(ج) استخدم كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة والحدّ الباقي المرتبط به لتقريب $\int_0^{0.1} \cos x\, dx$

بما أن $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. فإنه يمكن تطبيق مبرهنة تايلور لكل $n \geq 0$. بملاحظة أن
$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x$ and $f^{(4)}(x) = \cos x$
نجد أن

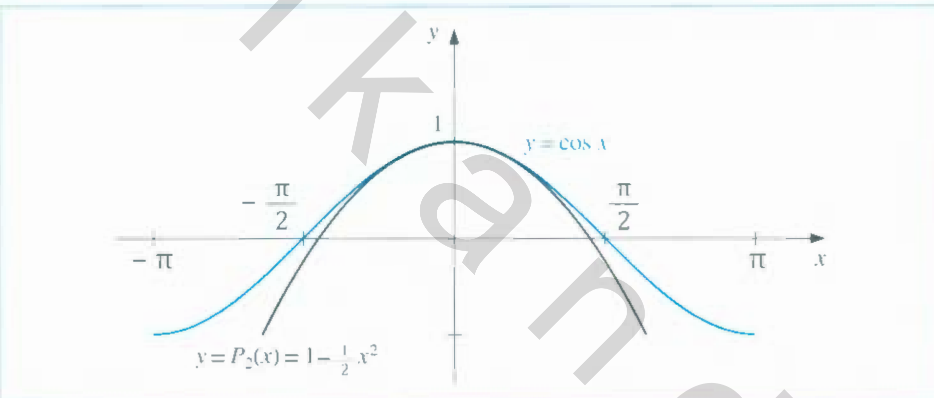
$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0, f''(0) = -1 \text{ and } f'''(0) = 0$$

(أ) عندما $n=2$ و $x_0 = 0$ يكون لدينا

$$\cos x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}x^3 \quad \xi(x)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin\xi(x)$$

حيث إن $\xi(x)$ عدد (عادة ما يكون غير معلوم) بين 0 و x. (انظر شكل 10.1)

شكل 10.1



عندما يكون $x = 0.01$ فإننا نحصل من الصيغة أعلاه على

$$\cos(0.01) = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \sin\xi(0.01) = 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6}\sin\xi(0.01)$$

عندئذ فإن تقريب قيمة $\cos(0.01)$ الذي نحصل عليه باستخدام كثيرة حدود تايلور هو 0.99995.
وإن خطأ القطع أو الحد الباقي المرتبط بهذا التقريب هو

$$\frac{10^{-6}}{6}\sin\xi(0.01) = 0.1\overline{6} \times 10^{-6}\sin\xi(0.01)$$

حيث الخط المستخدم فوق العدد 6 في $0.1\overline{6}$ يعني أن العدد العشري هو عدد دوري (يكرّر نفسه إلى ما لانهاية).

وعلى الرغم من أننا لا نملك طريقة لتحديد $\sin\xi(0.01)$، فإننا نعرف أن جميع قيم الجيب تقع في الفترة $[-1,1]$. ولذلك فإن الخطأ الحاصل باستخدام التقريب 0.99995 لقيمة $\cos(0.01)$ يكون محدودًا بالقيمة

$$|\cos(0.01) - 0.99995| = 0.1\overline{6} \times 10^{-6}\sin\xi(0.01) \leq 0.1\overline{6} \times 10^{-6}$$

وبهـــذا فإن هذا التقريب 0.99995 يتفق مع الخانات الخمس الأولى على الأقل لقيمة $\cos(0.01)$ ويكون

$$0.99994983 < 0.99995 - 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \le \cos(0.01)$$
$$\le 0.99995 + 0.1\bar{6} \times 10^{-6} < 0.99995017$$

إن حد الخطأ أكبر بكثير من الخطأ الحقيقي. وهذا يُعزى جزئيًا إلى استخدام حد غير دقيق (ضعيف) للقيمة $|\sin\xi(0.01)|$. يمكن برهنة أن $|\sin\xi(0.01)| \le |x|$ لجميع قيم x بما أن $0 \le \xi < 0.01$. فبإمكاننا استخدام حقيقة أن $|\sin\xi(0.01)| \le 0.01$ في صيغة الخطأ، ومن ثم نحصل على الحد $0.1\bar{6} \times 10^{-8}$.

