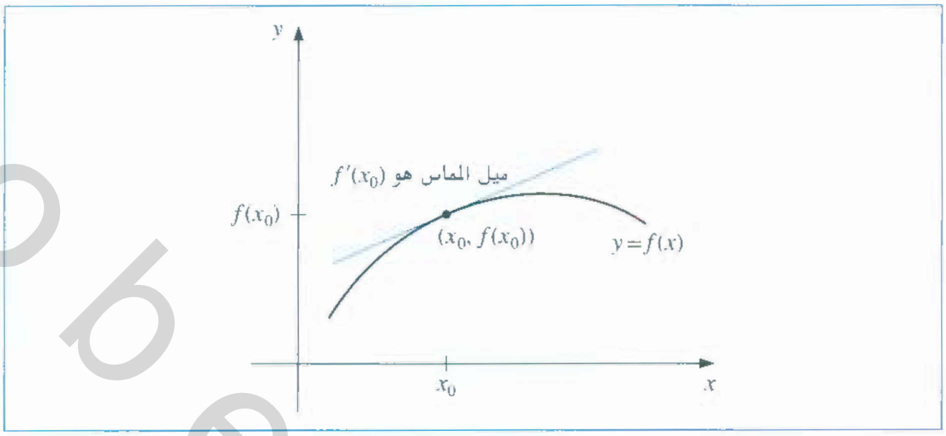
شكل 2.1



مبرهنة 6.1

إذا كانت الدّالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن f متصلة عند x_0. ■

تُعزى هـذه المبرهنة للرياضي مايكل رول (1652–1719)، وقد ظهرت عام 1691 في مقالة بعنوان Méthode pour résoudre les égalités انتقد رول علم التفاضل والتكامل الذي طوّره إسحاق نيوتن وغوتفريد لايبنتز في البداية، ولكن أصبح رول أخيرًا من مطوّري هذا العلم.

نعبّر عن مجموعة الدّوال جميعها والتي يوجد لها n من المشتقات المتصلة على المجموعة X بالرمز $C^n(X)$، وعن مجموعة الدّوال التي لها مشتقات من جميع الرتب على X بالرمز $C^\infty(X)$. إن كثيرات الحدود، والدّوال النسبية، والمثلثية، والأسّية واللوغارتمية تنتمي كلها إلى $C^\infty(X)$ حيث تتألف X من الأعداد جميعها والتي تعرّف عليها هذه الدّوال. وإننا نحذف الأقواس في هذه الرموز عندما تكون X فترة على خط الأعداد الحقيقية كالسابق.
النظريات الآتية ذات أهمية رئيسة في اشتقاق طرائق تقدير الخطأ. وإن براهين هذه النظريات والنتائج جميعها والتي لم تُذكر مراجعها في هذا الفصل، يمكن الرجوع لها في أي كتاب تفاضل وتكامل رئيس.

مبرهنة 7.1

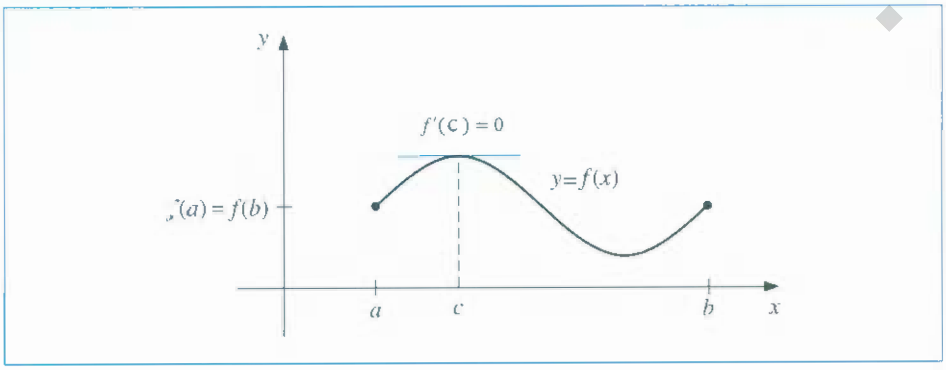
مبرهنة رول Rolle's Theorem

إذا كانت $f \in C\ [a, b]$ قابلة للاشتقاق على (a,b)،

وإذا كانت $f(a) = f(b)$، فإنه يوجد عدد c في الفترة (a,b)، يحقق $f'(c) = 0$.

