهيدية 16.2

إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود من الرتبة $n \geq 1$ مع معاملاتها أعداد حقيقية أو مركبة. عندئذ يوجد ثوابت وحيدة $x_1, x_2, \ldots, x_k$ قد تكون مركبة، وأعداد صحيحة موجبة وحيدة $m_1, m_2, \ldots, m_k$ تحقق $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ و

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$ ■

تنص تمهيدية (16.2) على أن مجموعة الأصفار لكثيرة الحدود تكون وحيدة، وأنه إذ عُدّ كل صفر x_i لعدد من المرات قدر مضاعفه m_i، فإنّ كثيرة حدود من الرتبة n لها n من الأصفار تمامًا. تستخدم التمهيدية الآتية لبرهنة الجبر الرئيسة غالبًا في هذا الباب وفي الأبواب الأخيرة.

تمهيدية 17.2

لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود كل منهما من الرتبة n على الأكثر. إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_k$ حيث $k > n$، أعدادًا مختلفة حيث $P(x_i) = Q(x_i)$ لـ $i = 1, 2, \ldots, k$ فإنّ $P(x) = Q(x)$ لقيم x جميعها. ■

كان وليم هورنر William Horner (1786-1837) طفلا عبقريًا، وقد أصبح رئيسًا لمدرسة في بريستول في سن 18. طريقة هورنر لحل معادلات جبرية قد نُشرت عام 1819 في philosophical Ttransactions للجمعية الملكية

ولاستخدام طريقة نيوتن في تحديد تقريب لأصفار كثيرة الحدود $P(x)$، فإنّنا نحتاج إلى تقييم $P(x)$ و $P'(x)$ عند قيم محددة. وحيث إن $P(x)$ و $P'(x)$ كلتيهما كثيرتا حدود، فإنّ كفاءة الحسابات تتطلب كون تقييم هذه الدّوال قد ورد بأسلوب التداخل الذي تناولناه في الفصل (1.2). تتعامل طريقة هورنر Horner's Method مع أسلوب التداخل هذا، وهي تتطلب n من الضرب فقط و n من الجمع لتقييم كثيرة حدود غير منهجية من الرتبة n تمهيدية لذلك.

تمهيدية 18.2 طريقة هورنر Horner's Method

لتكن

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

إذا كان $b_n = a_n$ وكان

$$b_k = a_k + b_{k+1} x_0 \quad \text{لكل} \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$$

فإنّ $b_0 = P(x_0)$. وبالإضافة إلى ذلك. إذا كان

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$$

فإنّ

$$P(x) = (x - x_0) Q(x) + b_0$$ ■

كان باولو روفيني Paolo Ruffini (1765-1822) قد أوضح طريقة مشابهة جعلته يفوز بميدالية ذهبية من الجمعية الرياضية الإيطالية للعلوم

لم يكن روفيني ولا هورنر أول من اكتشف هذه الطريقة. وقد كانت في الصين قبل ذلك بنحو 500 سنة على الأقل.

البرهان من تعريف $Q(x)$

$$\begin{aligned}(x-x_0)Q(x)+b_0 &= (x-x_0)(b_nx^{n-1}+\cdots+\ b_2x+b_1)+b_0\\ &= (b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\ b_2x^2+b_1x)\\ &\quad -(b_nx_0x^{n-1}+\cdots+\ b_2x_0x+b_1x_0)+b_0\\ &= b_nx^n+(b_{n-1}-b_nx_0)x^{n-1}+\cdots+\ (b_1-b_2x_0)x+(b_0-b_1x_0)\end{aligned}$$

وبافتراض $b_n = a_n$ و $b_k - b_{k+1}x_0 = a_k$ يكون

$$b_0 = P(x_0) \text{ و } (x-x_0)Q(x)+b_0 = P(x)$$

■ ■ ■

مثال 1 استخدم طريقة هورنر لتقييم $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 \text{ at } x_0 = -2$.

