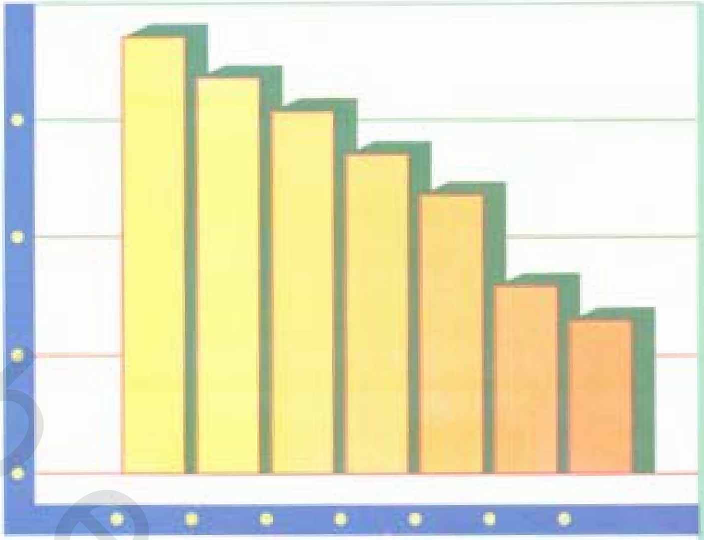


الباب الثالث

مقدمة للتحصيل

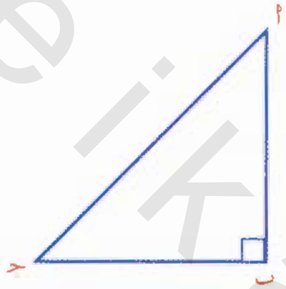
شرح مبسط لمناهج (١-٢-٣) ثانوي

الباب الثالث

مقدمة للتحصيل

بعض النظريات والعلاقات الهندسية الهامة

(١) نظرية فيثاغورس



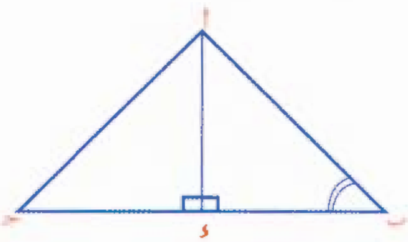
في $\triangle$ أ ب حـ القائم الزاوية في ب

$$|\text{أ حـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب حـ}|^{٢}$$

والعكس

إذا كان $|\text{أ حـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب حـ}|^{٢} \Leftarrow \triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

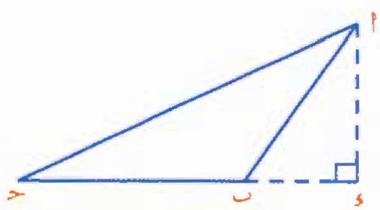
(٢) نظرية الزاوية الحادة



في $\triangle$ أ ب حـ الحاد الزاوية في ب

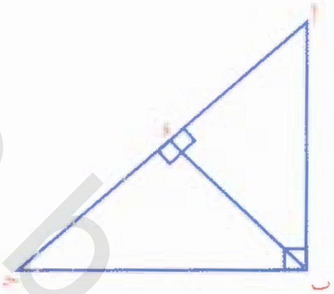
$$|\text{أ حـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب حـ}|^{٢} - ٢\,|\text{ب حـ}| \cdot |\text{ب ء}|$$

(٣) نظرية الزاوية المنفرجة



$$|\text{أ حـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب حـ}|^{٢} + ٢\,|\text{ب حـ}| \cdot |\text{ب ء}|$$

(٤) نتائج على نظرية فيثاغورس



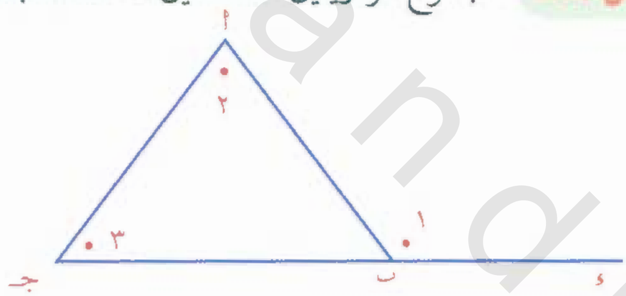
(١) |أب|^{٢} = |أء| · |أحـ|

(٢) |بحـ|^{٢} = |حـء| · |أحـ|

(٣) |بء|^{٢} = |أء| · |ءحـ|

(٤) |بء| = $\frac{\text{|أب| · |بحـ|}}{\text{|أحـ|}}$

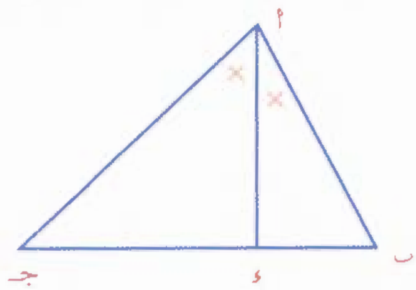
(٥) الزاوية الخارجية عن المثلث = مجموع الزاويتين الداخلتين ما عدا المجاورة لها



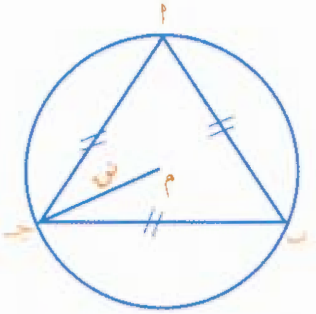
ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٢}$) + ق($\hat{٣}$)

* إذا نصفت زاوية رأس △ من الداخل أو الخارج قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين النسبة بينهما كالنسبة بين الضلعين المحيطين بالزاوية

$\frac{\text{|بء|}}{\text{|ءحـ|}}$ = $\frac{\text{|بأ|}}{\text{|أحـ|}}$



(٦) الأشكال المنتظمة المرسومة داخل الدائرة

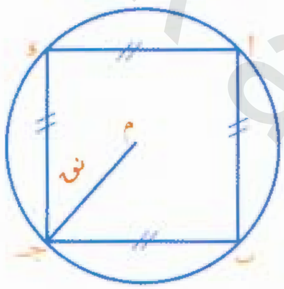


(١) المثلث المتطابق الأضلاع داخل الدائرة

|أ ب| = |ب حـ| = |أ حـ| = √٣ نق

مثال : مثلث أ ب حـ متطابق الأضلاع مرسوم داخل دائرة نصف قطرها = ٧ سم فإن طول ضلعه = ...

الحل : طول الضلع = √٣ نق = ٧ √٣ سم

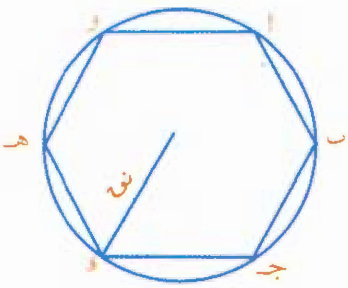


(٢) المربع داخل الدائرة

|أ ب| = |ب حـ| = |حـ ء| = |ء أ| = √٢ نق

مثال : أوجد طول ضلع مربع مرسوم داخل دائرة نصف قطرها ٣سم

الحل : الطول = √٢ نق ∴ الطول = ٣ √٢



(٣) الشكل السداسي داخل دائرة .

|أ ب| = |ب حـ| = ... = |أ و| = نق

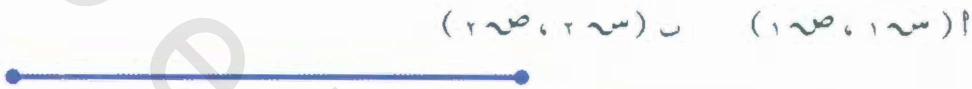
مثال : أوجد طول ضلع السداسي المنتظم المرسوم داخل دائرة نصف قطرها = ٨ سم

الحل : طول الضلع = نق ∴ الطول = ٨ سم

الهندسة التحليلية :

(١) قانون البعد بين نقطتين

إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة حيث أ ($س_١$ ، $ص_١$)، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$)



$$|أب| = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

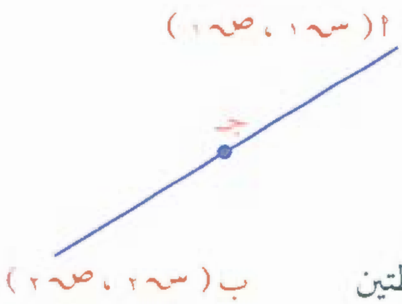
مثال : أوجد البعد بين النقطتين أ (٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ٧)