(انظر شكل 3.1). ■

شكل 3.1

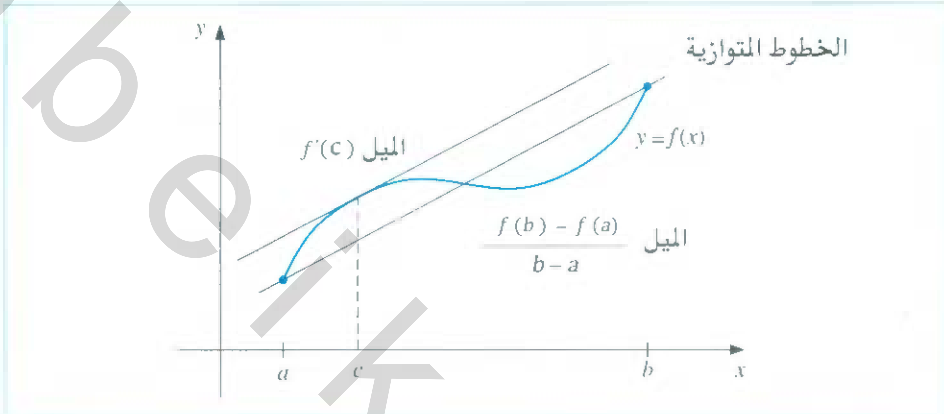


مبرهنة 8.1 مبرهنة القيمة الوسيطية Mean Value Theorem

إذا كانت $f \in C[a, b]$ وكانت f قابلة للاشتقاق على (a, b) فإنه يوجد عدد c في الفترة (a, b) يحقق $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(انظر شكل 4.1).

شكل 4.1

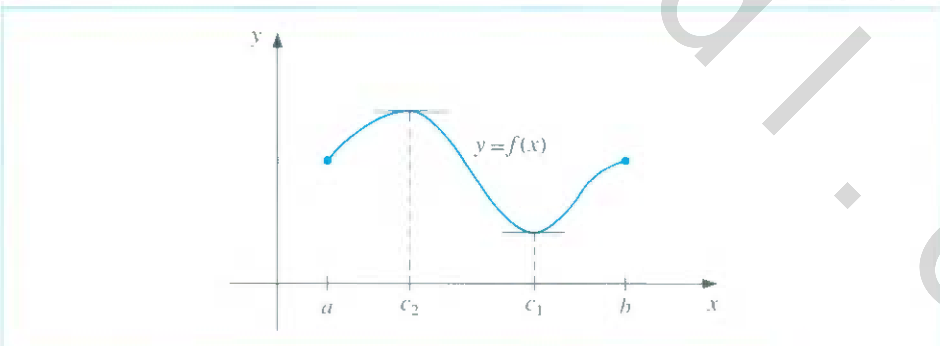


مبرهنة 9.1 مبرهنة القيمة القصوى Extreme Value Theorem

إذا كانت $f \in C[a, b]$ فإنه توجد نقطتان $c_1, c_2 \in [a, b]$ بحيث يكون $f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$ لجميع القيم $x \in [a, b]$. بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a, b) فإن النقطتين c_1 و c_2 تقعان على طرفي الفترة $[a, b]$ أو تكون f' مساوية للصفر.

(انظر شكل 5.1).

شكل 5.1



لقد بدأت البحوث حول تصميم الخوارزميات والأنظمة لاستخدام الرياضيات الرمزية مع بدايات 1960. وأول نظام فعّال ظهر كان في السبعينيات 1970. وكان من نوع LISP ويسمّى MACSYMA

سنستخدم النظام الحاسوبي الجبري Maple حيثما كان مناسبًا كما ذكرنا في المقدمة.

إن الأنظمة الحاسوبية الجبرية (CAS) مفيدة في الاشتقاق الرمزي، وفي رسم الأشكال خصوصًا نوضح استخدام هاتين التقنيتين في المثال (1).

مثال 1

استخدم Maple لإيجاد $\max_{a\le x\le b}|f(x)|$ للدالة $f(x) = 5\cos 2x - 2x\sin 2x$ على الفترتين $[1, 2]$ و $[0.5, 1]$.

بـدئ بالعمل علـى تطوير مشـروع "مابل" فـي جامعة واترلو في نهاية ثمانينيـات القـرن العشـرين. وكان الهدف منه جعلـه في متناول أيدي الباحثين الرياضيين، والمهندسـين، والعلمـاء. إضافة إلى توفيره للطلاب من أجل أغراض تربوية. وحتى يكون المشروع فاعلا، يجب أن يكون قابلا للنقـل، ومناسـبا من حيـث المكان والزمـان. قدمت عـروض للنظام في عـام 1982، وأما العـرض المكتوب الرئيس لمعايير تصميـم نظام "مابل" فقد قدّم عام 1983 [CGG6].

سنبدأ أولاً بإمكانات Maple في الرسم. ولكي تتمكن من استخدام برمجية الرسم الكاملة، أدخل الأمر

```
>with(plots);
```

فتظهر لك قائمة أوامر ضمن البرمجية.

عرّف f بإدخال

```
>f:= 5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x);
```

إذ تعطيك Maple الآتي

$$f := 5\cos(2x) - 2x\sin(2x)$$

استخدم الأمر

```
>plot(f,x=0.5..2);
```

لكي ترسم f على الفترة $[0.5, 2]$،

يمكننا تحديد إحداثيات أي نقطة على الرسـم عن طريق تحريك مؤشر الفأرة لى النقطة، ونقر زر الفأرة الأيسـر، فتظهر عندئذ إحداثيات النقطة التي حدّدتها بالمؤشـر في الصندوق الأبيض على الزاوية العليا اليسرى لشاشة Maple، وتظهر في الشكل (6.1) أيضًا، إن هذه الطريقة مفيدة لتقرير إحداثيات نقاط القيم المتطرفة للدّالات.

ثم نكمل حل المثال باستخدام مبرهنة القيمة الوسيطية.

أولاً: خذ الفترة $[1, 2]$ للحصول على المشتقة الأولى $g = f'$، أدخل

```
>g:=diff(f,x);
```

يعطيك Maple

$$g := -12\sin(2x) - 4x\cos(2x)$$

يمكنك عندئذ أن تحل $g(x) = 0$ للقيم $1 \le x \le 2$

وذلك باستخدام

```
>fsolve(g,x,1..2);
```

فتحصل على 1.358229874 وتحسب $f(1.358229874) = -5.675301338$،

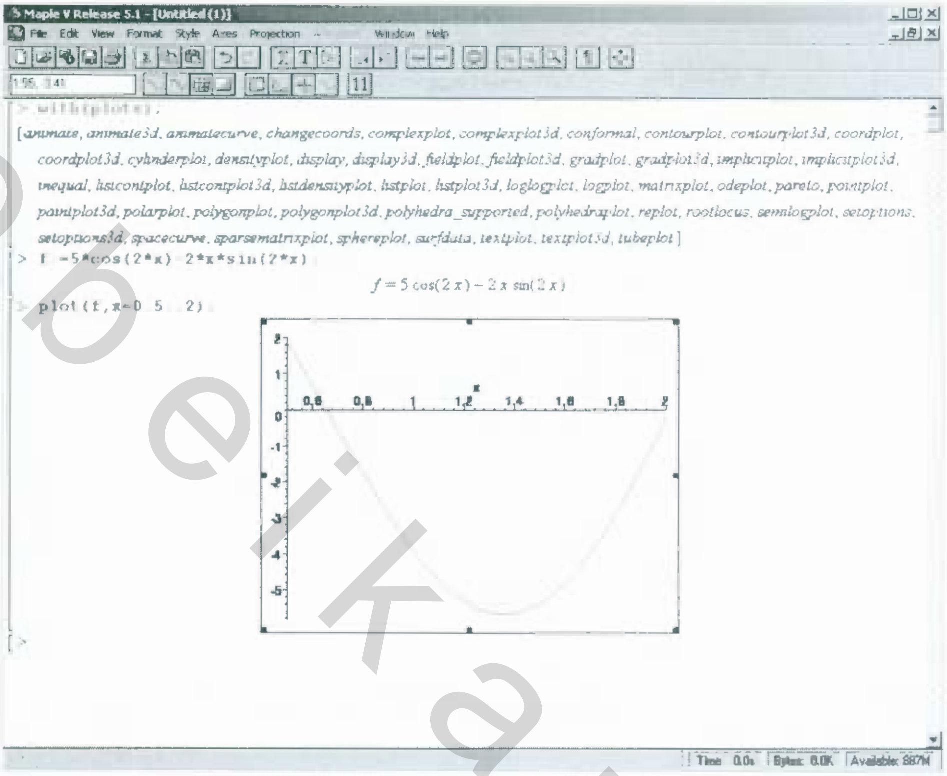
وذلك باستخدام

```
>evalf(subs(x=1.358229874,f));
```

إن هذا يعني وجود قيمة صغرى تساوي تقريبًا $f(1.358229874) = -5.675301338$.

