ملاحظة وجود تمثيلين للعدد صفر إحداهما صفر موجب عندما $s = 0$ ، $c = 0$ و $f = 0$ ، وقيمة سالبة للصفر عندما $s = 1$ ، $c = 0$ و $f = 0$.

إن استخدام الأعداد الثنائية يميل إلى إخفاء الصعوبات الحسابية التي تنتج عن استخدام مجموعة منتهية من الأعداد الآتية لتمثيل جميع الأعداد الحقيقية.

ولاختبار هذه المسائل سنفترض – من أجل التسهيل – أن الأعداد الآتية تمثل بالطريقة المعيارية للنقطة العائمة العشرية على الصورة

$$\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n \text{ ، } 1 \le d_1 \le 9 \text{ و } 0 \le d_i \le 9$$

إن الخطأ الناتج عن استخدام التمثيل بالنقطة العائمة بدلا من العدد نفسه يسمى خطأ التدوير. سواء أكان التمثيل يستخدم القطع أم التدوير.

لكل $i = 2, \ldots, k$ نسمي النقاط المثلة بهذا الشكل أعدادًا آلية عشرية k-digit ذات k من الخانات. إن أي عدد حقيقي موجب ضمن المدى العددي للآلة يمكن أن يمثَّل معياريًا على الصورة $y = 0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} d_{k+2} \ldots \times 10^n$

ونحصل على تمثيل y على صورة النقطة العائمة. ويعبّر عنها بالرمز $fl(y)$ عن طريق قطع خانات تمثيل y عند المنزلة k ، هناك طريقتان لتنفيذ هذا القطع:

- تسمّى إحدى الطريقتين القطع Chopping ، وتنفّذ بقطع الخانات $\ldots d_{k+1} d_{k+2}$ وتنتج هذه الطريقة
$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n$$
- وتسمّى الطريقة الثانية التقريب rounding ، وتنفّذ بإضافة $5 \times 10^{n-(k+1)}$ إلى y ، ثم تقطع النتيجة لنحصل على عدد في الصورة
$$fl(y) = 0.\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k \times 10^n$$

ولذلك عند التقريب إذا كان $d_{k+1} \ge 5$ نضيف 1 إلى d_k لنحصل على $fl(y)$ ، أي أننا ندوّر (نقرّب) إلى أعلى. وعندما يكون $d_{k+1} < 5$ ، فإننا نقطع الخانات جميعها بعد المنزلة d_k . أي أننا ندوّر إلى أسفل. وأخيرا إذا كان التقريب إلى أسفل فإن $\delta_i = d_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, k$.

وعلى كل حال إذا كان التقريب إلى أعلى فإن الخانات (وحتى الأسّ) يمكن أن تتغير.

مثال 1

إن للعدد π تمثيلا عشريًا على الصورة $\pi = 3.14159265\ldots$ وعند كتابته على الصورة العشرية المعيارية يكون لدينا $\pi = 0.314159265\ldots \times 10^1$ ، إن كتابة π على صورة النقطة العائمة مستخدمًا القطع عند المنزلة الخامسة يكون

$$fl(\pi) = 0.31415 \times 10^1 = 3.1415$$

يُعدّ الخطأ النسبي عموما مقياسا للدقة أفضل من الخطأ المطلق، لأن الأول يأخذ في الحسبان حجم العدد المقرّب.

وبالنظر إلى المنزلة السادسة في التمثيل العشري للعدد π نجد أنها 9. ولذلك يكون تمثيل π بالنقطة العائمة مستخدمًا تدوير المنزلة الخامسة هو

$$fl(\pi) = (0.31415 + 0.00001) \times 10^1 = 3.1416$$ ■

ويصف التعريف الآتي طريقتين لقياس أخطاء التقريب.

تعريف 15.1

إذا كان P^* تقريبًا إلى P ، فإن الخطأ المطلق يكون $|P-P^*|$ ، والخطأ النسبي هو $|P-P^*|/|P|$ ، على أن $P \ne 0$. ■

مثال 2

احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في المثال الآتي:

أ. ليكن $P = 0.3000 \times 10^1$، $P^* = 0.3100 \times 10^1$؛ فإن الخطأ المطلق يساوي 0.1، والخطأ النسبي يساوي $0.333\bar{3} \times 10^{-1}$.

ب. ليكن $P = 0.3000 \times 10^{-3}$ و $P^* = 0.3100 \times 10^{-3}$؛ فإن الخطأ المطلق يكون 0.1×10^{-4}، والخطأ النسبي يكون $0.333\bar{3} \times 10^{-1}$.

ج. ليكن $P = 0.3000 \times 10^4$ و $P^* = 0.3100 \times 10^4$؛ فإن الخطأ المطلق يكون 0.1×10^3، والخطأ النسبي مرة ثانية يكون $0.333\bar{3} \times 10^{-1}$.

يُظهر هذا المثال أن الخطأ النسبي نفسه $0.333\bar{3} \times 10^{-1}$ يحدث مقابل أخطاء مطلقة متعددة. وبوصفه مقياسًا للدقة، فإن الخطأ المطلق يمكن أن يكون مضلّلا. ويكون الخطأ النسبي ذا معنى أفضل؛ لأن الخطأ النسبي يأخذ حجم القيمة في الحسبان. ■

لا نستطيع إيجاد قيمة صحيحة للخطأ الحقيقي الناتج عن التقريب في كثير من الأحيان، وبدلا من ذلك نجد حدّا للخطأ، وهو الذي يعطينا قيمة الخطأ الأسوأ.

يستخدم التعريف الآتي الخطأ النسبي ليعطي مقياسًا لأرقام دقة التقريب المعنوية.

تعريف 16.1

يقال: إن العدد P^* يكون تقريبًا للعدد P بأرقام معنوية عددها t، إذا كان t أكبر عدد صحيح غير سالب يكون لدينا

$$\frac{|P-P^*|}{|P|} \leq 5 \times 10^{-t}$$
■

إن هذا التعريف أدق ويعطي مفهومًا متصلا.

يُستخدم مصطلح الأرقام المعنوية لوصف عدد الخانات العشرية التي يظهر أنها صحيحة على نحو واسع

يوضح الجدول (1.1) وباستخدام قيم متعددة للعدد P الطبيعة المتصلة للأرقام المعنوية عن طريق تسجيل أصغر حد أعلى لقيمة $|P-P^*|$، ويعبّر عنها بالرمز $\max|P-P^*|$. عندما تتوافق P^* مع P لأربعة أرقام معنوية.

