ونستعمل التعريف الآتي للمقارنة بين سرعة تقارب الطرائق المختلفة.

تعريف 18.1

لتكن $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية تتقارب نحو الصفر. و $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو العدد α. إذا وجد ثابتًا موجبًا K يحقق

$$|\alpha_n - \alpha| \leq K|\beta_n| \quad \text{لقيم } n \text{ الكبيرة}$$

فإننا نقول: إن $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو العدد α بسرعة تقارب $O(\beta_n)$ (يقرأ هذا التعبير "oh كبيرة لقيمة β_n"). ويشار إليها بكتابة $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$. ■

ومع أن التعريف (18.1) يسمح للمتتالية $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ بأن تقارن بأي متتالية $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ فإننا في معظم الحالات نستخدم

$$\beta_n = \frac{1}{n^p}$$

حيث إن p عدد موجب $p > 0$. وعادة ما يكون اهتمامنا بأكبر قيمة للعدد p التي تحقق $\alpha_n = \alpha + O(1/n^p)$.

مثال 4

افترض أنه لكل $n \geq 1$ لدينا

$$\hat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3} \quad \text{و} \quad \alpha_n = \frac{n+1}{n^2}$$

فمع أن $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \hat{\alpha}_n = 0$ فإن المتتالية $\{\hat{\alpha}_n\}$ تتقارب إلى هذه النهاية بسرعة أكبر كثيرًا من المتتالية $\{\alpha_n\}$. على نحو الجدول (7.1) الذي حسب مستخدمًا حساب التقريب بخمسة أرقام.

جدول 7.1

n	1	2	3	4	5	6	7
α_n	2.00000	0.75000	0.44444	0.31250	0.24000	0.19444	0.16327
$\hat{\alpha}_n$	4.00000	0.62500	0.22222	0.10938	0.064000	0.041667	0.029155

إذا افترضنا $\beta_n = 1/n$ و $\hat{\beta}_n = 1/n^2$ نجد أن

$$|\alpha_n - 0| = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n} = 2\beta_n$$

و

$$|\hat{\alpha}_n - 0| = \frac{n+3}{n^3} \leq \frac{n+3n}{n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n^2} = 4\hat{\beta}_n$$

عندئذ

$$\hat{\alpha}_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{و} \quad \alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

إن سرعة تقارب $\{\alpha_n\}$ للصفر مماثلة لسرعة تقارب $\{1/n\}$ للصفر. حيث تتقارب $\{\hat{\alpha}_n\}$ للصفر بسرعة مماثلة للمتتالية الأسرع في التقارب $\{1/n^2\}$. ■

توجد طرائق متعددة أخرى لوصف نمو المتتاليات والدّوال. ويتطلب بعضها حدودًا عليا وحدودًا دنيا للمتتالية أو الدّالة تحت الدراسة. إن ي كتاب جيد في تحليل الخوارزميات مثل [CLRS] يحتوي على هذه المعلومات.

نستعمل أيضًا رمز oh الكبيرة لوصف السرعة التي تتقارب فيها الدوال.

obeikandl.com

تعريف 19.1 افتــرض أن $\lim_{h\to 0} G(h) = 0$، وأن $\lim_{h\to 0} F(h) = L$. إذا وجدنــا ثابتًــا موجبًا K حيث إن $|F(h) - L| \leq K|G(h)|$ لقيم h الصغيرة على نحو كافٍ فعندئذ نكتب

$$F(h) = L + O(G(h))$$ ■

إن الدّوال التي نستخدمها للمقارنة عادة ما تأخذ الصورة $G(h) = h^p$. حيث إن $p > 0$ ينصبّ اهتمامنا على أكبر قيمة للعدد p التي تحقّق $F(h) = L + O(h^p)$.