الحل : $|أب| = \sqrt{(٤ - ٣)^٢ + (٧ - ٥)^٢}$

$= \sqrt{١^٢ + ٢^٢} = \sqrt{٥}$

(٢) إحداثي نقطة التنصيف للقطعة المستقيمة

أحداثي نقطة التنصيف للقطعة المستقيمة $\overline{أب}$ هي



$$جـ = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

مثال : أوجد إحداثي نقطة تنصيف المسافة بين النقطتين

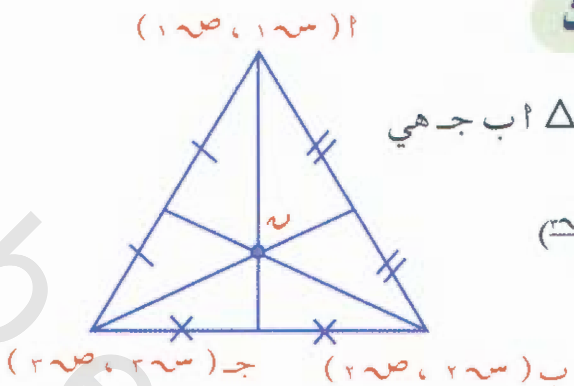
أ (٣ ، ٥)، ب (١ ، ٣)

الحل : $س = \frac{س_١ + س_٢}{٢} = \frac{٣ + ١}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$

$ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} = \frac{٥ + ٣}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$

∴ المطلوب = (س ، ص) = (٢ ، ٤)

(٣) إحداثي نقطة تلاقي المتوسطات في المثلث



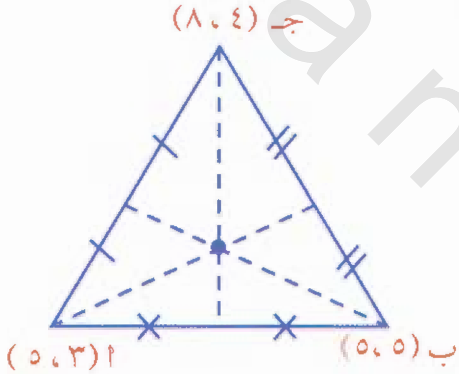
أحداثي نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة في Δ أ ب جـ هي

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣}\right)$$

مثال: أ ب جـ Δ فيه أ (٣ ، ٥) ،

ب (٥ ، ٥) ، جـ (٤ ، ٨)

أوجد أحداثي نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة للمثلث :



الحل :

$$س = \frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣}$$

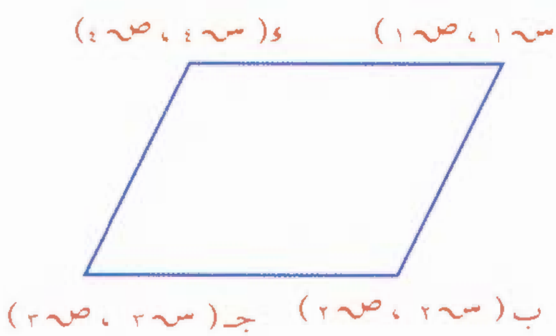
$$= \frac{٣+٥+٤}{٣} = \frac{١٢}{٣} = ٤$$

$$ص = \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} = \frac{٥+٥+٨}{٣} = \frac{١٨}{٣} = ٦$$

$\therefore$ (س ، ص) = (٤ ، ٦)

(٤) إحداثي الرأس الرابع في (المربع – المستطيل – المعين – متوازي أضلاع)

أي إحداثي النقطة د في الشكل المقابل :

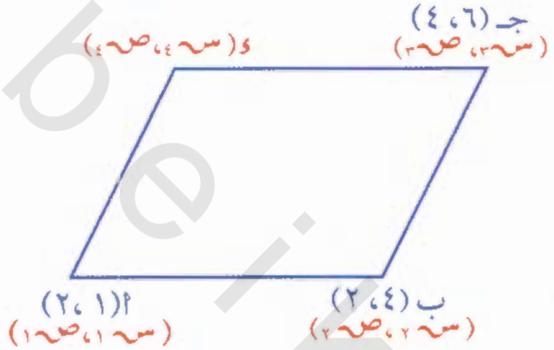


$$س_٤ = س_١ + س_٣ - س_٢$$

$$ص_٤ = ص_١ + ص_٣ - ص_٢$$

مثال : أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ (١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٢) جـ (٦ ، ٤) أوجد إحداثي الرأس الرابع د ($\text{س}_{٤}$ ، $\text{ص}_{٤}$)

الحل :



$\text{س}_{٤} = \text{س}_{١} + \text{س}_{٣} - \text{س}_{٢}$

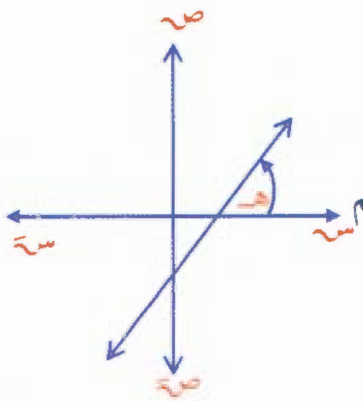
$= ١ + ٦ - ٤ = ٣$

$\text{ص}_{٤} = \text{ص}_{١} + \text{ص}_{٣} - \text{ص}_{٢}$

$= ٢ + ٤ - ٢ = ٤$

$\therefore$ د ($\text{س}_{٤}$ ، $\text{ص}_{٤}$) = (٣ ، ٤)

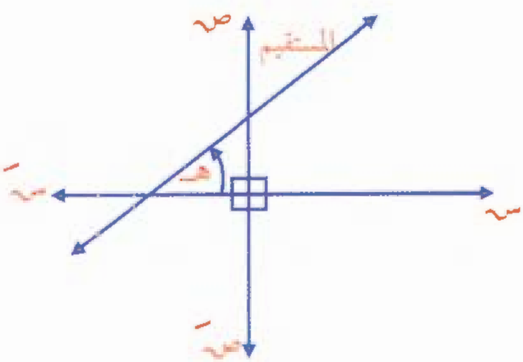
طريقة إيجاد ميل خط مستقيم



(أ) م = **ظاهـ** : حيث هـ الزاوية التي يضعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

مثال : أوجد ميل مستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية مقدارها ٤٥°

الحل : م = ظاهـ $\therefore$ م = ظا ٤٥° $\therefore$ م = ١



(ب) م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ وذلك بمعلومية نقطتين معلومتين على الخط المستقيم

هما (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

مثال : أوجد ميل مستقيم مار بالنقطتين أ (٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ٧)

الحل : الميل = م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٧ - ٥}{٤ - ٣}$ = ٢

(جـ) م = $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-أ}{ب}$: وذلك إذا علمت معادلة خط مستقيم على الصورة : أ

س + ب ص + جـ = صفر

مثال : مستقيم معادلته ٢ س = ٥ – ٢ ص أوجد ميله ؟

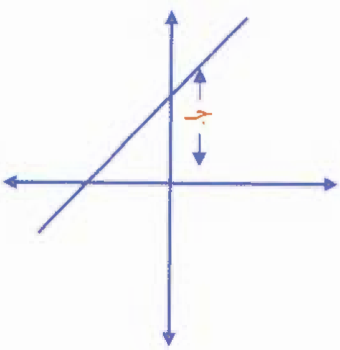
الحل : ٢ س = ٥ – ٢ ص ← ٢ س + ٢ ص – ٥ = ٠

∵ أ س + ب ص + أ = ٠ ∴ الميل = $\frac{-أ}{ب}$

∴ الميل = $\frac{-٢}{٢}$ = – ١ ← ∴ م = – ١

ملاحظة (١) إذا توازي مستقيمين فإن م١ = م٢ ، إذا تعامد مستقيمين فإن م١ × م٢ = – ١

معادلة الخط المستقيم



(أ) معادلة خط مستقيم ميلة = م ويقطع من محور الصادات

جزء طوله = جـ من وحدات الطول هي

ص = م س + جـ

مثال : أوجد معادلة مستقيم ميله = ٢ ويقطع من محور الصادات جزء طوله =٧ وحدات

الحل : ∵ م = ٢ جـ = ٧

ص = م س + جـ

∴ ص = ٢ س + ٧

(ب) معادلة خط مستقيم ميله = م ويمر بالنقطة (س١ ، ص١) هي:

(ص - ص١) = م (س - س١) أو م = $\frac{(\text{ص} - \text{ص}_1)}{(\text{س} - \text{س}_1)}$

مثال : أوجد معادلة خط مستقيم ميله =٢ ويمر بالنقطة (٣ ، -٥)

الحل : ∵ م = ٢ ، (س١ ، ص١) = (٣ ، -٥)

القانون : م = $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$ ∴ $\frac{\text{ص} - (-٥)}{\text{س} - ٣}$ = ٢

ص + ٥ = ٢ س - ٦

∴ ٢ س - ص - ١١ = صفر

(ج) معادلة خط مستقيم بمعلومية نقطتين ($\text{س}_١$، $\text{ص}_١$)، ($\text{س}_٢$، $\text{ص}_٢$)

هي: $\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

مثال : أوجد معادلة مستقيم ماراً بالنقطتين أ (٣، ٥) ، ب (٤ ، ٧)