وإن مـا نحتـاج إليه في كثير من الأحيان هو القيمة العظمـى التي تحقّقها الدّالة على فترة ما، وتحدث القيمة العظمى على نقطة حرجة أو على أحد حدود الفترة. وبما أن $f(1) = -3.899329037$ و $f(2) = -0.241008124$ فـإن القيمة العظمى تحدث على النقطة الحرجة ويكون

شكل 6.1



$$\max_{1\le x\le 2}|f(x)| = \max_{1\le x\le 2}|5\cos 2x - 2x\sin 2x| = |f(1.358229874)| = 5.675301338$$

وإذا ما أردنا حل $g(x) = 0$ على الفترة $0.5 \le x \le 1$ فإننا نجد ذلك عند إدخال

```
>fsolve(g,x,0.5..1)
```

ويعطينا Maple

$$\text{fsolve}(-12\sin(2x) - 4x\cos(2x),\ x, .5..1)$$

إن هذا يعني أن Maple لم يتمكن من إيجاد حل على الفترة $[0.5, 1]$.

وبما أن $f(0.5) = 1.860040545$ و $f(1) = -3.899329037$ نجد أن

$$\max_{0.5\le x\le 1}|f(x)| = \max_{0.5\le x\le 1}|5\cos 2x - 2x\sin 2x| = |f(1)| = 3.899329037 \quad ■$$

ويوجد مفهوم آخر في التفاضل والتكامل يُستخدم بصورة مكثفة وهو تكامل ريمان.

تعريف 10.1 تكامل ريمان للدّالة f على الفترة $[a, b]$ هو النهاية الآتية شرط وجودها.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i$$

لقد اكتشف جورج ريمان (1826–1866) كثيرًا من الأمور حول تصنيف الدوال التي لها تكاملات. وقد ساهم في أعمال مهمة في الهندسة ومبرهنة الأعداد المركبة أيضًا. ويعدّ من الرياضيين المشهورين في القرن التاسع عشر.

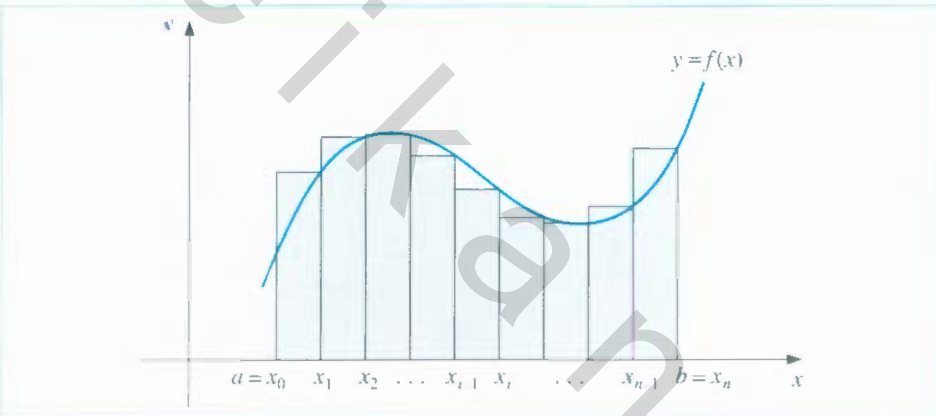
حيث إن الأعداد $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ تحقق $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b$ وحيث $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ لكل $(i = 1, 2, \ldots, n)$ وحيث (z_i) أي عدد نختاره عشوائيًا في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$. ■

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنها قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$. وإن هذا الأمر يسمح لنا – ولسهولة الحساب – باختيار النقاط (x_i) لتكون متساوية لبعد في $[a, b]$، واختيار $(z_i = x_i)$ لكل $(i = 1, 2, \ldots, n)$. وفي هذه الحالة يكون

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

حيث إن الأعداد (x_i) في الشكل (7.1) هي $x_i = a + i(b-a)/n$.

شكل 7.1



هناك نتيجتان أخريان نحتاج إليهما في التحليل العددي، الأولى هي تعميم للمبرهنة المعروفة بمبرهنة القيمة الوسيطية للتكامل.