مثال 5 لقد وجدنا في المثال (3) (ب) من الفصل (1.1) أن كثيرة حدود تايلور تعطي

$$\cos h = 1 - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{24}h^4 \cos\xi(h)$$

لعدد ما $\xi(h)$ بين الصفر و h، وأخيرًا يكون

$$\cos h + \tfrac{1}{2}h^2 = 1 + \tfrac{1}{24}h^4 \cos\xi(h)$$

وهذا يتضمن أن

$$\cos h + \tfrac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

لأن

$$|(\cos h + \tfrac{1}{2}h^2) - 1| = |\tfrac{1}{24}\cos\xi(h)|h^4 \leq \tfrac{1}{24}h^4$$

وهــذا يعنــي أنه عندما تكون $h \to 0$، فإن $\cos h + \tfrac{1}{2}h^2$ يتقارب إلى نهاية 1 بســرعة قريبة من سرعة تقارب h^4 للصفر. ■

مجموعة التمارين 3.1 EXERCISE SET

1. أ. استخدم حساب القطع لثلاثة أرقام لتجد المجموع $\sum_{i=1}^{10}(1/i^2)$، مستخدمًا $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}$ أولاً ثم $\frac{1}{100} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{1}$. أي الطريقتين أدق؟ ولماذا؟
   ب. اكتب خوارزمية لإيجاد مجموع المتسلسلة المحدودة $\sum_{i=1}^{N} x_i$ بترتيب عكسي.
2. يعرّف العدد e بالسلســلة $e = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$، اســتخدم حســاب القطع لأربعة أرقام لإيجاد التقريبات الآتية للعدد e، ثم احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي:
   أ. $e \approx \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$ ب. $e \approx \sum_{j=0}^{5} \frac{1}{(5-j)!}$
   ج. $e \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$ د. $e \approx \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{(10-j)!}$
3. إن متسلسلة ماكلورين لدالّة الظل المقابل متقاربة على الفترة $-1 < x \leq 1$ وهي

$$\arctan x = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1}$$

   أ. اســتخدم الحقيقة $\tan \pi/4 = 1$ لإيجاد عدد الحدود n للمتسلســلة المطوب جمعها للحصول على $|4P_n(1) - \pi| < 10^{-3}$.
   ب. تشترط لغة البرمجة ++C أن تكون قيمة π صحيحة بحد خطأ أصغر من 10^{-10}. ما عدد حدود السلسلة التي نحتاج إلى جمعها للحصول على هذه الرتبة من الدقة؟
4. يقدم التمرين (3) تفاصيل طريقة غير فعالة للحصول على تقريب العدد π. يمكن تحسين هذه الطريقة على نحو مفيد بملاحظة أن $\pi/4 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ ثم إيجاد قيمة متسلسلة الظل المقابل arctan عند $\frac{1}{2}$ وعند $\frac{1}{3}$. أوجد عدد حدود السلسلة التي يجب جمعها لضمان تقريب العدد π ضمن 10^{-3}.

obeikandl.com

5 توجد صيغة أخرى لحساب π يمكن استنتاجها من المتطابقة $\pi/4 = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$. أوجد عدد حدود السلسلة التي يجب جمعها لضمان تقريب العدد π ضمن 10^{-3}.

6 أوجد سرعة التقارب للمتتاليات الآتية عندما $n\to\infty$:

أ. $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$ ب. $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n^2} = 0$

ج. $\lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 = 0$ د. $\lim_{n\to\infty} [\ln(n+1) - \ln(n)] = 0$

7. أوجد سرعة تقارب الدوال الآتية عندما $h \to 0$

أ. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ ب. $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$

ج. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h\cos h}{h} = 0$ د. $\lim_{h\to 0} \frac{1-e^h}{h} = -1$

8. أ. ما عدد عمليات الضرب والجمع المطلوبة لإيجاد حاصل جمع الصيغة

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_i b_j \text{؟}$$

ب. عدّل الصيغة في (أ) على أن تقلّل عدد العمليات الحسابية.

9. لتكن $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود، وافترض أن x_0 معطاة. أنشئ خوارزمية لإيجاد قيمة $P(x_0)$ مستخدما عمليات الضرب المتداخلة.

10. يعطي التمرين (5) من الفصل (2.1) صيغ بديلة للجذرين x_1 و x_2 للصيغة $ax^2 + bx + c = 0$. أنشئ خوارزمية بالمدخلات a, b, c والمخرجات x_1 و x_2 لتحسب الجذرين x_1 و x_2 (اللذين يمكن أن يكونا متساويين أو مرافقين مركبين) مستخدما أفضل صيغة لكل جذر.