الحل :نختار ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$)=(٣، ٥)، ($\text{س}_٢$، $\text{ص}_٢$)=(٤، ٧)

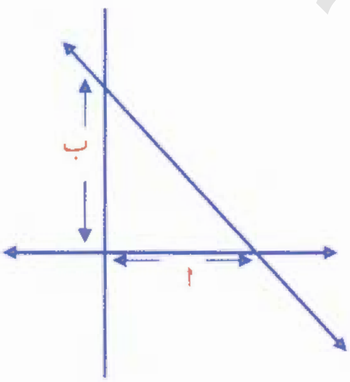
∴ $\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ٣} = \frac{٧ - ٥}{٤ - ٣}$ ∴ $\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ٣} = \frac{٢}{١}$

ص − ٥ = ٢ س − ٦

ص − ٢ س − ٥ + ٣ = صفر

ص −٢ س − ٢ = صفر ص − ٢ س − ٢ = صفر



(د) معادلة خط مستقيم بمعلومية الجزئين المقطوعين

من محوري الأحداثيات أ ، ب هي:

$\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$

مثال : أوجد معادلة خط مستقيم يقطع من محوري الإحداثيات مسافتين

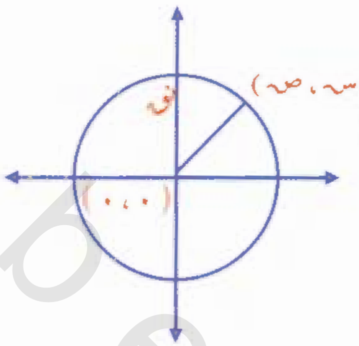
٣ وحدات ، ٥ وحدات على الترتيب

الحل :

$\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$ ∴ $\frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{ص}}{٥} = ١$

٥ س + ٣ ص = ١٥

معادلة الدائرة



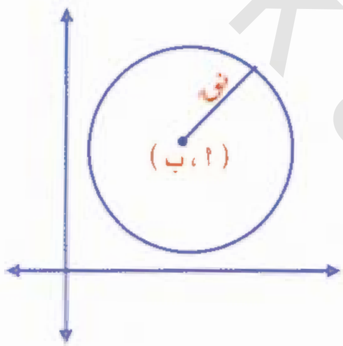
(١) معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل (٠ ، ٠) هي:

$$س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$$

مثال : أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٠ ، ٠) ونصف قطرها = ٧سم

الحل : $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$

$$س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩$$



(٢) معادلة دائرة مركزها النقطة (أ ، ب) هي :

$$(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}$$

مثال : أوجد معادلة الدائرة التي مركز ها (٣ ، -٢) ونصف قطرها = ٥سم

الحل : $(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}$

$$(س - ٣)^{٢} + (ص - (-٢))^{٢} = ٢٥$$

$$(س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥$$

(٣) معادلة دائرة بصورتها القياسية " الصورة العامة" هي :

$$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = صفر$$

مركزها (-ل ، -ك) = $\left(\frac{- \text{معامل س}}{٢} ، \frac{- \text{معامل ص}}{٢} \right)$

مثال١٠ : هل المعادلة سـ^{٢} + صـ^{٢} + ٦ سـ - ٨ صـ + ٣ = صفر

تمثل دائرة ، وإذا كان كذلك فما نصف قطرها .

ل = $\frac{\text{معامل سـ}}{٢}$ = $\frac{-٦}{٢}$ = -٣

ك = $\frac{\text{معامل صـ}}{٢}$ = $\frac{+٨}{٢}$ = ٤

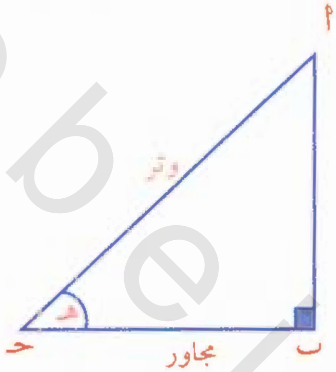
جـ = ٣

المقدار ل^{٢} + ك^{٢} - جـ = (-٣)^{٢} + (٤)^{٢} - ٣ = ٩ + ١٦ - ٣ = ٢٢ > ٠

∴ تمثل دائرة مركزها (٣ ، ٤)

حساب المثلثات

حساب المثلثات : وهو العلم الذي يدرس العلاقة بين أضلاع المثلث القائم الزاوية وزواياه .



وفي المثلث أ ب حـ القائم الزاوية في ب نجد أن

(١) جا هـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{|\text{أب}|}{|\text{أحـ}|}$ ⇐ قتا هـ = $\frac{\text{وتر}}{\text{مقابل}} = \frac{|\text{أحـ}|}{|\text{أب}|}$

(٢) جتاهـ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{|\text{ب حـ}|}{|\text{أحـ}|}$ ⇐ قاهـ = $\frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}} = \frac{|\text{أحـ}|}{|\text{ب حـ}|}$

(٣) ظاهـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{|\text{أب}|}{|\text{ب حـ}|}$ ⇐ ظتاهـ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{|\text{ب حـ}|}{|\text{أب}|}$

∴ ظاهـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ ∴ ظتاهـ = $\frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}}$

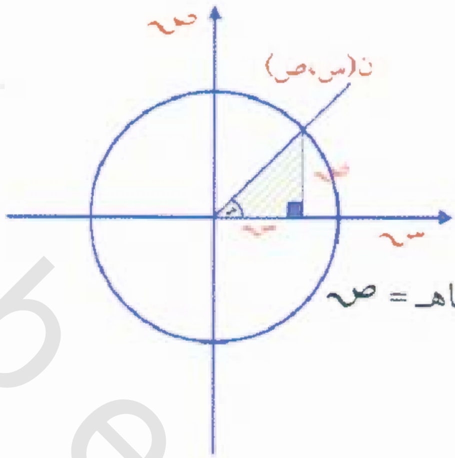
وتذكر أن :

(١) للتحويل من قياس زاوية بالتقدير السيتني إلى قياس بالتقدير الراديان نضرب × $\frac{\text{ط}}{١٨٠}$

(٢) للتحويل من قياس راديان إلى قياس ستيني نضرب × $\frac{١٨٠}{\text{ط}}$

(٣) طول القوس ل = نق × |هـ| حيث هـ بالراديان

دائرة الوحدة



هي دائرة نضف قطرها الواحد

ومعادلتها هي $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = ١$

من المثلث المظلل في الشكل نجد أن حتاهـ = س ، حاهـ = ص

ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

لاحظ ان : ظاهـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$

ويمكن كتابة : س = حتاهـ ، ص = حاهـ ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ظاهـ

المتطابقات الأساسية في حساب المثلثات :

(١) جتا^2 هـ + حا^2 هـ = ١

جا^2 هـ = ١ − جتا^2 هـ

جتا^2 هـ = ١ − جا^2 هـ

(٢) قا^2 هـ − ظا^2 هـ = ١

ظا^2 هـ = قا^2 هـ − ١

قا^2 هـ = ١ + ظا^2 هـ

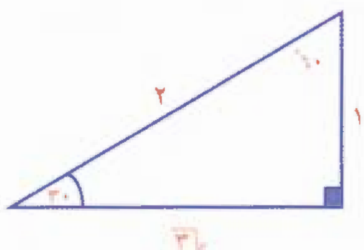
(٣)

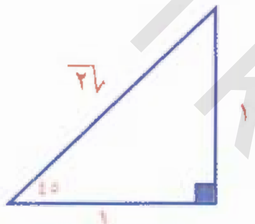
قتا^{٢} هـ − ظتا^{٢} هـ = ١

ظتا^{٢} هـ = قتا^{٢} هـ − ١

قتا^{٢} هـ = ١ + ظتا^{٢} هـ

النسب المثلثية للزوايا الخاصة





- جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$
- جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
- ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

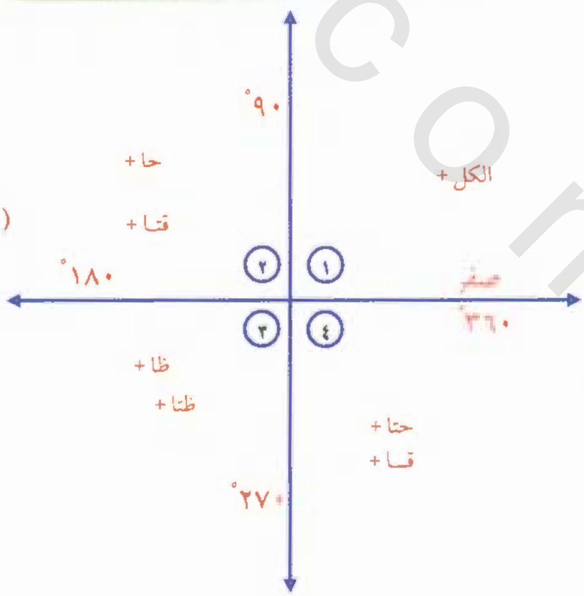
ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

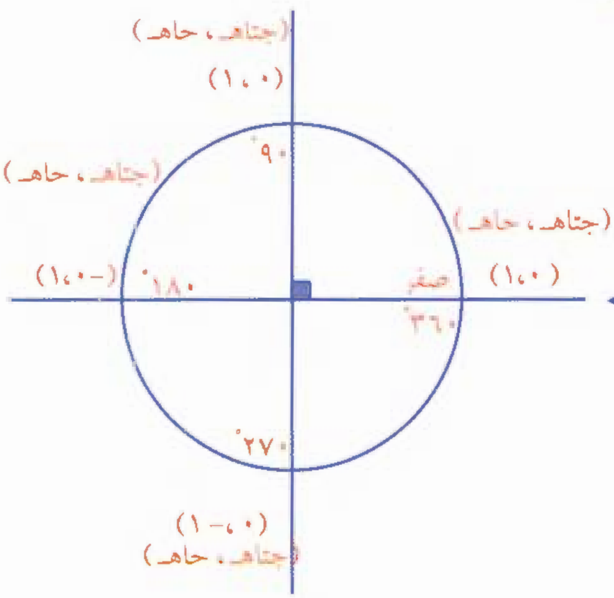
جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٤٥° = ١

إشارات النسب المثلثية في كل ربع





إشارات النسب المثلثية :

- حا (−س) = − حا س ← دالة فردية د(−س) = − د(س)
- جتا (−س) = + جتاس ← دالة زوجية د (−س) = د (س)
- ظا (−س) = − ظا س ← دالة فردية د(−س) = − د(س)

ملحوظة : الدالة د (س) تسمى فردية إذا كان د (−س) =−د (س) وتسمى زوجية إذا

كان د(−س) = د(س)

التحويل إلى نصف الزاوية

(١) حا ٢ هـ = ٢ جا هـ جتاهـ

(٢) جتا ٢ هـ = جتا^{2} هـ − جا^{2} هـ

= ٢ جتا^{2} هـ − ١

= ١ − ٢ حا^{2} هـ

* جا^{2} هـ = $\frac{1}{2}$ (١ − جتا ٢ هـ) * جتا^{2} هـ = $\frac{1}{2}$ (١ + جتا ٢ هـ)

ظا^{2} هـ = $\frac{\text{١ − جتا ٢ هـ}}{\text{١ + جتا ٢ هـ}}$

(٣) جا (أ ± ب) = جا أ حتا ب ± جتا أ حا ب

(٤) جتا (أ ± ب) = جتا أ حتا ب ∓ جا أ جا ب

(٥) ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$

(٦) ظا ٢ أ = $\frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ أ}}$

(٧) جا أ جتا ب = $\frac{1}{2}$ [جا (أ + ب) + جا (أ - ب)]

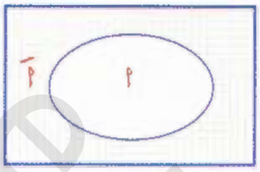
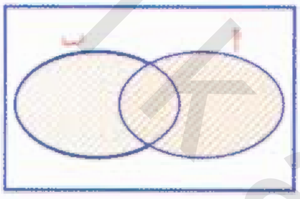
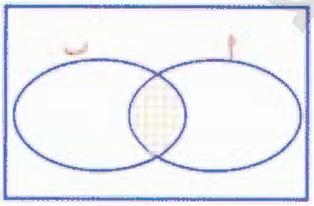
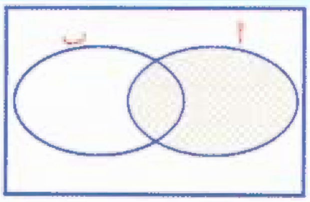
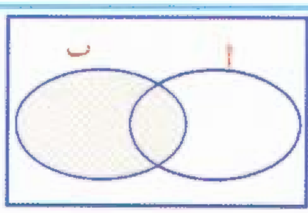
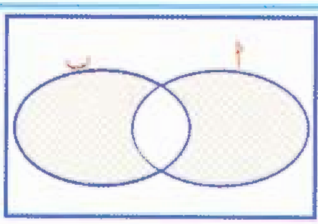
(٨) جتا أ جا ب = $\frac{1}{2}$ [جا (أ+ب) − جا (أ − ب)]

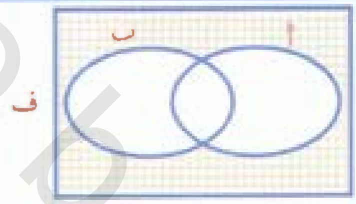
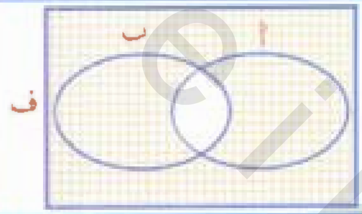
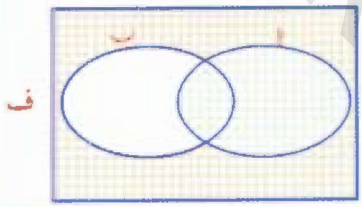
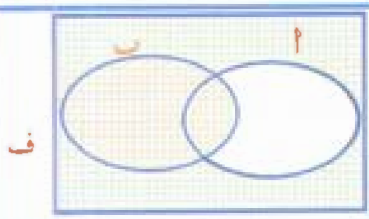
(٩) جتا أ جتاب = $\frac{1}{2}$ [جتا (أ+ب) + جتا (أ−ب)]

(١٠) جا أ جا ب = $\frac{1}{2}$ [جتا (أ + ب) − جتا (أ −ب)]

احتمالات

عمليات على الأحداث : (أ ، ب حدثان في ف)

التعبير عن الحدث	الحدث	تمثيل الحدث
وقوع الحدث أ عدم وقوع الحدث أ	أ أَ = ف − أ	ف 
وقوع أ أو ب وقوع أحدهما على الأقل	أ ∪ ب	ف 
وقوع أ أو ب وقوع كلاهما وقوعهما معاً	أ ∩ ب	ف 
وقوع أ فقط وقوع أ وعدم وقوع ب	أ − ب = ب ∩ أ̄ ب − (أ ∩ ب)	ف 
وقوع ب فقط وقوع ب وعدم وقوع أ	ب − أ = ب ∪ أ̄ ب − (أ ب ∩)	ف 
وقوع أحدهما فقط وقوع أ فقط أو وقوع ب فقط	(أ − ب) ∪ (ب − أ) = (أ ∪ ب) − (أ ∩ ب)	ف 

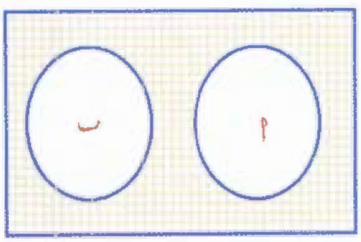
التعبير عن الحدث	الحدث	تمثيل الحدث
عدم وقوع أي منهما عدم وقوع أ وعدم وقوع ب	$(\text{أ} \cup \text{ب})' = \text{أ}' \cap \text{ب}'$	
عدم وقوع الحدثين معاً وقوع أحدهما على الأكثر	$(\text{أ} \cup \text{ب})' = \text{أ}' \cup \text{ب}'$	
وقوع أ أو عدم وقوع ب **عدم وقوع ب فقط**	$\text{أ} \cup \text{ب}' = (\text{ب} - \text{أ})'$	
وقوع ب أو عدم وقوع أ **عدم وقوع أ فقط**	$\text{أ}' \cup \text{ب} = (\text{أ} - \text{ب})'$	

تذكر أن :

(١) إذا كان أ ، ب متنافيان .

فإن : $\text{أ} \cap \text{ب} = \phi$

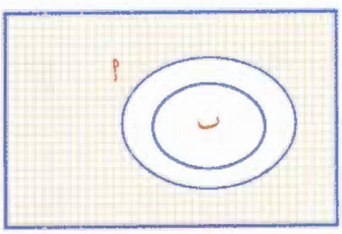
، $\text{أ} - \text{ب} = \text{أ} - (\text{أ} \cap \text{ب})$، $\text{ب} - \text{أ} = \text{ب} - (\text{أ} \cap \text{ب})$



(٢) إذا كان $\text{ب} \subset \text{أ}$ فإن

$\text{أ} \cap \text{ب} = \text{ب}$ ، $\text{أ} \cup \text{ب} = \text{أ}$

$\text{ب} - \text{أ} = \phi$ ، $\text{أ} - \text{ب} = \text{ب}'$ (مكملة ب من المجموعة أ)