حينما نستخدم حاسبة يدوية في طريقة هورنر. ننشئ -أولًا- جدولًا يبين اسم التجزئة التشبيهية الذي يُعتَمد غالبًا. أما هذه المسألة، فيكون الجدول كالآتي:

	المعامل x^4	المعامل x^3	المعامل x^2	المعامل x	الحد الثابت
$x_0 = -2$	$a_4 = 2$	$a_3 = 0$	$a_2 = -3$	$a_1 = 3$	$a_0 = -4$
		$b_4x_0 = -4$	$b_3x_0 = 8$	$b_2x_0 = -10$	$b_1x_0 = 14$
	$b_4 = 2$	$b_3 = -4$	$b_2 = 5$	$b_1 = -7$	$b_0 = 10$

بناءً عليه

$$P(x) = (x+2)(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7) + 10$$

■

إن كلمة "مقلد synthetic" لها جذورها في لغات مختلفة وفي اللغة الإنجليزية الأساسية توحي بأن شيئًا ما "مزيف" أو، مستبدل. ولكنها في الرياضيات تأخذ مفهوم شيء ما دُمج معًا. تعامل الهندسة المقلدة الأشكال في مجملها بدلًا من كونها أشياء فردية هي سمة في الهندسة التحليلية. في القسمة المقلدة لكثيرات الحدود فإن القوى المختلفة للمتغيرات لا تعطى حصريًا، بل تبقى مدمجة معًا.

وميزة إضافية لاستخدام أسلوب هورنر (أو التجزئة التشبيهية) هي كون

$$P(x) = (x-x_0)Q(x) + b_0$$

حيث إن

$$Q(x) = b_nx^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots +\ b_2x + b_1$$

قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x التي تعطي

$$P'(x_0) = Q(x_0) \text{ و } P'(x) = Q(x) + (x-x_0)Q'(x) \qquad (14.2)$$

وعند استخدام طريقة (نيوتن–رافسون) لإيجاد صفر التقريب لكثيرة الحدود، فإنّه يمكن تقييم $P(x)$ و $P'(x)$ بالأسلوب نفسه.

مثال 2 أوجد تقريبًا لأحد أصفار

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$$

مستخدمًا طريقة نيوتن والتجزئة التشبيهية لتقييم $P(x_n)$ و $P'(x_n)$ لكل تكرار x_n عندما تكون $x_0 = -2$ تقريبًا ابتدائيًا.

سبق أن وجدنا $P(-2)$ في المثال (1) من خلال

$x_0=-2$	2	0	-3	3	-4	
		-4	8	-10	14	
	2	-4	5	-7	10	$=P(-2)$

وباستخدام المبرهنة (18.2) والصيغة (14.2) نحصل على

$$P'(-2)=Q(-2) \quad \text{و} \quad Q(x)=2x^3-4x^2+5x-7$$

لذا يمكن إيجاد $P'(-2)$ من خلال تقييم $Q(-2)$ بالأسلوب نفسه

$x_0=-2$	2	-4	5	-7	
		-4	16	-42	
	2	-8	21	-49	$=Q(-2)=P'(-2)$

وإن

$$x_1=x_0-\frac{P(x_0)}{P'(x_0)}=x_0-\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=-2-\frac{10}{-49}\approx-1.796$$

ونعيد العملية لإيجاد x_2:

-1.796	2	0	-3	3	-4	
		-3.592	6.451	-6.197	5.742	
	2	-3.592	3.451	-3.197	1.742	$=P(x_1)$
		-3.592	12.902	-29.368		
	2	-7.184	16.353	-32.565	$=Q(x_1)$	$=P'(x_1)$

لذا

$$P(-1.796)=1.742,\ P'(-1.796)=Q(-1.796)=-32.565$$

و

$$x_2=-1.796-\frac{1.742}{-32.565}\approx-1.7425$$

وبأسلوب مماثل، نجد أن $x_3=-1.73897$. وإن صفرًا حقيقيًّا لخمس منازل عشرية يكون (-1.73896). ■

لاحظ أن كثيرة الحدود $Q(x)$ تعتمد على التقريب المستخدم والتغير من تكرار لى أخرى.

تحسب الخوارزمية (7.2) $P(x_0)$ و $P'(x_0)$ باستخدام طريقة هورنر.

ALGORITHM

الخوارزمية 7.2

خوارزمية هورنر Horner's Algorithm

لحساب قيم كثيرة الحدود

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=(x-x_0)Q(x)+b_0$$

ومشتقتها عند x_0: