دقيقًا بالقدر المطلوب. وقد طُبّق هذا الحد في مسألة المثال (1) للدلالة على ذلك ويضمن فقط

$$|p - p_9| \le \frac{2-1}{2^9} \approx 2 \times 10^{-3}$$

حيث إن الخطأ الحقيقي أصغر من ذلك كثيرًا، وهو

$$|p - p_9| = |1.365230013 - 1.365234375| = 4.4 \times 10^{-6}$$

مثال 2

لتحديد عدد مرات التكرار الضرورية لحل $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ بدقة 10^{-3} وباستخدام $a_1 = 1$ و $b_1 = 2$ يجب إيجاد عدد صحيح N يحقّق

$$|p_N - p| \le 2^{-N}(b - a) = 2^{-N} < 10^{-3}$$

سنستخدم اللوغارتمات لتحديد N. وعلى الرغم من أن اللوغارتمات لأي أساس تفي بالغرض، إلا أننا سنستخدم الأساس 10. ولأن $2^{-N} < 10^{-3}$ تؤدي إلى كون $\log_{10} 2^{-N} < \log_{10} 10^{-3} = -3$ فإنّنا نحتاج إلى أن يكون لدينا

$$-N \log_{10} 2 < -3 \quad \text{ومن ثم} \quad N > \frac{3}{\log_{10} 2} \approx 9.96$$

وبناءً على ذلك، فإنّ 10 تكرارات ستُضمَن بدقة ضمن 10^{-3} تقريبًا. ويظهر الجدول (1.2) أن القيمة $p_9 = 1.365234375$ ضمن 10^{-4} بدقة. ومرة أخرى فإن تحليل الخطأ يعطي حدًّا لعدد مرات التكرار فقط. ومن الضروري أن يُعلم أن هذا الحد يكون في حالات كثيرة أكبر كثيرًا من العدد الحقيقي المطلوب. ■

إن عدد التكرارات في طريقة التنصيف تفترض أن الحسابات تجري باستخدام حساب الخانات غير المنتهية. وعندما تُنفّذ في الحاسبة يتعين عندئذ أخذ تقريب الخطأ في الحسبان. ويتحتم إيجاد حساب نقطة التنصيف للفترة $[a_n, b_n]$ على سبيل المثال وفق الصيغة

$$p_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$$

بدلًا من الصيغة الجبرية المكافئة لها

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

فالصيغة الأولى تضيف تصحيحًا بسيطًا وهو $(b_n - a_n)/2$ للقيمة المعلومة a_n. فعندما تكون $b_n - a_n$ قريبة من الدقة العظمى للآلة فإنّ ثمة خطأ ضمن هذا التصحيح على الرغم من أنه لن يؤثر بوضوح في القيمة المحسوبة لـ p_n. لذا عندما يحدث ذلك فإنّ من الممكن لـ $(b_n - a_n)/2$ تكرار نقطة التنصيف التي لا تكون أصلًا في الفترة $[a_n, b_n]$.

الكلمة اللاتينية signum تعني رمز "token" أو إشارة "sign"، لذا فالاقتران الرمزي يعيد بشكل طبيعي إشارة الرقم (ما لم يكن الرقم صفرًا).

ملحوظة أخيرة، لتحديد أي جزء من الفترة $[a_n, b_n]$ يتضمن الجذر f، فمن المستحسن توظيف دالّة Signum التي تعرّف بالآتي:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

obeikandl.com

إن الاختبار سيكون

$$f(a_n) \cdot f(p_n) > 0 \text{ بدلاً من } \operatorname{sgn}(f(a_n)) \cdot \operatorname{sgn}(f(p_n)) > 0$$

وسيعطي النتائج نفسها، لكنه يتجنب احتمال التضخيم أو التقليص في عملية ضرب $f(a_n)$ و $f(p_n)$.

EXERCISE SET — مجموعة التمارين 1.2

1. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد p_3 للدالّة $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ في الفترة $[0, 1]$.

2. ليكن $f(x) = 3(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)$. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد p_3 للفترات الآتية:
أ. $[-2, 1.5]$ ب. $[-1.25, 2.5]$

3. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-2} للصيغة $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ وللفترات الآتية:
أ. $[0, 1]$ ب. $[1, 3.2]$ ج. $[3.2, 4]$

4. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-2} للصيغة $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$ وللفترات الآتية:
أ. $[-2, -1]$ ب. $[0, 2]$ ج. $[2, 3]$ د. $[-1, 0]$

5. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} للمسائل الآتية:
أ. $x - 2^{-x} = 0$ لكل $0 \le x \le 1$.
ب. $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ لكل $0 \le x \le 1$.
ج. $2x\cos(2x) - (x+1)^2 = 0$ لكل $-3 \le x \le -2$ و $-1 \le x \le 0$.
د. $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ لكل $0.2 \le x \le 0.3$ و $1.2 \le x \le 1.3$.

6. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} للمسائل الآتية:
أ. $3x - e^x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$.
ب. $x + 3\cos x - e^x = 0$ لكل $0 \le x \le 1$.
ج. $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$ و $2 \le x \le 4$.
د. $x + 1 - 2\sin \pi x = 0$ لكل $0 \le x \le 0.5$ و $0.5 \le x \le 1$.

7. أ. ارسم الشكل $y = x$ و $y = 2\sin x$.
ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} لأول قيمة موجبة لـ x حيث $x = 2\sin x$.

8. أ. ارسم الشكل $y = x$ و $y = \tan x$.
ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} لأول قيمة موجبة لـ x حيث $x = \tan x$.

9. أ. ارسم الشكل $y = e^x - 2$ و $y = \cos(e^x - 2)$.
ب. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلول دقيقة لحد 10^{-5} لقيمة ضمن $[0.5, 1.5]$ حيث $e^x - 2 = \cos(e^x - 2)$.

10. ليكن $f(x) = (x+2)(x+1)^2x(x-1)^3(x-2)$ لأي صفر لـ f، تتقارب طريقة التنصيف عند تطبيقها على الفترات الآتية:
أ. $[-1.5, 2.5]$ ب. $[-0.5, 2.4]$ ج. $[-0.5, 3]$ د. $[-3, -0.5]$

11. ليكن $f(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)^3(x-2)$ لأي صفر لـ f، تتقارب طريقة التنصيف عند تطبيقها على الفترات الآتية:
أ. $[-3, 2.5]$ ب. $[-2.5, 3]$ ج. $[-1.75, 1.5]$ د. $[-1.5, 1.75]$

obeikandl.com

12. أوجد تقريبًا صحيحًا إلى $\sqrt{3}$ للحد 10^{-4} مستخدمًا خوارزمية التنصيف (افترض $f(x) = x^2 - 3$).

13. أوجد تقريبًا صحيحًا إلى $\sqrt[3]{25}$ للحد 10^{-4} مستخدمًا خوارزمية التنصيف

14. استخدم المبرهنة (1.2) لإيجاد الحد لعدد التكرارات اللازمة للوصول لى تقريب بدقة 10^{-3} لحل $x^3 + x - 4 = 0$ واقعا في الفترة $[1, 4]$. أوجد تقريبًا للجذر بنفس درجة الدقة هذه.

15. استخدم المبرهنة (1.2) لإيجاد الحد لعدد التكرارات اللازمة للوصول لى تقريب بدقة 10^{-4} لحل $x^3 - x - 1 = 0$ واقعا في الفترة $[1, 2]$. أوجد تقريبًا للجذر بنفس درجة هذه الدقة

16. ليكن $f(x) = (x - 1)^{10}$، $p = 1$ و $p_n = 1 + 1/n$. أثبت أن $|f(p_n)| < 10^{-3}$ عندما $n > 1$ ولكن $|p - p_n| < 10^{-3}$ يتطلب كون $n > 1000$.

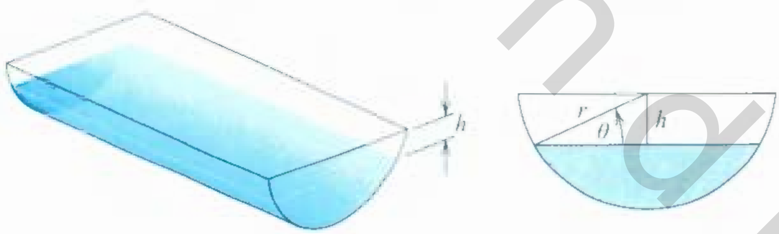
17. ليكن $\{p_n\}$ عبارة عن متتالية معرفة بـ $p_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k)$. أثبت أن $\{p_n\}$ غير متقاربة حتى لو كان $\lim_{n\to\infty}(p_n - p_{n-1}) = 0$.

18. تتضمن الدّالة $f(x) = \sin \pi x$ أصفارًا عند كل عدد صحيح. أثبت أنه عندما تكون $-1 < a < 0$ و $2 < b < 3$، فإنّ طريقة التنصيف تتقارب إلى:

أ. 0 إذا كان $a + b < 2$ ب. 2 إذا كان $a + b > 2$ أ. 1 إذا كان $a + b = 2$

19. حوض بطول L له مقطع على شكل نصف دائرة قطرها r (انظر شكل)، وعند ملئه بالماء لغاية البعد h عن السطح العلوي فإنّ حجم الماء يكون

$$V = L\left[0.5\pi r^2 - r^2 \arcsin\left(\frac{h}{r}\right) - h(r^2 - h^2)^{1/2}\right]$$

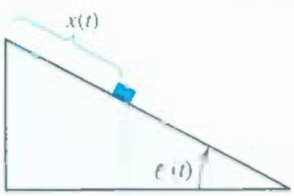


ليكن $L = 10$ ft، $r = 1$ ft و $V = 12.4$ ft^3. أوجد عمق الماء في الحوض لحد 0.01 ft.

20. بدأ جسم بالحركة من السكون على سطح مائل (انظر شكل) بزاوية θ، ويتغير بمعدل ثابت $\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$ ومع نهاية t من الثواني. فإنّ موقع الجسم يكون

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin \omega t\right)$$

ليكن الجسم قد تحرك 1.7 ft في 1 s. أوجد ضمن 10^{-5} المعدل ω الذي تتغير عنده θ. ليكن $g = 32.17$ ft/s^2.



obeikandl.com

2.2 تكرار النقطة الثابتة Fixed – Point Iteration

العدد p هو نقطة ثابتة للدالّة g إذا كانت $g(p) = p$. سنناقش في هذا الفصل مسألة إيجاد حلول لمسائل النقطة الثابتة وعلاقة ذلك بمسائل إيجاد الجذر التي نرغب في حلها، ومسائل كلا الحالتين فئات متكافئة من حيث المعطيات الآتية:

- في مسألة إيجاد الجذر $f(p) = 0$، نستطيع تعريف الدّوال g بنقطة ثابتة عند p بعدة طرائق، ومثال ذلك عندما $g(x) = x - f(x)$ أو $g(x) = x + 3f(x)$.
- وبالعكس. إذا كان للدالّة g نقطة ثابتة عند p. فإنّ للدالّة $f(x) = x - g(x)$ صفرًا عند p.

وعلى الرغم من أن المسائل التي نرغب في حلها تكون بصيغة إيجاد الجذر. فإنّ صيغة النقطة الثابتة أسهل من حيث التحليل، وثمة اختيارات قوية جدًا للنقطة الثابتة تؤدي إلى أساليب إيجاد الجذر.

نحتاج في البداية إلى أن نطمئن لهذا النوع الجديد من المسائل، ثم نقرر متى يكون للدالّة نقطة ثابتة، وكيف يمكن تقريب النقاط الثابتة ضمن دقة محددة.

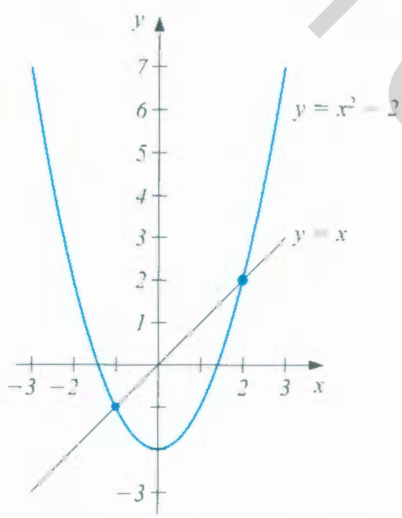
نتائج النقطة الثابتة تظهر في مجالات رياضية عديدة. وهي أدوات رئيسة للاقتصاديين لبرهنة نتائج تتعلق بالتوازن equilibria. وعلى بالرغم من كون فكرة الأسلوب قديمة. فإن المصطلح قد استخدم للمرة الأولى من قبل الرياضي الهولندي براور (1881 — 1966) E. J. brouwer في بداية الحقبة 1900

مثال 1 للدالّة $g(x) = x^2 - 2$ لكل $-2 \le x \le 3$ نقاط ثابتة عند $x = -1$ و $x = 2$ بما أن

$$g(2) = 2^2 - 2 = 2 \quad \text{و} \quad g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$$

ويمكن ملاحظة هذا في شكل (2.2).

شكل 2.2



تحقّق المبرهنة الآتية حالات مناسبة لوجود النقطة الثابتة ووحدانيتها.

obeikandl.com

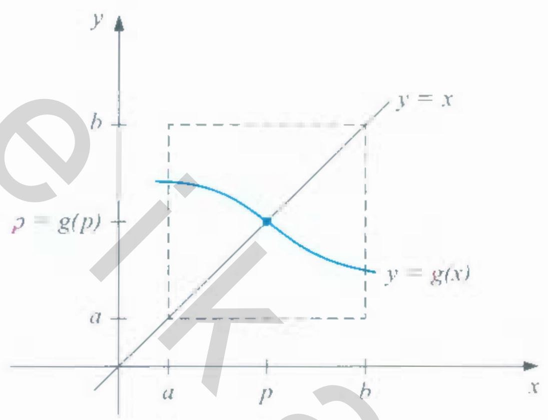
مبرهنة 2.2

أ. إذا كانت $g \in C[a, b]$ و $g(x) \in [a, b]$ لكل $x \in [a, b]$ فيوجد للدّالة g نقطة ثابتة في $[a, b]$.

ب. وبالإضافة إلى ذلك. إذا كانت $g'(x)$ موجودة في (a, b)، ويوجد ثابت موجب $k < 1$ حيث $|g'(x)| \leq k$ لكل $x \in (a, b)$ فإنّ النقطة الثابتة في $[a, b]$ تكون وحيدة. ■

(انظر شكل 3.2).

شكل 3.2



البرهان

أ. إذا كان $a = g(a)$ أو $b = g(b)$ فإنّ للدّالة g نقطة ثابتة في طرف الفترة. وخلاف ذلك فإنّ $g(a) > a$ و $g(b) < b$. الدّالة $h(x) = g(x) - x$ متصلة ضمن $[a, b]$. مع $h(a) = g(a) - a > 0$ و $h(b) = g(b) - b < 0$. واستنادًا إلى مبرهنة القيمة الوسطية. توجد $p \in (a, b)$ تحقق $h(p) = 0$. هذا العدد p هو نقطة ثابتة للدّالة g. لأن

$0 = h(p) = g(p) - p$ تؤدي إلى $g(p) = p$.

ب. بالإضافة إلى ذلك، ليكن $|g'(x)| \leq k < 1$، وإن p و q كليهما نقطة ثابتة في $[a, b]$. وإذا كان $p \neq q$ فإنّ مبرهنة القيمة الوسيطية تضمن لنا وجود عدد $\xi(p, q)$ وفق القيم في $[a, b]$ حيث

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi)$$

إذن

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)||p - q| \leq k|p - q| < |p - q|$$

وهذا تناقض. ومصدر هذا التناقض افتراض $p \neq q$. إذن $p = q$ وتكون النقطة الثابتة في $[a, b]$ وحيدة. ■ ■ ■

مثال 2

أ. ليكن $g(x) = (x^2 - 1)/3$ في الفترة $[-1, 1]$. تفيد مبرهنة القيمة المتطرفة في ظهور الحد الأدنى المطلق للدالّة g عندما $x = 0$ و $g(0) = -\frac{1}{3}$. وإن الحد الأعلى المطلق للدالّة g يظهر عند $x = \pm 1$ أيضًا، وله قيمة $g(\pm 1) = 0$. بالإضافة إلى ذلك. فإنّ الدالّة g متصلة أيضًا، وإن

$$|g'(x)| = \left|\frac{2x}{3}\right| \leq \frac{2}{3} \quad \text{لكل} \quad x \in (-1, 1)$$

وإنّ الدّالّة g تحقّق عندئذ فرضيات المبرهنة (2.2) جميعها. ولها نقطة ثابتة وحيدة ضمن $[-1, 1]$ وإن النقطة الثابتة الوحيدة p في الفترة $[-1, 1]$ يمكن تحديدها جبريًا في هذا المثال. فإذا كان

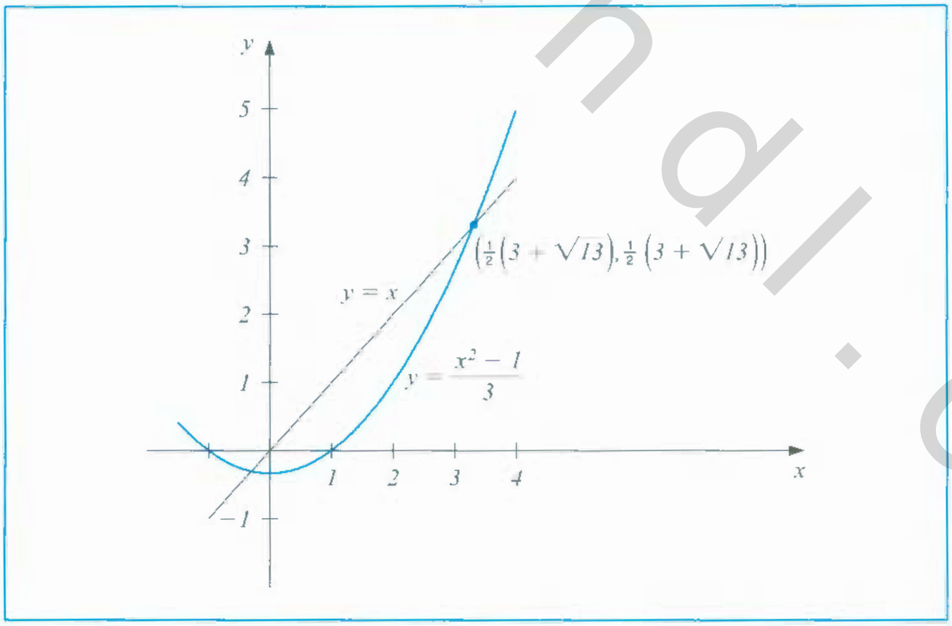
$$p = g(p) = \frac{p^2 - 1}{3} \quad \text{ثم} \quad p^2 - 3p - 1 = 0$$

التي تعطي بحسب الصيغة التربيعية

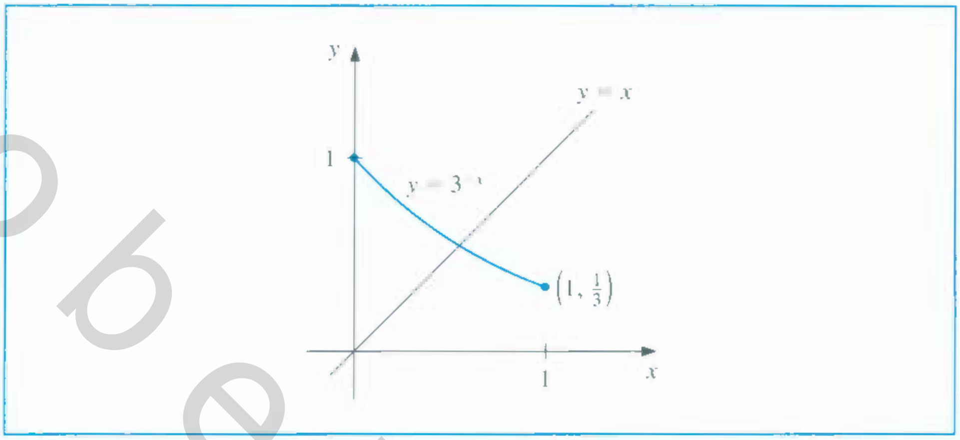
$$p = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13})$$

لاحظ أن للدالّة g نقطة ثابتة وحيدة أيضًا هي $p = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$ للفترة $[3, 4]$. وعلى أي حال $g(4) = 5$ و $g'(4) = \frac{8}{3} > 1$، بناءً عليه فإنّ الدّالة g لا تحقّق فرضيات المبرهنة (2.2) عند $[3, 4]$. وعندئذ فإنّ فرضيات المبرهنة (2.2) كافية لضمان نقطة ثابتة وحيدة لكنها غير ضرورية. (انظر شكل 4.2).

شكل 4.2



شكل 5.2



ب. ليكن $g(x) = 3^{-x}$. بما أن $g'(x) = -3^{-x} \ln 3 < 0$ في $[0, 1]$، فإن الدالة g متناقصة على $[0, 1]$. من ثم

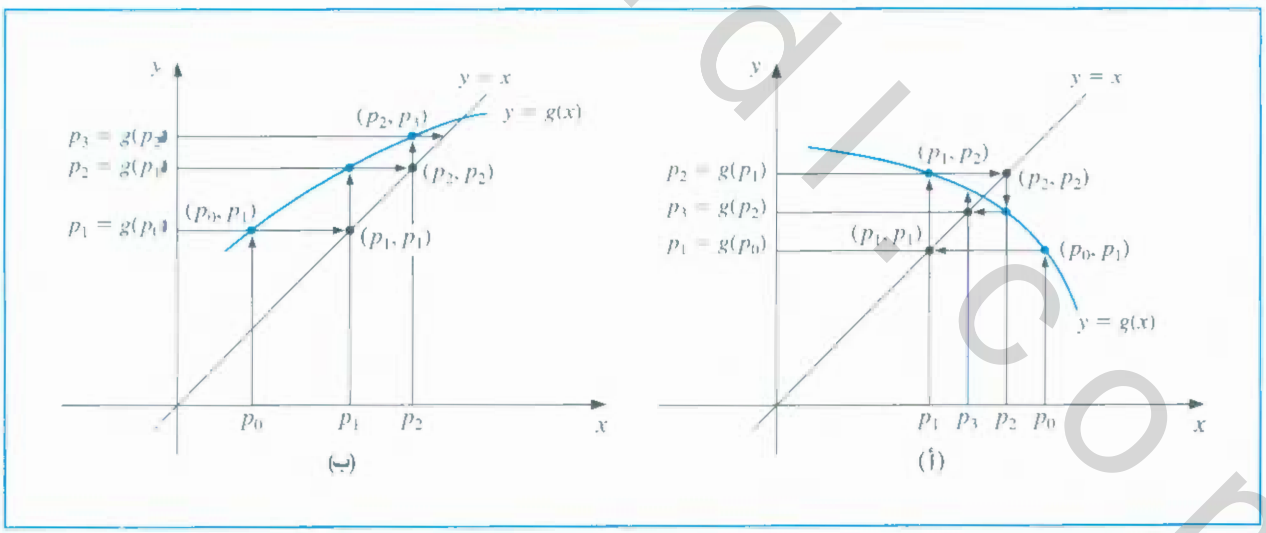
$$g(1) = \frac{1}{3} \le g(x) \le 1 = g(0)$$ لكل $0 \le x \le 1$

عندئذ إذا كان $x \in [0, 1]$ فإن $g(x) \in [0, 1]$. وللدالة g نقطة ثابتة في $[0, 1]$. حيث

$$g'(0) = -\ln 3 = -1.098612289$$

و $|g'(x)| \not\le 1$ في $(0, 1)$. وأن البرهنة (2.2) لا يمكن استخدامها لتحديد الوحدانية. فإن الدالة g متناقصة دائمًا. ويتضح من شكل (5.2) حتمية كون النقطة الثابتة وحيدة. ■

شكل 5.2



obeikandl.com

نختار تقريبًا ابتدائيًّا p_0 وتوليد المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ بجعل $p_n = g(p_{n-1})$ لكل $n \geq 1$ لتقريب النقطة الثابتة للدّالة g. وإذا تقاربت المتتالية إلى p و g متصلة فإنّ

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_{n-1}) = g\left(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}\right) = g(p)$$

وسيوجد حل لـ $x = g(x)$. ويسمى هذا الأسلوب "تكرار النقطة الثابتة" أو "التكرار الداليّة". والعملية مفصلة في الخوارزمية (2.2) وموضحة في شكل (6.2).

ALGORITHM
الخوارزمية
2.2

تكرار النقطة الثابتة Fixed-Point Iteration

لإيجاد حل لـ $p = g(p)$ بوجود التقريب الابتدائي p_0؛

المدخلات: تقريب ابتدائي p_0، الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة (فشل).

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$.
2	ما دام $i \leq N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p = g(p_0)$ (احسب p_i).
4	إذا كان $\lvert p - p_0 \rvert < TOL$ فالخرج (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$.
6	ضع $p = p_0$ (تحديث p_0).
7	المُخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $N_0 =$ ', N_0) توقف.

■

ويوضح المثال الآتي التكرارت الدّالية.

مثال 3 الصيغة $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ لها جذر وحيد في $[1, 2]$. وتوجد عدة طرائق لتغيير الصيغة إلى صيغة النقطة الثابتة $x = g(x)$ مستخدمين ترتيبًا جبريًّا بسيطًا. فلإيجاد الدّالة g الموضح في الفقرة (ج) على سبيل المثال، نستطيع ترتيب الصيغة $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ على النحو الآتي:

$$4x^2 = 10 - x^3 \quad \text{ولذلك} \quad x^2 = \tfrac{1}{4}(10 - x^3) \quad \text{و} \quad x = \pm\tfrac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$$

ولإيجاد حل موجب، نختار $g_3(x)$. وليس من الضروري اشتقاق الدّوال المبينة هنا، لكن عليك التأكد من أن النقطة الثابتة لكل منها هي في الواقع حل للصيغة الأصلية $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.

أ. $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

ب. $$x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$$

obeikandl.com

ج. $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$.

د. $x = g_4(x) = \left(\dfrac{10}{4 + x}\right)^{1/2}$.

هـ. $x = g_5(x) = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$.

وعند $p_0 = 1.5$، يبين جدول (2.2) نتائج تكرار النقطة الثابتة لكل الخيارات الخمسة للدالة g. الجذر الحقيقي هو 1.365230013 كما لوحظ في المثال (1) من الفصل (1.2). وبمقارنة نتائج خوارزمية التنصيف المعطاة ضمن ذلك المثال. يمكن ملاحظة النتائج الرائعة للاختيارات (ج)، (د)، (هـ) حيث تتطلب طريقة التنصيف 27 تكرارًا لهذه الدقّة. ولعله من المفيد ملاحظة أن الاختيار (أ) كان غير متقارب. وأن (ب) كان غير معرّف بسبب احتوائه على جذر تربيعي لعدد سالب. ■

جدول 2.2

n	(أ)	(ب)	(ج)	(د)	(هـ)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	−0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	−469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

ومع أن دوالّ مختلفة في المثال (3) هي مسائل النقطة الثابتة لمسألة إيجاد الجذر نفسها. إلا أنها تختلف إلى حد كبير بوصفها أساليب لتقريب حل مسألة إيجاد الجذر. والغرض منه إيضاح أن السؤال الحقيقي الذي يتطلب الإجابة هو:

- كيف يمكننا إيجاد مسألة النقطة الثابتة التي تنتج متتالية تتقارب على نحو موثوق ومتكرر لحل مسألة إيجاد الجذر؟

تعطينا المبرهنة الآتية ونتيجتها بعض المفاتيح بشأن المسارات التي يتعين علينا سلوكها. وربما يُعدّ رفضنا لبعض منها أكثر أهمية.

