

الباب الثامن عشر
نظرية التشتت
(Scattering Theory)

الصفحة	العنوان	الفصل
٤٢٢	نظرية التشتت في ميكانيكا الكم (Scattering theory in quantum mechanics)	١
٤٢٨	المقطع المستعرض التفاضلي (Differential cross section)	٢
٤٢٩	التقريب الأول لبورن (First Born approximation)	٣
٤٣٦	مدى صلاحية تقريب بورن (Validity of Born approximation)	٤
٤٣٨	تحليل الموجات الجزئية (Partial wave analysis)	٥
٤٤٣	أمثلة عامة (General examples)	٦
٤٥٠	تمارين عامة (General exercises)	٧
٤٥١	دالة جرين (Green's Function)	(١٨.A)

الباب الثامن عشر

نظرية التشتت

إلى الآن لم نطبق ميكانيكا الكم إلا على مسائل الحالات المقيدة، حيث إن $(E < 0)$. والأمثلة على ذلك عديدة، مثل جسيم في بئر جهد، ذرة الهيدروجين، المتذبذب التوافقي، ... ونحن الآن بصدد تطبيق نظرية ميكانيكا الكم على الحالات التي تعرف فيها الطاقة الكلية للنظام ككمية موجبة من البداية، مثال على ذلك ظاهرة التشتت.

تحدث ظاهرة التشتت، بمعنى تغير المسار، للجسيم عند تصادمه بجسيم آخر ثابت، يمكن اعتباره حائلاً أو هدفاً. وينقسم التشتت إلى نوعين رئيسيين. النوع الأول: التشتت المرن (elastic collision)، الذي يحدث عندما لا يتغير كنه الجسيم القادم أو خواصه الداخلية، وفيه تتساوى السرعتان الابتدائية والنهائية، ويظل الحائل بدون تغير أيضاً. والنوع الثاني: التشتت غير المرن (inelastic collision) وفيه تحدث تغيرات إما بالجسيم القادم (كتغير السرعة النهائية عن الابتدائية)، أو بالحائل أو بكليهما.

وتعد دراسة التشتت من أكثر المواضيع التي تلقى اهتماماً بالغاً في الأبحاث العملية والنظرية؛ لأنها تعطي معلومات عن مكونات أو تفاعل المواد (ذرية-نووية-جزيئية... الخ) مع بعضها البعض. ونود أن نذكر هنا بعض التجارب التي غيرت من نظرتنا للتركيب الدقيق للمادة، وهي:

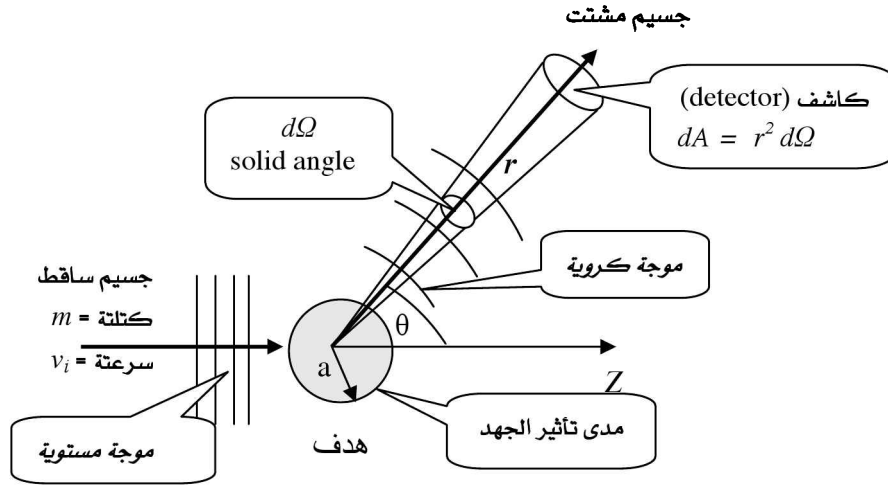
- ١- تجربة رادرفورد لتشتت جسيمات- α بالنواة التي أدت إلى فرض وجود النواة بالذرة. وأدت هذه التجربة إلى تطوير نموذج بوهر للذرة وأيضاً ميكانيكا الكم.
- ٢- تشتت النيكلونات (البروتونات والنيوترونات) ذات الطاقات المختلفة من أنوية الذرات أدى إلى زيادة معلوماتنا بمدى شدة القوى النووية المختلفة.
- ٣- تشتت الإلكترونات ذات السرعات العالية من الأنوية والنيكلونات ساعد في تعيين توزيع الشحنات في الأنوية وحتى النيكلونات.
- ٤- تشتت النيوترونات من الأنوية أظهر الخواص المغناطيسية للأنوية.

يوجد عدة طرق نظرية لدراسة ظاهرة التشتت، سوف نستعرض منها طريقتين فقط. الأولى: هي التقريب الأول لبورن (Born)، والثانية: هي تحليل الموجات الجزيئية.

وقبل أن نبدأ دراسة ظاهرة التشتت بتعمق، دعونا نضع بعض الفروض، وذلك لتبسط الأمر فقط، وهي:

- سوف نقوم بدراسة التشتت المرن فقط.
- لن نأخذ في الاعتبار الحركة المغزلية للجسيم الساقط أو أي جسيم بالهدف.
- أن يكون الهدف رقيقاً جداً بحيث يمكن إهمال التشتت المتعدد. بمعنى أن الجسيم الساقط يتشتت من مركز وحيد للجهد ولا يتشتت عدة مرات.
- جهد التفاعل بين الجسيم الساقط ومركز الجهد يعتمد فقط على المسافة بينهما.

١- نظرية التشتت في ميكانيكا الكم



شكل (١) استخدام الإحداثيات القطبية لوصف ظاهرة التشتت.

في أي تجربة معملية للتشتت (انظر الشكل ١) يكون هناك جسيم ساقط (incident particle)، كتلته m وسرعته الابتدائية هي v_i ، قادم من بعيد ($Z \equiv -\infty$) ويتحرك في الاتجاه الموجب للمحور Z بطاقة حركة ابتدائية:

$$E_i = \frac{p_i^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}$$

ويوصف بالموجة المستوية (plane wave) :

$$\varphi_i = e^{ik_i z} \equiv e^{i \vec{p}_i \cdot \vec{r} / \hbar} \equiv e^{i \vec{k}_i \cdot \vec{r}} \equiv e^{i \vec{k}_i \cdot \hat{r} r}$$

حيث k_i هو العدد الموجى الابتدائي. ويتشتت الجسيم بواسطة حائل (أو هدف كتلته M) يمثل رياضياً بواسطة جهد قصير المدى $V(r)$ (مثل القوى النووية)، بمعنى أنه يضمحل بسرعة بعد مدى قصير "a" من الهدف، وتمثل رياضياً بالمعادلة

$$\left| \int_0^\infty r^2 V(r) dr \right| < \infty$$

وليس شرطاً هنا أن يكون المجال متماثلاً كروياً (spherical symmetry). ونتيجةً لتأثير الجهد على الجسيم الساقط سوف نحصل على موجة كروية مشتتة (outgoing spherical wave) تصف الجسيم المشتت وتوصف رياضياً بالعلاقة:

$$\psi_{sc} = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \equiv f(\hat{r}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

وتُعرف الدالة $f(\hat{r})$ بسعة التشتت (scattering amplitude) ولها وحدة الطول. وتعد الدالة $f(\hat{r})$ هي حجر الأساس في حساباتنا القادمة، حيث إن مربعها يدل على احتمالية أن الجسيم الساقط سوف يظهر لنا (يتشتت)، في الاتجاه \hat{r} ، نتيجةً للتصادم. الدالة الموجية الكلية، $\Psi(\mathbf{r})$ ، التي يجب أن تصف الموجات الساقطة والمشتتة معاً، يجب أن تحقق بعض الشروط الحدودية، وهي كالتالي:

أ- يجب أن تكون حلاً لمعادلة شرودنجر:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

ب- يجب أن تؤول إلى الحل التقاربي (asymptotic solution)، بمعنى:

$$\Psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \underbrace{e^{ik_i z}}_{\varphi_i} + \underbrace{f(\theta, \varphi) \frac{e^{ik_f r}}{r}}_{\psi_{sc}} \quad (2)$$

هذه الشروط تضمن لنا حلولاً فيزيائية مقبولة للدالة الموجية الكلية $\Psi(\mathbf{r})$. من الصعب إيجاد حل متكامل للمعادلة التفاضلية (١)، وذلك نظراً لوجود الجهد $V(r)$ ، لذا

سوف نلجأ لحلول تقريبية. وقبل أن نستعرض الحلول التقريبية دعونا نعرف كمية فيزيائية مهمة، حيث يمكن قياسها معملياً ألا وهي المقطع المستعرض التفاضلي.

٢- المقطع المستعرض التفاضلي $\sigma(\theta, \varphi)$

عملياً يهتم الباحثون بقياس المقطع المستعرض التفاضلي للتشتت (والذي يدل على احتمالية حدوث التشتت) ويعرف كالتالي:

عدد الجسيمات المشتتة (ΔN) التي تمر بالمساحة dA في وحدة الزمن

المقطع المستعرض التفاضلي =

عدد الجسيمات القادمة (N) والمارة بوحدة المساحات في وحدة الزمن

وتكتب رياضياً بالصورة:

$$\sigma(\theta, \varphi) = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta N / \Delta\Omega}{N} = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta N / N}{\Delta\Omega} \quad (3)$$

أحيانا تكتب $\sigma(\theta, \varphi)$ بالصورة $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. ويقاس عدد الجسيمات المشتتة عملياً

بواسطة كاشف (detector) يوضع على مسافة r ، حيث ($r \gg a$)، (انظر الشكل ١) من الهدف وله مساحة مقطع dA بزاوية (θ, φ) للزاوية المجسمة $d\Omega = dA/r^2$. ومن تناسب عدد الجسيمات المشتتة " ΔN " مع عدد الجسيمات القادمة " N " والزاوية المجسمة " $d\Omega$ " لذلك نجد أن:

$$\Delta N = \sigma(\theta, \varphi) N d\Omega \quad (4)$$

حيث إن $\sigma(\theta, \varphi)$ هو ثابت التناسب. وبالرجوع إلى معادلة (١) نجد أن:

كثافة التيار الساقط يعبر عنها بالشكل:

$$J_i = v_i |\varphi_i|^2 = v_i |e^{ik_i z}|^2 = v_i$$

وكثافة التيار المشتت يعبر عنها بالشكل:

$$J_f = v_f |\psi_{sc}|^2 = v_f |f(\theta, \varphi) \frac{e^{ik_f r}}{r}|^2 = v_f \left| \frac{f(\theta, \varphi)}{r} \right|^2$$

و منها نحصل على:

$$\Delta N = J_f dA = \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{r^2} v_f r^2 \Delta \Omega \quad (5)$$

ومنها نجد أن:

$$\sigma(\theta, \varphi) = \lim_{\Delta \Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta N / N}{\Delta \Omega} = \frac{v_f}{v_i} |f(\theta, \varphi)|^2 = |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (6)$$

وذلك في حالة التشتت المرن، حيث استخدمنا $v_i = v_f$. ويعرف المقطع المستعرض

الكلي بالمعادلة:

$$\sigma_{total} = \int \sigma(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 |f(\theta, \varphi)|^2 d \cos \theta \quad (7)$$

مثال: إذا كانت $f_B(\theta) = a \cos \theta$ احسب المقطع المستعرض الكلي σ_{total} .

