**تعريف 2.1**

لقد طُوِّرت مفاهيم التفاضل والتكامل وتطبيقاته في أواخر القرن السابع عشر وأوائل القرن الثامن عشر. ولكن الصيغ الرياضية الدقيقة لمفهوم النهاية والاتصال لم تتبلور حتى جاء هينرج أبروارد هيين (1821–1881) وكارل فيرستراس (1815–1897) في القرن التاسع عشر.

افترض أن $f$ دالة معرّفة على مجموعة من الأعداد الحقيقية $X$ و $x_0 \in X$، تكون الدّالة $f$ متصلة عند $x_0$ إذا كانت

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

وتكون الدّالة $f$ متصلة على المجموعة $X$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة (عدد) في $X$. ■

نستخدم الرمز $C(X)$ ليعبّر عن الدّوال المتصلة جميعها على $X$. وعندما تكون $X$ فترة على خط الأعداد الحقيقية، نحذف الحاصرتين ( ).

نعبّر عن مجموعة جميع الدّوال المتصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ بالرمز $C[a,b]$.

وتعرّف نهاية متتالية الأعداد الحقيقية أو الأعداد المركبة بطريقة مماثلة.

**تعريف 3.1**

افترض أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أعداد حقيقية أو مركبة.

يكون للمتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نهاية $x$ ( تتقارب المتتالية إلى $x$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب $N(\varepsilon)$ بحيث $|x_n - x| < \varepsilon$ عندما $n > N(\varepsilon)$.

تعني الرموز الآتية

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \text{أو} \quad x_n \to x \quad \text{عندما} \quad n \to \infty$$

أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى $x$. ■

**مبرهنة 4.1**

إذا كانت $f$ دالة معرّفة على مجموعة من الأعداد الحقيقية $X$، وكان $x_0 \in X$ فإن العبارات الآتية متكافئة

أ. $f$ متصلة عند $x_0$.

ب. إذا كانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أي متتالية على $X$ ومتقاربة إلى $x_0$ فإن

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$ ■

نفترض أن الدّوال جميعها والتي نستخدمها في الطرائق العددية متصلة؛ لأن هذا هو الحد الأدنى من المتطلبات للتنبؤ بسلوك الدّوال. وإن الدّوال غير المتصلة يمكنها القفز عن نقاط ذات أهمية مما يؤدي إلى صعوبات عند محاولة الحصول على تقريب لمسألة ما.

وإن الافتراضات الأكثر حبكة حول الدّالة تؤدي عموما إلى حلول تقريبية أفضل.

وإن الدّالة ذات الرسم الناعم يسهل التنبؤ بسلوكها بصورة أفضل من تلك الدّالة ذات الخشونة المتعددة. على سبيل المثال: إن شرط النعومة يعتمد على مفهوم المشتقة.

**تعريف 5.1**

افترض أن $f$ دّالة معرّفة على فترة مفتوحة تحتوي على $x_0$. نقول: إن الدّالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ إذا كانت $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجودة. يسمى العدد $f'(x_0)$ مشتقة $f$ عند $x_0$.

وتكون الدّالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجموعة $X$ إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في $X$. ■

إن مشتقة الدّالة $f$ عند $x_0$ هي ميل خط الماس لمنحنى $f$ عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ كما في الشكل (2.1).