مبرهنة 3.2 مبرهنة النقطة الثابتة Fixed-Point Theorem

ليكن $g \in C[a, b]$ حيث $g(x) \in [a, b]$ لكل قيم x في $[a, b]$. وبالإضافة إلى ذلك. لتكن الدالة g' موجودة في (a, b) وأن ثابت $0 < k < 1$ موجود مع

$$|g'(x)| \le k \quad \text{لكل } x \in (a, b)$$

لذا لأي عدد p_0 ضمن $[a, b]$. فإنّ المتتالية

$$p_n = g(p_{n-1}) \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

تتقارب إلى نقطة ثابتة وحيدة p ضمن $[a, b]$. ■

البرهان تشير المبرهنة (2.2) إلى أن النقطة الثابتة الوحيدة موجودة ضمن $[a, b]$. حيث إن الدّالة g تنقل $[a, b]$ إلى نفسها. فإنّ المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ معرّفة لكل $n \geq 0$. و $p_n \in [a, b]$ لكل n وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطية، وحقيقة كون $|g'(x)| \leq k$. يكون لدينا لكل n

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)||p_{n-1} - p| \leq k|p_{n-1} - p|$$

حيث إن $\xi_n \in (a, b)$ وبتطبيق هذه المتباينة نستنتج أن

$$|p_n - p| \leq k|p_{n-1} - p| \leq k^2|p_{n-2} - p| \leq \cdots \leq k^n|p_0 - p| \tag{4.2}$$

وحيث إن $0 < k < 1$ يكون لدينا $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ و

$$\lim_{n\to\infty} |p_n - p| \leq \lim_{n\to\infty} k^n|p_0 - p| = 0$$

ومن ثم فإنّ $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى p. ■ ■ ■

تمهيدية 4.2 إذا كانت الدّالة g تحقّق فرضيات المبرهنة (3.2) فإنّ حدود الخطأ ضمن استخدام p_n لتقريب p هي

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

و

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0| \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$ ■

البرهان حيث $p \in [a, b]$، فإنّ الحد الأول الناتج من المتباينة (4.2) هو

$$|p_n - p| \leq k^n|p_0 - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

وعندما $n \geq 1$. فإنّ العملية المستخدمة في برهنة المبرهنة (3.2) تعطي

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k|p_n - p_{n-1}| \leq \cdots \leq k^n|p_1 - p_0|$$

ومن ثم عندما $m > n \geq 1$ يكون

$$\begin{aligned}
|p_m - p_n| &= |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - \cdots + p_{n+1} - p_n| \\
&\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+1} - p_n| \\
&\leq k^{m-1}|p_1 - p_0| + k^{m-2}|p_1 - p_0| + \cdots + k^n|p_1 - p_0| \\
&= k^n|p_1 - p_0|(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1})
\end{aligned}$$

obeikandl.com

واستنادًا إلى المبرهنة (3.2) $\lim_{m\to\infty} p_m = p$، وبهذا نجد

$$|p - p_n| = \lim_{m\to\infty} |p_m - p_n| \le \lim_{m\to\infty} k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \le k^n |p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i$$

لكن $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$ سلسلة هندسية بنسبة مشتركة k و $0 < k < 1$. وهذه المتتالية تتقارب إلى $1/(1-k)$ الذي يعطي الحد الثاني

$$|p - p_n| \le \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|$$

■ ■ ■

تربط المتباينتان كلتاهما في هذه التمهيدية معدل تقارب $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ للحد k بالمشتقة الأولى، وإن معدل التقارب يعتمد على العامل k^n. فكلما كانت قيمة k صغيرة كان التقارب أسرع. ويكون بطيئًا جدًّا عندما تقترب k من 1. وأعيد في المثال الآتي اعتماد طرائق النقطة الثابتة المستخدمة في المثال (3.2) في ضوء النتائج المبينة في المبرهنة (3.2) ونتيجتها.

مثال 4

أ. مع $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$، لدينا $g_1(1) = 6$ و$g_1(2) = -12$، لذا فالدّالة g_1 لا تنقل $[1, 2]$ إلى نفسها. وأكثر من ذلك $g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$، ومن ثم فإن $|g_1'(x)| > 1$ لكل x ضمن $[1, 2]$. وعلى الرغم من أن المبرهنة (3.2) لا تضمن فشل الطريقة عند هذا الاختيار للدّالة g، فلا يوجد سبب لتوقع حصول التقارب.

ب. مع $g_2(x) = [(10/x) - 4x]^{1/2}$، يمكن أن نرى الدّالة g_2 لا تنقل $[1, 2]$ إلى نفسها، وأن المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ غير معرّفة عندما $p_0 = 1.5$. وأكثر من ذلك، لا توجد فترة تحتوي $p \approx 1.365$ بحيث

$$|g_2'(x)| < 1 \quad \text{لأن} \quad |g_2'(p)| \approx 3.4$$

ولا يوجد أي مبرر لنتوقع أن هذه الطريقة ستتقارب.

ج. للدالّة $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$

$$g_3'(x) = -\frac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-1/2} < 0 \quad \text{في الفترة } [1, 2]$$

لذا g_3 متناقصة حتمًا ضمن $[1, 2]$. وعلى أي حال $|g_3'(2)| \approx 2.12$، لذا فإنّ الشرط $|g_3'(x)| \le k < 1$ يقع ضمن $[1, 2]$. وعند التمعن في المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ بدءًا بـ $p_0 = 1.5$ نجد أن افتراض الفترة $[1, 1.5]$ بدلًا من $[1, 2]$ كافيًا. ضمن هذه الفترة. ما زال صحيحًا كون $g_3'(x) < 0$ و g_3 متناقصة حتمًا. لكن أيضًا

$$1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \le g_3(x) \le g_3(1) = 1.5$$

لكل $x \in [1, 1.5]$. وهذا يرينا أن g_3 تنقل الفترة $[1, 1.5]$ إلى نفسها. ولكون $|g_3'(x)| \le |g_3'(1.5)| \approx 0.66$ صحيحًا أيضًا ضمن هذه الفترة، فإنّ المبرهنة (3.2) تؤكد التقارب الذي نحن بصدده.

د. مع $g_4(x) = (10/(4 + x))^{1/2}$، يكون لدينا

$$|g_4'(x)| = \left|\frac{-5}{\sqrt{10}(4 + x)^{3/2}}\right| \le \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} < 0.15 \quad \text{لكل } x \in [1, 2].$$

والحد على المقدار $g_4'(x)$ أقل كثيرًا من الحد الذي ظهر في (د) على المقدار $g_3'(x)$ الذي يفسر

تقاربًا أكثر تسارعًا باستخدام g_4.

هـ. المتتالية أدناه

$$g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

تتقارب بسرعة أكثر مما هي عليه عند اختياراتنا الأخرى. وسنرى في البنود الآتية من أين جاء هذا الاختيار والسبب وراء فاعليته هذه. ■

EXERCISE SET مجموعة التمارين 2.2

1. استخدم المعالجة الجبرية لإثبات أن لكل من الدّوال الآتية نقطة ثابتة عند p تحديدًا عندما $f(p) = 0$، حيث $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$:

أ. $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$ ب. $g_2(x) = \left(\frac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{1/2}$

ج. $g_3(x) = \left(\frac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2}$ د. $g_4(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

2. أ. نفّذ أربعة تكرارات إذا أمكن على كل دالّة g ذكرت في التمرين (1) أعلاه. وليكن $p_0 = 1$ و $p_{n+1} = g(p_n)$ لكل $n = 0, 1, 2, 3$.

ب. أي من هذه الدّوال تعطي أفضل تقريب للحل؟

3. استخدم الطرائق الأربع الآتية لحساب $21^{1/3}$، ورتّبها بحسب سرعة التقارب لكل منها عندما يكون $p_0 = 1$:

أ. $p_n = \frac{20p_{n-1} + 21/p_{n-1}^2}{21}$ ب. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 - 21}{3p_{n-1}^2}$

ج. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^4 - 21p_{n-1}}{p_{n-1}^2 - 21}$ د. $p_n = \left(\frac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$

4. استخدم الطرائق الأربع الآتية لحساب $7^{1/5}$. ورتّبها بحسب سرعة التقارب لكل منها عندما يكون:

أ. $p_n = p_{n-1}\left(1 + \frac{7 - p_{n-1}^5}{p_{n-1}^2}\right)^3$ ب. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{p_{n-1}^2}$

ج. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{5p_{n-1}^4}$ د. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{12}$

5. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-2} لـ $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ في $[1, 2]$. استخدم $p_0 = 1$.

6. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-2} لـ $x^3 - x - 1 = 0$ في $[1, 2]$. $[0, 2\pi]$ استخدم $p_0 = 1$.

7. استخدم المبرهنة (2.2) لإثبات أن $g(x) = \pi + 0.5\sin(x/2)$ لها نقطة ثابتة وحيدة في $[0, 2\pi]$. استخدم تكرار النقطة الثابتة لإيجاد تقريب للنقطة الثابتة بدقة 10^{-2}. استخدم التمهيدية (4.2) لتقدير عدد مرات التكرار المطلوبة لتحقيق هذه الدقة، ثم قارن هذا التقدير النظري بالعدد الفعلي المطلوب.

8. استخدم المبرهنة (2.2) لإثبات أن $g(x) = 2^{-x}$ لها نقطة ثابتة وحيدة في $[\frac{1}{3}, 1]$. استخدم تكرار النقطة الثابتة لإيجاد تقريب للنقطة الثابتة بدقة 10^{-4}. استخدم التمهيدية (4.2) لتقدير عدد

obeikandi.com

التكرارات المطلوبة لتحقيق هذه الدقة 10^{-4}. ثم قارن هذا التقدير النظري بالعدد الفعلي المطلوب.

9. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لإيجاد التقريب إلى $\sqrt{3}$ بدقة 10^{-4}. قارن هذه التمهيدية وعدد التكرارت المطلوبة بإجابة التمرين (10) من الفصل (1.2).

10. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لإيجاد التقريب إلى $\sqrt[3]{25}$ بدقة 10^{-4}. قارن هذه التمهيدية وعدد التكرارت المطلوبة بإجابة التمرين (11) من الفصل (1.2).

11. حدِّد الفترة $[a, b]$ التي يتقارب عندها التكرار بالنقطة الثابتة لكل من لصيغ الآتية:
أ. قدّر عدد التكرارت المطلوبة لتحقيق التقريبات بدقة 10^{-5}.
ب. نفّذ الحسابات.

أ. $x = \dfrac{2 - e^x + x^2}{3}$ ب. $x = \dfrac{5}{x^2} + 2$ ج. $x = \left(\dfrac{e^x}{3}\right)^{1/2}$

ج. $x = 5^{-x}$ د. $x = 6^{-x}$ هـ. $x = 0.5(\sin x + \cos x)$

12. استخدم الفترة المعطاة لكلٍ من الصيغ الآتية، أو حدِّد الفترة $[a, b]$ التي يتقارب عندها التكرار بالنقطة الثابتة:
أ. قدّر عدد التكرارت المطلوبة لتحقيق التقريبات بدقة 10^{-5}.
ب. نفّذ الحسابات.

أ. $2 + \sin x - x = 0$ باستخدام $[2, 3]$ ب. $x^3 - 2x - 5 = 0$ باستخدم $[2, 3]$

ج. $3x^2 - e^x = 0$ د. $x - \cos x = 0$

13. أوجد الأصفار كلها لـ $f(x) = x^2 + 10\cos x$ باستخدام تكرار النقطة الثابتة لدالّة التكرار المناسب g. أوجد الأصفار بدقّة 10^{-4}.

14. استخدم طريقة تكرار بالنقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-4} لـ $x = \tan x$ لـ x ضمن $[4, 5]$.

15. استخدم طريقة تكرار بالنقطة الثابتة لتحديد حل بدقة 10^{-2} لـ $2\sin \pi x + x = 0$ لـ x ضمن $[1, 2]$. استخدم $p_0 = 1$.

16. ليكن A ثابتًا موجبًا و $g(x) = 2x - Ax^2$:
أ. أثبت أنه في حالة تقارب تكرار النقطة الثابتة لحد ليس صفرًا، فإنّ الحد هو $p = 1/A$، ويمكن أخيرًا إيجاد معكوس العدد باستخدام عمليات الضرب والطرح فقط.
ب. أوجد فترة حول $1/A$ يتقارب عندها تكرار النقطة الثابتة، وتضمن وجود p_0 في الفترة.

17. أوجد الدّالة g معرفًا على $[0, 1]$ التي لا تحقّق أيًّا من فرضيات المبرهنة 2.2 ولها نقطة ثابتة وحيدة في $[0, 1]$.

18. أ. أثبت أن المبرهنة (2.2) صحيحة إذا استبدل $|g'(x)| \le k$ بـ $g'(x) \le k$ لكل $x \in (a, b)$
(تلميح: الوحدانية فقط موضع النقاش).
ب. أثبت أن المبرهنة (3.2) لا تتحقق في حالة استبدال $|g'(x)| \le k$ بـ $g'(x) \le k$.
(ملحوظة: أثبت أن $g(x) = 1 - x^2$ لكل x في الفترة $[0, 1]$ يحقّق مثال المعنّوس).

19. أ. استخدم المبرهنة (3.2) لإثبات كون المتتالية

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \quad \text{لكل } n \ge 1$$

تتقارب إلى $\sqrt{2}$ عندما يكون $x_0 > \sqrt{2}$.

ب. استخدم حقيقة كون $0 < (x_0 - \sqrt{2})^2$ عندما يكون $x_0 \neq \sqrt{2}$ لإثبات أنه في حالة كون

فإنّ $0 < x_0 < \sqrt{2}$ ‏ $x_1 < \sqrt{2}$

ج. استخدم تمهيدية الفقرتين (أ) و (ب) لإثبات كون المتتالية في (أ) تتقارب إلى $\sqrt{2}$ عندما يكون $x_0 > 0$.

20. أ. أثبت أنه لو كان A أي عدد موجب، فإنّ المتتالية

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{n-1}} \quad \text{لكل} \quad n \geq 1$$

تتقارب إلى $\sqrt{A}$ عندما يكون $x_0 > 0$.

ب. ماذا يحدث لو أن $x_0 < 0$ ؟

21. استبدل الافتراض "العدد الموجب $k < 1$ موجود مع $k \leq |g'(x)|$ " بافتراض "g تحقّق شرط لبشتز عند الفترة $[a, b]$ مع ثابت لبشتز $L < 1$". (انظر التمرين (25) من الفصل (1.1) أثبت أن استنتاجات هذه المبرهنة ما زالت متحققة.

22. افترض أن الدّالة g قابلة للاشتقاق باستمرار عند الفترة (c, d) التي تتضمن النقطة الثابتة p للدّالة g. أثبت أنه إذا كانت $|g'(p)| < 1$ فإنّ $\delta > 0$ موجودة بحيث لو كان $|p_0 - p| \leq \delta$، فإنّ تكرار النقطة الثابتة يتقارب.