الحل: بتطبيق المعادلة (٧)

$$\begin{aligned} \sigma_{total} &= \int |f(\theta)|^2 d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi a^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4\pi a^2}{3} \end{aligned}$$

$$\int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{\cos \theta}{4} - \frac{1}{12} \cos[3\theta]$$

وقد استخدمنا التكامل:

٣- التقريب الأول لبورن

نعود مرة أخرى للمعادلة التفاضلية (١) التي يمكن وضعها بالصورة:

$$[\nabla^2 + k^2] \Psi(\mathbf{r}) = U(r) \Psi(\mathbf{r}),$$

حيث استخدمنا التعويضات $k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$, $U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r)$ وباستخدام دالة جرين

للجسيم الحروهي $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{\pm ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ (انظر الملحق A) نحصل على الحل العام (والكامل) بالشكل:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= e^{ik \cdot \mathbf{r}} + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') U(r') \Psi(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= e^{ik \cdot \mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} U(r') \Psi(\mathbf{r}') d^3 r', \end{aligned} \quad (8)$$

بالرغم من أن المعادلة (٨) هي الحل الكامل للمعادلة (١) ولكن هذا الحل حولنا من معادلة تفاضلية إلى تكامل يحتوي على الدالة نفسها في كلا الطرفين. ولحل هذه المعضلة سوف نفترض أن الجهد $V(r)$ لا يؤثر تأثيراً كبيراً على الدالة الموجية الساقطة (يحدث هذا عند الطاقات العالية للمقذوف) بحيث نستطيع أن نستخدم المفكوك:

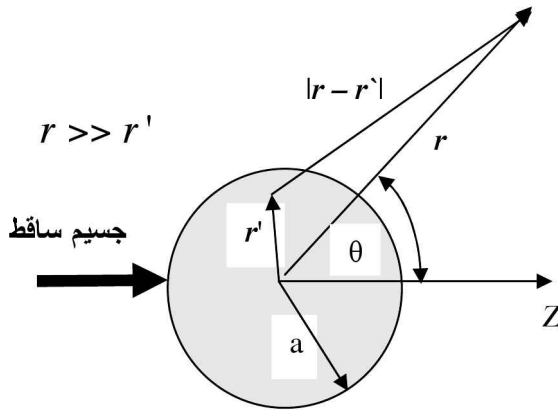
$$\Psi(\mathbf{r}) = \varphi(r) + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') U(r') d^3 r' \left[\varphi_i(r') + \int G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') U(r'') \dots \right] \quad (9)$$

وإذا اكتفينا بالحد الأول في القوس فإننا نحصل على التقريب الأول لبورن

بالصورة:

$$\Psi(\mathbf{r}) \approx \varphi(r) + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') U(r') \varphi_i(r') d^3 r' \quad (10)$$

حيث وضعنا $\Psi(\mathbf{r}') \approx \varphi(r')$ بالتكامل. لكن هذا أيضاً لم يبسط المسألة كما نعتقد، لذلك سوف نستخدم خواص قصر المدى للجهد $U(r)$ لتبسيط دالة جرين.



شكل (٢) العلاقة الهندسية التي تربط المتجهات التي تستخدم لحساب سعة التشتت بواسطة تقريب بورن.

الحالة $r \gg r'$ (انظر شكل ٢) ينتج عنها التالي:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = r \left(1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{\vec{r}'^2}{r^2} \right)^{1/2} \quad (\text{a11})$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \approx r - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}' \approx r - \hat{r} \cdot \vec{r}',$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{\vec{r}'^2}{r^2} \right)^{-1/2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \approx \frac{1}{r} \quad (\text{b11})$$

ومن المعادلتين (a11) و (b11) نجد:

$$\frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{e^{i(r - \hat{r} \cdot \vec{r}')}}{r} = \frac{e^{ikr} e^{-ik(\hat{r} \cdot \vec{r}')}}{r} = \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik_f \cdot \vec{r}'}$$

ولذا تأخذ المعادلة (١٠) الشكل:

$$\Psi(r) \approx \varphi_i(r) + \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-ik_f \cdot \vec{r}'}}{r} U(r') \varphi_i(r') d^3 r' \right\} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{١٢})$$

بمقارنة المعادلتين (٢) و (١٢) نجد أن سعة التشتت تأخذ الشكل:

$$f_B(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-ik_f \cdot \vec{r}'} U(r') \varphi_i(r') d^3 r' = -\frac{1}{4\pi} \langle \varphi_f | U | \varphi_i \rangle \quad (\text{١٣})$$

المعادلة (١٣) تدل على أن سعة التشتت ماهو إلا مصفوفة الانتقال من المستوى

الابتدائي $|\varphi_i\rangle$ إلى المستوى النهائي $\langle \varphi_f |$. باستخدام الدالة $\varphi(r') = e^{ik_i \cdot \vec{r}'}$ فإن سعة التشتت تأخذ الشكل التقريبي النهائي:

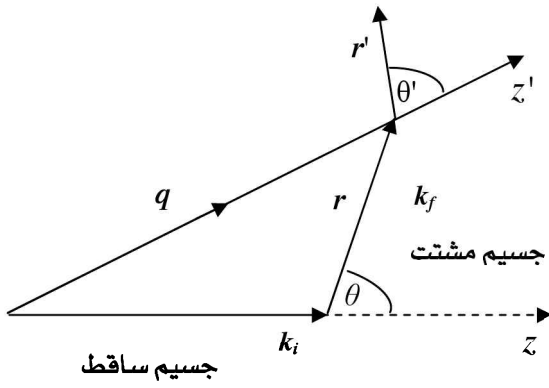
$$f_B(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{i\mathbf{q} \cdot \vec{r}'} U(r') d^3 r', \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f \quad (\text{١٤})$$

$\hbar \mathbf{q}$ تسمى كمية الحركة المنقولة (momentum transfer) (انظر شكل ٣). وفي حالة

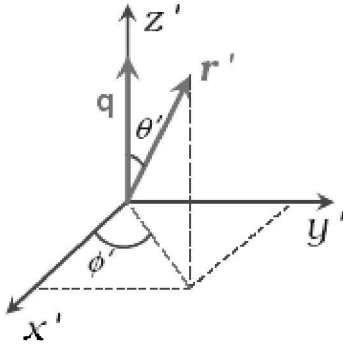
التشتت المرن ($k_i = k_f$) نجد أن:

$$|\mathbf{q}|^2 = (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)^2 = k_i^2 + k_f^2 - 2k_i k_f \cos \theta = 2k^2 (1 - \cos \theta)$$

$$= 4k^2 \sin^2(\theta/2)$$



شكل (٣) العلاقة بين k_i للجسيم الساقط و k_f للجسيم المشتت.



مثال: استخدم العلاقة $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}' = qr' \cos \theta'$ ، كما بالشكل المقابل، وافترض أن الجهد المركزي (central potential) متماثل كروياً (بمعنى أنه لا يعتمد على الزاوية φ') لإثبات أن المعادلة (١٤) تؤول إلى:

$$f_B(\theta) = -\frac{2\mu}{q\hbar^2} \int_0^\infty V(r) \sin(qr) r dr \quad (15)$$

المعادلة (١٥) هي الشكل المميز للتقريب الأول لبورن.

الحل: بإجراء التكامل على الزوايا (θ', φ') واعتبار أن المتجه \mathbf{q} في اتجاه المحور z نجد أن:

$$\begin{aligned} f_B(\theta) &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} V(r') d^3r' \\ &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty V(r') r'^2 dr' \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 e^{iqr' \cos \theta'} d \cos \theta'}_{\frac{2\sin(qr')}{qr'}} \\ &= -\frac{2\mu}{q\hbar^2} \int_0^\infty V(r') \sin(qr') r' dr' \end{aligned}$$

وهنا نستطيع تبديل المتغير r إلى r' لأنه متغير شكلي فقط.

مثال: احسب $f_B(\theta)$ لجهد يوكاوا (Yukawa potential) الذي يعرف بالصورة
 $V(r) = V_0 \frac{e^{-ar}}{r}$ ، حيث يكون الجهد جاذباً (Attractive) عندما $V_0 < 0$ ومتنافراً
 (Repulsive) عندما $V_0 > 0$.

الحل: باستخدام المعادلة (١٤) نجد أن:

$$f_B(\theta) = -\frac{\mu V_0}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{-ar}}{r} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r = \frac{2\mu_0}{\hbar^2} \frac{V_0}{q^2 + a^2}$$

ولجهد رازرفورد (كولومب)

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_B(\theta) = \frac{2\mu_0 V_0}{\hbar^2 q^2}$$

وقد استخدمنا التكامل المعرف: $I_1(q, a) = \int \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{r} d^3r = \frac{4\pi}{q^2 + a^2}$ حيث $\vec{q}\cdot\vec{r} = q r \cos\theta$

واجب منزلي: استخدم المعادلة (١٥) للتحقق من النتيجة السابقة.

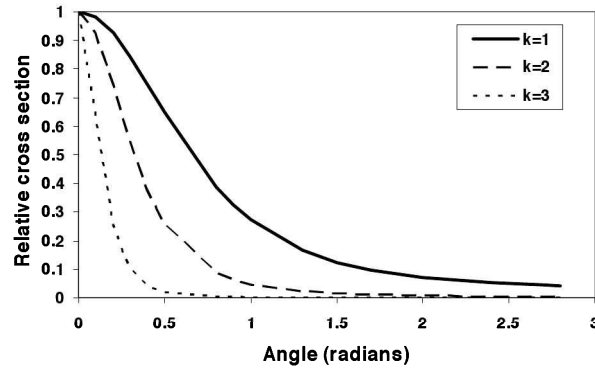
دعونا نعلق على هذا المثال:

١- عند رسم مساحة المقطع النسبي (Relative cross section)

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma(\theta=0, a=1)} = \frac{1}{\left[1 + \left(2k \sin \frac{\theta}{2}\right)^2\right]^2}$$

a نجد أن (انظر الشكل التالي):

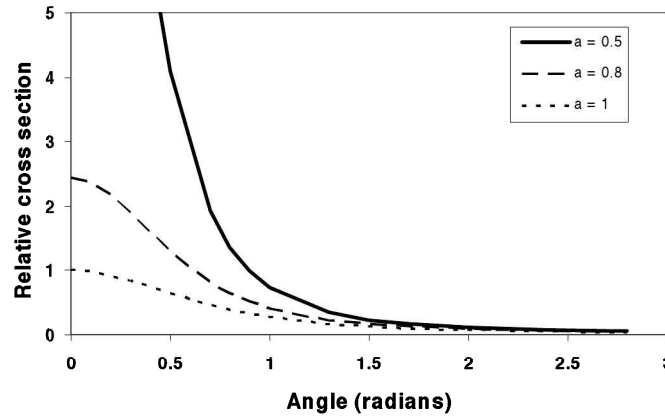
أ- عند الطاقات العالية، $k > 1$ ، نجد أن التشتت في الاتجاه الأمامي (Forward direction)، بمعنى أن $(\theta = 0)$ ، يكون هو المفضل. بالطبع فإن هذا السلوك متوقع، حيث إن تأثير الجهد يقل مع زيادة طاقة الجسيم الساقط، ومن ثم فإن الجسيم ذا السرعة العالية ينحرف قليلاً عندما يمر خلال منطقة الجهد.



ب- عند الطاقات المنخفضة، $k < 1$ ، نجد أن تأثير الجهد يكون واضحاً من تشتت الجسيمات في جميع الاتجاهات.

٢- عند رسم مساحة المقطع النسبي $\frac{\sigma(\theta)}{\sigma(\theta=0, k=1)} = \frac{1}{\left[a^2 + \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \right]^2}$ مع θ (rad) لقيم

مختلفة للمتغير a ، كما بالشكل التالي، وعند ثبوت k ، نجد الآتي: إنه عندما تقل قيمة a فإن شدة تشتت الجسيمات في الاتجاه الأمامي تزداد زيادةً كبيرة. مع ملاحظة أن قيمة $a=0$ تعطينا الجهد الكولومي، وهو جهد طويل المدى.



ونلاحظ أيضاً أن تأثير الجهد بعيداً عن منطقة التشتت تزداد كثيراً، بحيث تزداد معه مساحة المقطع التفاضلي مما يؤدي إلى ازدياد مساحة المقطع الكلي.

ملحوظة مهمة: وهي أن جهد يوكاوا يؤول إلى جهد راذرفورد (Rutherford potential)، أي جهد (كولومب) عندما $a \rightarrow 0$.