مبرهنة 11.1 مبرهنة القيمة الوسيطية الموزونة للتكامل

Weighted Mean Value Theorem for Integrals

إذا كانت $f \in C\,[a, b]$ وكان تكامل ريمان للدالة $g(x)$ موجودًا على $[a, b]$. وكانت $g(x)$ لا تغير إشارتها على $[a, b]$ فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث

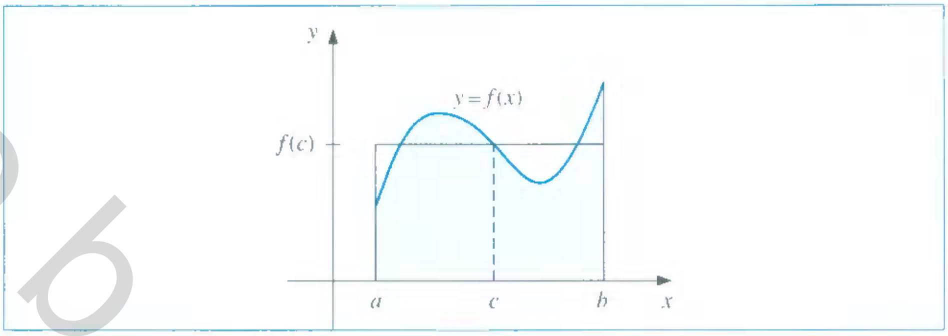
$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$ ■

وعندما يكون $g(x)=1$ فإن المبرهنة (11.1) هي مبرهنة القيمة الوسيطية للتكامل العادية، إذ تعطى القيمة الوسيطية لقيمة الدالة f على الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\, dx$$

انظر شكل (8.1).

شكل 8.1



عادة لا يقدم برهان المبرهنة (11.1) في كتب التفاضل والتكامل الرئيسة. ولكنه يقدم في معظم كتب التحليل (انظر على سبيل المثال [Fu, p.162]).

كما لا تقدم المبرهنة الثانية التي نحتاج إليها عادة في مقرر التفاضل والتكامل الرئيس. والتي يمكن إثباتها بتطبيق مبرهنة رول على نحو متتال على الدوال $(f, f', \ldots)$ إلى أن نصل في النهاية إلى $f^{(n-1)}$.

مبرهنة 12.1

تعميم مبرهنة رول Generalized Rolle's Theorem

افترض أن $f \in C[a, b]$ قابل للاشتقاق n من المرات على الفترة (a,b). إذا كان $f(x)$ يساوي صفرًا على $(n+1)$ من الأعداد المختلفة $x_0, \ldots, x_n$ في الفترة $[a, b]$. فإنه يوجد عدد c في الفترة (a,b) بحيث $f^{(n)}(c) = 0$. ■

المبرهنة الآتية هي مبرهنة القيمة الوسيطية. ومع معقولية منطوقها حسبما يظهر، فإن البرهان خارج عن نطاق أي مقرر عادي في التفاضل والتكامل. ويمكن إيجاد البرهان في معظم كتب التحليل. (انظر على سبيل المثال [Fu, p.67]).

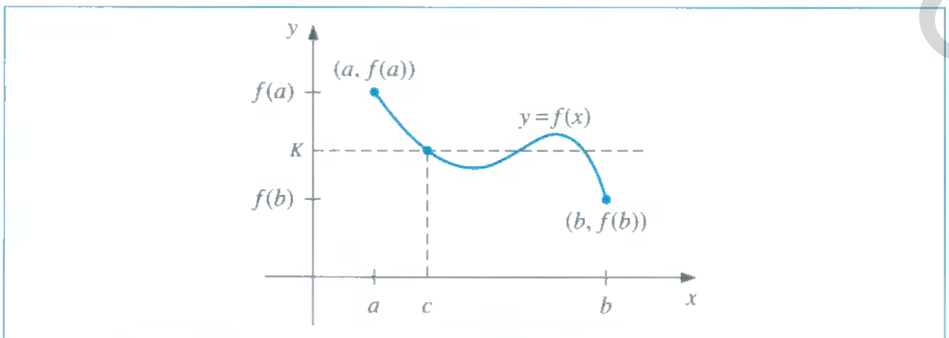
مبرهنة 13.1

مبرهنة القيمة الوسيطية Intermediate Value Theorem

إذا كان $f \in C[a, b]$، وكان K أي عدد يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c في (a,b) حيث $f(c) = K$. ■

يبيّن الشكل (9.1) أحد خيارات العدد الذي تضمن وجوده مبرهنة القيمة الوسيطية. وفي هذا المثال يوجد اختياران آخران لهذا العدد.