11. أنشئ خوارزمية مدخلاتها عدد صحيح $n \geq 1$، الأعداد $x_0, x_1, \ldots, x_n$ وعدد x التي مخرجها حاصل الضرب $(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

12. افترض أن $\frac{1-2x}{1-x+x^2} + \frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4} + \frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8} + \cdots = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$

لكل $x < 1$ وافترض أن $x = 0.25$. اكتب خوارزمية تحدد عدد الحدود المطلوبة في الطرف الأيسر للصيغة، ونفّذها على أن يكون اختلاف الطرف الأيسر عن الطرف الأيمن أقل من 10^{-6}.

13. أ. افترض أن $0 < q < p$ وأن $\alpha_n = \alpha + O(n^{-p})$ برهن أن $\alpha_n = \alpha + O(n^{-q})$.

ب. اكتب جدولا فيه $1/n, 1/n^2, 1/n^3$ و $1/n^4$ للقيم $n = 5, 10, 100$ و 1000. وناقش معدلات التقارب المختلفة لهذه المتتاليات عندما تصبح n كبيرة.

14. أ. افترض أن $0 < q < p$ وأن $F(h) = L + O(h^p)$. برهن على أن $F(h) = L + O(h^q)$.

ب. اكتب جدولاً فيه h, h^2, h^3, h^4 للقيم $h = 0.5, 0.1, 0.01$ و 0.001. وناقش معدلات التقارب المختلفة لقوى h هذه عندما تقترب h من الصفر.

15. افترض أنه عندما تقترب x من الصفر يكون

$$F_1(x) = L_1 + O(x^{\alpha}) \text{ و } F_2(x) = L_2 + O(x^{\beta})$$

وليكن كل من c_1 و c_2 عددين ثابتين غير الصفر. وعرّف

$$F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) \text{ و } G(x) = F_1(c_1 x) + F_2(c_2 x)$$

obeikandi.com

برهن على أنه إذا كان $\gamma = \text{minimum}\{\alpha, \beta\}$، فإنه عندما تقترب x من الصفر فإن

أ. $F(x) = c_1L_1 + c_2L_2 + O(x^{\gamma})$

ب. $G(x) = L_1 + L_2 + O(x^{\gamma})$

16. تسمّى المتتالية $\{F_n\}$ المعرفة على الصورة الآتية $F_0 = 1, F_1 = 1$ و $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ لكل من $n \geq 0$، متتالية فيبوناتشي (Fibonacci Sequence). إن حدود هذه المتتالية تحدث طبيعيا في كثير من الأصناف الحياتية، خصوصًا مثل تلك التي لها بتلات وحراشف مرتبة على صورة لولب لوغارتمي. لتكن المتتالية $\{x_n\}$ معرّفة بالصيغة $x_n = F_{n+1}/F_n$. على فرض أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ موجودة. أثبت أن $x = (1+\sqrt{5})/2$. يسمّى هذا العدد النسبة الذهبية (golden ratio).

17. إن متتالية فيبوناتشي تحقّق الصيغة $F_n \equiv \tilde{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

أ. اكتب عملية لحساب F_{100} مستخدمًا Maple.

ب. استخدم Maple بالقيمة المفترضة للأمر Digits متبوعًا بالأمر evalf لحساب $\tilde{F}_{100}$.

ج. لماذا نجد القيمة في (أ) أدق من تلك في (ب)؟

د. لماذا يكون الحصول على النتيجة باستخدام (ب) أسرع من الحصول على النتيجة باستخدام الطريقة في (أ)؟

هـ. ماذا يحدث عندما تستخدم الأمر Simplify بدلًا من الأمر evalf في حساب $\tilde{F}_{100}$؟

18. السلسلة التوافقية $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ تباعدية (divergent). ولكن المتتالية $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ متقاربة، لأن $\{\gamma_n\}$ متتالية محدودة غير متزايدة. إن النهاية $\gamma = 0.5772156649\ldots$ للمتتالية $\{\gamma_n\}$ تسمّى ثابت أويلر (Euler).

أ. استخدم القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من γ ضمن الحد 10^{-2}.