دعونا الآن نعد الحالة الخاصة وهي قيمة مساحة المقطع التفاضلي عندما $a \rightarrow 0$ ، وهي معلومة لدينا. ولربطها بنظام فيزيائي سوف نعوض بالمعادلة $V_o = Z_1 Z_2 e^2$ ، لنجد أن مساحة المقطع الكولومي تصبح:

$$\sigma_{coul}(\theta) = \frac{(Z_1 Z_2 e^2)^2}{4\hbar^2 k^4 \sin^2(\frac{\theta}{2})}$$

وهي نتيجة مشهورة حسبت أولاً بواسطة العالم راذرفورد وسميت "صيغة تشتت راذرفورد". ولنا تعليق مهم وهو بالرغم من أن الجهد الكولومي لا يحقق أهم شرط، وهو أنه يجب أن يكون قصير المدى، فإن الصيغة الناتجة من التقريب الأول لبورن تتطابق تماماً مع صيغة راذرفورد. غير أن هذا التقريب لا يعطينا الأمل في صلاحيته لأي جهد، ولذا يجب الحذر عند استخدامه مع الجهد الطويل المدى.

ملحوظة: من صيغة تشتت راذرفورد نجد أن مساحة المقطع الكولومي تصبح ما لا نهاية عند $\theta = 0$. فمن الواضح أن استخدام الجهد الكولومي للمدى $[0, \infty]$ غير صحيح تماماً، لماذا؟ نعلم أنه عند اقتراب شحنتين متشابهتين بعضهما من بعض تحصل بينهما قوة طاردة. ولهذا فإن مساحة المقطع الكولومي لن تكون ما لا نهاية عند $\theta = 0$.

مثال: باستخدام العلاقة $q^2 = 2k^2(1 - \cos\theta)$ ، احسب σ_{total} .

الحل: باستخدام نتيجة المثال السابق حيث $f_B(\theta) = \frac{2\mu_o}{\hbar^2} \frac{V_o}{q^2 + a^2}$ نجد:

$$\begin{aligned} \sigma_{total} &= \int |f(\theta)|^2 d\Omega, \quad d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{8\pi\mu_o^2 V_o^2}{\hbar^2} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{[a^2 + 2k^2(1 - \cos\theta)]^2} = \frac{8\pi\mu_o^2 V_o^2}{\hbar^2} \frac{2}{a^4 + 4a^2 k^2} \end{aligned}$$

وتصبح ما لا نهاية عندما $\theta = 0$.

وقد استخدمنا هنا التكامل القياسي: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{[a^2 + k^2(1-x)]^2} = \frac{2}{a^4 + 2a^2 k^2}$.

مثال: احسب $f_B(\theta)$ للجهد الآسي (exponential potential) الذي يعرف بالصورة

$$U(r) = U_0 e^{-ar}$$

الحل: باستخدام المعادلة (١٤) نجد أن:

$$f_B(\theta) = -\frac{U_0}{4\pi} \int e^{-ar} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r = -\frac{2U_0 a}{(q^2 + a^2)^2}$$

وقد استخدمنا التكامل القياسي:

$$I_2(q, a) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r} \pm ar} d^3r = -\frac{\partial I_1}{\partial a} = \frac{8\pi a}{(q^2 + a^2)^2}$$

واجب منزلي: احسب σ_{total} للجهد الآسي بالمثال السابق.

٤- مدى صلاحية تقريب بورن

ليس من السهل دراسة تحقيق التقريب الأول لبورن، ولهذا فسوف نتعامل معه بفرض أن الجهد المسؤول عن التشتت، $V(r)$ ، ماهو إلا اضطراب صغير. من ثم سنفترض أن:

١- جهد التشتت $V(r)$ يجب أن يكون أصغر من طاقة الجسيم الساقط، بمعنى أن $V(r) \ll E_i$. هذا يعني أن طاقة الجسيم الساقط يجب أن تكون كبيرة مقارنةً بجهد التشتت بحيث إن دالة الجسيم المشتت لا تتأثر كثيراً بجهد التشتت، ونتعامل معها كموجة مشتتة مستوية.

٢- سعة الموجة الكروية المشتتة يجب أن تكون أصغر بكثير من سعة الموجة المستوية الساقطة. ولتطبيق نظرية الاضطراب فإن التصحيح للدالة الكلية، وهو الموجة المشتتة والنتيجة عن جهد التشتت، يجب أن يكون صغيراً بالمقارنة بالدالة الساقطة.

$$\Psi(\mathbf{r}) = \underbrace{\varphi(r)}_{\psi^{(0)}} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{\pm i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(r') \varphi(\mathbf{r}') d^3r' \Rightarrow \psi^{(1)} \ll \psi^{(0)}$$

رياضياً يعرف التحقيق بالمعادلة:

$$\left| \frac{\psi^{(1)}(r=0)}{\psi^{(0)}(r=0)} \right| = \left| \frac{-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{\pm ikr'}}{r'} V(r') \varphi(r') d^3r'}{1} \right| \ll 1$$

مثال: أثبت أن تحقيق التقريب الأول لبورن للجهد المركزي يتأتى بالعلاقة:

$$\left| \frac{2\mu}{q\hbar^2} \int V(r) e^{ikr} \sin(kr) dr \right| \ll 1$$

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ikr'}}{r'} V(r') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^3r' &= \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int \sin\theta' d\theta' \frac{e^{ikr'}}{r'} V(r') e^{ikr'\cos\theta'} \\ &= \frac{2\mu}{k\hbar^2} \int V(r') e^{ikr'} \sin(kr') dr' \end{aligned}$$

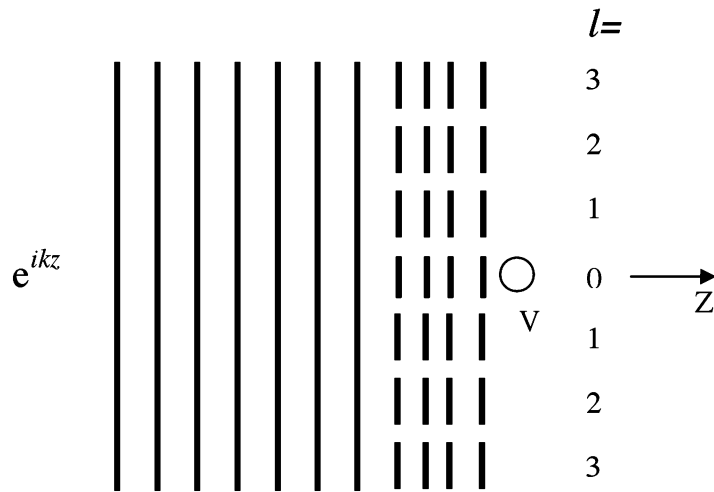
واجب منزلي: أثبت أن تحقيق التقريب الأول لبورن للجهد $V(r) = V_0 e^{-ar}$ حيث $a > 0$ يتأتى بالعلاقة:

$$\left| \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{a^2 V_0}{\sqrt{1+4k^2 a^2}} \right| \ll 1$$

وللجسيمات البطيئة ($ka \ll 1$) نجد أن $|V_0| \ll \frac{\hbar^2}{2\mu a}$

وللجسيمات السريعة ($ka \gg 1$) نجد أن $|V_0| \ll \frac{\hbar^2 k}{\mu a} \approx \frac{\hbar^2}{\mu a^2} (ka)$

٥- تحليل الموجات الجزئية



شكل (٤) القيم المختلفة للعزم الزاوي (l) التي تتأثر بمجال الجهد الكروي V .

بالرغم من سهولة تطبيق تقريب بورن، فإنه لا يزال قاصراً وخصوصاً عندما يصبح الجهد المركزي كبيراً ومؤثراً. ونحن الآن بصدد التعرف على طريقة تعد أكثر دقة، وهي طريقة تحليل الموجات الجزئية. ويظهر الاسم نتيجة لأنه عندما يكون المجال المسبب للتشتت متماثلاً كروياً تكون كمية الحركة الزاوية (l هي إحدى ثوابت الحركة. ولهذا سوف يظهر تأثير كل قيمة من القيم المختلفة لكمية الحركة الزاوية بصورة مستقلة في التشتت (انظر الشكل ٤). ولذلك نتعامل مع الموجات القادمة (وأيضاً المشتتة) كترابك لأمواف جزئية. وسوف نتخذ المحور Z منطبقاً على اتجاه الموجات القادمة. ولهذا فإن الموجة القادمة بعدد موجي ($k_i = k$) سوف تكتب بالصورة:

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\square_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sum_{\ell} i^{\ell} (2\ell + 1) \sin(kr - \frac{\ell\pi}{2}) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (16)$$

حيث $P_{\ell}(\cos \theta)$ هي دالة ليجيندر. وقد استخدمنا الصورة التقريبية لدالة بيسيل الكروية وهي $\square_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \sin(\rho - \frac{\ell\pi}{2})$. وهنا يجب أن نضيف شرطاً حدودياً آخر

بالنسبة لمجال الجهد $V(r)$ ، وهو أن يكون المجال متماثلاً كروياً، بمعنى أنه يعتمد على r فقط، ولا يعتمد على الزاوية السميتية φ .

سنبدأ بفرض الحل العام للمعادلة (١) بالشكل:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell,0} R_{\ell}(r) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (17)$$

حيث $R_{\ell}(r)$ هو حل المعادلة القطرية:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \right] R_{\ell}(r) = ER_{\ell}(r) \quad (18)$$

وبعيداً عن مجال التشتت، حيث $V(r) \rightarrow 0$ ، وباستخدام $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$ و

$\rho = kr$ فإن المعادلة (١٨) تؤول إلى:

$$\frac{d^2 R_{\ell}(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR_{\ell}(\rho)}{d\rho} + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] R_{\ell}(\rho) = 0, \quad (19)$$

ومن ثم فإن الدالة الموجية بعيدة عن الهدف بالإمكان كتابتها على الصورة العامة:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \{a_{\ell} j_{\ell}(kr) + b_{\ell} \eta_{\ell}(kr)\} P_{\ell}(\cos \theta) \\ &\square \frac{1}{\rho} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ a_{\ell} \sin\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2}\right) + b_{\ell} \cos\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2}\right) \right\} P_{\ell}(\cos \theta) \\ &\square \frac{1}{\rho} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ A_{\ell} \sin\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_{\ell}\right) \right\} P_{\ell}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (20)$$

حيث استخدمنا التعويضات $a_{\ell} = A_{\ell} \cos \delta_{\ell}$ ، $b_{\ell} = -A_{\ell} \sin \delta_{\ell}$ وتقريب دالة

نيومان الكروية التقاربي $\eta_{\ell} \square \frac{1}{\rho} \cos\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2}\right)$ تشير إلى التغير الطوري للقيمة ℓ

ومنها نستدل على تأثير المجال الخارجي على الجسيمات المشتتة. والآن فإن المسألة تتلخص

في إيجاد الثوابت غير المعلومة في المعادلة (٢٠) وهما A_{ℓ} و δ_{ℓ} وذلك بمقارنتها بالمعادلة

التقريبية (٢) التي تأخذ الشكل:

$$\Psi(\mathbf{r}) \square \frac{1}{\rho} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell+1) \sin(kr - \frac{\ell\pi}{2}) P_{\ell}(\cos \theta) + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (21)$$

حيث اعتبرنا حالة التصادم المرن وفيها $k_i = k_f = k$. لإيجاد الثوابت فإننا نقارن بين المعادلتين (٢٠) و(٢١) بإتباع التالي:

أ- نستعمل مفكوك الدالتين $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ و $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ بالمعادلتين (٢٠) و(٢١).