جدول 1.1

P	0.1	0.5	100	1000	5000	9990	10000
$\max\|P-P^*\|$	0.00005	0.00025	0.05	0.5	2.5	4.995	5

وبالرجوع إلى التمثيل الآلي للأعداد، نجد أن التمثيل بالنقطة العائمة $fl(y)$ للعدد y يكون له الخطأ النسبي

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right|$$

إذا استخدم k من الخانات العشرية وطريقة القطع للتمثيل الآلي للعدد

$$y = 0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} \ldots \times 10^n$$

فإن

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| = \left|\frac{0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} \ldots \times 10^n - 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n}{0.d_1 d_2 \ldots \times 10^n}\right|$$

$$= \left|\frac{0.d_{k+1} d_{k+2} \ldots \times 10^{n-k}}{0.d_1 d_2 \ldots \times 10^n}\right| = \left|\frac{0.d_{k+1} d_{k+2} \ldots}{0.d_1 d_2 \ldots}\right| \times 10^{-k}$$

وبما أن $d_1 \neq 0$، فإن أصغر قيمة للمقام تساوي 0.1، الحد الأعلى للبسط هو 1، وعليه يكون

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq \frac{1}{0.1} \times 10^{-k} = 10^{-k+1}$$

إن حد الخطأ النسبي باستخدام الحساب التقريبي ذي k من الخانات هو $0.5 \times 10^{-k+1}$ بطريقة مماثلة. (انظر التمرين 24).

لاحظ أن حدود الخطأ النسبي باستخدام الحساب ذي k من الخانات تكون مستقلة عن العدد الذي تمثّله. وتعود هذه النتيجة إلى الطريقة التي تتوزّع بها الأعداد الآلية على طول الخط الحقيقي. إن العدد نفسه من الأعداد الآلية العشرية يستخدم لتمثيل الفترات $[0.1, 1]$، $[1, 10]$، $[10, 100]$؛ بسبب صيغة المؤشر الأسية. إن عدد الأعداد الآلية العشرية في الفترة $[10^n, 10^{n+1}]$ ثابت للأعداد الصحيحة جميعها n ضمن حدود الآلة.

بالإضافة إلى التمثيل غير الصحيح للأعداد، فإن الحساب المنفّذ في الحاسوب غير دقيق. وهو ينطوي – في الحساب – على التعامل بالأعداد الثنائية بعمليات سحب أو بعمليات منطقية متعددة. وبما أن الميكانيكيات الفعلية لهذه العمليات لا علاقة لها بهذا التمثيل، فإننا سننشئ تقريب الحساب بالحاسوب الخاص بنا. وعلى الرغم من أن الحساب الذي ننشئه لا يعطي الصورة الصحيحة، إلا أنه يكفي لشرح المشكلات التي تظهر.

ليكن $fl(x)$، $fl(y)$ التمثيل بالنقطة العائمة لكل من الأعداد الحقيقية x، y، وأن الرموز $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$ تمثّل عمليات الآلة للجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على التوالي. وسنفترض حسابا مبنيًّا على عدد محدود من الخانات معرّفا كالآتي:

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y)), \qquad x \otimes y = fl(fl(x) \times fl(y))$$

$$x \ominus y = fl(fl(x) - fl(y)), \qquad x \oslash y = fl(fl(x) \div fl(y))$$

إن هذا الحساب يتطابق مع استخدام الحساب العادي للتمثيل بالنقطة العائمة للعددين x، y ثم تحويل النتيجة الصحيحة لتمثيلها بطريقة "النقطة العائمة ذات العدد المحدود من الخانات".

إن حساب التقريب قابل للاستخدام في CAS. وإن أمر مابل Maple

```
>Digits:=t;
```

يؤدي إلى تدوير الحساب جميعه إلى t من الخانات. فعلى سبيل المثال توجد قيمة $fl(fl(x)+fl(y))$ باستخدام التقريب بعدد t من الخانات عن طريق الأمر

```
>evalf(evalf(x)+evalf(y));
```

إن استخدام الحساب ذي t من الخانات بطريقة القطع أكثر صعوبة، ويتطلب خطوات متتالية أو طريقة. ويبحث تمرين (27) هذه المسألة.

مثال 3 ليكن $x = \frac{5}{7}$، $y = \frac{1}{3}$ وأن طريقة القطع ذات الخانات الخمس هي المستخدمة في الحسابات المشتملة على x، y. ويعطي الجدول (2.1) قيم العمليات شبه الحاسوبية على $fl(x) = 0.71428 \times 10^0$، $fl(y) = 0.33333 \times 10^0$. ■

وبما أن أعلى قيمة للخطأ النسبي للعمليات في المثال (3) هي 0.267×10^{-4}، فإن الحساب يعطي نتائج مقبولة ذات 5 خانات. على كل حال افترض أن لدينا $u = 0.714251$، $v = 98765.9$ و $w = 0.111111 \times 10^{-4}$ وأخيرا يكون $fl(u) = 0.71425 \times 10^0$، $fl(v) = 0.98765 \times 10^5$، $fl(w) = 0.11111 \times 10^{-4}$.

جدول 2.1

العملية	النتيجة	القيمة الفعلية	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
$x \oplus y$	0.10476×10^1	$22/21$	0.190×10^{-4}	0.182×10^{-4}
$x \ominus y$	0.38095×10^0	$8/21$	0.238×10^{-5}	0.625×10^{-5}
$x \otimes y$	0.23809×10^0	$5/21$	0.524×10^{-5}	0.220×10^{-4}
$x \oslash y$	0.21428×10^1	$15/7$	0.571×10^{-4}	0.267×10^{-4}

(لقد اختيرت هذه الأعداد لتوضيح بعض المشكلات التي يمكن أن تظهر في الحساب ذي الخانات المنتهية.)

نجد أن $x \ominus u$ تعطي خطأ مطلقا صغيرًا في جدول (3.1)، ولكنها تعطي خطأ نسبيًا كبيرًا. إن القسمة على عدد صغير w أو الضرب في العدد الكبير v يكبر الخطأ المطلق دون تعديل الخطأ النسبي. وإن جمع الأعداد الصغيرة والكبيرة u و v يعطي خطأً مطلقًا كبيرًا، ولكن ليس خطأً نسبيًّا كبيرًا.