(ب) بما أن $f'''(0) = 0$ فإن كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة مع حد الباقي حول $x_0 = 0$ هو

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 \cos\tilde{\xi}(x)$$

حيث إن $0 < \tilde{\xi}(x) < 0.01$. تبقى كثيرة الحدود المقرّبة نفسها. ويبقى التقريب 0.99995 ولكن لدينا الآن دقة أفضل بكثير. وبما أن $|\cos\tilde{\xi}(x)| \le 1$ لقيم x جميعها يكون لدينا

$$\left|\tfrac{1}{24}x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\right| \le \tfrac{1}{24}(0.01)^4(1) < 4.2 \times 10^{-10}$$

ولذلك

$$\left|\cos(0.01) - 0.99995\right| \le 4.2 \times 10^{-10}$$

و

$$0.99994999958 = 0.99995 - 4.2 \times 10^{-10}$$
$$\le \cos(0.01) \le 0.99995 + 4.2 \times 10^{-10} = 0.99995000042$$

يفسر أول جزأين من المثال هدفي التحليل العددي:

(i) إيجاد تقريب لحل مسألة معطاة.

(ii) إيجاد حد لخطأ التقريب.

لقد أعطت كثيرات حدود تايلور الإجابة نفسها للمطلوب (i)، ولكن كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة أعطت إجابة للمطلوب (ii) أفضل كثيرًا من إجابة كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية.

(ج) إن استخدام كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة يعطي

$$\int_0^{0.1} \cos x\,dx = \int_0^{0.1}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)dx + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\,dx$$
$$= \left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{0.1} + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\,dx$$
$$= 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 + \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\,dx$$

وعندئذ

$$\int_0^{0.1} \cos x\,dx \approx 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 = 0.0998\bar{3}$$

obeikandl.com

يحدّد حد الخطأ في التقريب من تكامل حد الباقي لتايلور واستخدام حقيقة أن $1 \geq |\cos\xi(x)|$ لقيم x جميعها حيث

$$\frac{1}{24}\left|\int_0^{0.1} x^4 \cos\tilde{\xi}(x)\right| \leq \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4 |\cos\tilde{\xi}(x)|\, dx$$

$$\leq \frac{1}{24}\int_0^{0.1} x^4\, dx = 8.\bar{3}\times 10^{-8}$$

وبما أن القيمة الحقيقية للتكامل هي

$$\int_0^{0.1} \cos x\, dx = \sin x\Big]_0^{0.1} = \sin 0.1 = 0.099833416647$$

فإن الخطأ الحقيقي لهذا التقريب هو 8.3314×10^{-8}، وهو ضمن حدّ الخطأ.

■

ويمكننا استخدام CAS في المثال (3).

باستخدام Maple، نعرّف f كما يلي:

```
>f:=cos(x);
```

إن Maple يسمح باستخدام عبارات متعددة متتالية في سطر واحد واستخدام (:) لإيقاف استجابات Maple. فعلى سبيل المثال نحصل على كثيرة حدود تايلور باستخدام

```
>s3:=taylor(f,x=0,4): p3:=convert(s3, polynom);
```

إن العبارة s3:=taylor(f,x=0,4) تحدد كثيرة حدود تايلور حول $x_0 = 0$ بأربعة حدود (الرتبة 3) والباقي المرتبط بها.

وتحوّل العبارة p3:=convert(s3, polynom) السلسلة s3 إلى كثيرة الحدود p3 بإسقاط الباقي.