ب- نساوي المعاملات للدالة الكروية $\frac{e^{-ikr}}{r}$ فنحصل على:

$$A_\ell = \sqrt{4\pi} i^\ell \sqrt{2l+1} e^{i\delta_\ell} \quad (22)$$

ج- نساوي المعاملات للدالة الكروية $\frac{e^{ikr}}{r}$ ونستخدم العلاقة

$$e^{-i\ell\pi/2} = (e^{-i\pi/2})^\ell = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]^\ell = i^{-\ell}$$

فنحصل على:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) (e^{2i\delta_\ell} - 1) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell P_\ell(\cos\theta), \end{aligned} \quad (23)$$

ومنها نجد أن:

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell \right|^2 \quad (24)$$

$$\sigma_{total} = 2\pi \int_{-1}^1 |f(\theta)|^2 d \cos\theta = \sum_l \sigma_\ell, \quad (25)$$

حيث $\sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell$ هي الموجات الجزئية للمقطع المستعرض،

المنظرة للقيمة l . وهنا استخدمنا خاصية التكامل:

$$\int_{-1}^1 P_\ell(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) d \cos\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{\ell\ell'}$$

بالإمكان حساب المجموع الكلي بطريقة أخرى وهي أن نبدأ بالمعادلة (٢٣) ونضع $\theta = 0$ فنحصل على:

$$f(0) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \underbrace{P_{\ell}(\cos 0)}_{=1} e^{i\delta_{\ell}} \sin \delta_{\ell} \quad (26)$$

ومنها نجد:

$$\text{Im} f(0) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell} \quad (27)$$

و بالمقارنة بالمعادلة (٢٥) نستنتج أن:

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0) \quad (28)$$

المعادلة (٢٨) هي علاقة بين المقطع المستعرض الكلي والجزء التخيلي لسعة التشتت المرن بالاتجاه الأمامي. هذه العلاقة تسمى "النظرية الضوئية". ويمكن فهم هذه العلاقة بدلالة الفيض المزال من الموجة المستوية القادمة. لأنه كما هو معلوم يوجد عندنا موجتان إحداهما: هي الموجة المستوية القادمة، والأخرى: الموجة الكروية المشتتة. ويكون ارتباط المقطع المستعرض الكلي بالفيض المزال من الموجة المستوية القادمة فقط.

تعليق:

- ١- يظهر التداخل جلياً في $\sigma(\theta, \varphi)$ ، انظر: المعادلة (٢٤)، ولكن لا يظهر في σ_{total} ، انظر: المعادلة (٢٨)، لأننا أجرينا التكامل على الزوايا.
- ٢- عند حسابنا للمقطع المستعرض الكلي، فإن القيم (ℓ) الصغيرة هي التي تُعطي أعلى قيم عند الطاقات المنخفضة.

مثال: احسب المقطع المستعرض الكلي σ_{total} (باستخدام ثلاثة حدود فقط من المتسلسلة)

$$\text{إذا علمت أن } \delta_{\ell} = \frac{1}{(\ell + 1)^4} \text{ rad, } k = 1/a,$$

الحل: باستخدام الجدول التالي:

ℓ	δ_ℓ (rad)	$\sin^2 \delta_\ell$
0	1.0	7.1×10^{-1}
1	6.3×10^{-2}	4.0×10^{-3}
2	1.2×10^{-2}	1.4×10^{-4}

نجد أن:

$$\begin{aligned} \sigma_{total} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell \approx 4\pi a^2 \left[\sin^2 \delta_0 + 3 \sin^2 \delta_1 + 5 \sin^2 \delta_2 \right] \\ &= 4\pi a^2 \left[7.1 \times 10^{-1} + 3 \times 4.0 \times 10^{-3} + 5 \times 1.4 \times 10^{-4} \right] \\ &= 4\pi a^2 (7.2 \times 10^{-1}) \end{aligned}$$

مثال: استخدم النظرية الضوئية لحساب المقطع المستعرض الكلي للتشتت إذا علمت أن $\delta_0 = ka$.

الحل: حيث إن المسألة أعطتنا δ_0 فهذا يعني أن $\ell = 0$ ، ولذلك سوف نكتفي بالحد الأول من المتسلسلة.

$$\begin{aligned} \text{Im} f(0) &= \frac{1}{k} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell \approx \frac{1}{k} \sin^2 \delta_0 \approx \frac{1}{k} \delta_0^2 \\ &= \frac{1}{k} [k^2 a^2], \end{aligned}$$

ومن ثم فإن

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0) = \frac{4\pi}{k} \left\{ \frac{1}{k} [k^2 a^2] \right\} = 4\pi a^2$$

مثال: احسب σ_{total} إذا علمت أن $f(\theta) = e^{-\theta} / \sqrt{\sin \theta}$.

الحل:

$$\begin{aligned}\sigma_{total}(\theta, \varphi) &= \int |f(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \frac{e^{-2\theta}}{\sin \theta} \sin \theta d\theta = 2\pi \int_0^\pi e^{-2\theta} d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{e^{-2\pi}}{2} \right] = \pi(1 - e^{-2\pi})\end{aligned}$$

٦- أمثلة عامة

مثال: باستخدام التقريب الأول لبورن احسب σ_{total} عند الطاقات المنخفضة للجهد التافري التالي:

$$V(r) = \begin{cases} V_o, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

الحل: باستخدام التقريب الأول لبورن نستطيع حساب سعة التشتت كالتالي:

$$\begin{aligned}f_B(\theta) &= -\frac{2\mu}{q\hbar^2} \int_0^\infty V(r) \sin(qr) r dr \\ &= -\frac{2\mu V_o}{q\hbar^2} \left[\int_0^R \sin(qr) r dr \right] = -\frac{2\mu V_o}{q\hbar^2} \left[\frac{\sin(qR) - qR \cos(qR)}{q^2} \right]\end{aligned}$$

ومنها نجد المقطع المستعرض التفاضلي:

$$\sigma(\theta) = |f_B(\theta)|^2 = \left(\frac{2\mu V_o R^3}{\hbar^2} \right)^2 g(x)$$

حيث

$$g(x) = \left[\frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \right]^2, \quad x = qR = 2kR \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

وعند الطاقات المنخفضة نجد أن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{9}$ والمقطع المستعرض التفاضلي:

$$\sigma = \lim_{x \ll 1} \sigma(\theta) = |f_B(\theta)|^2 = \left(\frac{2\mu V_o R^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

وهو لا يعتمد على زاوية التشتت.

يحسب المقطع المستعرض الكلي من التكامل:

$$\sigma_{total} = \int |f_B(\theta)|^2 d\Omega = 4\pi |f_B(\theta)|^2 = 4\pi \left(\frac{2\mu V_0 R^3}{3\hbar^2} \right)^2$$

مثال: باستخدام تحليل الموجات الجزئية احسب قيمة المقطع المستعرض الكلي (σ_{total}) للتشتت من مجال جهد يعرف بجهد الكرة الصلبة كالتالي:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & r > a \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الحل: نبدأ بالمعادلة القطرية:

$$\frac{d^2 R_\ell(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR_\ell(\rho)}{d\rho} + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] R_\ell(\rho) = 0$$

وحلها العام هو:

$$R_\ell(kr) = a_\ell j_\ell(kr) + b_\ell \eta_\ell(kr)$$

مع الشرط الحدودي: $R_\ell(a) = 0$, نتيجة للجهد،

$$a_\ell j_\ell(ka) + b_\ell \eta_\ell(ka) = 0 \Rightarrow \tan \delta_\ell = \frac{j_\ell(ka)}{\eta_\ell(ka)}$$

حيث استخدمنا $a_\ell = A_\ell \cos \delta_\ell$, $b_\ell = -A_\ell \sin \delta_\ell$. هنا تظهر حالتان للدراسة:

أ- التشتت عند الطاقات المنخفضة $ka \ll 1$

نستخدم التقريب التالي

$$j_\ell(ka) \underset{k \rightarrow 0}{\square} (ka)^\ell, \quad \eta_\ell(ka) \underset{k \rightarrow 0}{\square} -(ka)^{-\ell-1}$$

ومنه ينتج أن

$$\tan \delta_\ell = \frac{j_\ell(ka)}{\eta_\ell(ka)} = -(ka)^{2\ell+1}$$

ونلاحظ أن δ_ℓ تقل بسرعة مع زيادة قيم ℓ ومن ثم فإن الموجة s المقابلة للقيمة $\ell = 0$ هي القيمة الدائمة

$$\tan \delta_0 = \frac{j_0(ka)}{\eta_0(ka)} = -ka$$

من هنا يتضح جلياً سبب الإزاحة الطورية. حيث إن الموجات لا تستطيع اختراق حاجز الجهد عندما $ka \ll 1$. ويحدث للموجة إزاحة للخارج.

المقطع المستعرض الكلي للتشتت يحسب بالمعادلة:

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = 4\pi a^2$$

نجد هنا أن قيمة المقطع المستعرض الكلي للتشتت أربعة أمثال القيمة الكلاسيكية πa^2 . هذا يرجع للخواص الموجية للجسيمات ومنها ظاهرة الحيود. بالنسبة إلى سعة التشتت:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell P_\ell(\cos \theta) = \frac{\delta_0}{k} = -a$$

ومنها نجد أن سعة التشتت لا تعتمد على الزوايا (θ, φ) .

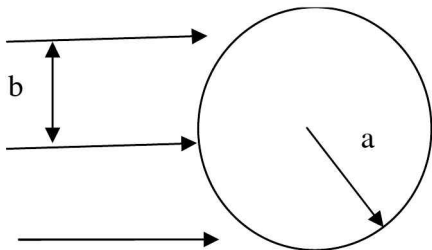
ب- التشتت عند الطاقات العالية $ka \gg 1$

$$\tan \delta_\ell = -\frac{j_\ell(ka)}{\eta_\ell(ka)} \approx -\frac{\sin(ka - l\pi/2)}{\cos(ka - l\pi/2)} = -\tan(ka - l\pi/2)$$

$$\Rightarrow \delta_\ell = -(ka - l\pi/2)$$

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l,$$

$b = \text{Impact parameter}$



عند الطاقات العالية فإن التشتت لا يحدث للجسيمات البعيدة عن المركز، $b > a$ ، ولكن يحدث للجسيمات القريبة، $b < a$ ، انظر: الشكل المرافق، وحيث إن كمية الحركة

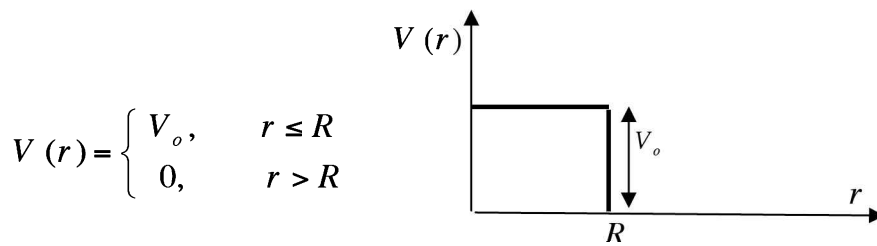
الزاوية مكممة، بمعنى أن $\underbrace{mvb}_{\hbar k} = l\hbar$ فإن $l_{\max} \approx ka$ ، إذاً:

$$\begin{aligned} \sigma_{total} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell} \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) \frac{[1 - 2\cos(ka - \ell\pi/2)]}{2} \\ &\approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) - \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) \underbrace{\cos(ka - \ell\pi/2)}_{(-1)^{\ell}} \\ &\approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) \approx \frac{2\pi}{k^2} (\ell_{\max} + 1)^2 \approx \frac{2\pi}{k^2} \ell_{\max}^2 \approx 2\pi a^2 \end{aligned}$$

ملاحظات:

- ١- تم إهمال الجزء $\cos(ka - \ell\pi/2) = (-1)^{\ell}$ حيث إنه يتذبذب بين قيم موجبة وسالبة، ومن ثم فإن مجموعه النهائي يصبح كمية منعدمة.
- ٢- استخدمنا العلاقة التجميعية $\sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \ell = \ell_{\max}(\ell_{\max} + 1)/2$ بالخطوة الأخيرة.
- ٣- نجد هنا أيضاً أن قيمة المقطع المستعرض الكلي للتشتت ضعف القيمة الكلاسيكية πa^2 .