جدول 3.1

العملية	النتيجة	القيمة الفعلية	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
$x \ominus u$	0.30000×10^{-4}	0.34714×10^{-4}	0.471×10^{-5}	0.136
$(x \ominus u) \oslash w$	0.27000×10^1	0.31243×10^1	0.424	0.136
$(x \ominus u) \otimes v$	0.29629×10^1	0.34285×10^1	0.465	0.136
$u \otimes v$	0.98765×10^5	0.98766×10^5	0.161×10^1	0.163×10^{-4}

إن واحدًا من أكثر الحسابات التي تنتج خطأً هو الحساب الذي يتعامل مع حذف الأعداد المعنوية عند طرح أعداد متساوية تقريبًا. افترض أن عددين متساويان تقريبًا x، y حيث $x > y$ وافترض أن تمثيلهما باستخدام k من الخانات هو

$$fl(x) = 0.d_1 d_2 \ldots d_p \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \ldots \alpha_k \times 10^n$$

و

$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \ldots d_p \beta_{p+1} \beta_{p+2} \ldots \beta_k \times 10^n$$

إن شكل النقطة العائمة للمقدار $x - y$ هو

$$fl(fl(x) - fl(y)) = 0.\sigma_{p+1} \sigma_{p+2} \ldots \sigma_k \times 10^{n-p}$$

حيث إن

$$0.\sigma_{p+1} \sigma_{p+2} \ldots \sigma_k = 0.\alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \ldots \alpha_k - 0.\beta_{p+1} \beta_{p+2} \ldots \beta_k$$

إن العدد بصيغة النقطة العائمة المستخدم لتمثيل $x - y$ يحوي $k - p$ عددًا معنويًّا على الأكثر. على كل حال وفي معظم آلات الحساب، فإن $x - y$ يعطي عدد k عددا معنويًّا تاركًا الأعداد الأخيرة التي عددها p إما أصفارا وإما محددة عشوائيًّا. إن أي حسابات ضافية للمقدار $x - y$ تسترجع مسألة الحفاظ على $k - p$ من الأعداد المعنوية؛ لأن أي سلسلة من الحسابات لا تكون أدق من الحلقة الأضعف فيها.

إذا أنتج حساب أو تمثيل ذو عدد منتهٍ من الأعداد خطأً، فإن هذا الخطأ يكبر عند القسمة على عدد صغير (أو على نحو مكافئ عند الضرب في عدد كبير). افترض على سبيل المثال أن

للعـدد z التقريب $z+\delta$ ذا العـدد المحدود من الأعداد، حيث حصلنا على الخطأ δ عن طريق التمثيل أو عن طريق حساب سابق.

الآن إذا قسمنا على $\varepsilon = 10^{-n}$، حيث $n > 0$ فإن

$$\frac{z}{\varepsilon} \approx fl\left(\frac{fl(z)}{fl(\varepsilon)}\right) = (z+\delta)\times 10^{n}$$

وهكـذا فإن الخطأ المطلق في هذا التقريب $|\delta| \times 10^{n}$ هو الخطأ المطلق الأصلي $|\delta|$، مضروبًا في العدد 10^{n}.

مثال 4 ليكـن $p = 0.54617$ و $q = 0.54601$. فـإن القيمـة الصحيحـة كحاصـل طـرح $r = p - q$ هي $r = 0.00016$. افتـرض أن عمليـة الطـرح قد أُجريت باسـتخدام الحسـاب بأربع خانات. وأن تدويـر p و q لأربـع خانات يعطينا $p^* = 0.5462$، $q^* = 0.5460$ علـى التوالي ويعطينا $r^* = p^* - q^* = 0.0002$ بوصفه تقريبًا للعدد r باستخدام أربع خانات.

وبما أن

$$\frac{|r - r^*|}{|r|} = \frac{|0.00016 - 0.0002|}{|0.00016|} = 0.25$$

فـإن النتيجة تحمـل عددا معنويًا واحـدًا. حيث كانت p^*، q^* صحيحة لأربعـة أرقام معنوية ولخمسة أرقام معنوية على التوالي.

إذا اسـتخدمت طريقة القطع للحصول على أربـع خانات. فإن التقريب لأربع خانات للأعداد p، q، r هو $p^* = 0.5461$، $q^* = 0.5460$، $r^* = p^* - q^* = 0.0001$ وهذا يعطينا

$$\frac{|r - r^*|}{|r|} = \frac{|0.00016 - 0.0001|}{|0.00016|} = 0.375$$

والذي ينتج دقة ذات عدد معنوي واحد. ■

ومن الممكن تجنب خطأ التقريب عن طريق تكرار صياغة المسألة كما هو موضح في المثال الآتي:

مثال 5 ينص قانون الصيغة التربيعية على أن جذري $ax^2 + bx + c = 0$ عندما $a \neq 0$ هما

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1.1)$$

إن جـذري المـعادلـة التربيعية العامـة x_1 و x_2 يرتبطـان مـع المعاملات بحسب المعادلات الآتية
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$
إن هذه حالـة خاصة من معادلات فـايتيـه Viète's formulas لـمعاملات كثيرات الحدود.

طبّق القانون على الصيغة $x^2 + 62.10x + 1 = 0$ التي يكون جذراها المقرّبان (مسـتخدما حسـاب التقريب لأربع خانات) هما $x_1 = -0.01610723$، $x_2 = -62.08390$. في هذه الصيغة، b^2 أكبر بكثير من $4ac$. عندئذ فإن البسط في حساب x_1 يتضمن طرح عددين متساويين تقريبا.

بما أن

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(62.10)^2 - (4.000)(1.000)(1.000)}$$
$$= \sqrt{3856. - 4.000} = \sqrt{3852.} = 62.06$$

ونحصل على

$$fl(x_1) = \frac{-62.10 + 62.06}{2.000} = \frac{-0.04000}{2.000} = -0.02000$$

وهو تقريب ضعيف للقيمة $x_1 = -0.01611$ بخطأ نسبي كبير

$$\frac{|-0.01611 + 0.02000|}{|-0.01611|} \approx 2.4 \times 10^{-1}$$

ومن جهة أخرى فإن حساب x_2 يتضمن جمع عددين متساويين تقريبًا هما $-b$ و $-\sqrt{b^2-4ac}$ وهذا لا يشكل أي مشكلة ؛ لأن

$$fl(x_2) = \frac{-62.10 - 62.06}{2.000} = \frac{-124.2}{2.000} = -62.10$$

يُنْتج الخطأ النسبي الصغير

$$\frac{|-62.08 + 62.10|}{|-62.08|} \approx 3.2 \times 10^{-4}$$

نغيّر قانون الصيغة التربيعية عن طريق جعل البسط عددا نسبيًا (بالضرب في المرافق) للحصول على تقريب أدق للعدد x_1 باستخدام التقريب ذي الأربع خانات. فيصبح

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\left(\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{-b - \sqrt{b^2-4ac}}\right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2-4ac})}$$

وبالتبسيط. نحصل على الصيغة التربيعية البديلة

$$x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2-4ac}} \tag{2.1}$$

باستخدام (2.1) نحصل على

$$fl(x_1) = \frac{-2.000}{62.10 + 62.06} = \frac{-2.000}{124.2} = -0.01610$$

الذي يحمل الخطأ النسبي الصغير 6.2×10^{-4} ■

يمكن تطبيق طريقة الضرب في المرافق لنحصل على الصيغة التربيعية البديلة للعدد x_2

$$x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2-4ac}} \tag{3.1}$$

تستخدم هذه الصيغة إذا كان b عددًا سالبًا. على كل حال، لا يؤدي الاستخدام الخطأ للصيغة x_2 في المثال (5) إلى طرح عددين متساويين تقريبا فقط. بل يؤدي أيضًا إلى القسمة على ناتج الطرح الصغير. إن عدم الدقة الناتج عن هذا التركيب يعطينا

$$fl(x_2) = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2-4ac}} = \frac{-2.000}{62.10 - 62.06} = \frac{-2.000}{0.04000} = -50.00$$

بخطأ نسبيّ كبير هو 1.9×10^{-1}. ■

ويمكن تقليل عدم الدقة الناتجة عن خطأ التقريب عن طريق إعادة ترتيب العمليات الحسابية وهذا ما يوضحه المثال الآتي.