ب. استخدم القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من γ ضمن الحد 10^{-3}.

ج. ماذا يحدث إذا استخدمت القيمة المفترضة للأمر Digits في Maple لتحديد قيمة n لتكون γ_n قريبة من ضمن γ الحد 10^{-4}؟

4.1 البرمجيات العددية Numerical Software

توجد برامج حاسوبية لتقريب حلول عددية للمسائل. في هذا الكتاب قدّما برامج مكتوبة باللغات Mathematica، MATLAB، Pascal، C، FORTRAN، Maple، و Java. لغرض استخدامها في حل الأمثلة والتمارين الواردة في هذا الكتاب. وتعطي هذه البرامج نتائج مرضية لمعظم المسائل التي تحتاج إلى حل، ولكنها تقع ضمن ما نسميه برامج الغرض الخاص، ونستخدم هذا المصطلح لنميّز بين هذه البرامج وبرامج الرياضيات العادية، وإن البرامج في هذه الحقائب تسمى برامج الغرض العام.

إن البرامج في حقائب الغرض العام تختلف في محتواها عن الخوارزميات والبرامج الواردة في هذا الكتاب. وإن حقائب الغرض العام تتعامل مع طرائق لتقليل الأخطاء الناتجة عن

obeikandi.com

التقريب الآلي، والانسياب السفلي والانسياب العلوي. وهي تصف أيضًا مدى المدخلات التي تؤدي إلى نتائج ذات دقة محدّدة معينة.

ولما كانت هذه الخواص تعتمد على الآلة فإن الحقائب ذات الغرض العام تستخدم وسيطات تصف مؤشرات النقطة العائمة للآلة المستخدمة في الحسابات.

ولتوضيح بعض الفروق بين البرامج في حقائب الغرض العام والبرنامج الذي ضمّناه في هذا الكتاب، افترض البرنامج الذي نستخدمه لإيجاد المعيار الإقليدي لمتجه بعده n $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ إن هذا (المعيار) (norm) غالبًا ما يطلب ضمن البرامج الكبيرة. ويعرّف بالآتي

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$$

يستخدم هذا المعيار (norm) لقياس المسافة بين المتّجه $\mathbf{x}$ والمتّجه $\mathbf{0}$.

على سبيل المثال: معيار المتجه $\mathbf{x} = (2, 1, 3, -2, -1)^t$ هو

$$\|\mathbf{x}\|_2 = [2^2 + 1^2 + 3^2 + (-2)^2 + (-1)^2]^{1/2} = \sqrt{19}$$

وعندئذ فإن بعده عن المتّجه $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, 0)^t$ هو $\sqrt{19} \approx 4.36$.

نبين هنا نوع الخوارزمية التي تقدمها هذه المسألة، إنها لا تحتوي على أي وسيطات (برامترات) تعتمد على الآلة. ولا تقدم أي توكيدات للدقة. ولكنها تعطي نتائج دقيقة في "معظم الأوقات".

المدخلات: $n, x_1, x_2, \ldots, x_n$

المخرجات: $NORM$

الخطوة	المضمون
1	ضع $SUM = 0$
2	عند $i = 1, 2, \ldots, n$ ضع $SUM = SUM + x_i^2$
3	ضع $NORM = SUM^{1/2}$
4	المخرجات $(NORM)$ توقف.

إن البرنامج المبني على هذه الخوارزمية سهل الكتابة والفهم، ولكن قد يفشل البرنامج في إعطاء دقة كافية لعدة أسباب. فعلى سبيل المثال: قد تكون قيمة بعض الأعداد كبيرة جدًّا أو صغيرة جدًّا. فلا يمكن تمثيلها بدقة في نظام النقطة العائمة الحاسوبي. وقد لا يعطي الترتيب العادي لتنفيذ الحسابات النتائج الأدق أيضًا. أو قد لا يكون البرنامج العادي المتاح لاستخراج الجذر التربيعي هو الأفضل بالنسبة إلى هذه المسألة.

إن أمورًا من هذا النوع تؤخذ في الحسبان من قبل مصمّمي الخوارزميات عندما يكتبون برامج ذات غرض عام. وتستخدم هذه البرامج في الغالب على صورة برامج فرعية لحل مسائل أكبر. ولذلك يجب أن تحتوي على ضوابط لا نحتاج إليها.