مثال: ليئر ذي جهد تنافري يعرف بالشكل كالتالي:



احسب قيمة المقطع المستعرض الكلي للتشتت للموجة s عندما تكون طاقة

الجسيم الساقط هي $E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$. استخدم الرموز التالية: $K^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} V_0$.

$$\beta^2 = k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$$

الحل :

سوف نتعرض هنا لحالتين، وهما:

$$1- \text{ الحالة الأولى } E > V_0$$

في هذه الحالة نجد أن معادلة شرودنجر داخل وخارج البئر الجهدي، للموجة s ، تعرف بالمعادلتين:

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \alpha^2 \right] R_{\text{int}}(r) = 0, & r < R, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \beta^2 \right] R_{\text{ext}}(r) = 0, & r > R, \end{cases}$$

حيث:

$$\alpha^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V_0) = \beta^2 - K^2$$

يجب أن يحقق الحل بداخل البئر، $R_{\text{int}}(r)$ ، الشرط الحدودي $R_{\text{int}}(0) = 0$. الحل العام لمعادلتنا شرودنجر يمكن وضعهما بالصورة:

$$\begin{aligned} R_{\text{int}}(r) &= A \sin(\alpha r) + C \cos(\alpha r), \\ R_{\text{ext}}(r) &= B \sin(\beta r + \delta_0) \end{aligned}$$

ومن الشرط الحدودي $R_{\text{int}}(0) = 0$ نجد أن C يجب أن تنعدم.

باستخدام شرط استمرارية التفاضل اللوغاريتمي عند الحد الفاصل نحصل على:

$$\left. \frac{dR_{\text{int}}(r)}{dr} \right|_{r=R} = \left. \frac{dR_{\text{ext}}(r)}{dr} \right|_{r=R} \Rightarrow \frac{A \alpha \cos(\alpha R)}{A \sin(\alpha R)} = \frac{B \beta \cos(\beta R + \delta_0)}{B \sin(\beta R + \delta_0)}$$

ومنها نعين الإزاحة الطورية كالتالي:

$$\frac{1}{\beta} \tan(\beta R + \delta_o) = \frac{1}{\alpha} \tan(\alpha R)$$

$$\Rightarrow \delta_o = \tan^{-1} \left[\frac{\beta}{\alpha} \tan(\alpha R) \right] - \beta R$$

من هذا التعريف يمكن حساب قيمة المقطع المستعرض الكلي للتشتت للموجة s من العلاقة:

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_o \approx \frac{4\pi}{k^2} \delta_o^2$$

ولنا هنا ملاحظة عندما تكون $\beta \gg K$ فإننا نستطيع أن نهمل القيمة K لنجد أن $\alpha = \beta$. لذلك ينعدم التغير الطوري كالتالي:

$$\delta_o \approx \tan^{-1} \left[\frac{\beta}{\beta} \tan(\beta R) \right] - \beta R = 0$$

وهذا يفسر على أن طاقة الجسيم العالية لن تهتم بأي جهد صغير، من ثم لن يكون هناك تشتت لأن الموجات الجزئية للمقطع المستعرض $\sigma_e \propto \delta_e$ سوف تنعدم.

ب- الحالة الثانية $E < V_o$

الحل العام لمعادلتي شرودنجر يمكن وضعهما بالصورة:

$$R_{int}(r) = A \sinh(\alpha r),$$

$$R_{ext}(r) = B \sinh(\beta r + \delta_o)$$

وبإتباع الطريقة السابقة نحصل على:

$$\frac{1}{\beta} \tanh(\beta R + \delta_o) = \frac{1}{\alpha} \tanh(\alpha R),$$

$$\delta_o = \tanh^{-1} \left[\frac{\beta}{K} \tanh(\alpha R) \right] - \beta R$$

$$\approx \beta R \left[\frac{1}{KR} \tanh(KR) - 1 \right], \quad \beta \ll K$$

القيمة بين القوسين تنحصر بين القيمتين ٠ و ١، من ثم سيكون قيمة المقطع المستعرض الكلي للتشتت مشابهة للكرة الصلبة. نشير هنا إلى نقطة مهمة وهي أن δ_0 تبدأ خطياً مع تغير β عند الطاقات الصغيرة، ويكون الميل سالباً. هذه نتيجة عامة للجهد التنافري.

هناك كمية أخرى وهي "طول التشتت scattering length" وتعريفها كالتالي:

$$a_0 = -\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{d\delta_0}{d\beta}$$

هذه الكمية تقيس مدى قيمة الهدف الكمية. وتكون قيمة المقطع المستعرض الكلي للتشتت $4\pi a_0^2$ عندما $\beta \rightarrow 0$. بالنسبة للكرة الصلبة فإن طول التشتت هو نصف قطر الكرة.

مثال: باستخدام المعادلة:

$$\delta_0 = \tan^{-1} \left[\frac{\beta}{\alpha} \tan(\alpha R) \right] - \beta R$$

احسب مصفوفة التشتت $S = e^{2i\delta_0}$.

الحل: بترتيب بسيط يمكن وضع المعادلة السابقة في الصورة:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} \tan(\alpha R) = \tan(\beta R + \delta_0) &= -i \frac{e^{i(\beta R + \delta_0)} - e^{-i(\beta R + \delta_0)}}{e^{i(\beta R + \delta_0)} + e^{-i(\beta R + \delta_0)}} \\ &= -i \frac{e^{i\beta R} e^{2i\delta_0} - e^{-i\beta R}}{e^{i\beta R} e^{2i\delta_0} + e^{-i\beta R}} \end{aligned}$$

وبتبسيط أكثر نجد أن:

$$\begin{aligned} i \frac{\beta}{\alpha} \tan(\alpha R) (e^{i\beta R} e^{2i\delta_0} + e^{-i\beta R}) &= e^{i\beta R} e^{2i\delta_0} - e^{-i\beta R}, \\ e^{i\beta R} e^{2i\delta_0} \left(i \frac{\beta}{\alpha} \tan(\alpha R) - 1 \right) &= \left(-i \frac{\beta}{\alpha} \tan(\alpha R) - 1 \right) e^{-i\beta R}, \end{aligned}$$

لذلك:

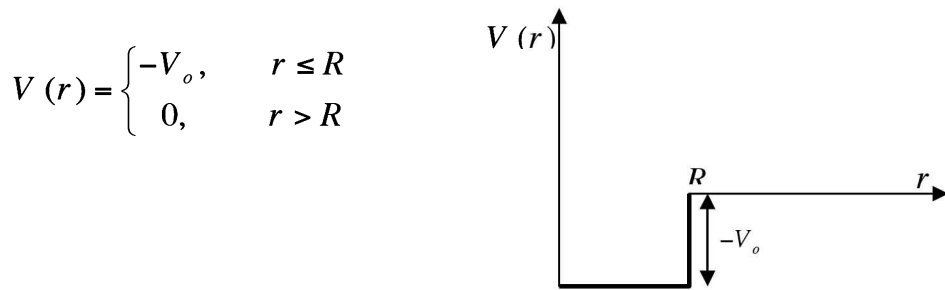
$$S = e^{2i\delta_0} = e^{-i\beta R} \frac{1 + i \frac{\beta}{\alpha} \tan(\alpha R)}{1 - i \frac{\beta}{\alpha} \tan(\alpha R)}$$

٧- تمارين عامة

١- باستخدام ماثيماتيكيا تحقق من النتائج بالجدول التالي.

$U(r)$	$f_B(\theta)$	σ_{total}	$\sigma_{total} \underset{E \rightarrow \infty}{\sim} AE^{-1}$
$U_o \frac{e^{-ar}}{r}$	$-\frac{U_o}{q^2 + a^2}$	$\frac{4\pi U_o^2}{a^4 + 4a^2 k^2}$	$A = \frac{\pi \hbar^2 U_o^2}{2ma^2}$
$U_o e^{-ar}$	$-\frac{2aU_o}{(a^2 + q^2)^2}$	$\frac{16\pi U_o^2}{3} \frac{16k^4 + 12a^2 k^2 + 3a^4}{a^4(a^2 + 4k^2)^3}$	$A = \frac{2\pi \hbar^2 U_o^2}{3ma^2}$
$U_o e^{-a^2 r^2}$	$-U_o \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-q^2/4a^2}$	$\frac{\pi^2 U_o^2}{8a^4 k^2} [1 - e^{-2k^2/a^2}]$	$A = \frac{\pi^2 \hbar^2 U_o^2}{16ma^4}$
$\begin{cases} U_o, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$	$-\frac{U_o}{a^3} (\sin qa - qa \cos qa)$	$\frac{8\pi U_o^2 a^6}{4x^2} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\sin 2x}{x^3} - \frac{\sin^2 x}{x^4}\right)$, $x = 2ka$	$A = \frac{\pi^2 \hbar^2 a^4 U_o^2}{4m}$
$\frac{U_o}{r^2 + a^2}$	$-\frac{\pi U_o}{4a} e^{-qa}$	$\frac{\pi^3 U_o^2}{32a^4 k^2} [1 - (4kd + 1)e^{-4ka}]$	$A = \frac{\pi^3 \hbar^2 U_o^2}{64ma^4}$

٢- لبئر ذي جهد تجاذبي يعرف بالشكل كالتالي:



احسب قيمة المقطع المستعرض الكلي للتشتت للموجة s عندما تكون طاقة الجسيم

الساقط هي $E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$.

ملحق (18.A)

دالة جرين

رياضياً تستخدم دالة جرين (Green) لحل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة التي تخضع لشروط حدودية معينة. استخدامات دالة جرين في الفيزياء لا تعد وخصوصاً في حل المعادلات التفاضلية ذات القيم المميزة. على سبيل المثال في علم الكهروستاتيكا تعبر دالة جرين عن الجهد عند نقطة، سميها (x) ، الناتج من شحنة موضوعة عند النقطة (y) ، وهي تعتمد على المسافة بين النقطتين فقط. في هذا الملحق سوف نستعرض طريقة جرين لحل المعادلة التفاضلية المرتبطة بالتشتت.

المعادلة التفاضلية:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

يمكن حلها حلاً متكاملاً باستخدام دالة جرين للجسيم الحر كالتالي:

١- نضع المعادلة (1) على الصورة:

$$\left[\nabla^2 + k^2 \right] \Psi(\mathbf{r}) = U(r) \Psi(\mathbf{r}), \quad (2)$$

حيث استخدمنا التعويضات التالية: $U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r)$, $k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$

٢- تعرف دالة جرين للجسيم الحر $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ من خلال المعادلة التفاضلية:

$$\left[\nabla^2 + k^2 \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3)$$

حيث $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ هي دالة ديراك ذات الأبعاد الثلاثة (انظر ملحق B)

٣- تعرف دالة الجسيم الحر $\varphi(r) = e^{ikr}$ بالمعادلة:

$$\left[\nabla^2 + k^2 \right] \varphi(r) = 0, \quad (4)$$

٤- يصبح حل المعادلة (1) هو:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \varphi(r) + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (5)$$

حيث إن وحدة الحجم $d^3 r' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi' dr'$.

واجب منزلي: أثبت أن الدالة (5) هي حل المعادلة (2).

دالة جرين للجسيم الحر $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ تحل بواسطة المتغيرات المركبة وتأخذ الصورة:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik\rho}}{\rho}, \quad \rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (6)$$

حيث إن الإشارة (-) ترمز إلى الدالة القادمة (Ingoing wave) و (+) ترمز إلى

الدالة المنصرفة (Outgoing wave).