مثال 6

أوجد قيمة $f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5$ عند $x = 4.71$ مستخدمًا حساب الخانات الثلاث. يعطي جدول (4.1) النتائج الوسيطة في الحسابات. تحقّق من صحة هذه النتائج، للتأكد من أن فهمك للحساب بثلاث خانات صحيح. تذكر أن طريقة القطع لثلاث خانات تعطي بسهولة القيم الثلاث للخانات الثلاث الأولى من اليسار ودون أي تدوير، وتختلف جذريًا عن القيم التي تحصل عليها بطريقة التقريب لثلاث خانات.

جدول 1.4

	x	x^2	x^3	$6.1x^2$	$3.2x$
المضبوط	4.71	22.1841	104.487111	135.32301	15.072
(القطع) ذو ثلاث منازل	4.71	22.1	104.	134.	15.0
(التدوير) ذو ثلاث منازل	4.71	22.2	105.	135.	15.1

تذكّر وجوب إجراء القطع (أو التدوير) بعد كل عملية حساب.

ننظر إلى الحسابات التي قمنا بها لإيجاد قيمة x^3 باستخدام التقريب لثلاث خانات. ولتوضيح ذلك، نجد أولًا $x^2 = 4.71^2 = 22.1841$ وندوّرها إلى العدد 22.2 مستخدمين بعد ذلك قيمة x_2 هذه لإيجاد $x^3 = x^3 \cdot x = 22.2 \cdot 4.71 = 104.562$، وندور هذه القيمة إلى 105.

أما الحساب الدقيق (دون قطع أو تدوير) فهو

$$f(4.71) = 104.487111 - 135.32301 + 15.072 + 1.5$$
$$= -14.263899$$

يكون باستخدام قطع الخانات الثلاث $f(4.71) = ((104. - 134.) + 15.0) + 1.5 = -13.5$

ويكون باستخدام التقريب لثلاث خانات $f(4.71) = ((105. - 135.) + 15.1) + 1.5 = -13.4$

وتكون الأخطاء النسبية لطريقتي الخانات الثلاث أعلاه على التوالي:

$$\left|\frac{-14.263899 + 13.5}{-14.263899}\right| \approx 0.05 \quad \text{و} \quad \left|\frac{-14.263899 + 13.4}{-14.263899}\right| \approx 0.06$$

(القطع) for chopping — (التدوير) for rounding

توجد طريقة بديلة بكتابة $f(x)$ باستخدام الأقواس المتداخلة (nested) كما يأتي

$$f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5 = ((x - 6.1)x + 3.2)x + 1.5$$

وهذا يعطي طريقة القطع لثلاث خانات

$$f(4.71) = ((4.71 - 6.1)4.71 + 3.2)4.71 + 1.5 = -14.2$$

وتعطي طريقة التقريب لثلاث خانات 14.3-، والأخطاء النسبية الجديدة تكون

القطع لثلاث خانات
$$\left|\frac{-14.263899 + 14.2}{-14.263899}\right| \approx 0.0045$$

التقريب لثلاث خانات
$$\left|\frac{-14.263899 + 14.3}{-14.263899}\right| \approx 0.0025$$

إن استخدام الأقواس المتداخلة قد خفّض الخطأ النسبي للتقريب بالقطع إلى أقل من 10% مما

حصلنا عليه في الأصل. أما في حالة التقريب بالتدوير فقد كان التحسين أكثر ظهورًا، حيث حدث في المثال السابق أن انخفض الخطأ إلى أكثر من 95%. ■

يجب التعبير دائما عن كثيرات الحدود باستخدام الأقواس المتداخلة (nested) قبل إجراء الحسابات، لأن هذه الصيغة تجعل عدد العمليات الحسابية أقل ما يمكن.

إن تقليل الخطأ في مثال (6) كان بسبب تقليل العمليات الحسابية من أربع عمليات ضرب وثلاث عمليات جمع إلى عمليتي ضرب وثلاث عمليات جمع. وإن إحدى طرائق تقليل خطأ التقريب تكون بتقليل عدد العمليات الحسابية التي تنتج الخطأ.

مجموعة التمارين 2.1 EXERCISE SET

1. احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي الناتج عن تقريب p بالقيمة p^*:

أ. $p = \pi,\ p^* = 22/7$ ب. $p = \pi,\ p^* = 3.1416$ ج. $p = e,\ p^* = 2.718$

د. $p = \sqrt{2},\ p^* = 1.414$ هـ. $p = e^{10},\ p^* = 22000$ و. $p = 10^{\pi},\ p^* = 1400$

ز. $p = 8!,\ p^* = 39900$ ح. $p = 9!,\ p^* = \sqrt{18\pi}(9/e)^9$

2. أوجد أكبر فترة تقع فيها p^* لكي تقرّب p بخطأ نسبي حده الأعلى 10^{-4} لكل قيمة من قيم p:

أ. π ب. e ج. $\sqrt{2}$ د. $\sqrt{\ }$ [illegible]

3. افترض أن p^* يجب أن تقرّب p بخطأ نسبي حدُّه الأعلى 10^{-3}. أوجد أكبر فترة يجب أن تقع فيها p^* لكل قيمة p فيما يأتي:

أ. 150 ب. 900 ج. 1500 د. 90

4. أجرِ العمليات الحسابية الآتية:

(i) بصورة دقيقة.

(ii) مستخدمًا القطع لثلاث خانات.

(iii) مستخدمًا التقريب لثلاث خانات.

(iv) احسب الأخطاء النسبية في (ii) و (iii).

أ. $\frac{4}{5} + \frac{1}{3}$ ب. $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$ ج. $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{11}\right) + \frac{3}{20}$ د. $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{11}\right) - \frac{3}{20}$

5. مستخدمًا حساب التقريب لثلاث خانات لإجراء الحسابات الآتية، احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي مستخدما خمس خانات على الأقل لإيجاد القيمة الصحيحة

أ. $133 + 0.921$ ب. $133 - 0.499$ ج. $(121 - 0.327) - 119$

د. $(121 - 119) - 0.327$ هـ. $\dfrac{\frac{13}{14} - \frac{6}{7}}{2e - 5.4}$ و. $-10\pi + 6e - \frac{3}{62}$

ز. $\left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{7}\right)$ ح. $\dfrac{\pi - \frac{22}{7}}{\frac{1}{17}}$

6. أعد حل تمرين (5) مستخدما حساب التقريب لأربع خانات.