23. يتعرض الجسم عند سقوطه عموديًا في الهواء لمقاومة اللزوجة إلى جانب قوة الجاذبية. افترض أن جسمًا بكتلة m أسقط من ارتفاع s_0، وأن ارتفاع الجسم بعد t من الثواني هو

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m})$$

بحيث إن $g = 32.17\ \text{ft/s}^2$، وk يمثّل معامل مقاومة الهواء بوحدات lb-s/ft. افترض $s_0 = 300\ \text{ft}$ و $m = 0.25\ \text{lb}$ و $k = 0.1\ \text{lb-s/ft}$ أوجد ضمن $0.01\ \text{s}$ الوقت الذي يستغرقه الجسم للوصول إلى الأرض.

24. ليكن $g \in C^1[a, b]$ و p ضمن (a, b) مع $g(p) = p$ و $|g'(p)| > 1$. أثبت وجود $\delta > 0$ بحيث لو كانت $0 < |p_0 - p| < \delta$ فإنّ $|p_0 - p| < |p_1 - p|$. من ثم فهمها كان التقريب الابتدائي p_0 متقاربًا إلى p، فإنّ التكرار الآتي p_1 أكثر بعدًا. وأخيرًا فإنّ تكرار النقطة الثابتة لا يتقارب إذا كان $p_0 \neq p$.

3.2 طريقة نيوتن Newton's Method

طريقة نيوتن (أو نيوتن–رافسون) هي إحدى أكثر الطرائق العددية كفاءة في حل مسائل إيجاد الجذر. وهناك عدة أساليب لتقديم هذه الطريقة.

فإذا كنا نريد الخوارزمية فقط يمكننا اعتماد أسلوب الشكل البياني، كما هو الحال غالبًا في التفاضل والتكامل. ويمكن أيضًا اشتقاق طريقة نيوتن بوصفها أسلوبًا لإيجاد تقارب أسرع مما تعطيه أنواع أخرى من التكرار الدّالي، كما كان في الفصل (4.2). وستعرض لاحقًا طريقة ثالثة لاستخدام طريقة نيوتن تعتمد كثيرة حدود تايلور.

لنفترض أن $f \in C^2[a, b]$، وليكن $p_0 \in [a, b]$ تقريبًا للحل p إلى $f(x) = 0$ بحيث $f'(p_0) \neq 0$ و $|p - p_0|$ صغير. لنفترض أننا وجدنا كثيرة حدود تايلور الأولى للدّالة $f(x)$ حول p_0 وحسبناها عند $x = p$ لنحصل على

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\xi(p))$$

حيث إن $\xi(p)$ تقع ما بين p و p_0. وبما أن $f(p) = 0$، تعطي هذه الصيغة

كان إسحق نيوتن
Isaac Newton (1642-172
واحدًا من العلماء الأكثر عبقرية في كل الأزمنة في أواخر القرن السابع عشر th 1 كانت فترة تذبذب للعلوم والرياضيات وقد لامس عمل نيوتن كل جانب من الرياضيات تقريبًا وقد قدّم طريقته لحل المعادلات لإيجاد جذر المعادلة $x^3 - 2x - 5 = 0$. وهي مسألة تم تناولها في التمرين 5 ( ). وعلى الرغم من أنه عرض الطريقة بالنسبة لكثيرات الحدود، فمن الواضح أنه أدرك تطبيقاتها الواسعة

obeikandi.com

$$0 = f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

ويمكن اشتقاق طريقة نيوتن على افتراض أنه ما دامت $|p - p_0|$ صغيرة، فإنّ الحد الذي يتضمن $(p - p_0)^2$ سيكون أصغر كثيرًا. لذا

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0)$$

وبحل p نحصل على

$$p \approx p_1 \equiv p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

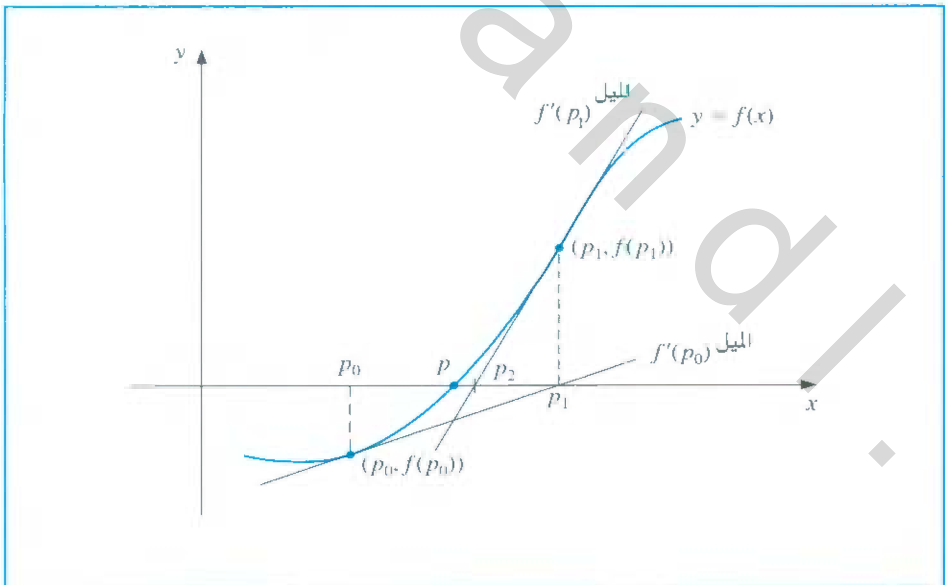
وهذه خطوة نحو طريقة نيوتن التي تبدأ بتقريب ابتدائي p_0 ثم توليد المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ باستخدام

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل} \quad n \geq 1 \tag{5.2}$$

ويوضح شكل (7.2) كيفية إيجاد التقريب باستخدام المماسات المتتابعة. (انظر التمرين (15) أيضًا) نبدأ بتقريب ابتدائي p_0. يمثّل التقريب p_1 مقطع محور x من قبل خط المماس للدّالة f عند $(p_0, f(p_0))$. يمثّل التقريب p_2 مقطع محور x من قبل خط المماس للدّالة f عند $(p_1, f(p_1))$ وهكذا. وتتبع الخوارزمية (3.2) هذا الأسلوب.

أعطى جوزيف رافسون Joseph Raphson (1648–1715) توضيحًا للطريقة المنسوبة إلى إسحق نيوتن عام 1690 معترفا بأن نيوتن هو مصدر الاكتشاف. فنيوتن و رافسون لم يستخدما بالضبط المشتقة في شرحهما؛ لأن كليهما تناولا كثيرات الحدود فقط. رياضيون آخرون وخصوصا جيمس كريكوري James Gregory (1636 –1675) كانوا يدركون العملية قيد البحث عند هذا الوقت أو قبله.

شكل 7.2



ALGORITHM
الخوارزمية
3.2

خوارزمية نيوتن Newton's Algorithm

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ مع تقريب ابتدائي p_0:

المدخلات: تقريب أوّلي p_0، الحدود المسموح بها TOL. أكبر عدد للتكرارات N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

obeikandl.com

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 1$.
2	ما دام $i \le N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$ (احسب p_i).
4	إذا كان $\lvert p - p_0 \rvert < TOL$ المُخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$.
6	ضع $p_0 = p$ (تحديث p_0).
7	المُخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و $N_0 =$ ` , N_0) توقف.

إن تباينات أسلوب التوقف المصاحبة لطريقة التنصيف يمكن تطبيقها في طريقة نيوتن. حيث نختار حد السماح $\varepsilon > 0$، ثم نوجد $p_1, \ldots p_N$ حتى

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon \tag{6.2}$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0 \tag{7.2}$$

أو

$$|f(p_N)| < \varepsilon \tag{8.2}$$

تستخدم صيغة من المتباينة (6.2) في الخطوة 4 من الخوارزمية (3.2). لاحظ أن المتباينة (8.2) قد لا تعطي الكثير من المعلومات حول الخطأ الحقيقي $|p_N - p|$. (انظر التمرين (16) من الفصل 1.2) وإن طريقة نيوتن عبارة عن أسلوب تكرارات داليّة بصيغة $p_n = g(p_{n-1})$ حيث

$$g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1 \tag{9.2}$$

وفي الواقع هذا أسلوب تكرارات داليّة استُخدم ليعطي تقاربًا متسارعًا كما رأيناه في الفقرة (هـ) من المثال (3) من الفصل (2.2). ويتضح من الصيغة (9.2) أن طريقة نيوتن لا يمكنها الاستمرار إذا كان $f'(p_{n-1}) = 0$ لبعض قيم n. وفي الواقع سنرى أن الطريقة أكثر جدوى عندما تُحدّد f' بعيدًا عن الصفر وبالقرب من p.

جدول 3.2

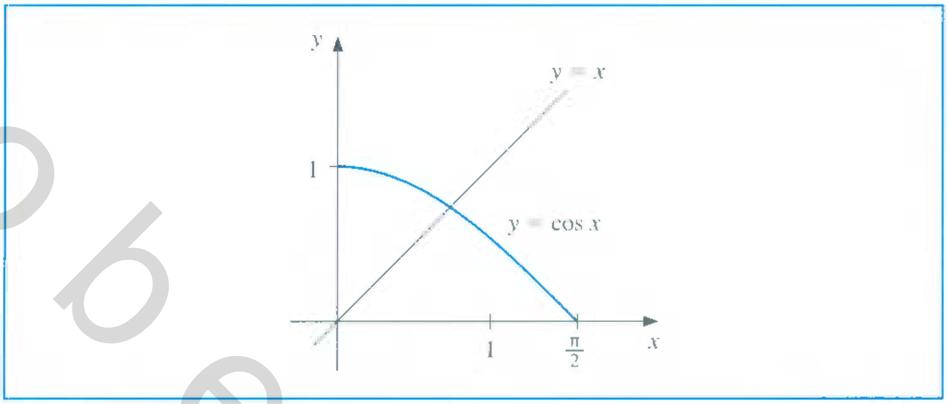
n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7071067810
2	0.7602445972
3	0.7246674808
4	0.7487198858
5	0.7325608446
6	0.7434642113
7	0.7361282565

مثال 1 لنفترض أننا نريد تقريب حل للدّالة $f(x) = \cos x - x = 0$. إن حل مسألة إيجاد الجذر هذه هو حل لمسألة النقطة الثابتة $x = \cos x$ أيضًا، ويشير الرسم في شكل (8.2) إلى أن نقطة ثابتة واحدة p تقع في الفترة $[0, \pi/2]$. ويوضح الجدول (3.2) نتائج تكرار النقطة الثابتة مع $p_0 = \pi/4$، ومنها نستنتج أن أفضل قيمة هي $p \approx 0.74$.

ولتناول هذه المسألة على نحو مختلف، عرّف $f(x) = \cos x - x$، وطبّق طريقة نيوتن. وما دام $f'(x) = -\sin x - 1$، فإنّ المتتالية تتولد عن طريق

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-\sin p_{n-1} - 1} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

obeikandi.com



شكل 8.2

ويتضمن جدول (4.2) تقريبات تولّدت مع $p_0 = \pi/4$. ونلاحظ تقريبًا متميزًا عند $n = 3$. ونتوقع أن يكون هذا التقريب دقيقًا للمنازل الموضحة بسبب التوافق بين p_3 و p_4. ■

جدول 4.2

n	p_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

ويشير اشتقاق سلسلة تايلور لطريقة نيوتن في بداية هذا الفصل إلى ضرورة دقة التقدير الابتدائي. والافتراض الضروري هو كون الحد المتضمن $(p - p_0)^2$ صغيرًا مقارنة بـ $|p - p_0|$ على أنه من الممكن حذفه. وهذا بالتأكيد لن يتحقق ما لم يكن p_0 تقريبًا جيدًا إلى p. وإذا لم يكن p_0 قريبًا بما يكفي من الجذر الحقيقي فإن هناك سببًا ضعيفًا لملاحظة تقارب طريقة نيوتن نحو الجذر. وعلى أي حال قد ينتج في بعض الحالات وحتى في حالة التقريب الضعيف تقارب. (ويوضح التمرينان (20) و (21) بعض هذه الحالات).

وتوضح مبرهنة التقارب التالية لطريقة نيوتن الأهمية المبرهنة لاختيار p_0.

مبرهنة 5.2

ليكن $f \in C^2[a, b]$. إذا كان $p \in [a, b]$ حيث $f(p) = 0$ و $f'(p) \neq 0$، فيوجد $\delta > 0$ بحيث تولّد طريقة نيوتن المتتالية المتقاربة $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ إلى p ولأي تقريب ابتدائي $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$. ■

البرهان البرهان مبني على تحليل طريقة نيوتن بوصفه أسلوب تكرارات داليّة $p_n = g(p_{n-1})$ لكل $n \geq 1$ مع

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ليكن k ضمن $(0, 1)$. في البداية توجد الفترة $[p - \delta, p + \delta]$ على أن g تنقلها إلى نفسها حيثما $|g'(x)| \leq k$ لكل $x \in (p - \delta, p + \delta)$.

وحيث إن f' متصلة. وإن $f'(p) \neq 0$، فإنّ الفقرة (a) من تمرين (27) فصل (1.1) يؤدي إلى حتمية وجود $\delta_1 > 0$ حيث $f'(x) \neq 0$ لـ $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1] \subseteq [a, b]$. وأخيرًا تكون الدالة g معرفة ومتصلة ضمن $[p - \delta_1, p + \delta_1]$، كما أن

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

لـ $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1]$. بحيث إن $f \in C^2[a, b]$، تكون $g \in C^1[p - \delta_1, p + \delta_1]$. وبفرض $f(p) = 0$، فإنّ

obeikandl.com

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0$$

ولأن g' متصلة و $0 < k < 1$، فإن الفقرة (ب) من التمرين (27) في الفصل (1.1) يؤدي إلى حتمية وجود δ مع $0 < \delta < \delta_1$، وأن

$$|g'(x)| \le k \text{ لكل } x \in [p-\delta, p+\delta]$$

ونحتاج الآن إلى إثبات كون الدالّة g تنقل $[p-\delta, p+\delta]$ إلى $[p-\delta, p+\delta]$. فإذا كان $x \in [p-\delta, p+\delta]$ فإنّ مبرهنة القيمة الوسطى تؤدي إلى أنه لعدد ما ξ بين x و p، يكون لدينا $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p|$ بالتالي

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p| \le k|x - p| < |x - p|$$

وحيث إن $x \in [p-\delta, p+\delta]$، فإنّ $|x - p| < \delta$ و $|g(x) - p| < \delta$، ومن ثم فإنّ الدالّة g تنقل $[p-\delta, p+\delta]$ إلى $[p-\delta, p+\delta]$.