الملاحق

Appendices

الصفحة	العنوان	الملحق
٣٩٨	نظام الوحدات الذرية (System of atomic units)	A
٤٥٨	بعض الدوال والصيغ الرياضية	B
٤٥٨	١- دالة جاما $\Gamma(n)$	
٤٥٩	٢- دالة "هيرمت" كثيرة الحدود $H_n(x)$	
٤٦٠	٣- دالة "ليجنדר" كثيرة الحدود $P_n(x)$	
٤٦١	٤- دالة "ليجنדר" المرافقة كثيرة الحدود $P_n^m(x)$	
٤٦٢	٥- دالة "لاجير" كثيرة الحدود $L_n(x)$	
٤٦٣	٦- دالة "لاجير" المرافقة كثيرة الحدود $L_n^k(x)$	
٤٦٤	٧- دوال "بيسيل" من النوع الأول $J_\ell(x), N_\ell(x)$	
٤٦٦	٨- دوال "بيسيل" الكروية $j_\ell(x), n_\ell(x)$	
٤٦٧	٩- دالة التوافقيات الكروية $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$	
٤٦٩	١٠- دالة دلتا لديراك $\delta(r)$	
٤٧١	تكامل كولم (Coulomb's integral $I(Z)$)	C
٤٧٣	جدول للتفاضلات البسيطة (Table of simple derivatives)	D
٤٧٤	متطابقات رياضية عامة (General mathematical identities)	E
٤٧٥	جدول التكاملات المستخدمة (Table of used integrals)	F
٤٨١	المراجع (References)	
٤٨٣	قاموس المصطلحات العلمية (Scientific dictionary)	

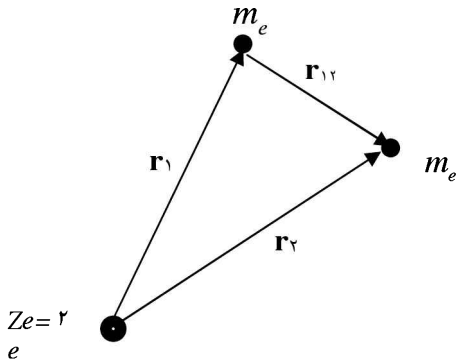
ملحق (A)

نظام الوحدات الذرية

يستخدم نظام الوحدات الذرية بإسهاب في الحسابات الخاصة بميكانيكا الكم، وذلك لمساواة الثوابت الخاصة (مثال لذلك شحنة الإلكترون e وثابت بلانك المعدل $\hbar = h/2\pi$) بالواحد الصحيح. لنأخذ مثلاً على ذلك بالهملتونيان الخاص بإلكتروني ذرة الهيليوم، الذي يعبر عنه بالمعادلة، انظر الشكل (i)، (مع إهمال حركة النواة):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_2^2 - \frac{Ze^2}{r_1} - \frac{Ze^2}{r_2} + k \frac{e^2}{r_{12}} \quad (i)$$

حيث m_e هي كتلة الإلكترون، k ثابت قانون كولومب، و Ze هي شحنة النواة وتساوي $2e$ في حالة الهيليوم.



شكل (i) إحداثيات تستخدم لوصف ذرة الهيليوم

دعنا نعرف هنا قيم الوحدات الخاصة بحيث إن $\hbar = 1, m_e = 1, e = 1, k = 1/4\pi\epsilon_0 = 1$ فتأخذ المعادلة السابقة الشكل:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \nabla_1^2 - \frac{1}{2} \nabla_2^2 - \frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2} + \frac{1}{r_{12}} \quad (ii.)$$

ولا تعتمد على أي ثابت فيزيائي. ونتيجةً لهذا التبسيط فإننا نستطيع أن نبسط جميع الكميات الفيزيائية الأخرى مثل نصف قطر بور a_0 :

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 1 \quad (\text{atomic units}) \quad (iii.)$$

وتسمى وحدة الأطوال الذرية بالاسم بور.

وتعرف أيضاً الطاقة كالتالي:

$$E = \frac{ke^2}{a_o} = 1 \quad (\text{atomic units}) \quad (\text{iv.})$$

وتسمى وحدة الطاقة الذرية باسم العالم هارترى (Hartree) ويرمز لها بالرمز

$$. H \equiv \text{Hartree}$$

باستخدام وحدة الطاقة الذرية نجد أن طاقة المستوى الأرضي لذرة الهيدروجين =

-0.5 هارترى. الجدول التالي يحتوي على عدد من أسماء القيم الفيزيائية المهمة والقيم

المكافئة لها في النظام القياسي.

جدول الوحدات الذرية (باستخدام ثابت التركيب الدقيق α ،

$$(c = 2.99792 \times 10^8 \text{ m/s} , c \text{ وسرعة الضوء في الفراغ} \alpha = \frac{ke^2}{\hbar c} = 1/137.036$$

الوحدات القياسية	الوحدات الذرية	الكمية ومدلولها الفيزيائي
$9.1091 \times 10^{-31} \text{ kg}$	$m_e = 1$	الكتلة (كتلة الإلكترون)
$1.6021 \times 10^{-19} \text{ C}$	$ e = 1$	الشحنة (شحنة الإلكترون)
$5.2916 \times 10^{-11} \text{ m}$	$a_o = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 1$	المسافة (نصف قطر المدار الأول لذرة الهيدروجين)
$1.0545 \times 10^{-34} \text{ J.s}$	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1$	العزم الزاوي (ثابت بلانك المعدل)
$2.18769 \times 10^6 \text{ m/s}$	$v_o = \alpha c = 1$	السرعة (مقدار سرعة الإلكترون بأول مدار لبور)
$4.3594 \times 10^{-18} \text{ J}$ $= 27.2116 \text{ eV}$	$E = \frac{ke^2}{a_o} = 1$	الطاقة (ضعف طاقة تأين ذرة الهيدروجين)
$2.4189 \times 10^{-17} \text{ s}$	$\frac{a_o}{v_o} = 1$	الزمن (الزمن الدوري لحركة الإلكترون بأول مدار لبور)

واجب منزلي: احسب القيمة المكافئة للطاقة ١ هارترى في النظام القياسي.

$$\begin{aligned} 1 \text{ Hartree} &= \frac{k^2 m e^2}{\hbar^2} = \frac{m e^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \\ &= \frac{(9.1091 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.6021 \times 10^{-19} \text{ C})^4}{(1.1126 \times 10^{-10} \text{ C}^2 \cdot \text{J}^{-1} \cdot \text{m}^{-1})^2 (1.0545 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2} \\ &= 4.3595 \times 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} 1 \text{ Hartree (1 H)} &= 4.3595 \times 10^{-18} \text{ J} \\ &= 27.2 \text{ eV} = 2 \text{ Ry} \end{aligned}$$

حيث $1 \text{ Ry} = 13.6 \text{ eV}$ هي وحدة أخرى للطاقة، ويقال عنها: وحدة ريدبرج.

تحول الوحدة $1 \text{ Hartree (1 H)} = 4.3595 \times 10^{-18} \text{ J}$ إلى التعريفات التالية:

١- بضربها بعدد أفوجادرو نحصل على

$$1 \text{ Hartree} = 2625 \text{ kJmol}^{-1}$$

٢- لدراسة الأطياف الذرية نلجأ لحساب فرق الطاقة بين المستويات المختلفة باستخدام

وحدة معكوس الطول الموجي $\bar{\nu}$ ونستنتج من العلاقة ($E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = hc\bar{\nu}$)

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \frac{1 \text{ Hartree}}{hc} = \frac{4.36 \times 10^{-18} \text{ J}}{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})} \\ &= 2.195 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \\ &= 2.195 \times 10^5 \text{ cm}^{-1} \end{aligned}$$

(ملحق (B)

بعض الدوال الرياضية وخواصها

Some Mathematical Functions and their Properties

١- دالة جاما $\Gamma(n)$ (Gamma Function)

إذا بدأنا بالتكامل المعرف:

$$\int_0^{\infty} e^{-qx} dx = q^{-1} \quad (i)$$

وبتفاضل الطرفين بالنسبة للقيمة الثابتة q لعدد n من المرات، فسوف نجد أن:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-qx} dx = (n!)q^{-(n+1)} \quad (ii)$$

وبوضع الثابت $q = 1$ ، نجد أننا سوف نحصل على تعريفاً للقيمة $n!$ بواسطة

التكامل التالي:

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \quad (iii)$$

ومنه سوف نعرف دالة جاما بالعلاقة:

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad n > 0$$

ومن تعرف جاما نحصل على:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

ولقيم $n < 0$ نستطيع استخدام العلاقة:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

قيم خاصة لدالة جاما:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Gamma\left(-m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^m 2^m \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \sqrt{\pi}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

٢- دالة "هيرمت" كثيرة الحدود (Hermite Polynomials $H_n(x)$)

المعادلة التفاضلية لدالة "هيرمت" Differential equation

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0$$

تعريف Definition

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}); \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

تعد الدالة $H_n(x)$ زوجية أو فردية إذا كان العدد n يأخذ قيماً زوجية أو فردية

بالترتيب:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

دالة مولدة Generating function

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} H_n(x) \quad |t| < 1$$

علاقات ارتدادية Recurrence relations

$$\frac{dH_n}{dx} = 2nH_{n-1}$$

$$\frac{dH_n}{dx} = 2xH_n - H_{n-1}$$

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$$

علاقة التعامد Orthogonality relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} = \sqrt{\pi} 2^n \Gamma(n+1) \delta_{mn}$$

جدول لبعض القيم

n	$H_n(x)$	n	$H_n(x)$
٠	١	٣	$8x^3 - 12x$
١	$2x$	٤	$16x^4 - 48x^2 + 12$
٢	$4x^2 - 1$	٥	$32x^5 - 160x^3 + 120x$

٣- دالة "ليجندر" كثيرة الحدود (Legendre Polynomials $P_n(x)$)

تعريف Definition

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

المعادلة التفاضلية Differential equation

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1) P_n(x) = 0$$

دالة مولدة Generating function

$$(1 + 2tx + x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x); \quad |t| < 1$$

علاقات ارتدادية Recurrence relations

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x);$$

علاقة التعامد Orthogonality relation

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

جدول لبعض القيم

n	$P_n(x)$	x^n
٠	١	$P_0(x)$
١	$x = \cos \theta$	$P_1(x)$
٢	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1)$	$\frac{1}{3}(2P_2(x) + 1)$

٤- دالة "ليجندر" المرافقة كثيرة الحدود Associated Legendre Polynomials

المعادلة التفاضلية Differential equation

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right\} \right] P_n^m(x) = 0$$

تعريف Definition

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x); \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$P_n^0(x) = P_n(x), \quad P_n^{-m}(x) = P_n^m(x)$$

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x)$$

$$P_n^m(x) = 0 \quad \text{if } m > n$$

دالة مولدة Generating function

$$g(x, h) = (2m-1)!! \frac{(1-x^2)^{m/2} h^m}{(1-2xh+h^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n^m(x), \quad |h| < 1, \quad |x| \leq +1$$

علاقات ارتدادية Recurrence relations

$$(2n+1)xP_n^m(x) = (n+m)P_{n-1}^m(x) + (n-m+1)P_{n+1}^m(x);$$

$$(2n+1)\sqrt{1-x^2}P_n^m(x) = P_{n-1}^{m+1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x)(x);$$

علاقة التعامد Orthogonality relation

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_\ell^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \delta_{n\ell}$$

جدول لبعض القيم

m	n	$P_n^m(x)$
١	١	$\sqrt{1-x^2} = \sin \theta$
١	٢	$3x\sqrt{1-x^2} = 3\cos\theta\sin\theta$
٢	٢	$3(1-x^2) = 3\sin^2\theta$
١	٣	$\frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2} = \frac{3}{2}(5\cos^2\theta-1)\sin\theta$

٥- دالة "لاجير" كثيرة الحدود (Laguerre Polynomials $L_n(x)$)

المعادلة التفاضلية Differential equation

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} - (1-x) \frac{d}{dx} + n \right] L_n(x) = 0$$

تعريف Definition

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

دالة مولدة Generating function

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} L_n(x); \quad |t| < 1$$

علاقات ارتدادية Recurrence relations

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x);$$

$$x \frac{d}{dx} L_n(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

علاقة التعامد Orthogonality relation

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = (\Gamma(n+1))^2 \delta_{mn}$$

جدول لبعض القيم

n	$L_n(x)$	n	$L_n(x)$
٠	1	٢	$x^2 - 4x + 2$
١	$-x + 1$	٣	$-x^3 + 9x^2 - 18x + 6$

٦- دالة "لاجير" المرافقة لكثيرة الحدود (Associated Laguerre Polynomials $L_n^k(x)$)