ولكي نحصل على 11 منزلة في الجواب، ندخل

```
>Digits:=11;
```

ونجد قيمة $f(0.01)$، $P_3(0.01)$ و $|f(0.01) - P_3(0.01)|$ عن طريق

```
>y1:=evalf(subs(x=0.01,f));
>y2:=evalf(subs(x=0.01,p3));
>err:=abs(y1-y2);
```

هذا يعطينا $y_1 = f(0.01) = 0.99995000042$، $y_2 = P_3(0.01) = 0.99995000000$،

و $|f(0.01) - P_3(0.01)| = .42\times 10^{-9}$

للحصول على رسم مشابه للرسم المبين في شكل (10.1)، أدخل

```
>plot({f,p3},x=-Pi..Pi);
```

إن أوامر التكامل هي

```
>q1:=int(f,x=0..0.1);
>q2:=int(p3,x=0..0.1);
>err:=abs(q1-q2);
```

وتعطي القيم

$$q_1 = \int_0^{0.1} f(x)\, dx = 0.099833416647 \quad \text{و} \quad q_2 = \int_0^{0.1} P_3(x)\, dx = 0.099833333333$$

بخطأ مقداره $8.3314\times 10^{-8} = 0.83314\times 10^{-7}$.

إن الفقرتين (أ) و (ب) في المثال تدلان على كيفية إعطاء تقنيتي التقريب نفسه. لكنهما

obeikandl.com

تختلفـان في درجة الدقة. تذكّر أن تحديـد التقريب جزء واحد من هدفنا، وأن الجزء الذي لا يقل عنه أهمية هو إيجاد حد لخطأ التقريب.

مجموعة التمارين 1.1 EXERCISE SET

1. بيّن أن كلاً من الصيغ الآتية لها حل واحد على الأقل في الفترات المعطاة:

أ. $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ $[0.2, 0.3]$ و $[1.2, 1.3]$

ب. $(x-2)^2 - \ln x = 0$ $[1, 2]$ و $[e, 4]$

ج. $2x\cos(2x) - (x-2)^2 = 0$ $[2, 3]$ و $[3, 4]$

د. $x - (\ln x)^x = 0$ $[4, 5]$

2. أوجد فترات تحتوي على حلول للصيغ الآتية:

أ. $x - 3^{-x} = 0$ ب. $4x^2 - e^x = 0$

ج. $x^3 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$ د. $x^3 + -.001x^2 + 4.002x + 1.101 = 0$

3. بين أن $f'(x)$ يكون صفرًا على الأقل مرّة واحدة في الفترة المعطاة:

أ. $f(x) = 1 - e^x + (e-1)\sin((\pi/2)x)$ $[0, 1]$

ب. $f(x) = (x-1)\tan x + x\sin \pi x$ $[0, 1]$

ج. $f(x) = x\sin \pi x - (x-2)\ln x$ $[1, 2]$

د. $f(x) = (x-2)\sin x \ln(x+2)$ $[-1, 3]$

4. أوجد $\max_{a\le x\le b}|f(x)|$ لكل من الدّوال والفترات الآتية:

أ. $f(x) = (2 - e^x + 2x)/3$ $[0, 1]$

ب. $f(x) = (4x-3)/(x^2 - 2x)$ $[0.5, 1]$

ج. $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$ $[2, 4]$

د. $f(x) = 1 + e^{-\cos(x-1)}$ $[1, 2]$

5. استخدم مبرهنة القيمة الوسيطية ومبرهنة رول لإثبات أن الدّالة $f(x) = x^3 + 2x + k$ يقطع محور البيانات (محور x) مرّة واحدة فقط مهما كانت قيمة الثابت k.

6. ليكن $f \in C[a, b]$ و $f'(x)$ موجودًا على (a, b).

إذا كان $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,b)$ فأثبت وجود عدد واحد $p \in [a, b]$ على الأكثر يحقق $f(p) = 0$

7. ليكن $f(x) = x^3$.

أ. أوجد كثيرة حدود تايلور $P_2(x)$ من الرتبة الثانية حول $x_0 = 0$.

ب. أوجد $R_2(0.5)$، والخطأ الحقيقي الناتج من استخدام $P_2(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$.

ج. كرّر الفقرة (أ) مستخدمًا $x_0 = 1$.

د. كرّر الفقرة (ب) مستخدمًا كثيرة الحدود من الفقرة (جـ).

8. أوجـد كثيـرة حدود تايلـور من الرتبـة الثالثة $P_3(x)$ للدّالـة $f(x) = \sqrt{x+1}$ حول $x_0 = 0$
قرّب القيم $\sqrt{0.5}, \sqrt{0.75}, \sqrt{1.25}, \sqrt{1.5}$ باستخدام $P_3(x)$، وأوجد الأخطاء الحقيقية.

9. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية $P_2(x)$ للدّالة $f(x) = e^x\cos x$ حول $x_0 = 0$.

أ. اسـتخدم $P_2(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$ أوجد الحد الأعلى للخطأ $|f(0.5) - P_2(0.5)|$ مستخدمًا صيغة الخطأ، وقارن ذلك بالخطأ الحقيقي.

ب. أوجد حدًّا للخطأ $|f(x) - P_2(x)|$ الناتج عن استخدام $P_2(x)$ لتقريب $f(x)$ على الفترة $[0, 1]$.

ج. قرّب $\int_0^1 f(x)\,dx$ مستخدمًا $\int_0^1 P_2(x)\,dx$.

obeikandl.com

د. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في الفقرة (ج) مستخدمًا $\int_0^1 |R_2(x)\,dx|$، وقارن ذلك الحد بالخطأ الحقيقي.

10. كرّر المطلوب في التمرين (9) مستخدمًا $x_0 = \pi/6$.

11. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة $P_3(x)$ للدّالة $f(x) = (x-1)\ln x$ حول $x_0 = 1$.

أ. استخدم $P_3(0.5)$ لتقريب $f(0.5)$، جد حدًّا أعلى للخطأ $|f(0.5) - P_3(0.5)|$ مستخدمًا صيغة الخطأ، ثم قارن ذلك بالخطأ الحقيقي.

ب. أوجد حدًّا للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ الناتج من استخدام $P_3(x)$ لتقريب $f(x)$ على الفترة $[0.5, 1.5]$.

ج. قرّب $\int_{0.5}^{1.5} f(x)\,dx$ باستخدام $\int_{0.5}^{1.5} P_3(x)\,dx$.

د. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في (جـ) باستخدام $\int_{0.5}^{1.5} |R_3(x)\,dx|$، وقارن ذلك بالخطأ الحقيقي.

12. ليكن $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$ و $x_0 = 0$.

أ. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة $P_3(x)$، واستخدمه لتقريب $f(0.4)$.

ب. استخدم صيغة الخطأ في مبرهنة تايلور لإيجاد حد أعلى للخطأ $|f(0.4) - P_3(0.4)|$ واحسب الخطأ الحقيقي.

ج. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة $P_4(x)$، واستخدمه لتقريب $f(0.4)$.

د. استخدم صيغة الخطأ في مبرهنة تايلور لإيجاد حد أعلى للخطأ $|f(0.4) - P_4(0.4)|$، واحسب الخطأ الحقيقي.

13. أوجد كثيرة حدود تايلور من الرتبة الرابعة $P_4(x)$ للدّالة $f(x) = xe^{x^2}$ حول $x_0 = 0$.

أ. جد حدًّا أعلى للمقدار $|f(x) - P_4(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 0.4$.

ب. قرّب $\int_0^{0.4} f(x)\,dx$ مستخدمًا $\int_0^{0.4} P_4(x)\,dx$.

جـ. أوجد حدًّا أعلى للخطأ في (ب) باستخدام $\int_0^{0.4} P_4(x)\,dx$.

د. قرّب $f'(0.2)$ باستخدام $P_4'(0.2)$ وأوجد الخطأ.

14. استخدم حد الخطأ لكثيرة حدود تايلور لتقدير الخطأ الناتج من استخدام $\sin x \approx x$ في تقدير $\sin 1°$.

15. استخدم كثيرة حدود تايلور حول $\pi/4$ لتقريب $\cos 42°$ بدرجة دقة 10^{-6}.

16. ليكن $f(x) = e^{x/2}\sin(x/3)$، استخدم مابل Maple لإيجاد ما يأتي:

أ. كثيرة حدود ماكلورين من الرتبة الثالثة $P_3(x)$.

ب. $f^{(4)}(x)$ وحدًّا للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ على $[0, 1]$.

17. ليكن $f(x) = \ln(x^2 + 2)$، استخدم مابل Maple لإيجاد ما يأتي:

أ. كثيرة حدود تايلور $P_3(x)$ لنشر f حول $x_0 = 1$.

ب. القيمة العظمى للخطأ $|f(x) - P_3(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 1$.

