(ج) استخدم كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة والحدّ الباقي المرتبط به لتقريب $\int_0^{0.1} \cos x \, dx$

بما أن $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$، فإنه يمكن تطبيق مبرهنة تايلور لكل $n \geq 0$. بملاحظة أن

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x \ \text{ and } \ f^{(4)}(x) = \cos x$$

نجد أن

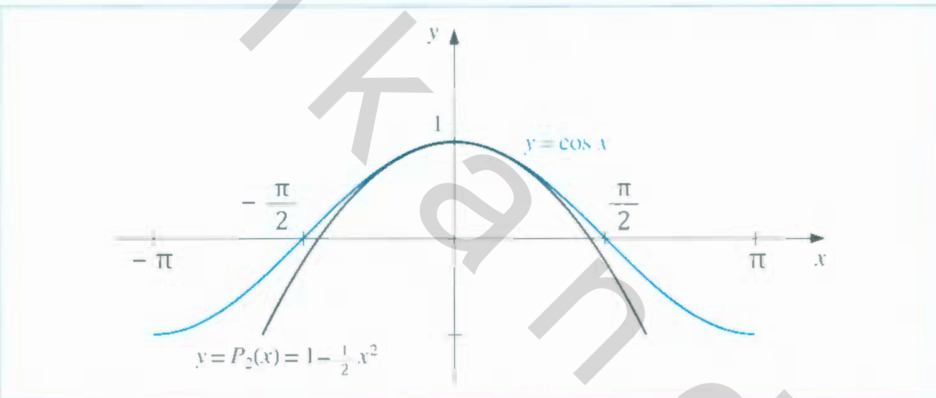
$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1 \ \text{ and } \ f'''(0) = 0$$

(أ) عندما $n = 2$ و $x_0 = 0$ يكون لدينا

$$\cos x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}x^3 \qquad \xi(x)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin\xi(x)$$

حيث إن $\xi(x)$ عدد (عادة ما يكون غير معلوم) بين 0 و x. (انظر شكل 10.1)

شكل 10.1



عندما يكون $x = 0.01$ فإننا نحصل من الصيغة أعلاه على

$$\cos(0.01) = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \sin\xi(0.01) = 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6}\sin\xi(0.01)$$

عندئذ فإن تقريب قيمة $\cos(0.01)$ الذي نحصل عليه باستخدام كثيرة حدود تايلور هو 0.99995.
وإن خطأ القطع أو الحد الباقي المرتبط بهذا التقريب هو

$$\frac{10^{-6}}{6}\sin\xi(0.01) = 0.1\overline{6} \times 10^{-6}\sin\xi(0.01)$$

حيث الخط المستخدم فوق العدد 6 في $0.1\overline{6}$ يعني أن العدد العشري هو عدد دوري (يكرّر نفسه إلى ما لانهاية).

وعلى الرغم من أننا لا نملك طريقة لتحديد $\sin\xi(0.01)$، فإننا نعرف أن جميع قيم الجيب تقع في الفترة $[-1,1]$. ولذلك فإن الخطأ الحاصل باستخدام التقريب 0.99995 لقيمة $\cos(0.01)$ يكون محدودًا بالقيمة

$$|\cos(0.01) - 0.99995| = 0.1\overline{6} \times 10^{-6}\sin\xi(0.01) \leq 0.1\overline{6} \times 10^{-6}$$

obeikandl.com