المعادلة التفاضلية Differential equation

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} - (m+1-x) \frac{d}{dx} + (n-m) \right] L_n^k(x) = 0$$

تعريف Definition

$$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} [L_n(x)] \quad k, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$L_n^0(x) = L_n(x); \quad L_n^m(x) = 0 \quad \text{if } m > n$$

دالة مولدة Generating function

$$\frac{(-1)^m t^m}{(1-t)^{m+1}} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} L_n^m(x); \quad |t| < 1$$

علاقات ارتدادية Recurrence relations

$$\frac{(n-m+1)}{n+1} L_{n+1}^m(x) = (2n-m+1-x) L_n^m(x) - n^2 L_{n-1}^m(x);$$

$$x \frac{d}{dx} L_n^m(x) = (x-m) L_n^m(x) - (m-n-1) L_n^{m-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} L_n^m(x) = L_n^{m+1}(x)$$

علاقة التعمد Orthogonality relation

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{[\Gamma(n+1)]^3}{\Gamma(n-m+1)} \delta_{mn}$$

جدول لبعض القيم

$$L_0^k(x) = 1; \quad L_1^k(x) = -x + k + 1;$$

$$L_2^k(x) = \frac{x^2}{2} - (k+2)x + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$L_n^k(0) = \frac{(n+k)!}{n!k!}$$

n	m	$L_n^m(x)$	n	m	$L_n^m(x)$
١	١	١-	٣	١	$-3x^2 + 18x - 18$
٢	١	$2x - 4$	٣	٢	$-6x + 18$
٢	٢	2	٣	٣	-6

٧- دوال "بيسيل" من النوع الأول ($J_\ell(x)$ Bessel Functions of the First Kind)

المعادلة التفاضلية Differential equation

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \ell^2) \right] J_\ell(x) = 0, \quad \ell \geq 0$$

حلول هذه المعادلة تسمى دوال بيسيل من الدرجة ℓ .

تعريف Definition

$$J_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\ell+2k};$$

$$J_{-\ell}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\ell+2k}$$

$$J_{-\ell}(x) = (-1)^\ell J_\ell(x); \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

$J_\ell(x)$ تسمى دوال بيسيل من النوع الأول.

إذا كانت $\ell \neq 0, 1, 2, \dots$ نجد أن الدوال $J_\ell(x)$ و $J_{-\ell}(x)$ هي دوال خطية مستقلة، وتكون الدوال $J_\ell(x)$ محدودة عند نقطة الأصل، بينما تكون الدوال $J_{-\ell}(x)$ غير محدودة.

دالة مولدة Generating function

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t^\ell J_\ell(x)$$

علاقات ارتدادية Recurrence relations

$$J_{\ell+1}(x) = \frac{2n}{x} J_\ell(x) - J_{\ell-1}(x);$$

$$\frac{d}{dx} J_\ell(x) = \frac{1}{2} \{J_{\ell-1}(x) - J_{\ell+1}(x)\}$$

جدول لبعض القيم

ℓ	$J_\ell(x)$	$J_{-\ell}(x)$
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$
$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\sin x}{x} - \cos x \right]$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\cos x}{x} + \sin x \right]$
$\frac{5}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right\}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \cos x + \frac{3}{x} \sin x \right\}$

النوع الثاني من الدرجة ℓ تسمى دوال نيومان، التي تعرف كالتالي:

$$N_\ell(x) = \frac{1}{\pi} \left[2 \ln \frac{x}{2} + 2\gamma - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{k} \right] J_\ell(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(\ell-k+1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-\ell+2k};$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+\ell)! k!} \left\{ \sum_{r=1}^k \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+\ell} \right) \right\} \left(\frac{x}{2} \right)^{\ell+2k}$$

$$N_{-\ell}(x) = (-1)^\ell N_\ell(x); \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

وهي غير محدودة عند نقطة الأصل. الرمز γ هو ثابت "أويلر" ويعطى بالقيمة:

$$\gamma = 0.5772156649 = -\psi(1);$$

$$\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz}$$

التجميعات التالية:

$$H_\ell^{(1)} = J_\ell(x) + iN_\ell(x)$$

$$H_\ell^{(2)} = J_\ell(x) - iN_\ell(x)$$

تسمى دوال "هنكل" من النوع الأول والثاني بالترتيب.

٨- دوال "بيسيل" الكروية (Spherical Bessel Functions $j_\ell(x)$, $n_\ell(x)$)

دوال بيسيل الكروية هي حل المعادلة التفاضلية:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - \ell(\ell+1)] R = 0$$

الحل العام للمعادلة السابقة هو:

$$R(kr) = A_\ell j_\ell(kr) + B_\ell n_\ell(x)$$

حيث A_ℓ و B_ℓ ثوابت اختيارية ودوال بيسيل الكروية تعرف كالتالي:

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x)$$

$$n_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\ell+\frac{1}{2}}(x)$$

وتعرف أيضاً دوال هنكل الكروية كالتالي:

$$h_\ell^{(1)} = j_\ell(x) + in_\ell(x)$$

$$h_\ell^{(2)} = j_\ell(x) - in_\ell(x)$$

$$j_\ell(x) = (-x)^\ell \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^\ell \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

$$n_\ell(x) = -(-x)^\ell \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^\ell \left(\frac{\cos x}{x} \right)$$

جدول لبعض القيم

ℓ	$j_\ell(x)$	$n_\ell(x)$
٠	$\frac{\sin x}{x}$	$-\frac{\cos x}{x}$
١	$\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$	$-\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$
٢	$\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$	$-\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x$

السلوك التقاربي عندما $x \rightarrow 0$ و $x \rightarrow \infty$ هو

الشرط	$j_\ell(x)$	$n_\ell(x)$
$x \rightarrow 0$	$\frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!}$	$\frac{(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}}$
$x \rightarrow \infty$	$\frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\ell\right)$	$-\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\ell\right)$

حيث $(2\ell+1)!! = (2\ell+1)(2\ell-1)(2\ell-3)\cdots 4\cdot 3\cdot 1$

٩- دالة التوافقيات الكروية (Spherical Harmonic Function $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$)

لأي جهد كروي التماثل، $[V = V(r)]$ ، نجد أن الدالة الكلية تأخذ الشكل

$R_{n,\ell}(r)Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ ، حيث $R_{n,\ell}(r)$ تعرف بأنها الجزء القطري للدالة و $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ تعرف

بأنها الدالة التوافقية الكروية.

تعريف Definition

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!} \right]^{1/2} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}; \quad m \geq 0$$

$$Y_{\ell,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell,m}^*(\theta, \varphi);$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -\ell, -\ell+1, \dots, +\ell$$

المعادلة التفاضلية Differential equation

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell+1) \right] Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = 0$$

علاقة التعامد Orthogonality relation

$$\langle \ell m | \ell' m' \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{\ell, m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell', m'}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}$$

جدول لبعض القيم

l	m	$Y_{lm}(\theta, \varphi)$
٠	٠	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
١	٠	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
١	± 1	$\mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i \varphi}$
٢	٠	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
٢	± 1	$\mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i \varphi}$
٢	± 2	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i \varphi}$

علاقات ارتدادية Recurrence relations

$$\begin{aligned} \cos \theta Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) &= \left[\frac{(\ell+1+m)(\ell+1-m)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \right]^{1/2} Y_{\ell+1, m}(\theta, \varphi) \\ &+ \left[\frac{(\ell+m)(\ell-m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)} \right]^{1/2} Y_{\ell-1, m}(\theta, \varphi); \\ \sin \theta Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) &= \left[\frac{(\ell+1-m)(\ell+2-m)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \right]^{1/2} Y_{\ell+1, m-1}(\theta, \varphi) \\ &+ \left\{ \left[\frac{(\ell+m)(\ell+m-1)}{(2\ell+1)(2\ell-1)} \right]^{1/2} Y_{\ell-1, m-1}(\theta, \varphi) \right\} e^{i \varphi} \end{aligned}$$

واجب منزلي: تحقق من أن:

$$Y_{l,0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

مثال: تحقق من الآتي:

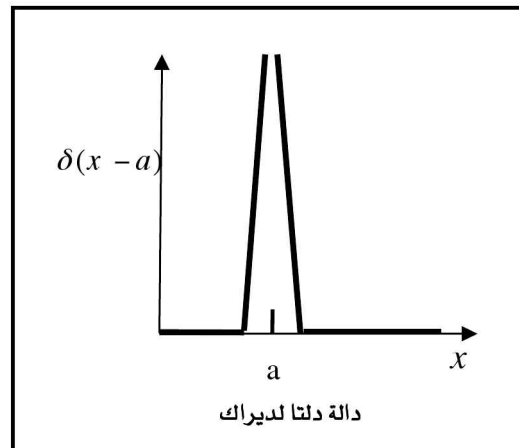
الحل:

$$\begin{aligned} Y_{3,0} &= \sqrt{\frac{7}{4\pi}} P_3(\cos \theta) = \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \frac{1}{2} (5\cos^2 \theta - 3\cos \theta) \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} \cos \theta (5\cos \theta - 3) \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} \frac{z}{r} (5\frac{z^2}{r} - 3) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} \frac{z}{r^3} (5z^2 - 3r^2) \end{aligned}$$

واجب منزلي: تحقق من الآتي:

$$\begin{aligned} \psi &= x + iy = r \sin \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \sin \theta e^{i\varphi} \\ &= -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} r Y_{1,1} \end{aligned}$$

١٠- دالة دلتا لديراك (Dirac Delta Function $\delta(x)$)



هذه ليست دالة بالمعنى المتعارف عليه رياضياً، ولهذا فهي تسمى توزيعاً وأيضاً دالة نبضية (Impulse function). وهي تستخدم للدوال المتصلة وتعرف كالتالي:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ \infty, & x = a \end{cases}, \quad (1)$$

لها الخواص التالية (في بعد واحد):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1 \quad (2)$$

ومن المعادلة (٢) نستطيع حساب التكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (3)$$

وتأخذ الدالة دلتا صوراً وأشكالاً أخرى ولكن المعادلات ١، ٢، ٣ تكفي لدراستنا.

بعض الخواص الهامة:

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad \text{دالة زوجية it is an even function}$$

$$\delta^*(x) = \delta(x) \quad \text{it is a real function}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \quad \text{صفة المعايرة It is normalized}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\frac{d^2|x|}{dx^2} = 2\delta(x)$$

ملحق (C)

تكامل كولم

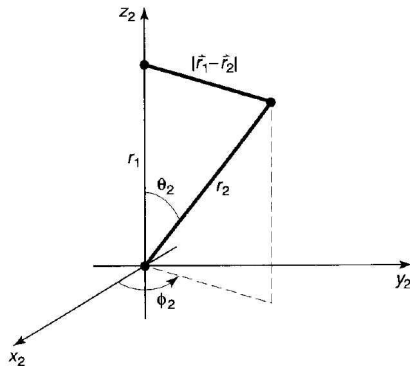
في هذا الملحق سنستعرض تكامل كولم $I(Z)$ ونثبت أن:

$$(i) \quad I(Z) = \int \int \psi_{1s}^*(r_1) \psi_{1s}^*(r_2) \frac{1}{|r_2 - r_1|} \psi_{1s}(r_1) \psi_{1s}(r_2) dr_1 dr_2 = \frac{5}{8} Z$$

حيث $\psi_{1s}(r_i) = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi}} e^{-Zr_i}$ هي الدالة المميزة لإلكترون ذرة الهيدروجين بالمستوى الأرضي. مع ملاحظة أن $dr_i = r_i^2 dr_i d\Omega_i = r_i^2 \sin \theta_i d\theta_i d\phi_i dr_i$. هذا التكامل يمثل طاقة التفاعل بين إلكترون ذرة الهليوم، وذلك بفرض أنهم موزعون بكثافة كهربية تُعطى بالعلاقات:

$$(ii) \quad \begin{aligned} \rho_1 &= -e\psi_{1s}^*(r_1)\psi_{1s}(r_1) = -e|\psi_{1s}(r_1)|^2, \\ \rho_2 &= -e\psi_{1s}^*(r_2)\psi_{1s}(r_2) = -e|\psi_{1s}(r_2)|^2 \end{aligned}$$

حساب تكامل كولم يعد من المسائل الرياضية الصعبة نتيجة وجود الحد $\frac{1}{|r_2 - r_1|}$ ومن ثم لا نستطيع فصل المتغيرات. القارئ المبتدئ عليه أن يكتفي بالنتيجة (١) إذا لم تكن خلفيته الرياضية تسمح له بالتكلمة.