7. أعد حل تمرين (5) مستخدما حساب القطع لثلاث خانات.

8. أعد حل تمرين (5) مستخدما حساب القطع لأربع خانات.

9. إن أول ثلاثة حدود غير صفرية لسلسلة ماكلورين للدّالة arctangent هي $x - (1/3)x^3 + (1/5)x^5$ احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي في التقريبات الآتية للعدد π مستخدما كثيرة الحدود بدلًا من arctangent:

أ. $4\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ ب. $16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

10. يمكن تعريف العدد e بالقيمة $e = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$. احسب الخطأ المطلق والخطأ النسبي عند استخدام التقريبات الآتية للعدد e:

أ. $\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$ ب. $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$

11. ليكن $f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x}$

أ. أوجد: $\lim_{x\to 0} f(x)$

ب. استخدم حساب التقريب لأربع خانات لإيجاد قيمة $f(0.1)$.

جـ. عوّض عن كل دالّة مثلية مستخدمًا كثيرة حدود ماكلورين الثالثة التي تمثّلها. أوجد القيمة في (ب).

د. إن القيمة الفعلية هي $f(0.1) = -1.99899998$. أوجد الأخطاء النسبية للإجابات في (ب)، (ج).

12. ليكن $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

أ. أوجد: $\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x})/x$.

ب. استخدم حساب التقريب لأربع خانات لإيجاد قيمة $f(0.1)$.

جـ. عوّض عن كل دالّة مثلية مستخدمًا كثيرة حدود ماكلورين الثالثة التي تمثّلها. أوجد القيمة في (ب).

د. إن القيمة الفعلية هي $f(0.1) = 2.003335000$. أوجد الأخطاء النسبية للإجابات في (ب)، (ج).

13. استخدم حساب التقريب لأربع خانات وصيغ مثال (5) لإيجاد التقريبات الأكثر دقّة لجذور الصيغ لتربيعية الآتية. واحسب الأخطاء المطلقة والأخطاء النسبية

أ. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0$ ب. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{123}{4}x - \frac{1}{6} = 0$

ج. $1.002x^2 - 11.01x + 0.01265 = 0$ د. $1.002x^2 + 11.01x + 0.01265 = 0$

14. أعد حل التمرين (13) باستخدام حساب القطع لأربع خانات.

15. استخدم النموذج الحقيقي بطول 64-bit لتجد الكسر العشري المكافئ للأعداد الآلية بالنقطة المتحركة

أ. 0 10000001010 10010011000000000000000 00000000000000000000000000000

ب. 1 10000001010 10010011000000000000000 00000000000000000000000000000

ج. 0 01111111111 01010011000000000000000 00000000000000000000000000000

د. 0 01111111111 01010011000000000000000 00000000000000000000000000001

16. أوجد العدد الأكبر الآتي والعدد الأصغر السابق لكل عدد آلي في التمرين (15). مستخدمًا الصيغة العشرية (كسور عشرية).

17. لتكن النقطتان (x_0, y_0) و (x_1, y_1) على خط مستقيم و $y_1 \neq y_0$. يوجد معادلتان لإيجاد قاطع x على الخط هما

$$x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{و} \quad x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$$

أ. برهن على صحة هاتين المعادلتين جبريًّا.

ب. استخدم البيانات $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$، $(x_1, y_1) = (1.93, 4.76)$، وحساب التقريب لثلاث خانات، لتجد قاطع x بالطريقتين. أي الطريقتين أفضل؟ ولماذا؟

18. كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدّالة $f(x) = e^x$ هي $\sum_{i=0}^{n}(x^i/i!)$. استخدم كثيرة حدود تايلور من الرتبة

التاسعة، وحساب القطع لثلاث خانات لتجد تقريبًا للعدد e^{-5} مستخدمًا كلاًّ من الطرائق الآتية:

أ. $e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-5)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i 5^i}{i!}$

ب. $e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{9} \frac{5^i}{i!}}$

ج. إن القيمة التقريبية الصحيحة لأقرب ثلاث خانات للعدد e^{-5} هي 5.74×10^{-3}. أي المعادلتين في (أ)، (ب) أدق؟ ولماذا؟

19. ليكن $ax + by = e$ و $cx + dy = f$ نظام معادلتين خطيتين، حيث قيم a, b, c, d, e, f معطاة. ويمكن حلهما لقيم x، y بالطريقة التالية:

افترض $m = \frac{c}{a}$ حيث $a \neq 0$.

$$d_1 = d - mb$$

$$f_1 = f - me$$

$$y = \frac{f_1}{d_1}$$

$$x = \frac{e - by}{a}$$

وحُلّ نظام المعادلتين الخطيتين في لكل مما يلي مقربًا الجواب لأربع مراتب:

أ. $1.130x - 6.990y = 14.20$
$1.013x - 6.099y = 14.22$

ب. $8.110x + 12.20y = -0.1370$
$-18.11x + 112.2y = -0.1376$

20. كرّر التمرين (19) مستخدمًا حساب القطع ذي الأربع خانات.

21. أ. بيّن أن أسلوب تداخل كثيرة الحدود الموضحة في مثال (6) يمكن تطبيقه أيضًا في حساب $f(x) = 1.01e^{4x} - 4.62e^{3x} - 3.11e^{2x} + 12.2e^{x} - 1.99$.

ب. استخدم تقريب الجواب لثلاث خانات. افترض كون $e^{1.53} = 4.62$، وأن $e^{nx} = (e^x)^n$ لتقييم $f(1.53)$ وحسبما هو معطى في (أ).

ج. أعد الحسابات في (ب)، من خلال عمل تداخل الحسابات أولاً.

د. قارن التقريبات في (ج) بنتيجة التقريب لثلاث خانات صحيحة $f(1.53) = -7.61$.

22. لدينا متوازي سطوح مستطيلة أطوال جوانبه 3 cm، 4 cm، و 5 cm مقيسة إلى أقرب سنتمتر. ما أفضل حد علوي وحد سفلي لحجم هذا المتوازي؟ وما أفضل حد علوي وحد سفلي للمساحة السطحية؟

23. لتكن $P_n(x)$ كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة n لدالّة معكوس الظل. استخدم Maple محتلًا 75 مرتبة عشرية لإيجاد قيمة n اللازمة لتقريب π ضمن 10^{-25} مستخدمًا الصيغ الآتية:

أ. $4\left[P_n\left(\frac{1}{2}\right) + P_n\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

ب. $16P_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4P_n\left(\frac{1}{239}\right)$

24. افترض أن $fl(y)$ تقريب k من الخانات لـ y. أثبت أن

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}$$

[إرشاد: إذا كان $d_{k+1} < 5$ فإن $fl(y) = 0.d_1d_2\ldots d_k \times 10^n$. وإذا كان $d_{k+1} \geq 5$ فإن $fl(y) = 0.d_1d_2\ldots d_k \times 10^n + 10^{n-k}$]

25. إن معاملات ذات الحدين $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$

تحسب عدد الطرائق لاختيار مجموعة جزئية ذات سعة k من مجموعة سعتها m.