إن الفرضيات كلها لمبرهنة النقطة الثابتة متحقّقة الآن، وأخيرًا فالمتتالية $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرّفة بـ

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

تتقارب إلى p لأي $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$. ■ ■ ■

تنص المبرهنة (5.2) على أنه: "في حالة الافتراضات المعقولة تتقارب طريقة نيوتن عند تحقّق اختيار تقريب ابتدائي ذي دقة معقولة". وتؤدي إلى أن الثابت k الذي يحد اشتقاق الدالّة g، ويشير أخيرًا إلى سرعة التقارب للطريقة يتناقص إلى الصفر مع استمرار العملية أيضًا. وهذا التمهيد مهم لطريقة نيوتن، لكن من النادر استخدامها عند التطبيق؛ لأنها لا تعلمنا كيفية تحديد δ. في التطبيق العملي يُختار تقريب ابتدائي، وتولّد التقريبات التالية بطريقة نيوتن، وهذه عمومًا إما أن تتقارب بسرعة إلى الجذر، وإما أنه سيكون واضحًا أن التقارب غير ممكن.

إن طريقة نيوتن تمثل أسلوبًا فائق القوة. لكن لها جانبًا سلبيًّا رئيسًا، وهو حاجتنا إلى معرفة قيمة اشتقاق الدالّة f عند كل تقريب. وغالبًا ما يكون $f'(x)$ أكثر صعوبة، ويحتاج إلى عمليات حسابية أكثر لحسابه مقارنة بـ $f(x)$.

وللإحاطة بمسألة تقييم الاشتقاق لطريقة نيوتن؛ نقدم شيئًا مختلفًا قليلًا. ومن خلال التعريف

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

وبجعل $x = p_{n-2}$، لدينا

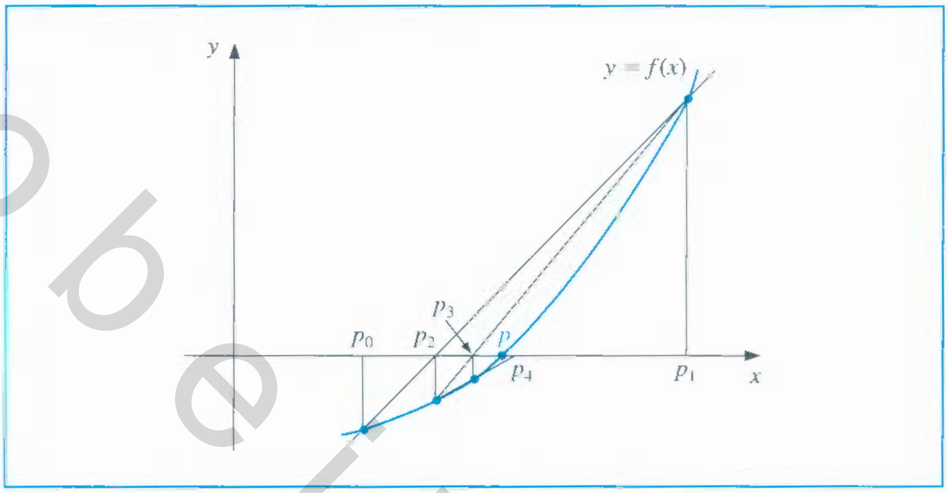
$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

وباستخدام هذا التقريب إلى $f'(p_{n-1})$ في صيغة نيوتن نحصل على

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \qquad (10.2)$$

obeikandl.com

شكل 9.2



إن كلمة قاطع مشتقة من الكلمة اللاتينية secan التي تعني القطع. إن طريقة القاطع تستخدم خط القاطع، وهو الخط الواصل بين نقطتين تقطعان المنحنى لتقريب الجذر

ويدعى هذا الأسلوب "طريقة القاطع" Secant Method ونعرضه في الخوارزمية (4.2). (انظر شكل 9.2) مبتدئين بتقريبين ابتدائيين p_0 و p_1، فإنّ التقريب p_2 عبارة عن تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$. والتقريب p_3 عبارة عن تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_1, f(p_1))$ و $(p_2, f(p_2))$ وهكذا.

ALGORITHM
الخوارزمية
4.2

القاطع Secant

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ مع تقريب ابتدائي p_0 و p_1؛

المدخلات: تقريب ابتدائي p_0 و p_1، الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 2$ و $q_0 = f(p_0)$ و $q_1 = f(p_1)$.
2	ما دام $i \le N_0$ فنفّذ الخطوات 3 – 6 الآتية.
3	ضع $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$ (احسب p_i).
4	إذا كان $\lvert p - p_1 \rvert < TOL$ فإن المخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$.
6	ضع $p_0 = p_1$ (حيث p_0, q_0, p_1, q_1) $q_0 = q_1$ $p_1 = p$ $q_1 = f(p)$
7	المخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و N_0 = ', N_0) توقف.

obeikandl.com

ويتضمن المثال الآتي مسألة سبقت دراستها في المثال (1) عندما استخدمنا طريقة نيوتن مع $p_0 = \pi/4$.

مثال 2

استخدم طريقة القاطع لإيجاد حل لـ $x = \cos x$. قارنا في المثال (1) تكرار الدّالة وطريقة نيوتن بتقريب ابتدائي $p_0 = \pi/4$. وهنا نحتاج إلى تقريبين ابتدائيين. ويدرج جدول (5.2) الحسابات مع $p_0 = 0.5$، $p_1 = \pi/4$ والصيغة

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1} - p_{n-2})(\cos p_{n-1} - p_{n-1})}{(\cos p_{n-1} - p_{n-1}) - (\cos p_{n-2} - p_{n-2})} \quad \text{لكل} \quad n \geq 2$$

من الخوارزمية (4.2). ■

جدول 5.2

n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390851493
5	0.7390851332

وبمقارنة النتائج هنا بتلك التي في المثال (1)، نرى أن p_5 دقيق لغاية الرتبة الكسرية العاشرة. إن تقارب طريقة القاطع أسرع كثيرًا من تكرار الدّالة، لكنها أبطأ قليلًا من طريقة نيوتن التي تعطي هذه الرتبة من الدقة مع p_3، وهذا صحيح عمومًا. (انظر التمرين (14) من الفصل 4.2).

تُستخدم طريقة نيوتن أو طريقة القاطع في تنقية الجواب المعطى بأسلوب آخر غالبًا مثل طريقة التنصيف، لكون هذه الطرائق تتطلب تقريبًا ابتدائيًا جيدًا، لكنها عمومًا تعطي تقاربًا سريعًا. وإن كل زوج من التقريبات المتتابعة في طريقة التنصيف يحوّط جذر الصيغة p، أي أنه للعدد الصحيح الموجب n كله جذر ما بين a_n و b_n. وهذا يؤدي إلى أنه لأي n، فإنّ تكرارات طريقة التنصيف تحقّق $|p_n - p| < \frac{1}{2}|a_n - b_n|$

التي تحقّق حدًّا خطأً سهل الحساب للتقريبات. إن إحاطة الجذر ليس مضمونًا لطريقة نيوتن أو طريقة القاطع. ويتضمن جدول (4.2) نتائج لطريقة نيوتن طبّقت على $f(x) = \cos x - x$ حيث وُجد جذر تقريبي مقداره 0.7390851332. لاحظ أن هذا الجذر ليس محوطًا بـ p_0, p_1 أو p_1, p_2. إن تقريبات طريقة القاطع في هذه المسألة م عطاة في جدول (5.2). فالتقريبان الابتدائيّان p_0 و p_1 يحوطان الجذر، لكن زوج التقريبين p_3 و p_4 قد فشل في عمل ذلك.

إن المصطلح **Regule Falsi** الذي يعني القاعدة الزائفة أو الموقع الزائف يشير إلى كون تقنية استخدام النتائج زائفة، ولكن ضمن أسلوب خاص، لإيجاد تقارب لنتيجة صحيحة. ويمكن إيجاد مسائل الموقع الخاطئ على برديات Rhind يعود تاريخها إلى 1650 تقريبا قبل الميلاد.

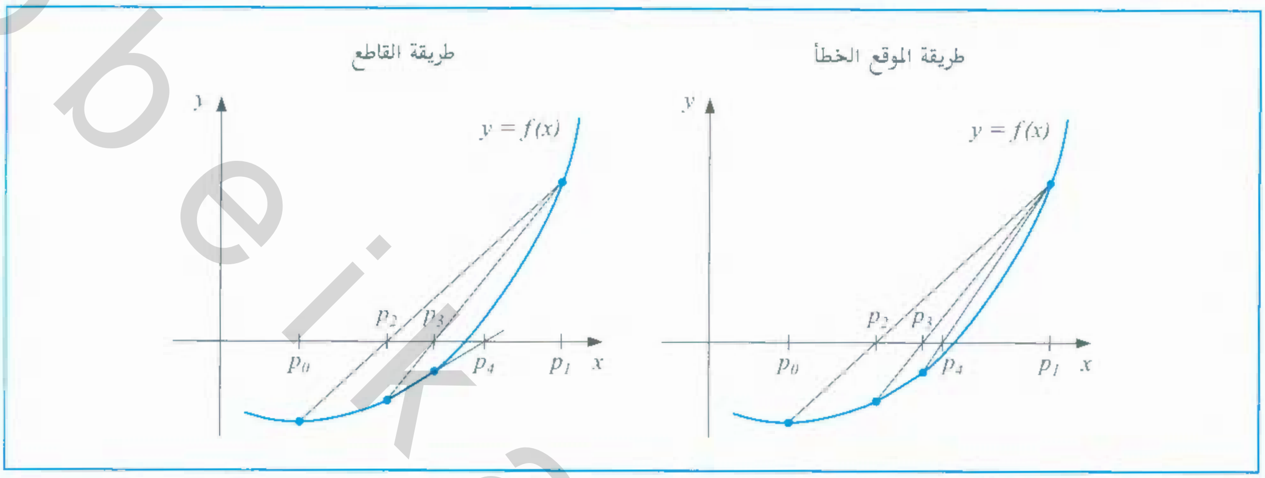
إن طريقة الموقع الخطأ False Position تولّد تقريبات بطريقة القاطع نفسها، لكنها تتضمن اختبارًا لضمان كون الجذر محوّطًا دائمًا ما بين تكرارات متتالية. وعلى الرغم من أنها ليست الطريقة التي نوصي بها عمومًا، إلا أنها توضح كيفية اتحاد المحوطات.

يُختار p_0 و p_1 مع $f(p_0) \cdot f(p_1) < 0$ في البداية. ويُختار التقريب p_2 بأسلوب طريقة القاطع نفسه، مثل تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_0, f(p_0))$ و $(p_1, f(p_1))$. ولتحديد خط قاطع نستخدم حساب p_3، ونحتاج إلى تدقيق $f(p_2) \cdot f(p_1)$. فإذا كان هذا المقدار سالبًا فإنّ p_1 و p_2 يحوطان الجذر، ونختار p_3 على أنه تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_1, f(p_1))$ و $(p_2, f(p_2))$. وبعكس ذلك نختار p_3 على أنه تقاطع x مع الخط الواصل بين $(p_0, f(p_0))$ و $(p_2, f(p_2))$. ومن ثم نبدل القياس على p_0 و p_1. و بالأسلوب نفسه عند إيجاد p_3، فإنّ إشارة $f(p_3) \cdot f(p_2)$

obeikandi.com

تحدد ما إذا كان علينا استخدام p_2 و p_3 أو p_3 و p_1 لحساب p_4، وتعاد تسمية p_1 و p_2 في الحالة الأخيرة. وتضمن تكرار التسمية هذه أن الجذر محاط بتكرارات متتالية. والعملية موضحة في الخوارزمية (5.2)، ويوضح شكل (10.2) كيف تختلف التكرارات عما هي عليه في طريقة القاطع ؛ إذ التقريبات الثلاثة الأولى متماثلة، إلا الرابع فمختلف.

شكل 10.2



ALGORITHM
الخوارزمية
5.2

الموقع الخطأ False Position

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ مع كون f دالّة متصلة على الفترة $[p_0, p_1]$، بحيث أن $f(p_0)$ و $f(p_1)$ لهما إشارة مختلفة.

المدخلات: تقريب ابتدائي p_0 و p_1 الحدود المسموح بها TOL، أكبر عدد لمرات التكرار N_0.

المخرجات: حل تقريبي p أو عبارة "فشل".

الخطوة	المضمون
1	ضع $i = 2$ $q_0 = f(p_0)$ و $q_1 = f(p_1)$
2	ما دام $i \le N_0$ فنفّذ الخطوات ٣ – ٧ الآتية:
3	ضع $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$ (احسب p_i)
4	إذا كان $\lvert p - p_1 \rvert < TOL$ فإن المخرج (p) (استكملت العملية بنجاح). توقف.
5	ضع $i = i + 1$ و $q = f(p)$
6	إذا $q \cdot q_1 < 0$ ضع $p_0 = p_1$ $q_0 = q_1$

obeikandl.com

7	ضع $p_1 = p$ $q_1 = q$
8	المخرجات (فشلت الطريقة بعد N_0 من التكرارات و N_0 ', $N_0 =$) توقف.

■

وضح جدول (6.2) نتائج طريقة الموقع الخطأ المطبقة على $f(x) = \cos x - x$ مع التقريبات نفسها التي استخدمناها في طريقة القاطع في المثال (2). لاحظ أن التقريبات تتّفق من خلال p_3، وأن طريقة الموقع الخطأ تتطلب تكرارات إضافية لإعطاء الدقة نفسها لطريقة القاطع.