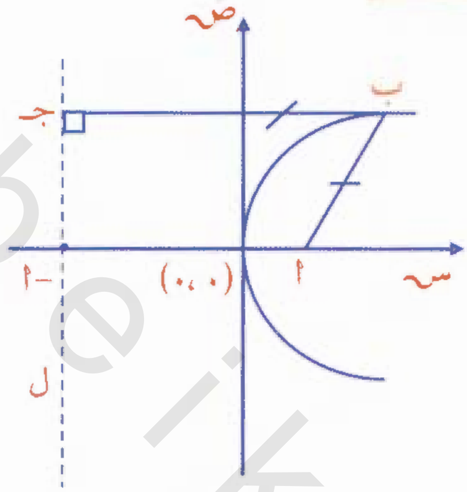


(٣) $(\text{أ} \cup \text{ب})' = \text{أ}' \cap \text{ب}'$

، $(\text{أ} \cap \text{ب})' = \text{أ}' \cap \text{ب}'$

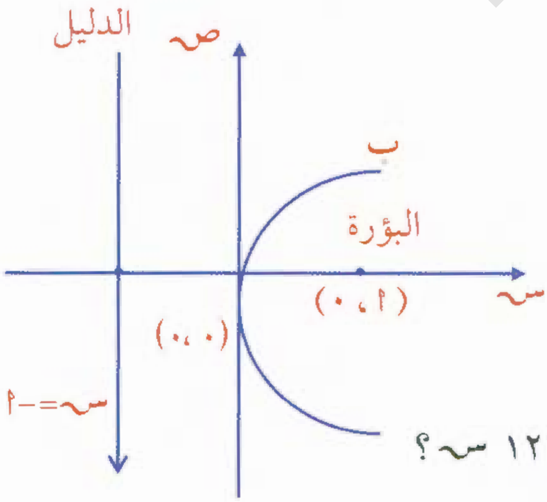
القطوع المخروطية

أولاً : القطع المكافئ



تعريف القطع المكافي : إذا كان ا نقطة ثابتة في المستوى وكان ل خطاً مستقيماً في نفس المستوى فإن مجموعة النقاط في المستوى والتي تحقق الشرط أن طول ب ا يساوي دائماً طول العمود النازل من ب على ل (ب ا = ب جـ) تسمى قطعاً مكافئاً . وتسمى النقطة ا بؤرة القطع المكافئ والمستقيم ل يسمى دليل القطع المكافئ .

(١) القطع المكافئ المتماثل حول محور السينات الموجب معادلته هي :



ص^{٢} = ٤ ا س

أحداثيات البؤرة = (ا ، ٠)

رأس القطع = (٠ ، ٠)

معادلة الدليل هي س = - ا

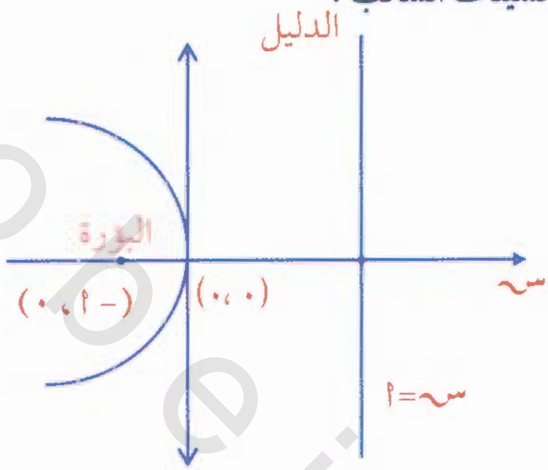
مثال : أوجد بؤرة ودليل القطع المكافئ ص^{٢} = ١٢ س ؟

الحل : ∵ ص^{٢} = ١٢ س ⇐ ٤ ا = ١٢ ⇐ ا = ٣

∴ البؤرة (ا ، ٠) ⇐ هي النقطة (٣ ، ٠) .

ومعادلة الدليل س = - ا ⇐ س = - ٣

(٢) معادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور السينات السالب :



ص^{٢} = − ٤ أ س

أحداثيات البؤرة = (− أ ، ٠)

الرأس = (٠ ، ٠)

معادلة الدليل هي س = أ

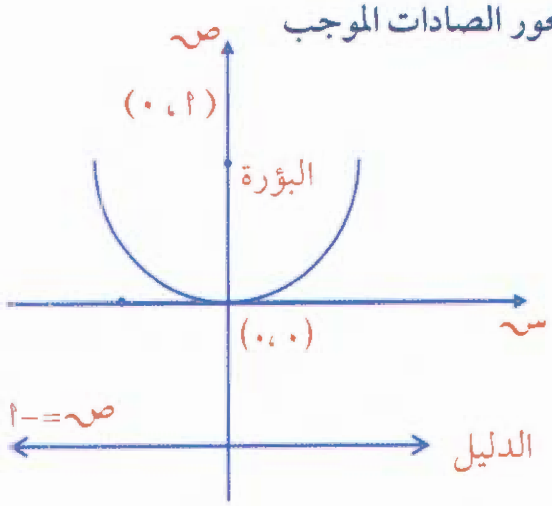
مثال : عين البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ ص^{٢} = − ١٦ س

الحل : ∵ ص^{٢} = ١٦ س ⇐ ٤ أ = ١٦ ⇐ أ = ٤

∴ البؤورة هي النقطة (− ٤ ، ٠)

ومعادلة الدليل هو المستقيم س = ٤

(٣) معادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور الصادات الموجب



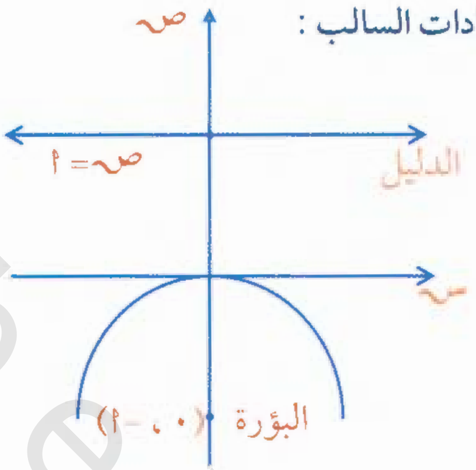
س^{٢} = ٤ أ ص

أحداثيات البؤرة = (٠ ، أ)

أحداثيات الرأس = (٠ ، ٠)

معادلة الدليل هي ص = − أ

(٤) معادلة القطع المكافئ المتماثل حول محور الصادات السالب :



س٢ = - ٤ ص

أحداثيات البؤرة = (٠ ، -أ)

أحداثيات الرأس = (٠ ، ٠)

معادلة الدليل هي ص = أ

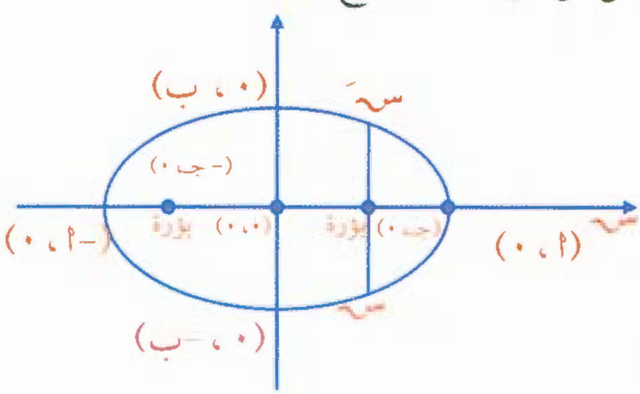
مثال : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٠ ، - ٣) ورأسه (٠ ، ٠) وأوجد معادلة الدليل مع الرسم .

الحل : حيث أن البؤرة واقعة في الجزء السالب من محور الصادات ورأس القطع نقطة الأصل ، فأن القطع يكون مفتوح جهة محور الصادات السالب كما بالشكل السابق في(٤)

فتكون معادلته القياسية هي س٢ = - ١٢ ص ، ومعادلة دليله هي ص = ٣ .

ثانيا : القطع الناقص

تعريف القطع الناقص : هو المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك بحيث تكون نسبة بعدها عن البؤرة إلى بعدها عن الدليل ثابتة وأقل من الواحد الصحيح .