والآن افترض برنامجًا حاسوبيًا ذا غرض عام لاستخدامه في حساب المعيار الإقليدي.

أولًا: قد تقع قيمة المركبة x_i للمتّجه ضمن مدى الآلة. ولكن قد لا يقع مربع تلك المركبة ضمن ذلك

obeikandl.com

المدى. يمكن حدوث مثل هذا الأمر عندما يكون $|x_i|$ صغيرا جدًا لدرجة أن x_i^2 يسبب الانسياب السفلي أو عندما تكون $|x_i|$ كبيرة جدًا، على أن x_i^2 تسبب الانسياب العلوي.

ومن الممكن أن تقع هذه الحدود جميعها ضمن مدى الآلة أيضًا، ولكن الانسياب العلوي يحدث بسبب جمع مربع أحد هذه الأبعاد للمجموع المحسوب.

ولما كانت معايير الدقة تعتمد على الآلة التي تجرى عليها الحسابات، فإن الوسيطات المعتمدة على الآلة تدخل ضمن الخوارزميات. افترض أننا نستخدم حاسوبًا فرضيًا قاعدته 10، ويملك $t \ge 4$ خانات دقة، وأصغر أسيّة $emin$ وأعلى أسيّة $emax$، عندئذ تكون مجموعة أعداد النقاط العائمة في هذه الآلة مكوّنة من الصفر والأعداد على الصيغة $x = f \cdot 10^e$ حيث

$$f = \pm (f_1 10^{-1} + f_2 10^{-2} + \cdots + f_t 10^{-t})$$

حيث لكل $1 \le f_1 \le 9$ و $0 \le f_i \le 9$ لكل $i = 2, \ldots, t$ حيث $emin \le e \le emax$.

إن هذه القيود تعني أن أصغر عدد موجب يمكن تمثيله في الآلة هو $\sigma = 10^{emin-1}$، ومن ثم يمكن لأي عدد محسوب x بقيمة $|x| < \sigma$ أن يسبب انسيابًا أدنى، وينتج عن ذلك أن تصبح قيمة x صفرًا. إن أكبر عدد موجب يمكن تمثيله هو $\lambda = (1 - 10^{-t})10^{emax}$، ومن ثم فإن أي عدد محسوب x بقيمة $|x| > \lambda$ يسبب انسيابًا أعلى. إذا حدث انسياب أدنى غالبًا ما يستمر البرنامج دون أي خسارة مهمة في الدقة. أما عندما يحدث انسياب أعلى فإن البرنامج يفشل.

تفترض الخوارزمية أن خواص الآلة المتعلقة بالنقطة العائمة توصف باستخدام الوسيطات (البرامترات) N, s, S, y, Y سيعبر عن أكبر عدد من المدخلات التي يمكن أن تجمع بدرجة دقة $t/2$ من الأعداد بالرمز N. إن هذا يعني أن الخوارزمية تستمر في العمل لإيجاد قياس المتّجه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ فقط إذا كان $n \le N$. ولكي تحل مشكلة الانسياب الأدنى والأعلى، فإن أعداد النقطة العائمة غير الصفرية تقسّم إلى المجموعات الآتية:

- أعداد صغيرة في القيمة x وهي تلك التي تحقّق $0 < |x| < y$.
- أعداد وسيطية في القيمة x عندما يكون $y \le |x| < Y$.
- أعداد كبيرة في القيمة x عندما يكون $Y \le |x|$.

نختار الوسيطين y و Y بحيث نضمن عدم وجود مشكلة انسياب أدنى أو أعلى في عمليات التربيع أو جمع الأعداد وسيطية القيمة. إن تربيع الأعداد صغيرة القيمة يمكن أن يؤدي إلى انسياب أدنى، ولذلك يستخدم عامل ضربي S يكبر الواحد بكثير لكي يتجنب العدد $(Sx)^2$ الانسياب الأدنى عندما لا يتجنبه x^2. إن جمع الأعداد ذات القيم الكبيرة وتربيعها يمكن أن يؤدي إلى انسياب أعلى. لذلك نستخدم في هذه الحالة عددًا s أصغر من الواحد بكثير لضمان تجنب $(sx)^2$ الانسياب الأعلى عند دمجه أو حسابه في عملية الجمع حتى ولو كان x^2 يؤدي إلى ذلك الانسياب.