يتطلب الضمان المضاف إلى طريقة الموقع الخطأ حسابات أكثر مقارنة بطريقة القاطع، بالضبط مثل التبسيط الذي توفره طريقة القاطع مقارنةً بطريقة نيوتن التي تأتي على حساب تكرارات إضافية. ويمكن رؤية أمثلة أخرى على خصائص هذه الطرائق الإيجابية والسلبية من خلال التمرينين العمليين (17) و (18).

جدول 6.2

n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390848638
5	0.7390851305
6	0.7390851332

EXERCISE SET

مجموعة التمارين 3.2

1. ليكن $f(x) = x^2 - 6$ و $p_0 = 1$. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد p_2.
2. ليكن $f(x) = -x^3 - \cos x$ و $p_0 = -1$. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد p_2. هل يمكن استخدام $p_0 = 0$؟
3. ليكن $f(x) = x^2 - 6$. أوجد p_3 عندما $p_0 = 3$ و $p_1 = 2$.
أ. استخدم طريقة القاطع.
ب. استخدم طريقة الموقع الخطأ.
ج. أيهما أقرب إلى $\sqrt{6}$؟
4. ليكن $f(x) = -x^3 - \cos x$. أوجد p_3 عندما $p_0 = -1$ و $p_0 = 1$.
أ. استخدم طريقة القاطع.
ب. استخدم طريقة الموقع الخطأ.
5. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-4} للمسائل الآتية:
أ. $x^3 - 2x^2 - 5 = 0, \quad [1, 4]$ ب. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0, \quad [-3, -2]$
ج. $x - \cos x = 0, \quad [0, \pi/2]$ د. $x - 0.8 - 0.2\sin x = 0, \quad [0, \pi/2]$
6. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-5} للمسائل الآتية:
أ. $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ لكل $1 \le x \le 2$
ب. $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ لكل $1.3 \le x \le 2$
ج. $2x\cos 2x - (x-2)^2 = 0$ لكل $2 \le x \le 3$ و $3 \le x \le 4$
د. $(x-2)^2 - \ln x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$ و $e \le x \le 4$
هـ. $e^x - 3x^2 = 0$ لكل $0 \le x \le 1$ و $3 \le x \le 5$
و. $\sin x - e^{-x} = 0$ لكل $0 \le x \le 1$، $3 \le x \le 4$ و $6 \le x \le 7$
7. كرر العمل على تمرين (5) مستخدمًا طريقة القاطع.
8. كرر العمل على تمرين (6) مستخدمًا طريقة القاطع.
9. كرر العمل على تمرين (5) مستخدمًا طريقة الموقع الخطأ.
10. كرر العمل على تمرين (6) مستخدمًا طريقة الموقع الخطأ.
11. استخدم الطرائق الثلاث في هذا الفصل لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-5} للمسائل الآتية:
أ. $3x - e^x = 0 \quad \text{for } 1 \le x \le 2$ ب. $x + 3\cos x - e^x = 0 \quad \text{for } 0 \le x \le 1$

obeikandl.com

12. استخدم الطرائق الثلاث في هذا الفصل لإيجاد حلول دقيقة لغاية 10^{-7} للمسائل الآتية:

أ. $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ لكل $1 \le x \le 2$ و $2 \le x \le 4$.

ب. $x + 1 - 2\sin \pi x = 0$ لكل $0 \le x \le \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

13. استخدم طريقة نيوتن للتقريب بدقّة 10^{-4}، لتقريب قيمة x والتي تعطي النقطة الأقرب إلى $(1, 0)$ على المنحنى $y = x^2$. [ملحوظة: صغّر إلى $[d(x)]^2$. حيث يمثل $d(x)$ المسافة من بين (x, x^2) إلى $(1, 0)$].

14. استخدم طريقة نيوتن للتقريب بدقّة 10^{-4}، لتقريب قيمة x والتي تعطي النقطة الأقرب إلى $(2, 1)$ على المنحنى $y = 1/x$.

15. فيما يأتي توضيح لطريقة نيوتن بالشكل البياني: افترض أن $f'(x)$ موجود ضمن $[a, b]$، وأن $f'(x) \neq 0$ ضمن $[a, b]$. وأكثر من ذلك، افترض حتمية وجود $p \in [a, b]$ وحدة بحيث $f(p) = 0$، وليكن $p_0 \in [a, b]$ بصورة غير منهجية. لتكن p_1 نقطة على خط المماس لـ f عند $(p_0, f(p_0))$ قاطعًا محور x. ليمثل p_n تقاطع خط المماس لـ f لمحور x عند $(p_{n-1}, f(p_{n-1}))$ اشتق الصيغة التي توضح هذه الطريقة.

16. استخدم طريقة نيوتن لحل الصيغة

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x \quad \text{مع} \quad p_0 = \frac{\pi}{2}$$

طبّق التكرار مستخدمًا طريقة نيوتن حتى تحقق الدقة 10^{-5}. وضح لماذا تكون النتيجة غير اعتيادية بالنسبة إلى طريقة نيوتن. أيضًا حل الصيغة باستخدام القيم $p_0 = 5\pi$ و $p_0 = 10\pi$.

17. عديدة حدود من الرتبة الرابعة

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

لها صفران حقيقيان، أحدهما ضمن $[-1, 0]$ والآخر ضمن $[0, 1]$. حاول تقريب هذين الصفرين لغاية 10^{-6} مستخدمًا:

أ. طريقة الموقع الخطأ

ب. طريقة القاطع

ج. طريقة نيوتن.

استخدم النقاط الطرفية لكل فترة على نحو تقريبات ابتدائية في (أ) و(ب) والنقاط الوسطية في(ج).

18. للدالة $f(x) = \tan \pi x - 6$ صفر عندما $(1/\pi)\arctan 6 \approx 0.447431543$ ليكن $p_0 = 0$ و $p_1 = 0.48$. استخدم عشر تكرارات لكل من الطرائق الآتية لتقريب هذا الجذر أي الطرائق أنجح؟ ولماذا؟

أ. طريقة التنصيف

ب. طريقة الموقع الخطأ

ج. طريقة القاطع

19. يمكن كتابة صيغة التكرار لطريقة القاطع بصيغة أبسط هي

$$p_n = \frac{f(p_{n-1})p_{n-2} - f(p_{n-2})p_{n-1}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

وضح لماذا تبدو صيغة التكرار هذه عمومًا أقل دقة من تلك المعطاة في الخوارزمية (4.2).

20. للصيغة $x^2 - 10\cos x = 0$ حلان ± 1.3793646. استخدم طريقة نيوتن لتقريب الحلول لغاية دقة 10^{-5} مع هذه القيم لـ p_0:

أ. $p_0 = -100$ ب. $p_0 = -50$ ج. $p_0 = -25$

د. $p_0 = 25$ هـ. $p_0 = 50$ و. $p_0 = 100$

obeikandl.com

21. للصيغة $4x^2 - e^x - e^{-x} = 0$ أربعة حلول $\pm x_1$ و $\pm x_2$. استخدم طريقة نيوتن لتقريب الحل لغاية 10^{-5} مع هذه القيم لـ p_0:

أ. $p_0 = -10$ ب. $p_0 = -5$ ج. $p_0 = -3$

د. $p_0 = -1$ هـ. $p_0 = 0$ و. $p_0 = 1$

ز. $p_0 = 3$ ح. $p_0 = 5$ ط. $p_0 = 10$

22. استخدم Maple لتحديد عدد مرات التكرار اللازمة لطريقة نيوتن مع $p_0 = \pi/4$ لإيجاد جذر $f(x) = \cos x - x$ ضمن 10^{-100}.

23. الدّالة $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0.4x} \cos \pi x$ له عدد لانهائي من الأصفار

أ. حدد ضمن 10^{-6} الأصفار السالبة فقط.

ب. حدد ضمن 10^{-6} أصغر أربعة أصفار موجبة.

ج. حدد تقريبًا ابتدائيًا معقولًا لإيجاد أصغر صفر موجب من الرتبة n لـ f. (ملحوظة: ارسم شكلًا تقريبيًا لـ f.)

د. استخدم الفقرة (ج) لتحديد الصفر الخامس والعشرين الأصغر الموجب لـ f.

24. أوجد تقريبًا دقيقًا ضمن 10^{-4} لصيغة المجتمع

$$1,564,000 = 1,000,000e^{\lambda} + \frac{435,000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

التي شرحت في مقدمة هذا الفصل. استخدم هذه القيمة للتنبؤ بحجم المجتمع عند نهاية السنة الثانية، مفترضًا أن معدل الهجرة السنوي 435,000 شخص خلال هذه السنة.

25. عددان مجموعهما 20. إذا أضيف كل عدد إلى جذره التربيعي فإنّ حاصل ضرب المجموعين يكون 155.55. حدد هذين العددين ضمن 10^{-4}.

26. القيمة التراكمية لحساب التوفير مبنية على دفعات دورية اعتيادية يمكن تحديدها من خلال صيغة الأقساط المستحقة

$$A = \frac{P}{i}[(1 + i)^n - 1]$$

في هذه الصيغة، تمثّل A الرصيد في هذا الحساب، وتمثّل P المبلغ المودع اعتياديًّا، وتمثل i معدل الفائدة خلال فترة محددة، ولعدد n من هذه الفترات. يرغب أحد المهندسين في امتلاك حساب توفير بمبلغ $750,000 عند تقاعده بعد 20 سنة، ويستطيع إيداع $1500 شهريًّا لتحقيق هذا الهدف. فما أقل معدل فائدة لاستثمار هذا المبلغ مفترضًا حسابها شهريًّا؟

27. مسائل حول كمية الأموال المطلوب تسديدها بقرض ضمن فترة زمنية محددة تتضمن الصيغة

$$A = \frac{P}{i}[1 - (1 + i)^{-n}]$$

المعروفة بصيغة الأقساط الاعتيادية. في هذه الصيغة، تمثّل A مبلغ القرض، و P مبلغ الدفعات المسددة كلها، وتمثّل i معدل الفائدة خلال فترة محددة ولعدد n من هذه الفترات. افترض وجود حاجة إلى قرض مقداره $130,000 ومدته 30 سنة لشراء دار، وأن المقترض بوسعه تسديد القرض بدفعات شهرية لا تزيد على $1000. فما أعلى معدل فائدة تناسب قدرة المقترض؟

28. إن حقن دواء لمريض يؤدي إلى تركيز الدم وفقًا للصيغة $c(t) = Ate^{-t/3}$ ملجم لكل مللتر. بعد زمن t ساعة من حقن A من الوحدات. والتركيز الأعلى الآمن هو 1 mg/ml.

أ. ما الكمية الواجب حقنها للوصول إلى هذا التركيز الآمن؟

ب. وجب حقن كمية إضافية من هذا الدواء للمريض عقب انخفاض التركيز إلى 0.25 mg/ml. حدد متى يجب إعطاء هذه الزيادة إلى أقرب دقيقة.

obeikandl.com

ج. افترض أن التركيز من حقن متتالية بسمة (تراكمية)، وأن 75% من الكمية التي حقنت تعطى خلال الجرعة الثانية. فمتى تكون الجرعة الثالثة؟

29. لتكن $f(x) = 3^{3x+1} - 7 \cdot 5^{2x}$

أ. استخدم أوامر Maple solve and fsolve لمحاولة إيجاد جذور f جميعها.

ب. ارسم $f(x)$ لإيجاد تقريبات ابتدائية لجذور f.

ج. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد جذور f ضمن $10^{[illegible]}$.

د. أوجد الحلول الصحيحة لـ $f(x) = 0$ دون استخدام Maple.

30. أعد التمرين (29) مستخدمًا $f(x) = 2^{x^2} - 3 \cdot 7^{x+1}$.

31. إن النموذج اللوجستي للنمو السكاني تعبر عنه الصيغة

$$P(t) = \frac{P_L}{1 - ce^{-kt}}$$

بحيث إن P_L، c و $k > 0$ عبارة عن ثوابت، و$P(t)$ تمثل عدد السكان عند الزمن t وإن $\lim_{t\to\infty} P(t) = P_L$. استخدم بيانات التعداد السكاني للسنوات 1950، 1960 و 1970 المبينة في الجدول أدناه لتحديد الثوابت أعلاه لنموذج النمو اللوجستي. استخدم النموذج اللوجستي للتنبؤ بعدد سكان الولايات المتحدة عام 1980 وعام 2010 مفترضًا $t = 0$ في عام 1950. قارن بين التنبؤ عام 1980 والعدد الحقيقي.

32. نموذج كومبرتس للنمو السكاني هو

$$P(t) = P_L e^{-ce^{-kt}}$$

حيث إن P_L، c و $k > 0$ عبارة عن ثوابت، و $P(t)$ تمثل عدد السكان عند الزمن t. أعد التمرين (27) مستخدمًا نموذج كومبرتس للنمو السكاني بدلًا من النموذج اللوجستي.

33. يتغلب اللاعب A (يربح 21 نقطة مقابل 0) على اللاعب B في لعبة كرة الضرب باحتمال

$$P = \frac{1+p}{2}\left(\frac{p}{1-p+p^2}\right)^{21}$$

حيث تمثل P احتمال ربح A لأي مباراة محددة (دون ارتباط ذلك بمن يستهل الضرب). (انظر ([Keller, J], p. 267.) حدد – ضمن 10^{-3} –القيمة الصغرى لـ P التي تضمن تغلب A على P بنصف عدد المباريات بينهما على الأقل.