كما بالشكل المقابل حيث

و (٠ ، ٠) مركز القطع

و س ، ص محور الإحداثيات وهما

محوري تماثل القطع (المحور الأكبر ، المحور الأصغر)

أ نصف القطر الأكبر ، طول المحور الأكبر = ٢ أ

ب نصف القطر الأصغر (أ> ب) ، طول المحور الصغر = ٢ ب

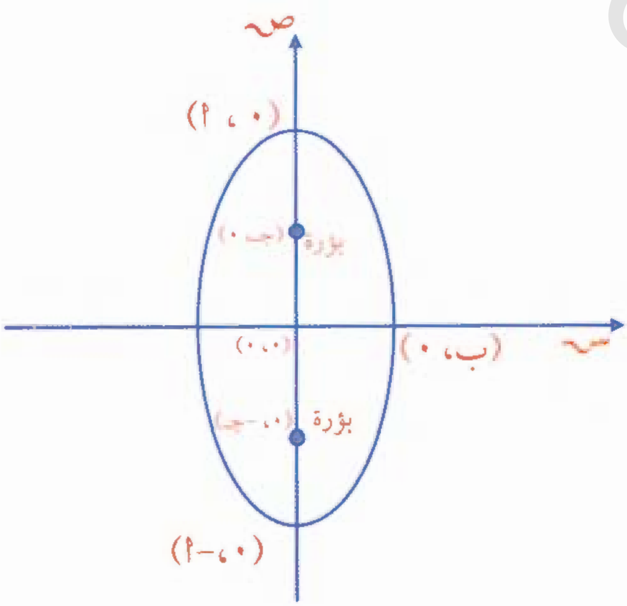
أحداثيات البؤرتين هما (جـ ، ٠) ، (− حـ ، ٠) ، البعد البؤري = ٢ حـ

| س سَ | = الوتر البؤري العمودي : هو وتر القطع المار بالبؤرة والعمودي على المحور الأكبر ، وطوله = $\frac{ب^{٢}}{أ}$

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١ \quad ، \quad جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$$

(٢) وممكن أن يكون المقطع الناقص كما بالشكل المقابل وتكون معادلته هي

$$\frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$



ثانيا : القطع الزائد

تعريف القطع الزائد: هي المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك بحيث تكون النسبة بين بعدها عن البؤرة إلى بعدها عن الدليل ثابته وأكبر من الواحد الصحيح .

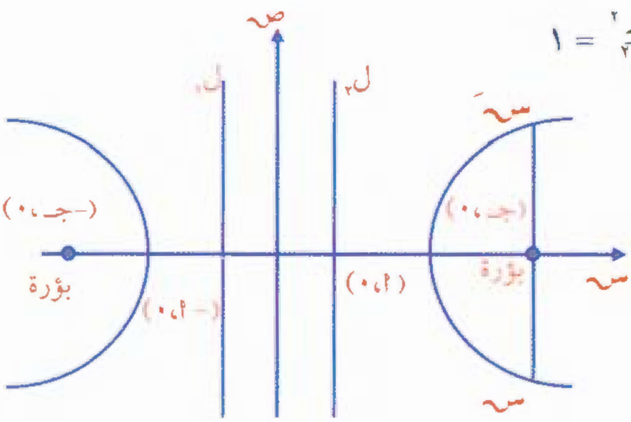
مركز القطع هي النقطة (٠ ، ٠) نقطة الأصل ، ل١ ، ل٢ دليلا القطع ، أ و أَ هما رأس القطع ، المستقيم س سَ هو الوتر البؤري العمودي ، أحداثيات البؤرتين هما (جـ ، ٠) ، (- جـ ، ٠) ، ومعادلتي دليلا القطع هما

ل١ : $\text{س} = \frac{-\text{أ}^2}{\text{جـ}}$ ، ل٢ : $\text{س} = \frac{-\text{أ}^2}{\text{أ}}$ ، والرأسين (أ ، ٠)

النسبة $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \text{هـ}$ تسمى الاختلاف المركزي للقطع حيث هـ > ١

طول الوتر البؤري العمودي س سَ يساوي $\frac{٢\text{ب}^2}{\text{أ}}$

(١) معادلة القطع هي : $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$



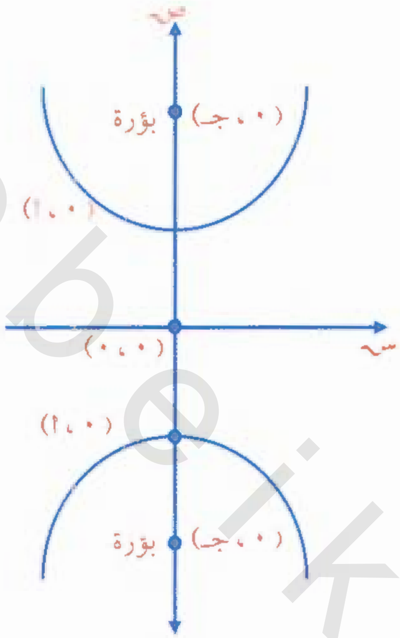
حيث $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = \text{جـ}^2$

وطول المحور القاطع = ٢ أ

وخطي التقارب هما $\text{ص} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \text{س}$

(٢)صورة أخرى لمعادلة القطع الزائد :

$$\frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$



* القطوع المخروطية ومعادلة الدرجة الثانية

المعادلة أ سـ٢ + ب صـ٢ + جـ سـ + ء صـ + هـ = ٠

هي معادلة من الدرجة الثانية في سـ ، صـ وتمثل

القطاعات المخروطية في الحالات الآتية :

(أ) تمثل قطع مكافئ إذا كان أ × ب = صفر

(ب) تمثل قطع ناقص إذا كان أ × ب> صفر

(ج) تمثل قطع زائد إذا كان أ × ب < صفر

(ء) في حالة القطع الناقص إذا كان أ = ب فإن المعادلة تمثل دائرة .

بعض القوانين الجبرية

التباديل: $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$

$$^{٧}ل_{٥} = \frac{٧!}{(٧-٥)!} = \frac{٧×٦×٥×٤×٣×٢!}{٢!} = ٢٥٢٠$$

* التوافيق: $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$

$$\binom{٧}{٥} = \frac{٧!}{٥!(٧-٥)!} = \frac{٧×٦×٥!}{٥!×٢!} = \frac{٧×٦}{٢×١} = ٢١$$

مفكوك نظرية ذات الحدين:

$$(أ±ب)^{ن} = أ^{ن} ± \binom{ن}{١} ب\, أ^{ن-١} + \binom{ن}{٢} ب^{٢} أ^{ن-٢} ± .... + ب^{ن}$$

$$(س+٢)^{٤} = س^{٤} + \binom{٤}{١}(٢)\,س^{٣} + \binom{٤}{٢}(٢)^{٢} س^{٢} + \binom{٤}{٣}(٢)^{٣} س + (٢)^{٤}$$

$$= س^{٤} + ٤×٢\,س^{٣} + \frac{٤×٣}{٢×١} × ٤\,س^{٢} + \frac{٤×٣×٢}{٣×٢×١} × ٨\,س + ١٦$$

$$= س^{٤} + ٨\,س^{٣} + ٢٤\,س^{٢} + ٣٢\,س + ١٦$$

الحد العام في مفكوك ذات الحدين: يمكن أيجاد أي حد من الحدود بالقانون الآتي

$$ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} \left(\text{الحد الثاني}\right)^{ر} × \left(\text{الحد الأول}\right)^{ن-ر}$$

أي $ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} (ب)^{ر} × (أ)^{ن-ر}$

مثال: أوجد الحد الخامس في مفكوك $(س + ٢)^{٧}$

الحل: $ح_{٥} = ح_{٤+١} = \binom{٧}{٤} (٢)^{٤} س^{٧-٤}$

لاحظ أن (ن = ٧، ر = ٤)

$$∴ ح_{٥} = \frac{٧×٦×٥×٤}{٤×٣×٢×١} × ١٦\,س^{٣} = ٣٥×١٦\,س^{٣}$$

$$= ٥٦٠\,س^{٣}$$

المتتابعات

أولاً : المتتابعات الحسابية (العددية) : تأخذ الصورة ا ، ا + د ، ا + ٢ د ، ....

حيث ا الحد الأول في المتتابعة د هو أساس المتتابعة (هو الفرق بين أي حدين متتاليين في المتتابعة) ، ن هو عدد حدود المتتابعة

فيكون حدها العام(النوني) هو $ع_ن = ا + (ن - ١) \times د$

ومجموع المتتابعة هو $ج_ن = \frac{ن}{٢} [٢ا + (ن - ١) \times د]$

أو $ج_ن = \frac{ن}{٢} [ا + ع_ن]$

مثال (١)

في المتتابعة العددية ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ....

أوجد حدها السابع

الحل : ا = ٣ ، د = ٢ $\therefore$ $ع_٧ = ا + ٦ د$

$\therefore$ $ع_٧ = ٣ + ١٢ = ١٥$

مثال (٢) في المتتابعة ٧ ، ٥ ، ٣ ، ...... أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها .

الحل : ا = ٧ ، د = − ٢ ، ن = ١٠

$ج_ن = \frac{ن}{٢} [٢ا + (ن - ١) \times د]$

$= \frac{١٠}{٢} \{ ١٤ + ٩ \times (-٢)] = ٥ (١٤ - ١٨)$

$= ٥ \times (-٤) = -٢٠$

ثانيا : المتتابعة الهندسية :

تأخذ الشكل : $\text{أ} ، \text{أ}\,ر ، \text{أ}\,ر^{٢} ، \text{أ}\,ر^{٢} ، ....$

حيث أ = حدها الأول

ر = أساس المتتابعة (وهو ناتج قسمة أي حد على السابق له مباشرة)

ن = عدد الحدود

الحد العام : $ح_{ن} = \text{أ}\,ر^{ن-١}$

مجموع المتتابعة : $جـ_{ن} = \frac{\text{أ}(ر^{ن}-١)}{(ر-١)}$ $ر > ١$

$جـ_{ن} = \frac{\text{أ}(١-ر^{ن})}{١-ر}$ $ر < ١$

$جـ_{ن} = ن \times \text{أ}$ $ر = ١$

مثال (١) : في المتتابعة الهندسية ٣ ، ٦ ، ١٢ ، .....