شكل 9.1



مثال 2 لإثبات أن $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ لها حل في الفترة $[0,1]$؛ ضع $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1$

لدينا الآن

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{و} \quad 0 < 1 = f(1)$$

حيث إن f متصلة. لذلك فإن مبرهنة القيمة الوسيطية تضمن وجود عدد x في الفترة $0 < x < 1$ يحقق $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$. ■

ويظهر في المثال (2) أيضا أن مبرهنة القيمة الوسيطية تستخدم لتحديد توقيت وجود الحلول لبعض المسائل. ولكنها لا تعطي طريقة فاعلة لإيجاد الحلول. وسندرس ذلك في الباب (2). المبرهنة الأخيرة في هذه المراجعة للتفاضل والتكامل تصف كثيرات الحدود لتايلور (Taylor)، حيث تستخدم كثيرات الحدود هذه بصورة مكثفة في التحليل العددي.

مبرهنة 14.1 مبرهنة تايلور Taylor's Thoerem

افترض أن $f \in C^n[a,b]$، وأن $f^{(n+1)}$ موجودة على $[a,b]$. و $x_0 \in [a,b]$. عندئذ لكل $x \in [a,b]$ يوجد عدد $\xi(x)$ بين x_0 و x بحيث يكون $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ و

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

و
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
■

لقد وصف بروك تايلور (1685–1731) هذه السلسلة عام 1715 في مقالته *"Methodus incremento-rum directa et inversa"* هناك حالة خاصة لهذه النتيجة. وقد تكون النتيجة نفسها معروفة في وقت سابق لدى إسحاق نيوتن وجيمس غريغوري وآخرين

تسمّى $P_n(x)$ كثيرة حدود تايلور من الرتبة n للدّالة f حول x_0، ويسمّى $R_n(x)$ الحد الباقي (أو خطأ القطع) المرتبط بـ $P_n(x)$.

وبما أن العدد $\xi(x)$ في خطأ القطع $R_n(x)$ يعتمد على قيمة x التي تحسب عندها كثيرة الحدود $R_n(x)$، فهو دالّة في الوسيط x. وعلى الرغم من ذلك، يجب أن لا نتوقع أن نكون قادرين على حساب قيمة الدّالة $\xi(x)$ بصورة صريحة.

تضمن مبرهنة تايلور وجود مثل هذه للدّالة. وتقع قيمتها ما بين قيمتي x_0 و x. وفي الحقيقة فإن إحدى مشاكل الطرائق العددية هي محاولة حساب الحد المعقول لقيمة $f^{(n+1)}(\xi(x))$ عندما تكون x ضمن فترة محدّدة.

لقد اشتهر كولن ماكلورين (1698–1746) بأنه المدافع عن حساب التفاضل والتكامل الذي بلوره نيوتن. عندما كان هذا الموضوع يتعرض لهجوم شرس من قبل البيشوب جورج بيركلي.

إن السلسلة اللانهائية التي نحصل عليها عند أخذ نهاية $P_n(x)$ عندما $n \to \infty$ تسمّى سلسلة تايلور للدّالة f حول x_0. وفي حالة $x_0 = 0$، فإن كثيرة حدود تايلور عادة ما تسمّى كثيرة حدود ماكلورين. وعادة ما تسمّى سلسلة تايلور بسلسلة ماكلورين Maclaurin.

لم يكتشف ماكلورين السلسلة التي تحمل اسمه. حيث كانت معروفة لدى الرياضيين في القرن السابع عشر قبل مولده وعلى كل حال فلقد اكتشف طريقة نظام المعادلات الخطية كلها باستخدام قاعدة كرامر التي لم ينشرها كرامر إلا في عام 1750.

إن خطأ القطع في كثيرة حدود تايلور يشير إلى الخطأ الناتج عن استخدام حصل جمع مقطوع أو منتهٍ (نهائي) لتقريب حاصل جمع سلسلة لانهائية.

مثال 3 أوجد (أ) كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثانية.

(ب) كثيرة حدود تايلور من الرتبة الثالثة للدّالة $f(x) = \cos x$ حول $x_0 = 0$، ثم استخدم كثيرات الحدود هذه لتقريب قيمة $\cos(0.01)$.