جـ. كثيرة حدود ماكلورين $\tilde{P}_3(x)$ للدّالة f.

د. القيمة العظمى للخطأ $|f(x) - \tilde{P}_3(x)|$ على الفترة $0 \le x \le 1$.

هـ. هل التقريب $P_3(0)$ للقيمة $f(0)$ أفضل من التقريب $\tilde{P}_3(1)$ للقيمة $f(1)$؟

18. ليكن $f(x) = (1-x)^{-1}$ و $x_0 = 0$، أوجد كثيرة حدود تايلور $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x)$ حول x_0، وأوجد قيمة n الضرورية ليكون $P_n(x)$ تقريبًا للدّالة $f(x)$ ضمن 10^{-6} على الفترة $[0, 0.5]$.

19. ليكن $f(x) = e^x$ و $x_0 = 0$.

أ. أوجد كثيرة حدود تايلور $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x)$ حول x_0.

ب. أوجد قيمة n الضرورية ليكون $P_n(x)$ تقريبًا للدّالة $f(x)$ ضمن 10^{-6} على الفترة $[0, 0.5]$.

20. أوجد كثيرة حدود ماكلورين $P_n(x)$ من الرتبة n للدّالة $f(x) = \arctan x$.

obeikandl.com

21. استخدم $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ لتقدير $f(x) = \cos x$ على الفترة $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. وأوجد حدًّا لأكبر خطأ.

22. إن كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدالّة f على x_0 يُشار إليها بعض الأحيان بأنها كثيرة الحدود من الأعلى رتبة n التي تعطي "أفضل" تقريب للدالّة f بالقرب من x_0.

أ. اشرح سبب كون هذا الوصف دقيقًا.

ب. أوجد كثيرة الحدود التربيعية التي تعطي أفضل تقريب للدالّة f بالقرب من $x_0 = 1$ إذا كانت صيغة خط المماس عند $x_0 = 1$ هي $y = 4x - 1$ وكان $f''(1) = 6$.

23. إذا أعطى استخدام كثيرة حدود ماكلورين للدالّة e^x التقريب 2.5 لقيمة e. وتحدّد حد الخطأ في هذا التقريب بالقيمة $E = \frac{1}{6}$ فأوجد حدًا للخطأ الناتج في E.

24. إن دالّة الخطأ المعرف بالصيغة $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

يعطي احتمالاً بأن أي واحدة من سلسلة التجارب ستقع ضمن x من وحدات المعدل، مفترضين أن للمحاولات توزيعًا طبيعيًا بمعدل صفر، وانحرافًا معياريًا $\sqrt{2}/2$. ولا يمكن تقييم هذا التكامل بدلالة دوال ابتدائية، لذا يتعيّن استخدام أسلوب التقريب.

أ. اعمل تكامل سلسلة ماكلورين لـ e^{-x^2} لإثبات

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

ب. يمكن التعبير عن دالّة الخطأ أيضًا بالصيغة

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$$

تحقّق من أن السلسلتين تتفقان عند $k = 1, 2, 3, 4$ [إرشاد: استخدم سلسلة ماكلورين لـ e^{-x^2}].

ج. استخدم السلسلة في الفقرة (أ) لتقريب $\operatorname{erf}(1)$ إلى 10^{-7}.

د. استخدم العدد نفسه من الحدود على صورة الفقرة (ج) لتقريب $\operatorname{erf}(1)$ مع السلسلة في الفقرة (ب).

هـ. وضّح سبب ظهور صعوبات عند استخدام السلسلة في الفقرة (ب) لتقريب $\operatorname{erf}(x)$.

25. الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تحقّق شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على الفترة $[a, b]$ إذا كان $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ لكل $x, y \in [a, b]$.

أ. أثبت أنه إذا حقّق f شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على فترة ما $[a, b]$. فإن $f \in C[a, b]$.

ب. أثبت أنه إذا كان لـ f مشتقة محددة في L على $[a, b]$، فإن f يحقّق شرط لبشتز مع ثابت لبشتز L على الفترة $[a, b]$.

ج. أعط مثالاً لدالّة تكون متصلة على فترة مغلقة، لكنه لا يحقّق شرط لبشتز على الفترة.