دعونا نبدأ بتعريف الإزاحة بالصورة:

$$|r_2 - r_1| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}$$

حيث $\theta = \theta_2$ هي الزاوية بين المتجهين r_1 و r_2 (انظر الشكل المرافق). يمكن اعتبار المتجه r_1 باتجاه المحور z_2 ويكون التكامل على الزاوية θ_1 بسيط. التكامل بالمعادلة (١) يمكن وضعه بالصورة:

$$I = \frac{Z^6}{\pi^2} \int_0^\infty e^{-2Zr_1} r_1^2 dr_1 \int_0^\infty e^{-2Zr_2} r_2^2 dr_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\Omega_1}_{4\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi_2}_{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos\theta}}$$

$$= 8Z^6 \int_0^\infty e^{-2Zr_1} r_1^2 dr_1 \int_0^\infty e^{-2Zr_2} r_2^2 dr_2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos\theta}}$$

وباستخدام التعويض $x = \cos\theta$ ولذا $dx = \sin\theta d\theta$ نجد التكامل على الزاوية θ يعطي:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos\theta}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2xr_1r_2}} = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2xr_1r_2}}{r_1r_2} \Big|_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{1}{r_1r_2} \left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2} - \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2} \right)$$

$$= \frac{1}{r_1r_2} \left((r_1 + r_2) - |r_1 - r_2| \right) = \begin{cases} \frac{2}{r_1}, & r_1 > r_2 \\ \frac{2}{r_2}, & r_2 > r_1 \end{cases}$$

ومنه نجد أن:

$$I = 16Z^6 \int_0^\infty e^{-2Zr_1} r_1^2 dr_1 \left[\underbrace{\int_0^{r_1} e^{-2Zr_2} r_2^2 dr_2}_{I_1} + \underbrace{\int_{r_1}^\infty e^{-2Zr_2} r_2^2 dr_2}_{I_2} \right]$$

حيث التكاملات:

$$I_1 = \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} e^{-2Zr_2} r_2^2 dr_2 = \frac{1}{4Z^3 r_1} \left\{ e^{-2Zr_1} (-1 - 2Zr_1 - 2Z^2 r_1^2) + 1 \right\},$$

$$I_2 = \int_{r_1}^\infty e^{-2Zr_2} r_2^2 dr_2 = \frac{e^{-2Zr_1}}{4Z^2} (1 + 2Zr_1)$$

وأخيراً:

$$I = 16Z^6 \int_0^\infty e^{-2Zr_1} r_1^2 dr_1 \left[\frac{e^{-2Zr_1}}{4Z^3 r_1} (-1 + e^{2Zr_1} - r_1 Z) \right] = 4Z^3 \int_0^\infty e^{-4Zr_1} (-1 + e^{2Zr_1} - r_1 Z) r_1 dr_1$$

$$= 4Z^3 \left(\frac{5}{32Z^2} \right) = \frac{5}{8} Z$$

ملحق (D)

جدول للتفاضلات البسيطة

في الجدول التالي الحروف u و v تستخدم كدوال في المتغير x . الحروف a, b, \dots و m, n, \dots تستخدم كثوابت و $i = \sqrt{-1}$.

$\frac{da}{dx} = 0$	$\frac{d}{dx} \cos(u) = -\sin(u) \frac{du}{dx}$
$\frac{dx}{dx} = 1$	$\frac{d}{dx} \cos(ax) = -a \sin(ax)$
$\frac{d}{dx} (au) = a \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \ln(u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} ax^n = nax^{n-1}$	$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$
$\frac{d}{dx} \sin(u) = \cos(u) \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} e^{ax^2} = 2axe^{ax^2}$
$\frac{d}{dx} \sin(ax) = a \cos(ax)$	

ملحق (E)

متطابقات رياضية عامة

$\sin \theta \pm \sin \varphi = 2 \left[\sin\left(\frac{\theta \pm \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta \mp \varphi}{2}\right) \right]$	$\sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad \cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$
$\sin \theta + \cos \varphi = 2 \left[\cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \right]$	<p>Series expansion</p>
$\cos \theta - \cos \varphi = -2 \left[\sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \right]$	$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \dots, \quad x < 1,$
$\sin \theta \sin \varphi = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)]$	$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{n}{1!}x + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 \mp \dots, \quad x < 1,$
$\cos \theta \cos \varphi = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)]$	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x < 1$
$\sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{2} [\sin(\theta - \varphi) + \sin(\theta + \varphi)]$	$e^{ a } = \sum_n \frac{ a ^n}{n!}$
$\sin(\theta \pm \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \pm \cos \theta \sin \varphi$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad x < 1$
$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos \theta \cos \varphi \mp \sin \theta \sin \varphi$	$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad x < 1,$
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad x < 1,$
$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$	$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots, \quad x < 1,$
$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$	
$= 2 \cos^2 \theta - 1$	
$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta, \quad i = \sqrt{-1}$	
$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$	

ملحق (F)

جدول التكاملات المستخدمة

في الجداول التالية يجب إضافة ثابت التكامل لجميع التكاملات غير المحددة.

$\int dx = x$	$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln(x)$
$\int adx = ax$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$
$\int a.f(x)dx = a \int f(x)dx$	$\int e^x dx = e^x$
$\int (u+v)dx = \int udx + \int vdx$	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
$\int u dv = u \int dv - \int v du = uv - \int v du$	$\int b^{ax} dx = \frac{1}{a \ln(b)} b^{ax}; \quad b > 0$
$\int \cos(a\theta)d\theta = \frac{1}{a} \sin a\theta$	$\int \ln(x)dx = x \ln(x) - x$
$\int \sin(a\theta)d\theta = -\frac{1}{a} \cos a\theta$	$\int a^x \ln(a)dx = a^x; \quad a > 0$

تكامل من النوع $\int x^n e^{-ax} dx$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad n > 1, 2, 3, \dots, \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \quad \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}, \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} dx = \frac{2}{a^3}$$

تكامل من النوع $\int x^n e^{-ax^2} dx$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}, \quad n > 1, 2, 3, \dots, \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad n > 1, 2, 3, \dots, \quad a > 0$$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$\int_0^{\infty} xe^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$
$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$
$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{4a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$\int_0^{\infty} x^5 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{a^3}$

تكامل من النوع $\int f(\theta) \sin^2 \theta d\theta$ و $\int f(\theta) \cos^2 \theta d\theta$

$\int_0^x \sin^2(a\theta) d\theta = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$	$\int_0^x \cos^2(a\theta) d\theta = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
$\int_0^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$	$\int_0^{\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$
$\int_0^{\pi} \theta \sin^2(\theta) d\theta = \frac{\pi^2}{4}$	$\int_0^{\pi} \theta \cos^2(\theta) d\theta = \frac{\pi^2}{4}$
$\int_0^{\pi} \theta^2 \sin^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{12} (-3 + 2\pi^2)$	$\int_0^{\pi} \theta^2 \cos^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{12} (3 + 2\pi^2)$
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} d\theta = \pi$	$\int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2(\theta) d\theta = \frac{2}{3}$

تكامل من النوع $\int f(\theta) \sin(ma\theta) d\theta$

$$\int_0^x \sin(a\theta) \sin(2a\theta) d\theta = \frac{\sin(ax)}{2a} - \frac{\sin(3ax)}{6a},$$

$$\int_0^x \cos(a\theta) \cos(2a\theta) d\theta = \frac{\sin(ax)}{2a} + \frac{\sin(3ax)}{6a}$$

$$\int_0^x \sin(a\theta) \sin(ma\theta) d\theta = \frac{\sin[(m-1)ax]}{2a(m-1)} - \frac{\sin[(m+1)ax]}{2a(m+1)},$$

$$\int_0^x \cos(a\theta) \cos(ma\theta) d\theta = \frac{\sin[(m-1)ax]}{2a(m-1)} + \frac{\sin[(m+1)ax]}{2a(m+1)}$$

تكامل من النوع $\int_0^{\infty} \frac{x^m}{(x^2 + a^2)^n} dx$

$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a}$	$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2a^2}$
$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3}$	$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a}$
$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^4} dx = \frac{5\pi}{32a^7}$	$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^4} dx = \frac{\pi}{32a^5}$

تكامل من النوع $\int x^n \sin^2 x dx$

n	$\int x^n \sin^2 x dx$
١	$\frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$
٢	$\frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right) \sin 2x - \frac{x \cos 2x}{4}$
٣	$\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} - \frac{x^4}{8} - \left(\frac{x^3}{4} - \frac{3x}{8}\right) \sin 2x - \left(\frac{3x^2}{8} - \frac{3}{16}\right) \cos 2x$

تكامل من النوع $\int x^n \cos x dx$

n	$\int x^n \cos x dx$
١	$\cos x + x \cos x$
٢	$2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$
٣	$(3x^2 - 6) \cos x - (x^3 - 6x) \sin x$

تكامل من النوع $\int \sin^n x \, dx$

m	$\int \sin^m x \, dx$
٢	$\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}$
٣	$\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$
٤	$\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$
٥	$-\frac{5 \cos x}{8} + \frac{5 \cos 3x}{48} - \frac{\cos 5x}{80}$
٦	$\frac{5x}{16} - \frac{15 \sin 2x}{64} + \frac{3 \sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192}$
٧	$-\frac{35 \cos x}{64} + \frac{7 \cos 3x}{64} - \frac{7 \cos 5x}{320} + \frac{\cos 7x}{448}$

تكامل من النوع $\int x^n \sin x \, dx$

$$\int x^m \sin x \, dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x \, dx.$$

m	$\int x^m \sin x \, dx$
١	$\sin x - x \cos x$
٢	$2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$
٣	$(3x^2 - 6) \sin x - (x^3 - 6x) \cos x$
٤	$(4x^3 - 24x) \sin x - (x^4 - 12x^2 + 24) \cos x$
٥	$(5x^4 - 60x^2 + 120) \sin x - (x^5 - 20x^3 + 120) \cos x$
٦	$(6x^5 - 120x^3 + 720x) \sin x - (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720) \cos x$

وهناك أيضاً بعض التكاملات القياسية المهمة التالية:

مع ملاحظة أن $d\mathbf{r}_i = r_i^2 \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_i dr_i$ و $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = qr \cos \theta$ حيث تنحصر قيم نهايات التكامل بين القيم التالية: $\varphi = \{0, 2\pi\}$ و $\theta = \{0, \pi\}$ و $r = \{0, \infty\}$.

$$I_1 = \int \frac{e^{-br \pm iq \cdot \mathbf{r}}}{r} d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{b^2 + q^2};$$

$$I_2 = \int e^{-br \pm iq \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = -\frac{\partial I_1}{\partial b} = \frac{8\pi b}{(b^2 + q^2)^2};$$

$$I_3 = \int \frac{e^{\pm iq \cdot \mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{q^2} e^{\pm iq \cdot \mathbf{r}'}$$

$$I_4 = \iint \frac{e^{-2b(r_1+r_2)}}{r_1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = \iint \frac{e^{-2b(r_1+r_2)}}{r_2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = \frac{\pi^2}{b^5}$$

$$I_5 = \iint \frac{e^{-2b(r_1+r_2)}}{r_{12}} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = \frac{5\pi^2}{8b^5}, \quad r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$

$$I_6 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^2 + \tau^2} dt = \frac{\pi}{\tau} e^{-\omega\tau}$$

$$I_7 = \left| \int e^{-br + i\omega r} dr \right|^2 = \frac{1}{b^2 + \omega^2}$$