أوجد حدها الخامس

الحل : أ = ٣ ، $ر = \frac{٦}{٣} = ٢$

$\therefore ح_{٥} = \text{أ}\,ر^{٤} \Leftarrow ح_{٥} = ٣(٢)^{٤} = ٣ \times ١٦ = ٤٨$

مثال (٢) : في المتتابعة الهندسية

٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...... أوجد مجموع السبع حدود الأولى منها

الحل : أ = ٥ ، ر = ٢ ، ن = ٧

$جـ_{ن} = \frac{\text{أ}(ر^{ن}-١)}{ر-١} = \frac{٥(٢^{٧}-١)}{٢-١} = ٥ \times ١٢٧ = ٦٣٥$

الأعداد المركبة

إذا كانت $س^٢ + ١ =$ صفر $\Leftarrow$ $س^٢ = -١$

$\therefore$ $س = \pm\sqrt{-١} \not\in ح$

ونضع $\sqrt{-١} = ت$

ويكتب العدد المركب في الصورة الآتية :

$ع = س + ت ص$ (صورة جبرية)

أو $ع = (س ، ص)$ (صورة كرتيزية)

أو $ع = (|ع| ، هـ^{\circ})$ (صورة قطبية)

أو $ع = |ع| ($ جتاهـ + ت جاهـ $)$ (صورة مثلثيه)

حيث $|ع| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، $س ، ص \in ح$

ظا $هـ^{\circ} = \frac{ص}{س}$ ، $س = |ع|$ جتاهـ ، $ص = |ع|$ جاهـ

• **ملحوظة** : $\because ت = \sqrt{-١}$ $\Leftarrow$ $ت^٢ = -١$ ، $ت^٣ = -ت$

$ت^٤ = ١$ ، $ت^٨ = (ت^٤)^٢ = (١)^٢ = ١$

$ت^{١٥} = ت^{١٢} \times ت^٣ = ١ \times (-١) = -١$

$ت^{٢١} = ت^{٢٠} \times ت = ١ \times ت = ت$

ومن ذلك فإنه إذا كان لدينا $ت^ن$ حيث $ن$ تقبل القسمة على ٤ فإن $ت^ن = ١$.

- مرافق العدد المركب ع = س + ت ص هو

$\overline{ع} = س - ت ص$

إذن $ع \cdot \overline{ع} = (س + ت ص) \cdot (س - ت ص) = س^{٢} + ص^{٢}$

$\therefore ع \cdot \overline{ع} = س^{٢} + ص^{٢}$

- المعكوس الضربي للعدد المركب ع = س + ت ص هو

$ع^{-١} = \frac{١}{س + ت ص} = \frac{١}{س + ت ص} \times \frac{س - ت ص}{س - ت ص} = \frac{س - ت ص}{س^{٢} + ص^{٢}}$

$\therefore ع^{-١} = \frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}} - ت \frac{ص}{س^{٢} + ص^{٢}}$

مثال : إذا كان ع = (٣ ، ٤) $\Leftarrow$ ع = ٣ + ٤ ت

$|ع| = \sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}} = = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

ظاهـ = $\frac{ص}{س} = \frac{٤}{٣}$ $\Leftarrow$ هـ = $ظا^{-١} \frac{٤}{٣}$

$\Leftarrow$ ع = (٥ ، $ظا^{-١} \frac{٤}{٣}$)

$\Leftarrow$ ع = ٥ (جتاهـ + ت جاهـ)

النهايات :

(١) حساب النهاية بالتعويض المباشر ،

$نها_{س \leftarrow ا}$ د(س) = د(ا) أي بالتعويض المباشر في د(س) عن س = ا

مثال : أوجد $نها_{س \leftarrow ٢}$ (س^{٢} – س + ٣) = ٤ – ٢ + ٣ = ٥

(٢) حساب $نها_{س \leftarrow ا} \frac{د(س)}{ق(س)}$ حيث ق(س) ≠ ٠

نقوم بالتعويض المباشر عن $\text{س} = \text{أ}$ ونلاحظ الآتي :

- إذا كان الناتج عدد حقيقي يكون هذا هو جواب المسألة .
- وإذا كان الناتج = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فنقوم بتحليل كل من البسط والمقام ثم حذف الأقواس المتشابه ثم التعويض عن قيمة $\text{س} = \text{أ}$ فنحصل على الإجابة .

مثال (١) : أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$

الحل : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \quad \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} = \frac{٢^{٢} - ٩}{٢ - ٣} = \frac{٤ - ٩}{٢ - ٣} = \frac{-٥}{-١} = ٥$

مثال (٢) : أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نها}} \quad \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$

الحل : أولاً بالتعويض المباشر عن س = ٣ نجد أن

$\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \quad \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} = \frac{٩ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ← كمية غير معينة وبالتالي فإن النهاية لم تتحدد وبالتالي نقوم بتحليل البسط .

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \quad \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} = \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \quad (\text{س} + ٣) = ٣ + ٣ = ٦$

(٣) حساب $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \quad \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}$ ، حيث $\text{ق}(\text{س}) \neq \text{صفر}$

نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على / س / ذات الأس الأكبر . مع ملاحظة أن

$\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \quad \frac{\text{أ}}{\text{س}} = \text{صفر}$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \quad \frac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{ه}}} = \text{صفر}$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \quad \text{حـ} = \text{حـ}$

حيث أ ، ه ، حـ ثوابت

مثال : أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \quad \frac{٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥}{٢\text{س}^{٢} + ١}$

الحل : بالقسمة على $\text{س}^{٢}$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \quad \frac{\frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} - \frac{٤\text{س}}{\text{س}^{٢}} + \frac{٥}{\text{س}^{٢}}}{\frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}} = \frac{٣ - ٠ + ٠}{٢ + ٠} = \frac{٣}{٢}$

(٤) * $\lim_{س \to ٠} \frac{حا س}{س} = ١$

∴ $\lim_{س \to ٠} \frac{حا أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

* $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = ١$

$\lim \frac{ظا أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ثوابت

مثال (١) : $\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٣ س}{٥ س} = \frac{٣}{٥}$

مثال (٢) :أحسب $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ س + ظا ٥ س}{٣ س + حا ٢ س}$

الحل : بقسمة البسط والمقام على س

∴ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ س + ظا ٥ س}{٣ س + حا ٢ س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢ + \frac{ظا ٥ س}{س}}{٣ + \frac{حا ٢ س}{س}} = \frac{٢ + \frac{٥}{١}}{٣ + \frac{٢}{١}} = \frac{٧}{٥}$

* **قسمة كثيرات الحدود** : إذا كانت ك (س) كثيرة حدود ، د (س) = (س - ١) كثيرة حدود أخرى فإن :

- باقي قسمة ك (س) على د(س) = س - أ هو ك (أ)
- ك (س) تقبل القسمة على د (س) = س - أ إذا كان ك (س) = صفر .

* **مجال بعض الدوال** :

- مجال الدالة كثيرة الحدود هو ح
- مجال الدالة الكسرية هو ح - { أصفار المقام }
- مجال الدالة الجذرية $\sqrt[ن]{د(س)}$ يكون :

(أ) إذا كان ن عدد زوجي .

- في البسط ما تحت الجذر ⩾ صفر .
- في المقام ما تحت الجذر > صفر

(ب) إذا كان ن عدد فردي :

- في البسط ح .

- في المقام ح - { أصفار المقام }

• مجال الدالة اللوغاريتمية ص = لو د (س) معرفة بشرط أن د (س) > ٠

قواعد الاشتقاق

(١) إذا كان ص = جـ ، جـ عدد ثابت فإن $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (ص) = صفر

مثال : ص = ٧ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صفراً

(٢) إذا كان ص = أ س ، أ ≠ صفر فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = أ

مثال: ص = ٧ س فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٧

(٣) إذا كان ص = أ $\text{س}^{\text{ن}}$ = أ ≠ صفر فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن × أ $\text{س}^{\text{ن-١}}$

مثال : ص = ٧ $\text{س}^{٣}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢١ $\text{س}^{٢}$

مثال: ص = ٣ $\text{س}^{٤}$ + ٥ $\text{س}^{٢}$ − ٧ س + ٩

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١٢ $\text{س}^{٣}$ + ١٠ س − ٧

(٤) إذا كان ص = $[\text{د(س)}]^{\text{ن}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن $[\text{د(س)}]^{\text{ن-١}}$ × $\acute{\text{د}}$ (س)

مثال $ص = (٥س^{٢} - ١٢س + ٩)^{٧}$

$$\frac{دص}{دس} = ٧(٥س^{٢} - ١٢س + ٩)^{٦}(١٠س - ١٢)$$

(٥) إذا كان ص = حاصل ضرب دالتين = د(س) × ن(س)