26. افترض $f \in C[a, b]$، حيث x_1 و x_2 ضمن $[a, b]$. وأن c_1 و c_2 ثابتان موجبان. ثبت وجود العدد ξ ما بين x_1 و x_2 مع

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)}{c_1 + c_2}$$

27. ليكن $f \in C[a, b]$، وليكن p في الفترة المفتوحة (a, b).

أ. افترض $f(p) \neq 0$. أثبت وجود $\delta > 0$ مع $f(x) \neq 0$ لكل x ضمن $[p - \delta, p + \delta]$ حيث إن $[p - \delta, p + \delta]$ جزئية من $[a, b]$.

ب. افترض $f(p) = 0$ و $k > 0$. أثبت وجود $\delta > 0$ مع $|f(x)| \le k$ لكل x في الفترة $[p - \delta, p + \delta]$ حيث إن $[p - \delta, p + \delta]$ جزئية من $[a, b]$.

obeikandl.com

2.1 تدوير الأخطاء والحساب بالحاسوب Round-off Error and Computer Arithmetic

إن الحساب الذي يتم باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب يختلف عن الحساب في مقررات الجبر والتفاضل والتكامل. ومن الممكن التوقع – بناءً على خبرتك السابقة – أن العبارات الآتية صحيحة دائمًا، مثل $2+2=4$ ، $4 \cdot 8=32$ و $(\sqrt{3})^2=3$. ففي الحساب العادي نتوقع نتائج صحيحة للعمليتين $2+2=4$ و $4 \cdot 8=32$، ولكن لا نحصل على النتيجة $(\sqrt{3})^2=3$ بدقة كاملة. ولكي نفهم لماذا يكون هذا الأمر صحيحًا، يتعين علينا أن نستكشف عالم الحساب ذا الخانات (أو المراتب) المنتهية.

توقع ظهور خطأ بسبب التقريب حيثما تكون الحسابات باستخدام أعداد ليست من قوى العدد 2 إن إبقاء هذا الخطأ تحت السيطرة أمر مهم جدًا خصوصا عندما يكون عدد الحسابات كبيرا.

إننا نسمح في عالم الرياضيات التقليدية باستخدام أعداد ذوات خانات (أو مراتب) غير منتهية. فالحساب الذي نستخدمه في هذا العالم يُعرّف $\sqrt{3}$ على أنه ذلك العدد الموجب الوحيد الذي لو ضربته في نفسه لأنتج العدد 3. ولكن في العالم الحاسوبي، فإن كل عدد قابل للتمثيل يحوي عددًا ثابتًا ومنتهيًا من الأعداد. وهذا يعني على سبيل المثال أن الأعداد النسبية – وربما ليس جميعها – يمكن تمثيلها بدقة. وبما أن $\sqrt{3}$ عدد غير نسبي، فإنه يعطي تمثيلًا تقريبيًا. ومن ثم لا يكون مربعه 3 تمامًا، مع أنه سيكون غالبًا قريبًا من 3 على نحو كافٍ بحيث يجعله مقبولًا في معظم الأحوال. وأخيرا يكون هذا الحساب الآلي في معظم الأحيان مُرضيًا، ويمرّ من دون ملاحظة أو تحفظ. ولكن في بعض الأحيان تحدث مشكلات بسبب هذا الاختلاف.

إن الخطأ الناتج عند استخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب لإيجاد حسابات عددية حقيقية يُسمى خطأً (التقريب أو التدوير). ويحدث هذا الخطأ؛ لأن إجراء الحساب بالآلة يتضمن أعدادًا ذات عدد منتهٍ من الخانات، مما يؤدي إلى إجراء الحسابات باستخدام التمثيل التقريبي للأعداد. وفي الحاسوب العادي تستخدم مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية الصغيرة نسبيًا لتمثيل جميع الأعداد الحقيقية، وتحتوي هذه المجموعة على الأعداد النسبية الموجبة والسالبة فقط. وتحتفظ بالجزء الكسري مع جزء أسي.