أ. افترض أن أعداد حاسبة عشرية بالصيغة

$\pm 0.d_1d_2d_3d_4 \times 10^n$ مع $1 \leq d_1 \leq 9,\ 0 \leq d_i \leq 9$ إذا كان $i = 2, 3, 4$ و $|n| \leq 15$.

ما أكبر قيمة لـ m لتكون معاملات ذات الحدين $\binom{m}{k}$ التي يمكن حسابها لجميع قيم k وفق التعريف، دون التسبب في اتساع النتيجة؟

ب. أثبت أنه يمكن حساب $\binom{m}{k}$ أيضا من خلال $\binom{m}{k} = \left(\frac{m}{k}\right)\left(\frac{m-1}{k-1}\right)\cdots\left(\frac{m-k+1}{1}\right)$.

ج. ما أكبر قيمة لـ m لتكوّن معاملات ذات الحدين $\binom{m}{3}$ التي يمكن حسابها وفق الصيغة في (ب) دون التسبب في اتساع النتيجة؟

د. استخدم الصيغة في (ب) وحساب القطع ذي الخانات الأربع لحساب عدد مجموعات الورق الخماسية المحتمل سحبها من حزمة ورق من 52 ورقة. احسب الأخطاء الحقيقية والنسبية.

26. ليكن $f \in C[a, b]$ دالّة مشتقته موجودة على (a, b). افترض أننا نريد تقييم f عند x_0 ضمن (a, b) بدلًا من حساب القيمة الحقيقية $f(x_0)$، والقيمة التقريبية $\tilde{f}(x_0)$ هي القيمة الحقيقية لـ f عند $x_0 + \epsilon$ بمعنى أن $\tilde{f}(x_0) = f(x_0 + \epsilon)$.

أ. استخدم مبرهنة القيمة الوسيطية لتقدير الخطأ المطلق $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|$، والخطأ النسبي $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|/|f(x_0)|$ مفترضين $f(x_0) \neq 0$.

ب. إذا كانت $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$ و $x_0 = 1$ فأوجد حدودا للخطأ المطلق والخطأ النسبي لـ

i. $f(x) = e^x$ **ii.** $f(x) = \sin x$

ج. كرّر (ب) مع $\epsilon = (5 \times 10^{-6})x_0$ و $x_0 = 10$.

27. تقطع عمليات Maple الآتية العدد الطافح x إلى t من الخانات

```
chop:=proc(x,t);
 if x=0 then 0
 else
 e:=ceil(evalf(log10(abs(x))));
 x2:=evalf(trunc(x*10^(t-e))
 *10^(e-t));
 fi
end;
```

تحقّق من فاعلية العملية للقيم الآتية:

أ. $x = 124.031,\ t = 5$ ب. $x = 124.036,\ t = 5$ ج. $x = -124.031,\ t = 5$ د. $x = -124.036,\ t = 5$

هـ. $x = 124.036,\ t = 5$ و. $x = 0.00656,\ t = 2$ ز. $x = 0.00656,\ t = 2$ ح. $x = -0.00653,\ t = 2$

ل. $x = -0.00656,\ t = 2$

28. أوضح المثال الافتتاحي في هذا الفصل تجربة فيزيائية تضمنت درجة حرارة غاز تحت الضغط. في هذا التطبيق كان لدينا $P = 1.00$ atm, $V = 0.100$ m^3, $N = 0.00420$ mol, و $R = 0.08206$. وبحل T في قانون الغاز المثالي نحصل على

$$T = \frac{PV}{NR} = \frac{(1.00)(0.100)}{(0.00420)(0.08206)} = 290.15\text{ K} = 17^\circ\text{C}$$

لقد وجد أن T تساوي 15°C تحت الظروف المخبرية المذكورة تساوي 15°C، عند مضاعفة الضغط وتناقص الحجم إلى النصف أصبحت T تساوي 19°C. افترض أن البيانات عبارة عن قيم مقربة ودقيقة ضمن المواقع المعطاة. أثبت أن القيم المخبرية ضمن حدود الدقة لقانون الغاز المثالي.

3.1 الخوارزميات والتقارب Algorithms and Convergence

ستتفحص خلال هذا الكتاب طرائق للتقريب تسمّى الخوارزميات، وتتضمن متتاليات من الحسابات.

الخوارزميات: هي طريقة تصف دون أي التباس عددًا محدودًا من الخطوات التي تنفّذ بترتيب محدد. إن الغرض من الخوارزميات هو تنفيذ عملية لحل مسألة أو إيجاد تقريب حل لمسألة تستخدم "الرمز الشكلي" Pseudocode لوصف الخوارزميات. إن هذا الرمز الشكلي يحدد شكل المدخلات الواردة وشكل المخرجات المطلوبة.

إن استخدام الخوارزمية قديم قدم الرياضيات المنظمة واسمها مأخوذ من اسم الرياضي العربي محمد بن موسى الخوارزمي (850–780). وتبدأ الترجمة اللاتينية لأعماله بالكلمات:
"Dixit Algorismi"
التي تعني " يقول الخوارزمي".

ولا تعطي العمليات العددية كلها المخرجات المرضية لمدخلات اختيرت عشوائيًا. لذا يجب أن تتضمن كل خوارزمية طريقة توقف مستقلة عن الطريقة العددية، لتجنب العروات اللانهائية.

وهناك رمزان للترقيم يستخدمان في الخوارزميات

- النقطة (.) وتستخدم لإنهاء خطوة.
- الفاصلة المنقوطة (;) وتفصل بين عمليتين ضمن خطوة.

ويستخدم الفراغ في بداية الفقرة Indentation ليدل على أن مجموعات من العبارات وجب التعامل معها بوصفها وحدة واحدة.

أما تقنيات العروات في الخوارزميات، فإما أن تكون محكمة بالعد Counter – Controlled مثل

لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

ضع $x_i = a_i + i \cdot h$

وإما أن تكون محكمة بالشرط Controlled – condition مثل:

عندما يكون $i < N$ أجر الخطوات 3 – 6.

While $i < N$ do Steps 3–6

ولكي نسمح بالتنفيذ الشرطي، نستخدم الصيغ الآتية

إذا كان ... فإن If ... then

أو إذا كان ... فإن غير ذلك If ... then else

تتبع خطوات الخوارزميات قواعد إنشاء البرامج البنائية، وقد رُتّبت على أن تتضمن أدنى صعوبة عند ترجمة الرمز الشكلي إلى أي لغة برمجة صالحة للتطبيقات العلمية تحري لخوارزميات

كثيرًا من التعليقات التي تكتب بخط مائل ضمن أقواس لتمييزها من العبارات الخوارزمية.