ولتجنب الضرب غير الضروري، نختار y و Y بحيث يكون مدى الأعداد وسيطية القيمة كبيرًا قدر الإمكان. إن الخوارزمية الآتية تعديل لتلك المشروحة في [Brow, W. p. 471]. وتستخدم عملية ضرب مركبات المتجه صغيرة القيمة للحصول على واحدة وسيطية القيمة، ثم تزع الضرب

obeikandl.com

عن حاصل الجمع وتستمر في تربيع الأعداد الصغيرة والوسيطية وجمعها حتى الوصول إلى مركبة ذات قيمة كبيرة. وبمجرد ظهور مركبة قيمتها كبيرة، تضرب الخوارزمية المجموع السابق. وتستمر في عمليات الضرب في ثابت وفي التربيع. وجمع الأعداد المتبقية. إن الخوارزمية تفترض أنه في أثناء الانتقال من الأعداد الصغيرة إلى الأعداد الوسيطية. تكون الأعداد الصغيرة غير المضروبة في ثابت مهملة مقارنة بالأعداد الوسيطية. وبالمثل في أثناء الانتقال من الأعداد الوسيطية إلى الأعداد الكبيرة، فإن الأعداد الوسيطية غير المضروبة في ثابت تكون مهملة مقارنة بالأعداد الكبيرة. وهكذا يجب اختيار الوسيطات الضربية بحيث تكون مساواة الأعداد للصفر فقط عندما تكون مهملة حقًا.

إن العلاقات بين خواص الآلة كما وصفت عن طريق $t, \sigma, \lambda, emin, emax$ ومعلمات الخوارزمية N, s, S, y, Y تعطى في آخر الخوارزمية.

تستخدم الخوارزمية ثلاثة أعلام لتبين المراحل المختلفة في عملية الجمع. تعطى هذه الأعلام قيمًا ابتدائية في الخطوة 3 في الخوارزمية. يعطى العلم 1 (FLAG 1) القيمة 1 حتى ملاقاة مركبة وسيطية أو كبيرة. ثم يحوّل إلى 0. يعطى العلم 2 (FLAG 2) القيمة 0 عندما تجمع الأعداد الصغيرة ثم يُحوّل إلى 1 عند ملاقاة أول عدد وسيطي، ويُحول مرة أخرى إلى 0 عند إيجاد عدد كبير.

يعطى العلم 3 (FLAG 3) القيمة 0 ابتداء. ويتحوّل إلى 1 عند ملاقاة عدد كبير لأول مرّة.

تدخل الخطوة 3 العلم DONE الذي قيمته 0 حتى الانتهاء من الحسابات. ثم يحوّل إلى 1.

المدخلات: $N, s, S, y, Y, \lambda, n, x_1, x_2, \dots, x_n$

المخرجات: $NORM$ أو عبارة خطأ مناسبة.

الخطوة	المضمون
1	إذا كان $n \le 0$ فالمخرجات (الحد n يجب أن يكون موجبا). توقف
2	إذا كان $n \ge N$ فالمخرجات (الحد n كبير جدًا). توقف
3	ضع $SUM = 0$ $FLAG1 = 1$ (الأرقام الصغيرة تجمع). $FLAG2 = 0$ $FLAG3 = 0$ $DONE = 0$ $i = 1$
4	بينما ($i \le n$ و $FLAG1 = 1$) نفذ الخطوة 5.
5	إذا كان $\|x_i\| < y$ فضع $SUM = SUM + (Sx_i)^2$ $i = i + 1$ ما عدا ذلك ضع $FLAG1 = 0$ (نتج عدد غير صغير).
6	إذا كان $i \le n$ فضع $NORM = (SUM)^{1/2}/S$ $DONE = 1$ ما عدا ذلك ضع $SUM = (SUM/S)/S$ (مقياس للأعداد الكبيرة). $FLAG2 = 1$

obeikandl.com