نشرت IEEE (معهد مهندسي الكهرباء والإلكترونيات) في عام 1985 تقريرًا بعنوان

Binary Floating Point Arithmetic Standard 754 - 1985

"معايير 1985 – 754 للحساب باستخدام النقاط الثنائية العائمة" لقد صُممت النماذج لاستخدام الدقة المنفردة والثنائية والممتدة. وتُعتمد هذه المعايير على نحو عام من قبل صانعي الحواسيب الصغيرة التي تستخدم الأنظمة الثنائية. وعلى سبيل المثال ينفذ المعالج المساعد العددي للحواسيب الشخصية تمثيلًا من 64–بت (منزلة ثنائية) للعدد الحقيقي يسمى الحقيقي الطويل long real البت الأول هو دليل الإشارة، ويرمز له بـ S. حيث يُتبعُ بأس من 11 بت، C، يسمى المميز characteristic، وجزء من 52 بت، f، يسمى الكسر العشري mantissa. والأساس للأس هو 2.

وبما أن 52 منزلة ثنائية تقابل ما بين 15 و 16 منزلة عشرية، يمكننا افتراض عدد ضمن هذا النظام ذي 15 منزلة عشرية من الدقة على الأقل. الأس ذو 11 منزلة ثنائية يعطي الأعداد

0 ولغاية $2047 = 2^{11} - 1$. وعلى أي حال فاستخدام الأعداد الصحيحة الموجبة فقط للأس لن يمثِّل الأعداد الصغيرة بدقة. ولضمان كون الأعداد الصغيرة متساوية التمثيل، فإن 1023 تطرح من المميز. فيكون مدى الأس في الواقع من 1023 – 1024.

ولحفظ ما خُزِّن وتوفير تمثيل وحيد لكل عدد ذي نقطة عائمة، تُفترض معيارية ما. ويعطي استخدام هذا النظام عددا ذا نقطة عائمة بصيغة

$$(-1)^s 2^{c-1023}(1+f)$$

افترض على سبيل المثال عدد الحاسبة

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000000

إن أول بت من اليسار هو 0، الذي يعني أن العدد موجب. ثم إن 11 بت التالية 10000000011 تعطي المميز وهي مكافئة للعدد العشري

$$c = 1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^9 + \cdots + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 1024 + 2 + 1 = 1027$$

إن الجزء الأسي من العدد يكون $2^{1027-1023} = 2^4$. وآخر 52 بت تصف كون العشري هو

$$f = 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{12}$$

والنتيجة أن عدد الحاسبة هذا يمثل بكفاءة العدد العشري

$$(-1)^s 2^{c-1023}(1+f) = (-1)^0 \cdot 2^{1027-1023}\left(1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096}\right)\right)$$
$$= 27.56640625$$

على أي حال، أصغر عدد حاسبة تالٍ هو

0 10000000011 1011100100001111111111111111111111111111111111111111

وأكبر عدد حاسبة تال هو

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000001

هذا يعني أن عدد الحاسبة الأصلي لا يمثل 27.56640625 فقط، وإنما يمثّل نصف الأعداد الحقيقية أيضا التي هي ما بين 27.56640625 وأقرب عددي حاسبة مجاورين. ولكي نكون دقيقين، فإنه يمثّل أي عدد حقيقي في الفترة

[27.5664062499999982236431605997495353221893310546875,

27.5664062500000017763568394002504646778106689453125)

إن أصغر عدد موجب معياري يمكن تمثيله، له $s = 0, c = 1$ وهو مكافئ لـ $f = 0$

$$2^{-1022}\cdot(1+0) \approx 0.2225 \times 10^{-307}$$

وإن أكبر عدد، له $s = 0, c = 2046$ وهو مكافئ لـ $f = 1 - 2^{-52}$

$$2^{1023}\cdot(2 - 2^{-52}) \approx 0.17977 \times 10^{309}$$

الأعداد التي تظهر في الحسابات، ولها قيمة تقل عن $2^{-1022}\cdot(1+0)$ تنتج نقصًا، وعادة ما تتجه قيمتها إلى الصفر. أمّا الأعداد التي قيمتها أكبر من $2^{1023}\cdot(2-2^{-52})$ تنتج زيادة. وعادة ما تؤول بالحسابات إلى أن تقف (ما لم يعطى البرنامج أوامر لاكتشاف ذلك). كما يجب

obeikandl.com