34. عند تصميم مركبة السباق يؤخذ في الحسبان نوعان من كيفية فشل المركبة في تجاوز العقبات. يحدث الأول عندما تلامس بطن المركبة الأرض في أثناء تجاوزها العقبة. ويحدث الثاني عندما تلامس مقدمة المركبة الأرض في أثناء تجاوزها العقبة. والشكل أدناه مأخوذ من [Bek]، ويوضح العناصر المصاحبة للنوع الثاني من الفشل. ويلاحظ فيه إمكانية تطابق الزاوية الكبرى α التي يمكن للمركبة ميلانها حيث تمثل β الزاوية الكبرى التي لا يظهر عندها فشل المركبة من النوع الأول مع الصيغة

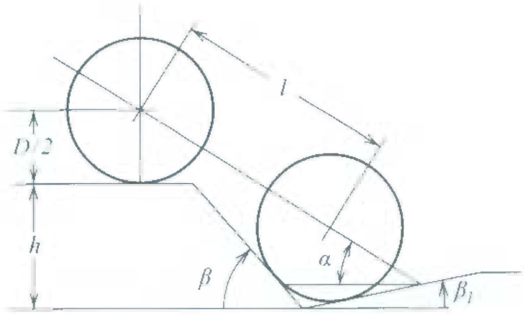
$$A \sin\alpha \cos\alpha + B \sin^2\alpha - C \cos\alpha - E \sin\alpha = 0$$

حيث

$$A = l \sin\beta_1, \quad B = l \cos\beta_1, \quad C = (h + 0.5D) \sin\beta_1 - 0.5D \tan\beta_1$$

$$E = (h + 0.5D) \cos\beta_1 - 0.5D$$

obeikandl.com



أ. أثبت الادعاء الآتي:

"عندما $l = 89\ in,\ h = 49\ in,\ D = 55\ in,\ and\ \beta_1 = 11.5$ فإنّ الزاوية $\alpha = 33^{o}$"

ب. أوجد α في حالة كون l, h و β_1 مساوية لما هو في الفقرة (أ) لكن $D = 30\,in$.

4.2 تحليل الخطأ لطرائق التكرار Error Analysis for Iterative

سنتفحص في هذا الفصل رتبة التقارب لأساليب التكرار الدّالية. ونتناول طريقة نيوتن من خلال كونها طريقة لإيجاد التقارب السريع. سنأخذ في الحسبان طرائق تسريع التقارب لطريقة نيوتن في حالات خاصة أيضًا. ونحتاج إلى عملية لقياس مدى التسارع في تقارب المتتالية في البداية.

تعريف 6.2 افترض المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى p و $p_n \neq p$ لقيم n كلها. فعند وجود الثوابت λ و α حيث

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda$$

نقول: إن المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى p بالرتبة α، مع خطأ مقارب يساوي الثابت λ.
ويوصف أسلوب التكرار ذو الصيغة $p_n = g(p_{n-1})$ بأنه من الرتبة α إذا تقاربت المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ للحل $p = g(p)$ من الرتبة α. ■

وتتقارب المتتالية ذات الرتبة العليا للتقارب عمومًا بسرعة أكبر من المتتالية ذات الرتبة الدنيا. إن ثابت المقاربة يؤثر في سرعة التقارب. ولكنه ليس في مستوى أهمية الرتبة. وتتطلب حالتان من الرتبة اهتمامًا خاصًا منا وهما:

- إذا كانت $\alpha = 1$ و $\lambda < 1$ فإنّ المتتالية متقاربة خطيًّا.
- إذا كانت $\alpha = 2$ فإنّ المتتالية متقاربة تربيعيًّا.

ويقارن المثال الآتي بين الحالتين، بحيث نرى لماذا نحاول إيجاد طرائق تؤدي إلى متتاليات ذات تقارب من الرتبة أعلى.

مثال 1 افترض $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ متقاربة خطيًّا إلى (0) مع

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} = 0.5$$

obeikandl.com

وأن $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ متقاربة تربيعيًا إلى الصفر مع ثابت الخطأ المقارب نفسه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\tilde{p}_{n+1}|}{|\tilde{p}_n|^2} = 0.5$$

ولغرض التبسيط، افترض أن

$$\frac{|\tilde{p}_{n+1}|}{|\tilde{p}_n|^2} \approx 0.5 \quad \text{و} \quad \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} \approx 0.5$$

أما أسلوب التقارب الخطي، فإنّ هذا يعني

$$|p_n - 0| = |p_n| \approx 0.5|p_{n-1}| \approx (0.5)^2|p_{n-2}| \approx \cdots \approx (0.5)^n|p_0|$$

بحيث يكون لأسلوب التقارب التربيعي

$$\begin{aligned}|\tilde{p}_n - 0| = |\tilde{p}_n| &\approx 0.5|\tilde{p}_{n-1}|^2 \approx (0.5)[0.5|\tilde{p}_{n-2}|^2]^2 = (0.5)^3|\tilde{p}_{n-2}|^4 \\ &\approx (0.5)^3[(0.5)|\tilde{p}_{n-3}|^2]^4 = (0.5)^7|\tilde{p}_{n-3}|^8 \\ &\approx \cdots \approx (0.5)^{2^n-1}|\tilde{p}_0|^{2^n}\end{aligned}$$

ويوضح جدول (7.2) السرعة النسبية لتقارب المتتالية إلى الصفر عندما $|p_0| = |\tilde{p}_0| = 1$.

جدول 7.2

n	متتالية التقارب الخطي sequence $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(0.5)^n$	متتالية التقارب التربيعي sequence $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(0.5)^{2^n-1}$
1	5.0000×10^{-1}	5.0000×10^{-1}
2	2.5000×10^{-1}	1.2500×10^{-1}
3	1.2500×10^{-1}	7.8125×10^{-3}
4	6.2500×10^{-2}	3.0518×10^{-5}
5	3.1250×10^{-2}	4.6566×10^{-10}
6	1.5625×10^{-2}	1.0842×10^{-19}
7	7.8125×10^{-3}	5.8775×10^{-39}

ويقع التقارب التربيعي للمتتالية ضمن 10^{-38} من الصفر بالحد السابع. ونحتاج إلى 126 حدًا على الأقل لضمان هذه الدقة بالنسبة إلى التقارب الخطي للمتتالية. ■

وتتقارب المتتاليات المتقاربة تربيعيًا عمومًا بسرعة أكبر من تلك التي تتقارب فقط خطيًا.

مبرهنة 7.2 ليكن $g \in C[a, b]$ بحيث $g(x) \in [a, b]$ لكل $x \in [a, b]$. وافترض بالإضافة إلى ذلك أن g' متصلة على (a, b)، وأن الثابت الموجب $k < 1$ موجود بحيث

$$|g'(x)| \le k \quad \text{لكل} \quad x \in (a, b)$$

فإذا كانت $g'(p) \neq 0$ فإنّه لأي عدد p_0 في $[a, b]$، فإنّ المتتالية

$$n \geq 1 \text{ لـ } p_n = g(p_{n-1})$$

تتقارب خطيًّا فقط إلى نقطة ثابتة ووحيدة p في $[a, b]$. ■

البرهان نحن نعلم من مبرهنة النقطة الثابتة (3.2) من الفصل (2.2) أن المتتالية تتقارب إلى p بحيث تكون g' موجودة ضمن (a, b)، ويمكننا تطبيق مبرهنة القيمة الوسطى للدّالة g لإثبات أنه ولأي n

$$p_{n+1} - p = g(p_n) - g(p) = g'(\xi_n)(p_n - p)$$

بحيث تقع ξ_n ما بين p_n و p. وحيث إن g' متصلة على (a, b)، يكون لدينا

$$\lim_{n \to \infty} g'(\xi_n) = g'(p)$$

عندئذ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = |g'(p)| \quad \text{و} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} = \lim_{n \to \infty} g'(\xi_n) = g'(p)$$

وبناءً على ما تقدم، إذا كانت $g'(p) \neq 0$ فإنّ تكرار النقطة الثابتة ينتج تقاربا خطيًا مع خطأ مقارب ثابت $|g'(p)|$. ■ ■ ■

وتشير مبرهنة (7.2) إلى أن تقاربًا من الرتبة العليا لطرائق النقطة الثابتة يمكن ظهوره فقط عندما $g'(p) = 0$. وتوضح التمهيدية الآتية شروطًا إضافية تضمن التقارب التربيعي الذي نريد.

مبرهنة 8.2 ليكن p حلاً للصيغة $x = g(x)$. افترض أن $g'(p) = 0$، وأن g'' حيث $|g''(x)| < M$ متصلة على فترة مفتوحة I تحتوي على p. عندها يوجد عدد $\delta > 0$، بحيث $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$. والمتتالية $p_n = g(p_{n-1})$ عند $n \geq 1$ تتقارب تربيعيًا على الأقل إلى p. وعلاوة على ذلك، لقيم n الكبيرة بقدرٍ كافٍ، تكون

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2$$ ■

البرهان اختر k ضمن $(0, 1)$ و $\delta > 0$ بحيث عندما تكون الفترة $[p - \delta, p + \delta]$ في الفترة I يكون لدينا $|g'(x)| \leq k$ و g'' متصلة. وبما أن $|g'(x)| \leq k < 1$ ، فإنّ المنطق الذي استخدم في مبرهنة (5.2) من الفصل (3.2) يثبت أن حدود المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تكون ضمن $[p - \delta, p + \delta]$ وتوسيع $g(x)$ إلى كثيرة حدود تايلور الخطية وإلى $x \in [p - \delta, p + \delta]$ يعطي

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x - p) + \frac{g''(\xi)}{2}(x - p)^2$$

بحيث تقع ξ ما بين x و p. والفرضيتان $g(p) = p$ و $g'(p) = 0$ تؤديان إلى حصول

$$g(x) = p + \frac{g''(\xi)}{2}(x - p)^2$$

obeikandl.com

وعندما $x = p_n$ خصوصا فإنّ

$$p_{n+1} = g(p_n) = p + \frac{g''(\xi_n)}{2}(p_n - p)^2$$

مع وجود ξ_n ما بين p_n و p. وبذلك فإن

$$p_{n+1} - p = \frac{g''(\xi_n)}{2}(p_n - p)^2$$

حيث $|g'(x)| \le k < 1$ على $[p-\delta, p+\delta]$ وأن الدّالة g تنقل $[p-\delta, p+\delta]$ إلى نفسها، فإنه بناءً على مبرهنة النقطة الثابتة تتقارب $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ إلى p. لكن ξ_n ما بين p و p_n لكل n. بأنّ $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب أيضًا إلى p، وإن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^2} = \frac{|g''(p)|}{2}$$

وهذه التمهيدية تؤدي إلى أن المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب تربيعيًا عندما $g''(p) \neq 0$ وتتقارب من الرتبة أعلى عندما $g''(p) = 0$. ولأن g'' متصلة ومحددة حصريًا بـ M في الفترة $[p-\delta, p+\delta]$، وهذا يعني أنه لقيم n الكبيرة بقدر كافٍ تكون

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2$$

■ ■ ■

وتعلمنا النظريتان (7.2) و(8.2) أن بحثنا عن تقارب تربيعي بطرائق النقطة الثابتة يجب أن يكون في اتجاه الدّوال ذوات المشتقة صفر عند النقطة الثابتة.

إن أسهل طريقة لإنشاء مسألة النقطة الثابتة متوافقة مع مسألة إيجاد الجذر $f(x) = 0$ هي بطرح مضاعف $f(x)$ من x. دعنا عندئذ نفترض أن

$$p_n = g(p_{n-1}) \quad \text{لكل} \quad n \ge 1$$

للدّالة g وفقًا للصيغة

$$g(x) = x - \phi(x) f(x)$$

حيث إن ϕ دالّة قابل للاشتقاق وقد اختير لاحقًا.

ومن أجل تقارب تربيعي وفق أسلوب تكرار اشتقاقه من g، فإنّنا نحتاج إلى $g'(p) = 0$ عندما $f(p) = 0$. وحيث إن

$$g'(x) = 1 - \phi'(x) f(x) - f'(x)\phi(x)$$

يكون لدينا

$$g'(p) = 1 - \phi'(p) f(p) - f'(p)\phi(p) = 1 - \phi'(p)\cdot 0 - f'(p)\phi(p) = 1 - f'(p)\phi(p)$$

وأن $g'(p) = 0$ فقط وفي أثناء $\phi(p) = 1/f'(p)$ فقط.

وإذا جعلنا $\phi(x) = 1/f'(x)$ فإنّنا نضمن أن $\phi(p) = 1/f'(p)$، ومن ثم نحصل على عملية التقارب التربيعية

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

هذه هي طريقة نيوتن.

obeikandl.com

من خلال ما سبق، جعلنا القيد $f'(p) \neq 0$، حيث p هو الحل لـ $f(x) = 0$. ومن تعريف طريقة نيوتن، من الواضح أن ثمة صعوبات قد تظهر فيما لو ذهبت $f'(p_n)$ إلى الصفر آنيًا مع $f(p_n)$. إن طريقة نيوتن وطريقة القاطع خصوصًا تؤديان عمومًا إلى مشاكل إذا كان $f'(p) = 0$ في أثناء $f(p) = 0$. ولتفحّص هذه الصعوبات بتفصيل أكثر، نقدم التعريف الآتي:

تعريف 9.2 لنفترض أن p حل للدّالة $f(x) = 0$. نقول: إن p صفرا (أو جذرًا) مضاعفا m من المرات للدّالة f حيث $x \neq p$، ويمكننا كتابة $f(x) = (x-p)^m q(x)$، حيث إن $\lim_{x\to p} q(x) \neq 0$.

وخلاصة القول، تمثّل $q(x)$ ذلك الجزء من $f(x)$ الذي لا يسهم في صفرية f. تعطي التمهيدية الآتية سبلًا لتحديد أصفار بسيطة لدالّة ما ولها مضروب الواحد.

مبرهنة 10.2 $f \in C^1[a,b]$ لها صفر بسيط عند p في (a,b) إذا وفقط إذا كان

$$f(p) = 0 \text{ لكن } f'(p) \neq 0 \qquad ■$$

البرهان

إذا كان لـ f صفر بسيط عند p ضمن (a,b)، فإنّ $f(p) = 0$ و $f(x) = (x-p)q(x)$ بحيث $\lim_{x\to p} q(x) \neq 0$. حيث إن $f \in C^1[a,b]$

$$f'(p) = \lim_{x\to p} f'(x) = \lim_{x\to p}[q(x) + (x-p)q'(x)] = \lim_{x\to p} q(x) \neq 0$$

وعلى عكس ذلك. إذا كان $f(p) = 0$ لكن $f'(p) \neq 0$ فإنّ f تمتد في كثيرة حدود تايلور الصفرية حول p.

بالنسبة إلى كثيرات الحدود فإن f عبارة عن صفر المضاعف m إلى f إذا كان $f(x) = (x-p)^m q(x)$ حيث إن $q(x)$ عبارة عن كثيرة الحدود مع $q(p) \neq 0$.