مثال 1 نصف فيما يأتي إحدى الخوارزميات لحساب $\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$ حيث N و $x_1, x_2, \ldots, x_N$ معطاة.

المدخلات: $N, x_1, x_2, \ldots, x_N$

المخرجات: $SUM = \sum_{i=1}^{N} x_i$

الخطوة	المضمون
1	ضع $SUM = 0$ (المجموع الابتدائي)
2	عند $i = 1, 2, \ldots, N$ نفذ ضع $SUM = SUM + x_i$ (أضف الحد التالي).
3	المخرجات (SUM) توقف.

■

مثال 2 كثيرة حدود تايلور من الرتبة N للدالة $f(x) = \ln x$ مفكوك حول $x_0 = 1$ هي

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i+1}}{i}(x-1)^i$$

وقيمة $\ln 1.5$ لثماني خانات عشرية هي 0.40546511.

افترض أننا نريد إيجاد أقل قيمة للعدد N التي تحقق $|\ln 1.5 - P_N(1.5)| < 10^{-5}$ دون استخدام الحد الباقي لكثيرة حدود تايلور.

نعلم من حساب التفاضل والتكامل أنه إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متناوبة ذات نهاية A تتناقص القيم المطلقة لحدودها، فإن A والمجموع الجزئي $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ ذا الرتبة N يختلفان بقيمة أقل من قيمة الحد ذي الرتبة $(N+1)$. أي أن

$$|A - A_N| \le |a_{N+1}|$$

تستخدم هذا الحد في الخوارزمية الآتية:

المدخلات: القيمة x، حد السماح TOL، أكبر عدد تكرارات M.

المخرجات: الرتبة N لكثيرة حدود أو عبارة فشل.

الخطوة	المضمون
1	ضع $N = 1$ $y = x - 1$ $SUM = 0$ $POWER = y$ $TERM = y$ $SIGN = -1$ (تستخدم لتنفيذ عكس الإشارات).
2	بينما $N \le M$ نفذ الخطوات 3 – 5.
3	ضع $SIGN = -SIGN$ (لعكس الإشارة) $SUM = SUM + SIGN \cdot TERM$ (لجمع الحدود). $POWER = POWER \cdot y$ $TERM = POWER/(N+1)$ (لحساب الحد التالي).
4	إذا كان $\|TERM\| < TOL$ فإن (لاختبار الدقة). المخرجات (N)

5	ضع $N = N + 1$ (حضّر للتكرار التالي).
6	المخرجات ('Method Failed') (العملية لم تكن ناجحة). توقف.

■

إن المدخلات في مسألتنا هي $x = 1.5, TOL = 10^{-5}$ وربما $M = 15$. إن اختيار M يعطي حدًا أعلى لعدد العمليات الحسابية التي يرغب في إجرائها، مع علمنا بإمكانية فشل الخوارزمية إذا اجتزنا هذا الحد. إن المخرج (الناتج) هو قيمة للعدد N أو رسالة فشل يعتمد على دقة أداة الحساب. سنتصدى لمسائل تقريب متعددة في محتوى الكتاب. وفي كل حالة نحتاج إلى تحديد طرائق التقريب التي تعطي نتائج صحيحة يمكن الاعتماد عليها لحل مجموعة واسعة من المسائل. كما نحتاج إلى شروط مختلفة لتصنيف دقة هذه الطرائق بسبب الاختلاف بين الطرائق المستخدمة لاشتقاق التقريب. وليس من الضروري أن تكون هذه الشروط جميعها مناسبة لمسألة بعينها. ■

إن أحد المعايير التي نضعها على الخوارزمية كلما أمكن ذلك، هو أن التغييرات الصغيرة في البيانات الابتدائية تُنتج في المقابل تغييرات صغيرة في النتائج النهائية. إن الخوارزمية التي تحقق هذه الخاصية تسمى مستقرة stable، وفي غير ذلك فهي غير مستقرة unstable. إن بعض الخوارزميات تكون مستقرة فقط عند اختيارات محددة للبيانات الابتدائية. وتسمى هذه الخوارزميات مستقرة شرطيًا Conditionally Stable. سنصف خواص استقرار الخوارزميات كلما كان ذلك ممكنًا. ولكي نتفحص موضوع نمو خطأ التقريب وعلاقته باستقرار الخوارزمية، نفترض أن خطأً قيمته $E_0 > 0$ قد وقع عند خطوة ما في الحسابات، وإن مقدار الخطأ بعد n من العمليات الآتية هو E_n. وتوجد حالتان تحدثان عمليًا في أكثر الأحيان نعرفهما كما يأتي.

إن جذر stable هو نفسه جذر stand وstandard. وفي الرياضيات فإن كلمة مستقر stable تعني أن تغييرا صغيرا في البيانات الابتدائية أو الشروط لا يؤدي إلى تغيير كبير في حل تلك المسألة.

تعريف 17.1

افترض أن $E_0 > 0$ هو الخطأ الابتدائي، وأن E_n هي قيمة الخطأ بعد n من الخطوات الآتية. إذا كان $E_n \approx CnE_0$ حيث كان C ثابتًا لا يعتمد على n، فإن نمو الخطأ يسمّى خطيًّا Linear. وإذا كان $E_n \approx C^n E_0$ حيث $C > 1$ فإن نمو الخطأ يسمى أسيًّا Exponential. ■

لا يمكن تجنب النمو الخطي للخطأ عادة، وعندما يكون C و E_0 صغيرين، إن النتائج تكون مقبولة عمومًا. أما النمو الأسيّ فيجب تجنبه؛ لأن الحد C^n يصبح كبيرًا حتى لقيم n الصغيرة نسبيًّا، وإن هذا ليس دقيقًا مهما كان حجم E_0، وعندئذ فإن الخوارزمية التي تعطي نموًّا خطيًا للخطأ تكون ثابتة، حيث أن الخوارزمية التي تعطي نموًّا أسيًّا للخطأ تكون غير مستقرة. (انظر الشكل 11.1)

تمثّل النقاط الظاهرة الواقعة على خط مستقيم (في أسفل الشكل 11.1) نموّ الخطأ الخطي المستقر، حيث تمثّل النقاط في الجزء العلوي في الشكل نمو الخطأ الأسّيّ غير المستقر.