فإن $\frac{دص}{دس} = د(س) \times ن'(س) + ن(س) \times د'(س)$

مثال : $ص = (٢س + ١)(٣س + ٢)$

$$\frac{دص}{دس} = (٢س + ١) \times ٣ + (٣س + ٢) \times ٢$$

$$= ٦س + ٣ + ٦س + ٤$$

$$= ١٢س + ٧$$

(٦) إذا كان ص = خارج قسم دالتين = $\frac{د(س)}{ن(س)}$: ن(س) ≠

$$ص' = \frac{ن(س) \times د'(س) - د(س) \times ن'(س)}{[ن(س)]^{٢}}$$

مثال : $ص = \frac{٥س + ١}{٢س + ٣}$

$$ص' = \frac{(٢س + ٣)\,٥ - (٥س + ١) \times ٢}{(٢س + ٢)^{٢}}$$

$$= \frac{١٠س + ١٥ - ١٠س - ٢}{(٢س + ٢)^{٢}} = \frac{١٣}{(٢س + ٣)^{٢}}$$

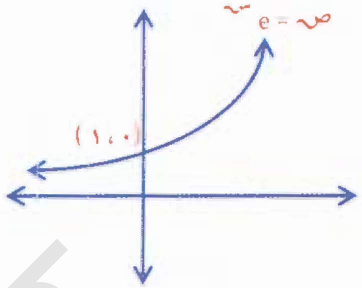
(٧) إذا كان $ص = \frac{١}{د(س)}$ ، $\therefore ص' = \frac{-١ \times د'(س)}{[د(س)]^{٢}}$

مثال : $ص = \frac{٣}{٥س + ١}$ ، $\therefore ص' = \frac{-٣ \times ٥}{(٥س + ١)^{٢}}$

(٨) إذا كان $ص = \sqrt{د(س)}$ ، $\therefore ص' = \frac{د'(س)}{٢\sqrt{د(س)}} = \frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{٢\sqrt{د(س)}}$

مثال : $ص = \sqrt{س^{٣} + ١}$ $\therefore ص' = \frac{٣س^{٢}}{٢\sqrt{س^{٣} + ١}}$

(٩) الدالة الأسية :



* إذا كان $\text{ص} = \text{أ}^{\text{د}(\text{س})}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$

فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ}^{\text{د}(\text{س})} \times \text{د}'(\text{س}) \times \text{لو أ}$

مثال (١) : $\text{ص} = ٨^{\text{س}^{٢}+١}$ ، $\therefore \text{ص}' = ٨^{\text{س}^{٢}+١} \times ٢\,\text{س} \times \text{لو } ٨$

مثال (٢) : $\text{ص} = \sqrt{٣^{٥\text{س}}}$ ، $\therefore \text{ص}' = \frac{٣^{٥\text{س}} \times ٥ \times \text{لو } ٣}{٢\sqrt{٣^{٥\text{س}}}}$

* إذا $\text{ص} = e^{\text{د}(\text{س})}$ حيث $e \cong ٢,٧١$ (أساس اللوغاريتم الطبيعي)

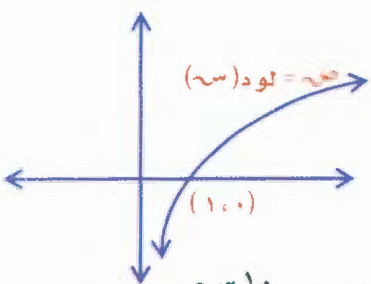
$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = e^{\text{د}(\text{س})} \times \text{د}'(\text{س})$

مثال(١) : إذا كان $\text{ص} = e^{\text{س}^{٢}+١}$ فأن $\text{ص}' = (e^{\text{س}^{٢}+١}) \times ٢\,\text{س}$

مثال (٢) : إذا كان $\text{ص} = \sqrt{e^{٣\text{س}}+e^{٢\text{س}}}$ فإن

$$\text{ص}' = \frac{e^{٣\text{س}} \times ٣ + e^{٢\text{س}} \times ٢}{٢\sqrt{e^{٣\text{س}}+e^{٢\text{س}}}}$$

(١٠) الدالة اللوغارتمية



* إذا كان $\text{ص} = \text{لو د}(\text{س})$ ، $\therefore \text{ص}' = \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}$

مثال (١) : إذا كان $\text{ص} = \text{لو }(٥\,\text{س}^{٢} + ١)$ ، $\therefore \text{ص}' = \frac{١٠\,\text{س}}{٥\,\text{س}^{٢}+١}$

مثال (٢) : إذا كان $\text{ص} = \text{لو }(\text{س}^{٢} + ٧\,\text{س} + ٢)^{٩}$ أوجد ص' ؟

الحل : $\text{ص} = ٩\,\text{لو }(\text{س}^{٢} + ٧\,\text{س} + ٢)$ $\therefore \text{ص}' = ٩\,\frac{٢\,\text{س} + ٧}{\text{س}^{٢}+٧\,\text{س}+٢}$

(١١) الدوال المثلثية :

الدالة	المشتقة
ص = جا د(س)	ص' = د'(س) جتا د(س)
ص = جتا د(س)	ص' = - د'(س) جا د(س)
ص = ظا د(س)	ص' = د'(س) قا^{٢} د(س)
ص = ظتا د(س)	ص' = - د'(س) قتا^{٢} د(س)
ص = قا د(س)	ص' = د'(س) قا د(س) ظا د(س)
ص = قتا د(س)	ص' = - د'(س) قتا د(س) ظتا د(س)

أوجد ص' للدوال التالية

أمثلة

(١) ص = جا (٥ س + ٢)

∴ ص' = ٥ جتا (٥ س + ٢)

(٢) ص = جتا س^{٢}

∴ ص' = - ٢ س × جا س^{٢}

(٣) ص = ظا $\sqrt{\text{س}}$

ص' = $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ قا^{٢} $\sqrt{\text{س}}$

(٤) ص = ظتا $\frac{١}{س}$

∴ ص َ = $\frac{-١}{س^٢}$ × (− قتا^٢ $\frac{١}{س}$)

= $\frac{١}{س^٢}$ قتا^٢ $\frac{١}{س}$

(٥) ص = قا ٧ س

ص َ = ٧ قا ٧ س ظا ٧ س

(٦) ص = قتا ٢ س

∴ ص َ = − ٢ ظتا٢ س ظتا ٢ س

قوانين التكامل

إذا كانت ل (س) هي دالة أصلية للدالة د(س) لكل س ∈ [أ ، ب] فإن :

(١) ∫ أ ء س = أ س + ث : أ عدد ثابت ≠ صفر ث ثابت التكامل

(٢) ∫ (أ س + ب) ء س = $\frac{أ\ س^٢}{٢}$ + ب س + ث

(٣) ∫ س^{ن} ء س = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + ث : ن ≠ −١

(٤) ∫ $e^{د(س)}$ (دَ(س) ء س) = $e^{د(س)}$ + ث

(٥) ∫ أ$^{د(س)}$ (دَ(س) × لو أ ء س) = أ$^{د(س)}$ + ث

(٦) ∫ $\frac{دَ(س)}{د(س)}$. ء س = لو | د (س) | + ث

مثال(١) : أوجد $\int (٣ س^{٢} + ٤ س + ٥)\, ء س$

الحل : $\int (٣ س^{٢} + ٤ س + ٥)\, ء س$

$= \frac{٣ س^{٣}}{٣} + \frac{٤ س^{٢}}{٢} + ٥ س + ث$

$= س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٥ س + ث$

مثال(٢) : أحسب $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}\, ء س \quad : س \neq ٢$

الحل : $\int \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)}\, ء س$

$= \int (س + ٢)\, ء س = \frac{س^{٢}}{٢} + ٢ س + ث$

مثال(٣) : أوجد $\int \frac{س^{٣} + ٢٧}{س + ٣}\, ء س$

الحل : $\int \frac{(س + ٣)(س^{٢} - ٣ س + ٩)}{(س + ٣)}\, ء س$

$= \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٣ س^{٢}}{٢} + ٩ س + ث$

مثال(٤) : $\int e^{س^{٢}} .\, س\, ء س = \frac{١}{٢} \int e^{س^{٢}} (٢ س)\, ء س = \frac{١}{٢} e^{س^{٢}} + ث$

مثال(٥) : $\int ٥^{س^{٢}+١} .\, س\, ء س = \frac{١}{٤} \int ٥^{س^{٢}+١} (٤ س)\, ء س = \frac{١}{٤} (٥^{س^{٢}+١}) + ث$

مثال (٦) : $\int \frac{س}{س^{٢} + ١}\, ء س = \frac{١}{٢} \int \frac{٢ س}{س^{٢} + ١}\, ء س = \frac{١}{٢} لو |س^{٢} + ١| + ث$

مثال (٧) : $\int \frac{١}{س}\, ء س = لو |س| + ث$