عندئذ تكون $f(x) = f(p) + f'(\xi(x))(x-p) = (x-p)f'(\xi(x))$

حيث $\xi(x)$ ما بين x و p. ولكون $f \in C^1[a,b]$، فإنّ

$$\lim_{x\to p} f'(\xi(x)) = f'\left(\lim_{x\to p} \xi(x)\right) = f'(p) \neq 0$$

وندعْ $q = f' \circ \xi$ تعطينا $f(x) = (x-p)q(x)$ حيث إن $\lim_{x\to p} q(x) \neq 0$. وعلى هذا النحو فإنّ لـ f صفرًا بسيطا عند p. ■ ■ ■

وقد أُخذ التعميم الآتي للمبرهنة (10.2) في الحسبان في التمرين (12).

مبرهنة 11.2 للدالّة $f \in C^m[a,b]$ صفر مضاعف m مرّة عند p في الفترة (a,b) إذا وفقط إذا كان

$$0 = f(p) = f'(p) = f''(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p) \text{ لكن } f^{(m)}(p) \neq 0 \qquad ■$$

تفيد تمهيدية المبرهنة (10.2) بأن الفترة حول p موجودة، حيث تتقارب طريقة نيوتن تربيعيا إلى p ولأي تقريب ابتدائي $p_0 = p$. حيث p هي صفر بسيط. ويوضح المثال الآتي أن التقارب التربيعي قد لا يظهر إذا لم يكن الصفر بسيطا.

مثال 4 افترض $f(x) = e^x - x - 1$. وكون $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ و $f'(0) = e^0 - 1 = 0$. لكن $f''(0) = e^0 = 1$. فإنّ لـ f صفرا للمضروب 2 عند $p = 0$. في الحقيقة يمكن التعبير عن $f(x)$ بالصيغة

$$f(x) = (x-0)^2 \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

حيث نجد عن طريق "قاعدة لوبيتال" أن

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

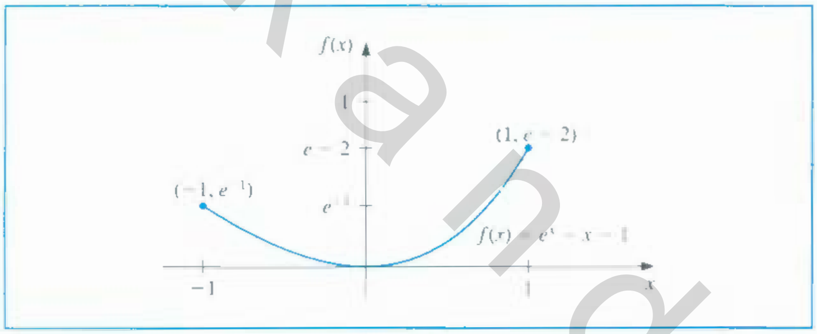
الحدود الناتجة بطريقة نيوتن المطبقة على f مع $p_0 = 1$ مبينة في الجدول (8.2). وتتقارب المتتالية بوضوح تام إلى (0). ولكن ليس تربيعيًا.

ويبين شكل (11.2) رسمًا لـ f. ■

جدول 8.2

p_n	n	p_n	n
2.7750×10^{-3}	9	1.0	0
1.3881×10^{-3}	10	0.58198	1
6.9411×10^{-4}	11	0.31906	2
3.4703×10^{-4}	12	0.16800	3
1.7416×10^{-4}	13	0.08635	4
8.8041×10^{-5}	14	0.04380	5
4.2610×10^{-5}	15	0.02206	6
1.9142×10^{-6}	16	0.01107	7
		0.005545	8

شكل 11.2



توجد طريقة واحدة تتناول مسألة الجذور المضاعفة. وهي أن نعرّف

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

وإذا كان p هو الصفر للدّالة f مضاعفًا m مرّة وكانت $f(x) = (x - p)^m q(x)$ فإنّ

$$\mu(x) = \frac{(x - p)^m q(x)}{m(x - p)^{m-1} q(x) + (x - p)^m q'(x)}$$

$$= (x - p) \frac{q(x)}{mq(x) + (x - p) q'(x)}$$

obeikandl.com

ولها صفر عند p. على أي حال $q(p) \neq 0$ وعندئذ

$$\frac{q(p)}{mq(p) + (p - p)q'(p)} = \frac{1}{m} \neq 0$$

و p هو صفر بسيط لـ μ. ويمكن إذن تطبيق طريقة نيوتن على μ لتعطينا

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)/f'(x)}{\{[f'(x)]^2 - [f(x)][f''(x)]\}/[f'(x)]^2}$$

أو

$$g(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)} \qquad (11.2)$$

إذا كانت g تملك الشروط المطلوبة للاستمرار، فإنّ تكرار الدّالة على g ستكون متقاربة بغض النظر عن مضروب الصفر لـ f. عيب هذه الطريقة الوحيد من الناحية المبرهنة هو الحسابات الإضافية لـ $f''(x)$ مع عمل مختبري أكثر لحساب التكرارات. وعلى أي حال يمكن عند التطبيق أن تسبب الجذور المتعددة مشاكل جدية في جدولة التكرار، لكون مقام الصيغة (11.2) يتضمن الفرق بين عددين كل منهما قريب من الصفر.

جدول 9.2

n	p_n
1	$-2.3421061 \times 10^{-1}$
2	$-8.4582783 \times 10^{-3}$
3	$-1.1889524 \times 10^{-5}$
4	$-6.8638230 \times 10^{-6}$
5	$-2.8085217 \times 10^{-7}$

مثال 3 يبيّن جدول (9.2) تقريبات مضاعف الصفر عند $x = 0$ إلى $f(x) = e^x - x - 1$ باستخدام $p_n = g(p_{n-1})$ لكل $n \geq 1$، حيث g معطى في الصيغة (11.2). وسجّلت النتائج باستخدام حاسبة ذات عشر منازل من الدقة. وقد اختير التقريب الابتدائي بموجب $p_0 = 1$ ليكون بالإمكان مقارنة المدخلات بتلك التي في جدول (8.2)، والذي لا يبيّنه جدول (9.2) هو عدم ظهور تحسن للتقريب الصفري $-2.8085217 \times 10^{-7}$ خلال الحسابات المتتالية باستخدام هذه الحاسبة لكون البسط والمقام كليهما يقترب إلى الصفر. ■

مثال 4 قمنا في مثال (3) من الفصل (2.2) بحل $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ بإيجاد الصفر $p = 1.36523001$. ولمقارنة التقارب لصفر الصيغة المضاعف مرّة واحدة في واحد بطريقة نيوتن، وطريقة نيوتن المختصرة المبينة في الصيغة (11.2)؛ افترض

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10}{3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1}} \qquad \text{(i)}$$

من طريقة نيوتن ومن كون $p_n = g(p_{n-1})$، حيث الدّالة g على صورة الصيغة (11.2). نحصل على:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10)(3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1})}{(3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1})^2 - (p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10)(6p_{n-1} + 8)} \qquad \text{(ii)}$$

خذ $p_0 = 1.5$، تكون التكرارات الثلاثة الأولى لـ (i) و (ii) مبينة في جدول (10.2). وتوضح النتائج التقارب المتسارع لكلا الطريقتين في حالة الصفر البسيط. ■

جدول 10.2

	(i)	(ii)
p_1	1.37333333	1.35689898
p_2	1.36526201	1.36519585
p_3	1.36523001	1.36523001

مجموعة التمارين 4.2 EXERCISE SET

1. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة ضمن 10^{-5} للمسائل الآتية:

أ. $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0$ لكل $0 \leq x \leq 1$

ب. $\cos(x + \sqrt{2}) + x(x/2 + \sqrt{2}) = 0$ لكل $-2 \leq x \leq -1$

ج. $x^3 - 3x^2(2^{-x}) + 3x(4^{-x}) - 8^{-x} = 0$ لكل $0 \leq x \leq 1$

د. $e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)e^{4x} - (\ln 2)^3 = 0$ لكل $-1 \leq x \leq 0$

2. استخدم طريقة نيوتن لإيجاد حلول دقيقة ضمن 10^{-5} للمسائل الآتية:

أ. $1 - 4x\cos x + 2x^2 + \cos 2x = 0$ لكل $0 \leq x \leq 1$

ب. $x^2 + 6x^5 + 9x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ لكل $-3 \leq x \leq -2$

ج. $\sin 3x + 3e^{-2x}\sin x - 3e^{-x}\sin 2x - e^{-3x} = 0$ لكل $3 \leq x \leq 4$

د. $e^{3x} - 27x^6 + 27x^4e^x - 9x^2e^{2x} = 0$ لكل $3 \leq x \leq 5$

3. كرّر التمرين (1) مستخدمًا طريقة نيوتن–رافسون المختصرة والموضحة في الصيغة (11.2) هل يوجد ثمة تحسن في سرعة ما كان عليه التمرين (1) أو دقته؟

4. كرّر التمرين (2) مستخدمًا طريقة نيوتن–رافسون المختصرة والموضحة في الصيغة (11.2) هل يوجد ثمة تحسن في سرعة ما كان عليه التمرين (2) أو دقته؟

5. استخدم طريقة نيوتن وطريقة نيوتن–رافسون المختصرة في الصيغة (11.2) لإيجاد حل دقيق ضمن 10^{-5} للمسألة الآتية:

$$e^{6x} + 1.441e^{2x} - 2.079e^{4x} - 0.3330 = 0 \quad \text{لكل} \quad -1 \leq x \leq 0$$

هذا شبيه بالمسألة 1 (د) مع استبدال المعاملات بتقريباتها ذات المنازل الأربع. قارن جميع النتائج في 1 (د) و 2 (د).

6. أثبت أن المتتاليات الآتية تتقارب خطيًا إلى $p = 0$. كم كانت n كبيرة قبل أن يكون لديها $|p_n - p| \leq 5 \times 10^{-2}$!

أ. $p_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$ ب. $p_n = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1$

7. أ. أثبت أنه لأي عدد صحيح موجب k. فإنّ المتتالية المعرفة وفق $p_n = 1/n^k$ تتقارب خطيًا إلى $p = 0$

ب. لأي زوج من الأعداد الصحيحة k و m . حدّد العدد N بحيث $1/N^k < 10^{-m}$.

8. أ. أثبت أن المتتالية $p_n = 10^{-2^n}$ تتقارب تربيعيًا إلى الصفر.

ب. أثبت أن المتتالية $p_n = 10^{-n^k}$ لا تتقارب تربيعيًا إلى الصفر، بغض النظر عن مقدار الأسّ $k > 1$

9. أ. كوّن متتالية تتقارب إلى الصفر من الرتبة 3.

ب. افترض أن $\alpha > 1$. كوّن متتالية تتقارب إلى الصفر من الرتبة α.

10. افترض أن p صفر للدّالة f مضاعفًا m مرّة. حيث إن $f^{(m)}$ متصلة على الفترة المفتوحة والمتضمنة لـ p. أثبت أن طريقة النقطة الثابتة الآتية لها $g'(p) = 0$:

$$g(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}$$

11. أثبت أن خوارزمية التنصيف (1.2) تعطي متتالية بحد خطأ يتقارب خطيًا إلى الصفر.

12. افترض أن الدّالة f لها m من المشتقات المتصلة. عدّل برهان المبرهنة (10.2) لاثبات أن الدّالة f لها صفر مضاعف m مرّة عند p إذا وفقط إذا كان

$$0 = f(p) = f'(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p) \quad \text{لكن} \quad f^{(m)}(p) \neq 0$$

obeikandl.com

13. إن طريقة التكرار لحل $f(x) = 0$ معطاة ضمن طريقة النقطة الثابتة $x = g(x)$، حيث

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} - \frac{f''(p_{n-1})}{2f'(p_{n-1})}\left[\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}\right]^2 \quad \text{لكل} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

له $g'(p) = g''(p) = 0$. وهذا يعطي عمومًا تقاربًا مكعبًا ($\alpha = 3$). وسّع تحليل المثال (1) لمقارنة التقارب التربيعي بالتقارب التكعيبي.

14. من الممكن إثبات (انظر على سبيل المثال [DaB, pp 228-229]) أنه إذا كانت $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ متقاربة وفقًا لطريقة القاطع لـ p الذي هو حلٌّ لـ $f(x) = 0$، فإنّ الثابت C يظهر حيث $|p_{n+1} - p| \approx C|p_n - p||p_{n-1} - p|$ عند قيم كبيرة نسبيًا لـ n. افترض أن $\{p_n\}$ تتقارب إلى p من الرتبة α، وأثبت أن $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$.
(إرشاد: هذا يؤدي إلى أن رتبة التقارب لطريقة القاطع هي 1.62 تقريبًا).

5.2 تسريع التقارب Accelerating Convergence

تشير المبرهنة (7.2) إلى ندرة الوصول إلى حالة مقبولة جدًّا في تقارب تربيعي. والآن سنأخذ في الحسبان أسلوبًا يدعى "طريقة أيكن **Aitken's Δ^2 method** التي يمكن استخدامها لتسريع تقارب المتتالية ذات التقارب الخطي بغض النظر عن أصلها وطبيعة تطبيقها.

افترض أن $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية تتقارب خطيًّا إلى p. وللسعي في تكوين متتالية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب بتسارع أكبر إلى p مما هي عليه $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$. دعنا أولًا نفترض أن إشارات

$$p_n - p, \; p_{n+1} - p \quad \text{و} \quad p_{n+2} - p$$

تتفق مع كون n كبيرة نسبيًا بأن

$$\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} \approx \frac{p_{n+2} - p}{p_{n+1} - p}$$

وبذلك

$$(p_{n+1} - p)^2 \approx (p_{n+2} - p)(p_n - p)$$

لذا

$$p_{n+1}^2 - 2p_{n+1}p + p^2 \approx p_{n+2}p_n - (p_n + p_{n+2})p + p^2$$

و

$$(p_{n+2} + p_n - 2p_{n+1})p \approx p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2$$

وبحل p نحصل على

$$p \approx \frac{p_{n+2}p_n - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$

وبجمع الحدود p_n^2 و $2\,p_n p_{n+1}$ وطرحها في البسط وتجميع الحدود تجميعًا مناسبًا نحصل على

$$p \approx \frac{p_n p_{n+2} - 2p_n p_{n+1} + p_n^2 - p_{n+1}^2 + 2p_n p_{n+1} - p_n^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$

$$= \frac{p_n(p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n) - (p_{n+1}^2 - 2p_n p_{n+1} + p_n^2)}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$

obeikandi.com