مثال 3

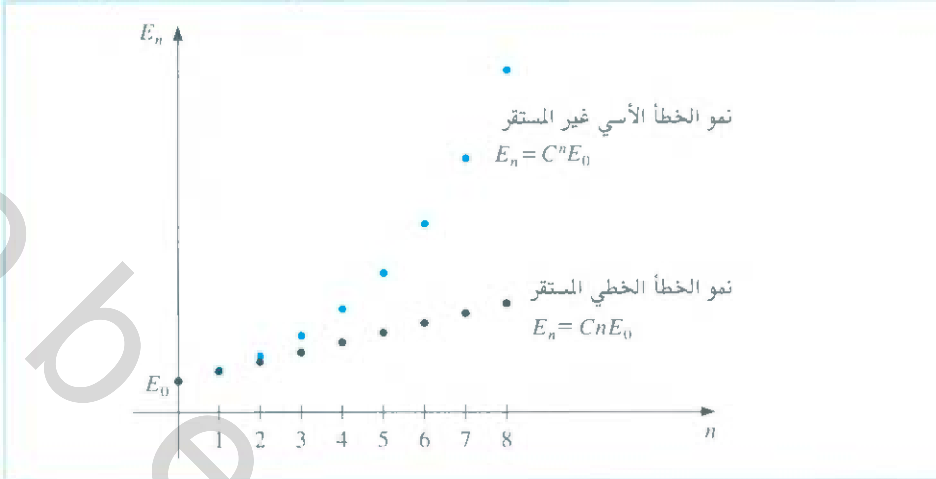
إن الصيغة الإرجاعية recursive

$$p_n = \frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2} \quad \text{لـ} \quad n = 2, 3, \ldots$$

لها الحل

$$p_n = c_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n$$

شكل 1.11



لأي ثابتين c_1 و c_2 لأن

$$\frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2} = \frac{10}{3}\left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + c_2 3^{n-1}\right] - \left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + c_2 3^{n-2}\right]$$
$$= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left[\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3} - 1\right] + c_2 3^{n-2}\left[\frac{10}{3}\cdot 3 - 1\right]$$
$$= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{9}\right) + c_2 3^{n-2}(9) = c_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n = p_n$$

إذا كان $p_0 = 1$ و $p_1 = \frac{1}{3}$ فإن $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$ عندئذ تكون قيمة $p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لقيم n جميعها. افترض أنك استخدمت حساب التقريب من الخانات الخمس لحساب حدود المتتالية المعطاة بهذه الصيغة. عندها تكون قيمة $\hat{p}_0 = 1.0000$ و $\hat{p}_1 = 0.33333$ وهو ما يتطلب تعديل الثوابت لـ $\hat{c}_1 = 1.0000$ و $\hat{c}_2 = -0.12500 \times 10^{-5}$ إن المتتالية التقريبية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ الناتجة تعطى بالمعادلة

$$\hat{p}_n = 1.0000\left(\frac{1}{3}\right)^n - 0.12500 \times 10^{-5}(3)^n$$

ويكون خطأ التقريب

$$p_n - \hat{p}_n = 0.12500 \times 10^{-5}(3^n)$$

وينمو أسيًا مع n. وهذا يعكس عدم دقة قصوى بعد عدد قليل من الحدود. ويظهر في الجدول (5.1) أيضًا في صفحة (34).

إن الصيغة الإرجاعية $p_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$ لكل $n = 2, 3, \ldots$ من جهة أخرى لها الحل $p_n = c_1 + c_2 n$ لأي ثابتين c_1 و c_2، لأن

$$2p_{n-1} - p_{n-2} = 2(c_1 + c_2(n-1)) - (c_1 + c_2(n-2))$$
$$= c_1(2-1) + c_2(2n - 2 - n + 2) = c_1 + c_2 n = p_n$$

جدول 5.1

n	المحسوب $\hat{p}_n$	الصحيح p_n	الخطأ النسبي
0	0.10000×10^1	0.10000×10^1	
1	0.33333×10^0	0.33333×10^0	
2	0.11110×10^0	0.11111×10^0	9×10^{-5}
3	0.37000×10^{-1}	0.37037×10^{-1}	1×10^{-3}
4	0.12230×10^{-1}	0.12346×10^{-1}	9×10^{-3}
5	0.37660×10^{-2}	0.41152×10^{-2}	8×10^{-2}
6	0.32300×10^{-3}	0.13717×10^{-2}	8×10^{-1}
7	-0.26893×10^{-2}	0.45725×10^{-3}	7×10^0
8	-0.92872×10^{-2}	0.15242×10^{-3}	6×10^1

إذا كان $p_0 = 1$ و $p_1 = \frac{1}{3}$ فإن الثوابت في هذه الصيغة تصبح $c_1 = 1$ و $c_2 = -\frac{2}{3}$ ويكون $p_n = 1 - \frac{2}{3}n$. وباستخدام حساب التقريب لخمسة أرقام ينتج في هذه الحالة أن $\hat{p}_0 = 1.0000$ و $\hat{p}_1 = 0.33333$ ونتيجة لذلك. تصبح قيم الثوابت المقرَّبة لخمسة خانات هي $\hat{c}_1 = 1.0000$ و $\hat{c}_2 = -0.66667$، وهكذا يكون

$$\hat{p}_n = 1.0000 - 0.66667n$$

وبذلك يصبح خطأ التقريب

$$p_n - \hat{p}_n = \left(0.66667 - \tfrac{2}{3}\right) n$$

وينمو خطيًا مع n. و ينعكس هذا في الاستقرار الظاهر في جدول (6.1). ■

جدول 6.1

n	المحسوب $\hat{p}_n$	الصحيح p_n	الخطأ النسبي
0	0.10000×10^1	0.10000×10^1	
1	0.33333×10^0	0.33333×10^0	
2	-0.33330×10^0	-0.33333×10^0	9×10^{-5}
3	-0.10000×10^1	-0.10000×10^1	0
4	-0.16667×10^1	-0.16667×10^1	0
5	-0.23334×10^1	-0.23333×10^1	4×10^{-5}
6	-0.30000×10^1	-0.30000×10^1	0
7	-0.36667×10^1	-0.36667×10^1	0
8	-0.43334×10^1	-0.43333×10^1	2×10^{-5}

يمكن تخفيف تأثيرات أخطاء التقريب باستخدام حساب لمراتب من رتب كبيرة. مثل الخيار الثنائي الدقة أو المتعدد الدقة المتاح في معظم الحواسيب.

إن مساوئ استخدام الحساب الثنائي الدقة تكمن في استغراقه وقتًا أطول، وعدم إلغائه أخطاء التقريب، بل تأجيل ذلك إلى حين إجراء عمليات حسابية آتية.

إن إحدى الطرائق لتوقع خطأ التقدير تكون باستخدام حساب الفئات (أي الاحتفاظ بأصغر القيم الممكنة وأكبرها في كل خطوة). وبذلك نحصل على فترة تحوي القيمة الحقيقية في النهاية. ولسوء الحظ قد نحتاج إلى فترة صغيرة جدًّا للتنفيذ المعقول.

وبما أننا نستخدم التقنية التفاعلية المتضمنة المتتاليات نختتم هذا الفصل بمناقشة بعض المصطلحات التي تصف معدل التقارب الحادث عند توظيف (تطبيق) التقنية العددية. وبصورة عامة، فإننا نرغب في حدوث التقارب بأقصى سرعة ممكنة.